



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

دانشگاه گنبدکاووس، ۱۰ اسفند ۱۴۰۲

مجموعه مقالات همایش (فارسی)

دبیر علمی

دکتر اسماعیل شیرازی

دبیر اجرایی

دکتر عبدالسعید توماج

دکتر مجتبی کاشانی

تهیه و تنظیم

دکتر مهدی شاهینی

فهرست مطالب

۱	نامساوی کالبوت برای ماتریس های قطعه ای
۸	برخی ویژگی از عملگر ترکیبی وزن دار روی فضاهای لورنتس
۱۲	توابع محدب و p -محدب و h -محدب
۱۶	توپولوژی القائی و عملگرهای پیچشی روی دوگان توابع پیوسته یکنواخت چپ
۲۰	بررسی توابع محدب میانی ولگاریتم محدب
۲۳	بعضی نتایج درباره ی داشتن خاصیت فردهلم عملگرهای \mathbb{R}^n روی فضاهای اورلیچ
۳۰	یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با مشتق کسری زمانی
۴۱	حل عددی -تحلیلی معادله کان-هیلیارد با مشتق کسری زمانی
۵۰	حل مسئله کمترین مربعات با زبان برنامه نویسی پایتون
۵۶	کاربرد مسئله کمترین مربعات در یادگیری ماشین
۶۳	کاوش در داده های بورس اوراق بهادار تهران در دوره شیوع کووید-۱۹: تحلیل اثرات با روش های هوش مصنوعی
۶۸	توزیع مجانبی شاخص نابرابری جدید بر اساس نسبت چندکها
۷۲	معرفی یک تعمیم از توزیع لگ نرمال در برازش به داده های درآمد
۷۶	برآورد آستانه بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر
۸۶	به دست آوردن توابع زبان در یادگیری عمیق با استفاده از روش حداکثر درستنمایی
۹۳	توزیع گوسی معکوس به عنوان توزیع احتمال زمان اولین گذر در حرکت براونی
۹۹	مروری بر روش آستانه سازی دو تایی در برآورد تابع چگالی احتمال
۱۰۴	انواع روش های برآورد پارامتر چولگی در توزیع چوله نرمال
۱۱۰	بیان ساده ای از ضریب جینی
۱۱۶	برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از تابع مفصل زمان - متغیر
۱۲۹	یکدستی روی لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته با محدودیت روی بعد
۱۳۳	نتایجی از لوکال d -کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته روی هم ریختی مدولی
۱۳۶	ریخت های یکدست گرنشتاین فانتوم
۱۳۸	مدول های شبه دوگان روی حلقه گروهها
۱۴۰	بعد کوهمولوژی گرنشتاین
۱۴۲	مدولهای با بعد تصویری گرنشتاین منتهای
۱۴۵	بعد تصویری مدول های یکدست منتهای
۱۴۸	رسته پایدار رسته های فربنیوس
۱۵۳	ریخت های فانتوم از بعد بالا نسبت به یک زیرتابعگون از Ext
۱۵۵	گروهها با گراف ناجابحایی متقارن
۱۵۷	بررسی گروه های $(n + \frac{1}{2})$ -انگل
۱۵۹	زیرمجموعه های غیرپوچ توان در گروه های سوزوکی
۱۶۱	بررسی و تحلیل کاربرد هندسه فراکتال در معماری
۱۶۵	میدان های برداری ژاکوبی گونه
۱۶۹	پایایی نگاشتهای \mathbb{R}^n هارمونیک روی منیفلدهای فینسلری
۱۷۴	خاصیت نقاط تقاطع وترهایی که با شعاع دایره زاویه 30° می سازند
۱۷۸	مروری بر مدل سازی ریاضی سرطان
۱۸۴	انواع جواب های سالیوتونی جدید برای معادله کوندو-اسخائوس
۱۹۳	یک روش گرادیان مزدوج کارآمد با خاصیت همگرایی قوی برای بهینه سازی ناهموار
۲۰۱	یک روش نقطه درونی بهبود یافته برای مساله کمترین مربعات نامنفی
	بکارگیری تصمیم گیری چندمعیاره در زنجیره تولید صنایع غذایی به منظور شناخت ریسک های پرخطر - مطالعه موردی (واحدهای
۲۱۰	صنایع غذایی لبنی استان گلستان)
۲۱۷	عملیات حسابی روی مجموعه اعداد فازی دوزنقه ای فیثاغورثی

- ۲۲۰ ارایه یک روش برای حل برنامه ریزی خطی تماما فازی دوزنقه‌های فیثاغورثی با قیود تساوی و متغیرهای نامنفی
- ۲۲۵ قیمت‌گذاری اختیار معامله روی اوراق قرضه تحت مدل HJM با فرایند لوی در بازار اوراق بهادار تهران
- ۲۳۱ ارزیابی و مدیریت اضطراب دانش آموزان در درس ریاضی
- ۲۳۵ تاثیر فناوری در آموزش ریاضی
- ۲۳۹ ارتباط بین موقعیت مکانی مدرسه با نگرش دانش آموزان نسبت به دروس پایه و تاثیر آن در پیشرفت تحصیلی آنها
- ۲۴۳ ایجاد انگیزه آموزشی در دانش آموزان مقطع ابتدایی و تاثیر آن بر جهت گیری اهداف آنها
- ۲۴۷ تاثیر دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳
- ۲۵۹ اثربخشی نقش همیار معلم بر خودباوری و انگیزه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳
- ۲۷۴ بررسی تاثیر ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش آموزان متوسطه اول پایه نهم شهرستان شهرکرد در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳
- ۲۷۹ ایجاد تفکر فراشناخت در درس ریاضی از طریق آموزش حل مسایل برای دانش آموزان متوسطه دوم
- ۲۸۲ بررسی تاثیر آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله در یادگیری خودراهبر و مفاهیم ریاضی دانش آموزان با استفاده از آزمون لون و کوواریانس چند متغیری
- ۲۸۸ ارتباط هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی دانش آموزان مقطع ابتدایی
- ۲۹۳ شناسایی دیدگاه های دانش آموزان درباره مدرسه و کلاس درس ریاضی
- ۲۹۹ اثربخشی الگوی کلاس معکوس بر میزان پیشرفت تحصیلی فراگیران در درس ریاضی



نامساوی کالبوت برای ماتریس های قطعه ای

سمیه ملکی نژاد^{*}، حمیده محمدزاده کان^ب

^اگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
^بگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: ماتریس قطعه ای میانگین عملگری نامساوی کالبوت	نامساوی کالبوت، یک نامساوی جالب برای ماتریس های مثبت می باشد که با وجود دلخواه بودن میانگین عملگری σ کران دو طرفه بر حسب $\#$ بیان می کند. در این مقاله بر روی ماتریس های قطعه ای مطالعه کرده و با استفاده از نامساوی کالبوت، برای هر نگاشت خطی مثبت Φ و هر میانگین عملگری σ نامساوی دوطرفه زیر را به اثبات رسانده و نتایج مفیدی برای میانگین عملگری متعامد دلخواه بدست آورده ایم. به طور مثال اگر فرض کنیم $A_i, B_i \in \delta_\alpha$ باشند به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$. در این صورت برای هر نگاشت خطی مثبت Φ و هر میانگین عملگری σ داریم
2020 MSC: 47A63 47A64 15B48	$\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i \# B_i)\right) \leq \sec^\alpha(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma \mathcal{R}(\Phi(B_i))\right) \# \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma^\perp \mathcal{R}(\Phi(B_i))\right)$ $\leq \sec^\alpha(\alpha) \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \# \sum_{i=1}^n \Phi(B_i)\right).$
	همچنین نامساوی جدیدی برای ماتریس های قطعه ای میانگین عملگری دلخواه σ و $\#$ دست یافته ایم که برخی نتایج آنها، توسیعی از نامساوی های مشهور می باشند.

۱. مقدمه

فرض کنیم M_n مجموعه تمام ماتریس های مختلط $n \times n$ باشد. هر ماتریس $A \in M_n$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$A = \mathcal{R}A + i\mathcal{I}A,$$

که در آن $\mathcal{R}A = \frac{A+A^*}{2}$ و $\mathcal{I}A = \frac{A-A^*}{2i}$. این تجزیه A ، به تجزیه کارترین^۱ معروف می باشد که در آن $\mathcal{R}A$ و $\mathcal{I}A$ به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی A می باشند. اگر A خودالحاق^۲ باشد به عبارت دیگر $A = A^*$ ، می گوئیم A نیمه معین مثبت^۳ است اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{C}^n$

^{*}سخنران

پست الکترونیک: maleki60313@pnu.ac.ir (سمیه ملکی نژاد)، h_mohamadzadeh@pnu.ac.ir (حمیده محمدزاده کان)

^۱Cartesian^۲self-adjoint^۳positive semidefinite

$\langle Ax, x \rangle \geq 0$ و A معین مثبت^۴ است اگر A نیمه معین مثبت و معکوس پذیر باشد. برای ماتریس های خودالحاق $A, B \in \mathbb{M}_n$ هرگاه $B - A$ نیمه معین مثبت باشد، می نویسیم $A \leq B$ یا $B \geq A$ و مجموعه تمام ماتریس های معین مثبت را با \mathbb{M}_n^+ نشان می دهیم. تابع $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع یکنوای ماتریسی^۵ می نامیم اگر حافظ رابطه ترتیبی ماتریسی باشد به عبارت دیگر برای ماتریس های خودالحاق A و B که طیف آن ها در بازه J قرار دارد، اگر $A \leq B$ آنگاه $f(A) \leq f(B)$.

میانگین عملگری^۶ σ روی عملگرهای معکوس پذیر مثبت، یک عمل دو تایی $A\sigma B$ است با شرایط زیر:

$$A\sigma B \leq C\sigma D;$$

.۲

$$C^*(A\sigma B)C = (C^*AC)\sigma(C^*BC);$$

۳. اگر $A \downarrow_k A$ و $B \downarrow_k B$ آنگاه $A\sigma B \downarrow_k A\sigma B$ ؛ برای هر $A, B, A_k, B_k \in \mathbb{M}_n^+$

۴. $I\sigma I = I$

اگر $A, B \in \mathbb{M}_n$ معکوس پذیر باشند، آنگاه بنا به قضیه کوبو-آندو^۷ [۱۲] تابع یکنوای عملگری f روی $[0, \infty)$ وجود دارد به طوری که

$$A\sigma B = A \overset{\downarrow}{\uparrow} f \left(A \overset{-\downarrow}{\uparrow} B A \overset{-\downarrow}{\uparrow} \right) A \overset{\downarrow}{\uparrow}. \quad (۱)$$

برخی میانگین های عملگری معروف دو عملگر A و B عبارتند از میانگین حسابی $-p$ وزن دار^۸، میانگین هارمونیک $-p$ وزن دار^۹، میانگین هندسی $-p$ وزن دار^{۱۰} و میانگین هاینتز $-p$ وزن دار^{۱۱} که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A\nabla_p B := (1-p)A + pB \quad (آ)$$

$$A!_p B := ((1-p)A^{-1} + pB^{-1})^{-1} \quad (ب)$$

$$A\#_p B := A \overset{\downarrow}{\uparrow} (A \overset{-\downarrow}{\uparrow} B A \overset{-\downarrow}{\uparrow})^p A \overset{\downarrow}{\uparrow} \quad (ج)$$

$$.H_p(A, B) := \frac{A\#_p B + A\#_{1-p} B}{2} \quad (د)$$

هرگاه $p = \frac{1}{2}$ ، آنگاه برای راحتی آنها را با $A\nabla B$ ، $A!B$ و $A\#B$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم $A, B \in \mathbb{M}_n$ معکوس پذیر و σ یک میانگین عملگری با تابع نمایشی f باشد.

(الف) میانگین عملگری با تابع نمایشی $(f(t^{-1}))^{-1}$ ، الحاق^{۱۲} σ نامیده شده و با علامت σ^* نشان داده می شود که بنا به (۱) به صورت زیر قابل تعریف است:

$$A\sigma^* B = (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}.$$

(ب) میانگین عملگری با تابع نمایشی $tf(t^{-1})$ ، ترانهاده^{۱۳} σ نامیده شده و با علامت σ° نشان داده می شود که بنا به (۱) به صورت زیر قابل تعریف است:

$$A\sigma^\circ B = B\sigma A.$$

اگر $\sigma = \sigma^\circ$ ، آنگاه میانگین عملگری σ متقارن^{۱۴} نامیده می شود.

(ج) میانگین عملگری با تابع نمایشی $\frac{t}{f(t)}$ ، دوگان^{۱۵} σ نامیده شده و با علامت σ^\perp نشان داده می شود که بنا به (۱) به صورت زیر قابل

⁴ positiv definite

⁵ matrix monotone function

⁶ operator mean

⁷ Kubo-Ando

⁸ p -weighted arithmetic mean

⁹ p -weighted Harmonic mean

¹⁰ p -weighted geometric mean

¹¹ p -weighted Hienz mean

¹² adjoint

¹³ transpose

¹⁴ symmetric

¹⁵ dual

تعریف است:

$$A\sigma^\perp B = (B^{-1}\sigma A^{-1})^{-1}.$$

اگر $\sigma = \sigma^\perp$ ، آنگاه میانگین عملگری σ ، متعامد^{۱۶} نامیده می شود.

به طور مثال الحاق میانگین حسابی، میانگین هارمونیک می باشد یعنی $\nabla^* = !$ و میانگین هندسی خود الحاق و متعامد است یعنی $\#^* = \#$ و $\#^\perp = \#$. عمل الحاق و دوگان همپیچی^{۱۷} می باشند به عبارتی $\sigma = (\sigma^*)^*$ و $(\sigma^\perp)^\perp = \sigma$. بنا به تعریف ۱.۱ داریم

$$\sigma^\perp = (\sigma^\circ)^* = (\sigma^*)^\circ$$

و

$$\sigma^\circ = (\sigma^*)^\perp = (\sigma^\perp)^*.$$

بنابراین $\#_p^\circ = \#_{1-p}$ و $\#_p^* = \#_p$. برای مطالعه بیشتر درباره میانگین های عملگری به [۱۲] مراجعه نمایید. ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را گسترشی^{۱۸} می نامیم هرگاه در تجزیه کارترین، $\Re A \geq \circ$. برد عددی^{۱۹} $A \in \mathbb{M}_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

یک ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را قطعه ای می نامیم اگر $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ثابتی وجود داشته باشد بطوریکه $W(A) \subset \mathcal{S}_\alpha$ و می نویسیم $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، که در آن \mathcal{S}_α ناحیه قطعه ای^{۲۰} در صفحه مختلط است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{S}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > \circ, |Jz| \leq (\Re z) \tan \alpha\}.$$

میانگین عملگری برای دو ماتریس قطعه ای $A, B \in \mathbb{M}_n$ ، توسط بدرانی و همکاران [۲] به صورت زیر تعریف شده است:

$$A\sigma_f B = \int_0^1 A!B dv_f(s),$$

بعلاوه، آنها تابع یکنوای عملگری را برای ماتریس قطعه ای $A \in \mathcal{S}_\alpha$ ، به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$f(A) = \int_0^1 ((1-s)I + sA^{-1})^{-1} dv_f(s),$$

که در آن $f: (\circ, \infty) \rightarrow (\circ, \infty)$ ، $f(1) = 1$ و همچنین v_f یک اندازه احتمال است به طوری که

$$f(x) = \int_0^1 ((1-s)I + sx^{-1})^{-1} dv_f(s).$$

در این مقاله برای راحتی از نماد زیراستفاده خواهیم کرد:

$\mathbf{m} = \{f : (\circ, \infty) \rightarrow (\circ, \infty) \mid f(1) = 1\}$ که f یک تابع یکنوای عملگری می باشد به طوری که

بدرانی و همکارانش [۲] نشان دادند هرگاه $A \in \mathcal{S}_\alpha$ و $f \in \mathbf{m}$ ، آنگاه

$$f(\mathcal{R}(A)) \leq \mathcal{R}(f(A)) \leq \sec^\vee(\alpha) f(\mathcal{R}(A)). \quad (۲)$$

لم ۲.۱. [۲] فرض کنیم $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ماتریس های قطعه ای باشند. در این صورت

$$\mathcal{R}A\sigma\mathcal{R}B \leq \mathcal{R}(A\sigma B) \leq \sec^\vee \alpha (\mathcal{R}A\sigma\mathcal{R}B).$$

¹⁶orthogonal

¹⁷involution

¹⁸accretive

¹⁹numerical rang

²⁰sector region

آندو [۱] خاصیت زیر را برای یک نگاشت خطی مثبت و میانگین عملگری به اثبات رسانده است.

لم ۳.۱. فرض کنیم $A, B \in \mathbb{M}_n$ معین مثبت و Φ یک نگاشت خطی مثبت دلخواه باشد. در این صورت

$$\Phi(A\sigma B) \leq \Phi(A)\sigma\Phi(B).$$

به ویژه برای میانگین هندسی وزن دار داریم:

$$\Phi(A\#_p B) \leq \Phi(A)\#_p\Phi(B),$$

که در آن $p \in [0, 1]$.

فرض کنیم Φ یک نگاشت خطی مثبت باشد. اگر $A \in \mathcal{S}_\alpha$ و $A \in \mathbb{M}_n$ آنگاه $\Phi(\mathcal{R}(A)) = \mathcal{R}(\Phi(A))$ و $\Phi(A) \in \mathcal{S}_\alpha$. در صورت گسترشی بودن $A \in \mathbb{M}_n$ ، $\Phi(A)$ نیز گسترشی می باشد. (لم ۱۴، [۱] برای مطالعه بیشتر درباره ماتریس های قطعه ای به [۲-۱۰، ۱۳] مراجعه نمایید.

در سال ۲۰۱۲ صال مصلحیان و همکارانش [۱۱] نامساوی های کالبوت^{۲۱} را برای ماتریس های معین مثبت اثبات کردند که در لم های زیر به آنها اشاره کرده ایم.

نخستین نامساوی کالبوت در لم زیر آمده است:

لم ۴.۱. ([۱۱]) فرض کنیم $A_i, B_i \in \mathbb{M}_n$ ماتریس های مثبتی باشند به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$ در این صورت برای هر میانگین عملگری σ داریم

$$\sum_{i=1}^n A_i \# B_i \leq \left(\sum_{i=1}^n A_i \sigma B_i \right) \# \left(\sum_{i=1}^n A_i \sigma^\perp B_i \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \# \left(\sum_{i=1}^n B_i \right). \quad (۳)$$

نامساوی بیان شده درلم زیر دومین نامساوی کالبوت می باشد:

لم ۵.۱. ([۱۱]) فرض کنیم $A_i, B_i \in \mathbb{M}_n$ ماتریس های مثبتی باشند به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (A_i \# B_i) \otimes \sum_{i=1}^n (A_i \# B_i) &\leq \sum_{i=1}^n (A_i \#_s B_i) \otimes \sum_{i=1}^n (A_i \#_{1-s} B_i) + \sum_{i=1}^n (A_i \#_{1-s} B_i) \otimes \sum_{i=1}^n (A_i \#_s B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (A_i \#_t B_i) \otimes \sum_{i=1}^n (A_i \#_{1-t} B_i) + \sum_{i=1}^n (A_i \#_{1-t} B_i) \otimes \sum_{i=1}^n (A_i \#_t B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n A_i \otimes \sum_{i=1}^n B_i + \sum_{i=1}^n B_i \otimes \sum_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$

برای $\frac{1}{t} \leq s \leq t \leq 1$ یا $0 \leq t \leq s \leq \frac{1}{t}$.

۲. نتایج اصلی

ابتدا در قضیه زیر توسیعی از نامساوی (۳) را بیان و اثبات میکنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $A_i, B_i \in \mathcal{S}_\alpha$ باشند به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$. در این صورت برای هر نگاشت خطی مثبت Φ و هر میانگین عملگری σ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i \# B_i) \right) &\leq \sec^\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \# \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma^\perp \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \\ &\leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R} \left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \# \sum_{i=1}^n \Phi(B_i) \right). \end{aligned}$$

²¹Callebaut inequality

اثبات. بنا به (۳) و لم های ۳.۱ و ۲.۱ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i \# B_i)\right) &= \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i \# B_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \Phi(\mathcal{R}(A_i \# B_i)) \leq \sec^\gamma(\alpha) \sum_{i=1}^n \Phi(\mathcal{R}A_i \# \mathcal{R}B_i) \\
 &\leq \sec^\gamma(\alpha) \sum_{i=1}^n \Phi(\mathcal{R}A_i) \# \Phi(\mathcal{R}B_i) = \sec^\gamma(\alpha) \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \# \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \\
 &\leq \sec^\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \# \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma^\perp \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \\
 &\leq \sec^\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \# \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \# \sum_{i=1}^n \Phi(B_i)\right).
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۲. فرض کنیم $A_i, B_i \in \mathcal{S}_\alpha$ باشند به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$. در این صورت برای هر نگاشت خطی مثبت Φ و هر میانگین عملگری متعامد σ داریم

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i \# B_i)\right) &\leq \sec^\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Phi(A_i)) \sigma \mathcal{R}(\Phi(B_i)) \right) \\
 &\leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \# \sum_{i=1}^n \Phi(B_i)\right).
 \end{aligned}$$

در حالت جزئی تر اگر $\Phi(X) = X$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n A_i \# B_i\right) &\leq \sec^\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{R}(A_i) \sigma \mathcal{R}(B_i) \right) \\
 &\leq \sec^\gamma(\alpha) \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^n A_i \# \sum_{i=1}^n B_i\right).
 \end{aligned}$$

نتیجه ۳.۲. اگر $A_i, B_i \in \mathbb{M}_m^+$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و σ میانگین عملگری متعامد باشد، آنگاه برای هر نگاشت خطی مثبت Φ داریم

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \Phi(A_i \# B_i) &\leq \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \sigma \Phi(B_i) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \# \Phi(B_i).
 \end{aligned}$$

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ معکوس پذیر باشند، در این صورت برای هر میانگین عملگری σ داریم

$$(A\sigma^*B) \# (A\sigma^\circ B) = A \# B.$$

اثبات. بنا به تساوی (۳)، هرگاه $A, B \in M_n^+$ باشند خواهیم داشت

$$(A\sigma B)\#(A\sigma^\perp B) = A\#B.$$

با جایگذاری A^{-1} به جای A در تساوی فوق داریم

$$(A^{-1}\sigma B^{-1})\#(A^{-1}\sigma^\perp B^{-1}) = A^{-1}\#B^{-1}.$$

بنا به تعریف σ^* ، σ^\perp و با توجه به اینکه $(A\#B)^{-1} = A^{-1}\#B^{-1}$ ؛

$$(A\sigma^* B)^{-1}\#(B\sigma A)^{-1} = (A\#B)^{-1};$$

در نتیجه

$$((A\sigma^* B)\#(B\sigma A))^{-1} = (A\#B)^{-1}.$$

بنابراین

$$(A\sigma^* B)\#(B\sigma A) = A\#B;$$

یا به عبارتی دیگر

$$(A\sigma^* B)\#(A\sigma^\circ B) = A\#B.$$

□

در قضیه زیر توسیعی از قضیه قبل را با استفاده از لم ۳.۱ بدست می آوریم.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$. در این صورت برای هر میانگین عملگری σ داریم

$$\mathcal{R}((A\sigma^* B)\#(A\sigma^\circ B)) \leq \sec^\alpha(\alpha)\mathcal{R}(A\#B).$$

اثبات. بنا به لم ۳.۱ و قضیه ۴.۲ داریم

$$\begin{aligned} \cos^\alpha(\alpha)\mathcal{R}((A\sigma^* B)\#(A\sigma^\circ B)) &\leq \cos^\alpha(\alpha) (\mathcal{R}(A\sigma^* B)\#\mathcal{R}(A\sigma^\circ B)) \\ &\leq (\mathcal{R}A\sigma^*\mathcal{R}B)\#(\mathcal{R}A\sigma^\circ\mathcal{R}B) \\ &\leq \mathcal{R}A\#\mathcal{R}B \leq \mathcal{R}(A\#B). \end{aligned}$$

□

ملاحظه ۶.۲. در حالت خاص اگر $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ ، $\sigma = \nabla_t$ و $\sigma = \#_t$ ، با توجه به اینکه $\#_t^\circ = \#_{1-t}$ ، $\#_t^* = \#_t$ و $\nabla^* = \nabla$ و نامساویهای زیر را برای حالتی که $0 \leq t \leq 1$ است، بدست می آوریم.

$$\mathcal{R}((A\#_t B)\#(A\#_{1-t} B)) \leq \sec^\alpha(\alpha)\mathcal{R}(A\#B)$$

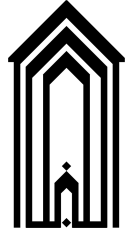
و

$$\mathcal{R}((A!B)\#(A\nabla B)) \leq \sec^\alpha(\alpha)\mathcal{R}(A\#B).$$

مراجع

- [1] Ando, T. (1979), "Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products," Linear Algebra Appl. 26, 203-241.
- [2] Bedrani, Y. Kittaneh, F. and Sababeh, M. (2021), "From positive to accretive matrices," Positivity, 25(4), 1601-1629.
- [3] Bedrani, Y. Kittaneh, F. and Sababeh, M. (2021), "Numerical radii of accretive matrices," Linear and Multilinear Algebra, 69(5), 957-970.
- [4] Bedrani, Y. Kittaneh, F. and Sababeh, M. (2022), "matrices and matrix convex functions," Results in Mathematics, 77(1), 52.
- [5] Ghazanfari, A. and Malekinejad, S. (2021), "Heron means and Pólya inequality for sector matrices," Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome, 64, 329-339.
- [6] Lin, M. (2014), "Singular value inequalities for matrices with numerical ranges in a sector," Oper. Matrices, 8, 1143-1148.
- [7] Lin, M. (2016), "Some inequalities for sector matrices," Oper. Matrices, 10(4), 915-921.
- [8] Liu, J. T. and Wang, Q. W. (2017) "More inequalities for sector matrices," Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 44, 1059-1066.

-
- [9] Malekinejad, S. Khosravi, M. and Sheikhsosseini, A. (2022), "Mean inequalities for sector matrices involving positive linear maps," *Positivity*, 26(3), 44. *Positivity.*, 26 ,1-17.
- [10] Mao, Y. (2020), "Inequalities for the Hienz Mean of Sector Matrices," *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 46, 1767-1774.
- [11] Moslehian, M. S. Matharu, J. and Aujla, J. (2012), "Non-commutative Callebaut inequality," *Linear algebra and its applications*, 436(9), 3347-3353.
- [12] Pečarić, J. E. Furuta, T. Mičić Hot, J. and Seo, Y. (2005), "Mond-pečarić Method in operator inequalities," Zagreb, Croatia: Element.
- [13] Raissouli, M. Moslehian, M. S. and Furuichi, S. (2017), "Relative entropy and Tsallis entropy of two accretive operators," *Comptes Rendus. Mathématique*, 355(6), 687-693.
- [14] Tan, F. and Chen, H. (2019), "Inequalities for sector matrices and positive linear maps", *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 35, 418-423.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN-147، صص ۸-۱۱

برخی ویژگی از عملگر ترکیبی وزن دار روی فضاهای لورنتس

جواد ایزدی*، زهره حیدرپور آ

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: عملگرهای ترکیبی وزن دار عملگر نرمال فضای لورنتس	در این مقاله، با استفاده از مشتق رادون - نیکودیم شرط لازم و کافی برای اینکه عملگرهای ترکیبی وزن دار $C_{\varphi, T}$ روی فضای لورنتس $L(p, q)$ نرمال باشند را بدست می آوریم.
2020 MSC: 46E30 47B15	

۱. مقدمه

فرض کنید f تابعی اندازه پذیر مختلط روی یک فضای اندازه پذیر σ -متناهی (X, Σ, μ) باشد. برای $s > 0$ ، μ_f را تابع توزیعی از f در نظر گرفته و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_f = \mu \{x \in X : |f(x)| > s\}$$

f^* را یک ترتیب کاهشی از f در نظر می گیریم و داریم:

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \mu_f(s) \leq t\} \quad ; \quad t \geq 0$$

برای $t > 0$ ، فرض می کنیم:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

برای تابع اندازه پذیر f روی X ، $\|f\|_{pq}$ را به صورت

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left\{ \frac{p}{q} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} & 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & 1 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

*سخنران

پست الکترونیک: j.izadi@pnu.ac.ir، (جواد ایزدی)، zohreh.heydarpour@pnu.ac.ir (زهره حیدرپور)

قرار می دهیم. فضای لورنتس $L(p, q)$ را فضای تمام توابع اندازه پذیر مختلط مانند f روی X در نظر می گیریم به گونه ای که $\|f\|_{pq} < \infty$ باشد. پس

$$L(p, q) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_{pq} < \infty, 1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty\}$$

$\|f\|_{pq}$ یک نرم می باشد و فضای $(L(p, q), \|f\|_{pq})$ یک فضای باناخ می باشد [۷]. اگر $p = q$ آنگاه فضای $L(p, p)$ همان فضای L^p خواهد شد. ویژگی های بیشتری از فضای لورنتس در [۲]، [۶] و [۴] ارائه شده است. سوباش^۱ و همکاران در [۱] به بررسی ویژگی های مثل کرانداری، فشردگی و همچنین بسته بودن برد عملگرهای ترکیبی وزن دار روی فضای لورنتس پرداخته اند. آنتونی^۲ و همکارانش در [۵] همین ویژگی ها را برای عملگرهایی که بین دو فضای لورنتس تعریف شده اند را مورد بررسی قرار داده اند. جمز^۳ و ریچارد فلمینگ^۴ در [۳] شرایط لازم و کافی برای اینکه یک عملگر ترکیبی وزن دار روی فضای L^2 نرمال باشد را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله هدف اصلی ما تعمیم این فضا و پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای نرمال بودن اینگونه عملگرها روی فضای لورنتس $L(p, q)$ می باشد. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ یک تبدیل غیرتکین^۵ اندازه پذیر و φ یک تابع اندازه پذیر مختلط روی X باشد. تبدیل خطی $C_{\varphi, T}$ را روی فضای لورنتس $L(p, q)$ به فضای تمام توابع اندازه پذیر مختلط در نظر می گیریم:

$$C_{\varphi, T}(f)(x) = \varphi(x) f(T(x)), \quad x \in X, \quad f \in L(p, q)$$

اگر $C_{\varphi, T}$ یک عملگر کراندار با برد در $L(p, q)$ باشد، آنگاه آن را یک عملگر ترکیبی وزن دار روی $L(p, q)$ می نامیم. اگر $\varphi \equiv 1$ ، آنگاه $C \equiv C_T(f) = f \circ T$ را عملگر ترکیبی^۶ و اگر $T = I$ عملگر همانی باشد، آنگاه $C \equiv M_\varphi(f) = \varphi f$ را عملگر ضربی^۷ می نامیم. قرار می دهیم:

$$h = \frac{d\mu \circ T^{-1}}{d\mu}$$

$T^{-1}(\Sigma)$ را تکمیل نسبی^۸ از σ -جبر تولید شده توسط $\{T^{-1}A : A \in \Sigma\}$ در نظر می گیریم. حالا $E : L(p, q)(\Sigma) \rightarrow L(p, q)(T^{-1}\Sigma)$ قرار می دهیم. این عملگر را یک عملگر انتظار شرطی^۹، با توجه به σ -جبر $T^{-1}(\Sigma)$ می نامیم. بطور کلی، برای توابع اندازه پذیر کراندار یا توابع اندازه پذیر نامنفی تعریف می شود. نرم عملگر ترکیبی وزن دار C را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|C\| = \left\| hE(|\varphi|^2) \circ T^{-1} \right\|_\infty^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۱.۱. اگر g یک تابع اندازه پذیر باشد، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |g(x)| > \frac{1}{n}\}$ را ساپورت g می نامیم و با $\text{supp } g$ نمایش می دهیم.

۲. نتایج اصلی

در این بخش، با ارایه یک قضیه، به اثبات نرمال بودن عملگر ترکیبی وزن دار C روی فضاهای لورنتس $L(p, q)$ می پردازیم. در قضیه ۱.۲ قادر هستیم که توصیف صحیحی از نرمال بودن عملگر را از بسیاری جهات تعیین کنیم. این قضیه مجموعه ای از حداقل شرایطی است که شرط لازم و کافی برای نرمال بودن عملگر ترکیبی وزن دار C روی فضای لورنتس $L(p, q)$ را ارایه می دهد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه پذیر σ -متناهی و $T : X \rightarrow X$ یک تبدیل غیرتکین اندازه پذیر و φ یک تابع اندازه پذیر مختلط روی X باشد. اگر $E : L(p, q)(\Sigma) \rightarrow L(p, q)(T^{-1}\Sigma)$ یک عملگر انتظار شرطی باشد، آنگاه عملگر ترکیبی وزن دار $C_{\varphi, T}$ نرمال است اگر و فقط اگر

$$1. \quad \varphi E(\varphi) h \circ T = hE(\varphi^2) \circ T^{-1}.$$

¹Subhash Chander

²Anthony Wai-keung

³James T. Campbell

⁴Richard Fleming

⁵Non-singular Transformation

⁶Composition Operator

⁷Multiplication Operator

⁸Relative Completion

⁹conditional expectation

$$T^{-1}\Sigma \cap \text{supp } \varphi = \Sigma \cap \text{supp } \varphi \quad ۲.$$

□

اثبات. [۳]

از اینکه $\text{supp } \varphi \in \Sigma$ ، طبق قضیه ۱.۲، این مفهوم را دارد که برای هر $B \in \Sigma$ ، $B \subseteq \text{supp } \varphi$ ، آنگاه $c \in \Sigma$ وجود دارد به گونه ای که $T^{-1}c \cap \text{supp } \varphi = B$.

ملاحظه ۲.۲. در اثبات قضیه ۱.۲ نشان داده شده است که اگر $hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1} = hE(\varphi) \circ T$ (که در واقع ثابت شده C نرمال است)، آنگاه $\text{supp } \varphi = \text{supp } hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}$. بعلاوه حتی اگر $\text{supp } hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1} \subseteq \text{supp } \varphi$ ، آنگاه نگاشت T ، $\text{supp } \varphi$ را به داخل خودش می نگارد و در نتیجه C یک عملگر ترکیبی وزن دار روی زیر فضای پایای $(\text{supp } \varphi, \Sigma, \mu)$ $L(p, q)$ می باشد.

قضیه ۳.۲. فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه پذیر σ -متناهی و $T: X \rightarrow X$ یک تبدیل غیرتکین اندازه پذیر و φ یک تابع اندازه پذیر مختلط روی X باشد. اگر $E: L(p, q)(\Sigma) \rightarrow L(p, q)(T^{-1}\Sigma)$ یک عملگر انتظار شرطی باشد، آنگاه عملگر ترکیبی وزن دار $C_{\varphi, T}$ نرمال است اگر و فقط اگر

$$۱. \text{supp } \varphi = \text{supp } hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}$$

$$۲. T^{-1}\Sigma \cap \text{supp } \varphi = \Sigma \cap \text{supp } \varphi$$

$$۳. h \circ TE\left(\frac{\varphi^\vee}{hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}}\right) = \chi_{\text{supp } E(\varphi)}$$

اثبات. فرض کنید عملگر ترکیبی وزن دار $C_{\varphi, T}$ نرمال باشد. در این صورت طبق قضیه ۱.۲ و ملاحظه ۲.۲ شرایط (۱) و (۲) قضیه ۳.۲ برقرار هستند. از طرفی با توجه به اینکه $\text{supp } \varphi \subseteq \text{supp } E(\varphi)$ ، لذا داریم:

$$h \circ TE\left(\frac{\varphi^\vee}{hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}}\right) = h \circ TE\left(\frac{\varphi^\vee}{\varphi E(\varphi) h \circ T}\right) = E\left(\frac{\varphi}{E(\varphi)} \chi_{\text{supp } E(\varphi)}\right) = \chi_{\text{supp } E(\varphi)}.$$

برعکس، فرض کنید B یک $T^{-1}\Sigma$ مجموعه با اندازه متناهی باشد. با استفاده از مفهوم تابع مشخصه به صورت χ_B داریم:

$$\chi_B = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$\varphi E(\varphi \chi_B(x)) h \circ T = \varphi E(\varphi) h \circ T \chi_B(x) = hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}(\chi_B) \quad (۱)$$

با توجه به قسمت ۲ قضیه ۱.۲ نتیجه می شود که رابطه ۱ برای هر زیر مجموعه Σ -اندازه پذیر از $\text{supp } \varphi$ برقرار است. همچنین از آنجایی که

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } hE(\varphi^\vee) \circ T^{-1}$$

لذا رابطه ۱ برای تمام مجموعه های Σ -اندازه پذیر B با اندازه متناهی برقرار است. این موضوع نتیجه می دهد که برای چنین B هایی داشته باشیم:

$$\begin{aligned} C_{\varphi, T}^* \chi_B &= [C_{\varphi, T} \chi_B]^* \\ &= [\varphi(B) \chi_{\varphi(B)}]^* \\ &= \varphi(B) \inf\{s > 0 : \varphi_x(s) \leq T(B)\} \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} C_{\varphi, T} C_{\varphi, T}^* \chi_B &= \overline{C_{\varphi, T} \varphi(B)} \inf\{s > 0 : \varphi_x(s) \leq T(B)\} \\ &= \overline{\varphi(B)} f^*(T(B)) \\ &= \varphi(B) \inf\{s > 0 : \varphi_x(s) \leq T(B)\} \end{aligned} \quad (۲)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} C_{\varphi, T}^* C_{\varphi, T} \chi_B &= \overline{C_{\varphi, T}^* [\varphi(B) \chi_{T(B)}}] \\ &= \overline{\varphi(B)} C_{\varphi, T}^* [\chi_{T(B)}] \\ &= \overline{\varphi(B)} [\varphi(T(B)) \chi_{T(B)}]^* \\ &= \varphi(B) \inf\{s > 0 : \varphi_x(s) \leq T(B)\} \end{aligned} \quad (۳)$$

با توجه به رابطه های ۲ و ۳ داریم:

$$C_{\varphi,T}C_{\varphi,T}^* \chi_B = C_{\varphi,T}^*C_{\varphi,T} \chi_B$$

با توجه به اینکه $x \in B \subseteq X$ داریم: $\chi_B(x) = 1$

$$C_{\varphi,T}C_{\varphi,T}^* \chi_B(x) = C_{\varphi,T}^*C_{\varphi,T} \chi_B(x)$$

و در نتیجه

$$C_{\varphi,T}C_{\varphi,T}^* = C_{\varphi,T}^*C_{\varphi,T}$$

□

و لذا $C_{\varphi,T}$ نرمال است.

مراجع

- [1] Subhash Chander Arora, Gopal Datt, and Satish Verma. Weighted composition operators on lorentz spaces. *BULLETIN-KOREAN MATHEMATICAL SOCIETY*, 44(4):701, 2007.
- [2] Colin Bennett and Robert C Sharpley. *Interpolation of operators*. Academic press, 1988.
- [3] James T Campbell, Mary Embry-Wardrop, Richard J Fleming, and SK Narayan. Normal and quasnormal weighted composition operators. *Glasgow Mathematical Journal*, 33(3):275–279, 1991.
- [4] Richard Hunt. On $l(p, q)$ spaces. *Enseign. Math.*, 12:249–276, 1966.
- [5] Ching-on Lo and Anthony Wai-keung Loh. Weighted composition operators between lorentz spaces. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 103(3):493–505, 2021.
- [6] George G Lorentz. Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*, pages 37–55, 1950.
- [7] Elias M Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 1. Princeton university press, 1971.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN-173، صص ۱۲-۱۵

تابع محدب و p -محدب و h -محدبمحسن حیدری^{*}، امیر قرجه‌لوبنکارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه زنجان
دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه زنجان

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: توابع محدب ابرضربی h -محدب	توابع محدب و p -محدب و h -محدب توابع بسیار مهمی هستند که در شاخه‌های مختلف ریاضی نقش اساسی را ایفا می‌کنند و رده‌بندی‌های آنها از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله به بررسی کلاس‌های مختلف این توابع می‌پردازیم.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

تابع‌های محدب^۱ و مقعر^۲ نقش‌های بنیادین در مسائل مربوط به بهینه‌سازی دارند.تعریف ۱.۱. تابع حقیقی $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in [a, b]$ و برای هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

و بطور مشابه f را مقعر می‌نامیم هرگاه f -محدب باشد.تعریف ۲.۱. تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ را p -محدب می‌نامیم هرگاه برای هر x و y در $[a, b]$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

اگر نامساوی برای هر $y \neq x$ اکید باشد f را بطور اکید p -محدب می‌نامیم کلاس این توابع را با $p([a, b])$ نمایش می‌دهیم.تعریف ۳.۱. تابع $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را s -محدب می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in (0, 1]$ و هر $x, y \in [0, +\infty)$ و هر $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

کلاس این توابع را با $K_s^{\mathbb{Y}}$ نمایش می‌دهیم.^{*}سخنران

پست الکترونیک: mohsen.heidari_d10@yahoo.com (محسن حیدری)، amirgharajelo@yahoo.com (امیر قرجه‌لوب)

¹Convex²Concave

تعریف ۴.۱. اگر تابع $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نامنفی و $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک تابع حقیقی باشد گوییم f تابع h -محدب است هرگاه برای هر $x, y \in I$ و $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y)$$

کلاس این توابع را با $SX(h, I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱. تابع حقیقی مقدار $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ را ایزربری می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in I$

$$h(xy) \geq h(x)h(y)$$

اگر برای هر $x, y \in I$ نامساوی برعکس شود یعنی $h(xy) \leq h(x)h(y)$ آنگاه h را زیرضربی می‌نامیم.

قضیه ۶.۱. اگر $f \in K_s^+$ آنگاه f بر روی بازه $[0, +\infty)$ نامنفی است.

اثبات. اگر $x \in \mathbb{R}^+$ و $f \in K_s^+$ و $x \neq 0$ داریم

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\sqrt{s}} + \frac{x}{\sqrt{s}}\right) &= f(x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^s f(x) + \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^s f(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} f(x) = 2^{1-s} f(x) \\ &\Rightarrow 2^{1-s} f(x) - f(x) \geq 0 \\ &\rightarrow f(x)(2^{1-s} - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

□

چون $2^{1-s} - 1 \geq 0$ پس $f(x) \geq 0$ و اثبات تکمیل است.

قضیه ۷.۱. اگر $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ تابع s -محدب و لبگ انتگرال‌پذیر بر روی $[a, b]$ باشد آنگاه

$$\frac{1}{2^{1-s}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b \frac{1}{b-a} f(x) dx \leq \frac{1}{s+1} (f(a) + f(b))$$

اثبات. چون f تابع s -محدب است برای $\lambda \in [0, 1]$ در $s \in (0, 1)$ داریم

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda^s f(a) + (1 - \lambda)^s f(b)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\lambda a + (1 - \lambda)b) d\lambda &\leq \int_0^1 \lambda^s f(a) d\lambda + \int_0^1 f(b)(1 - \lambda)^s d\lambda \\ &= \frac{f(a)}{s+1} + \frac{f(b)}{s+1} = \frac{f(a) + f(b)}{1+s} \end{aligned}$$

حال چون f تابع s -محدب است پس با فرض $\lambda = \frac{1}{\sqrt{s}}$ داریم

$$f\left(\frac{x+y}{\sqrt{s}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{s}} (f(x) + f(y))$$

در این نامساوی قرار می‌دهیم $x := \lambda a + (1 - \lambda)b$ و $y := \lambda b + (1 - \lambda)a$ چون $a + b = x + y$ داریم

$$f\left(\frac{x+y}{\sqrt{s}}\right) = f\left(\frac{a+b}{\sqrt{s}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{s}} f(\lambda a + (1 - \lambda)b) + f(\lambda b + (1 - \lambda)a)$$

پس

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{\gamma}\right) d\lambda &\leq \frac{1}{\gamma^s} \int_0^1 [(\lambda a + (1-\lambda)b) + f(\lambda b + (1-\lambda)a)] d\lambda \\ &\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{\gamma}\right) \leq \frac{\gamma^{1-s}}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{\gamma}\right) \times \gamma^{s-1} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

قضیه ۸.۱. اگر t_1, t_2, \dots, t_n اعداد حقیقی مثبت و h تابع ابرضری نامنفی و $f \in SX(h, I)$ و $x_i \in I$ که $1 \leq i \leq n$ آنگاه اگر $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$ داریم

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{T_n}\right) \leq \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(x_i)$$

اثبات. اگر $n = 2$ چون $f \in SX(h, I)$ حکم برقرار است فرض کنیم حکم به ازای $n-1$ برقرار باشد درستی حکم را به ازای n نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f\left(\frac{x_n t_n}{T_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i t_i}{T_n}\right) \\ &= f\left(\frac{t_n x_n}{T_n} + \frac{T_{n-1}}{T_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i x_i}{T_{n-1}}\right) \\ &\leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i x_i}{T_{n-1}}\right) \\ &\leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_n) + h\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right) \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h\left(\frac{t_i}{T_{n-1}}\right) \\ &\leq h\left(\frac{t_n}{T_n}\right) f(x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n h\left(\frac{t_i}{T_n}\right) f(x_i) \end{aligned}$$

□

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. اگر $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع نامنفی و ابرضری و M و N مجموعه‌های متناهی از اعداد صحیح مثبت و جدا از هم باشند و $f \in SX(h, I)$ آنگاه برای هر $x_i \in I$ و $t_i \geq 0$ که $i \in M \cup N$ داریم

$$F(M \cup N) \leq F(M) + F(N)$$

که در آن

$$F(M) = h(T_M)f\left(\frac{1}{T_M} \sum_{i \in M} t_i t_i x_i\right) - \sum_{i \in M} h(t_i)f(x_i)$$

قضیه ۲.۲. اگر f یک p -تابع و لبگ انتگرال پذیر بر روی بازه $[a, b]$ باشد آنگاه

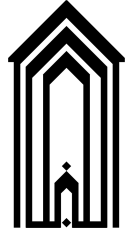
$$\frac{1}{\nu} f\left(\frac{a+b}{\nu}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(a) + f(b)$$

قضیه ۳.۲. اگر $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مشتق پذیر و f' لبگ انتگرال پذیر بر روی بازه $[a, b]$ در $[0, +\infty)$ و s -محدب بر روی همین بازه باشد و $s \in (0, 1]$ آنگاه

$$\left| f\left(\frac{a+b}{\nu}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)(1+\nu^{2-s})}{(\nu s + \nu)(s + \nu)} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

مراجع

- [1] MW. Alomari, M. Darus and U. S. Kirmaci. *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s -couver functions*. Acta Math. Sci, 31B(4), 1643-1652, 2011.
- [2] V. Darvish. S. S. Dragomir, H. M. Nazari and A. Taghavi. *Some inequalities associ ated with the Hermite-Hadamard inequalities for operator $/i$ -convex functions*. Acta Math. Appl. Sim-E, 21C(2), 1840-1848, 2017.
- [3] S. S. Dragomir. *The Hermite-Hadamard's type Inequalities for operator convex fume- tions*. Appl. Math. Comput, 218(3), 766-772, 2011.
- [4] SS. Dragomir and C. E. M. Pearce. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA, Monographys, 2002.
- [5] S. S. Dragomir. *Inequalities of Hermite-Hadamard Type for A -Convex Functions on Linear Spaces*. Acta. Math. Univ. Comenian. (N.S), 34(4), 323-341, 2015.
- [6] Hussain, M.I. Bhatti and M. Iqbal. *Hadamard-type inequalities for convex functions I*. Punjab Uniz, J. Math, 41(2), 51-60, 2009.
- [7] U.S. Kirmaci, M. Klaricie Bakuln, M.E. and J. Pečarić *Hadamard-type inequalities for s -convex functions*. Appl. Math. Comp, 193, 1-10, 2007.
- [8] M.S. Moslehian, J. Mičić and M. Kian. *An operator inequality and its consequences*. Linear Algebra Appl, 439, 584-591, 2013.
- [9] M.A. Noor, K.I. Noor and MU. Awan. *Integral Inequalities for Two-dimensional pq -convex functions*. Filomat, 30(2), 343-351, 2016.
- [10] M.A. Noor, K.I. Noor and M.U. Awan. *A new Hermite-Hadamard type inequality for a convex functions*. Acta. Math. Univ. Comenian. (N.S), 24(2), 191-197, 2015.



توپولوژی القائی و عملگرهای پیچشی روی دوگان توابع پیوسته یکنواخت چپ

علی غفاری*

سمنان، روبروی پارک سوکان، دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: جبرهای گروهی توپولوژی القائی عملگرهای پیچشی	فرض کنیم G گروهی فشرده موضعی و $LUC(G)$ فضای همه توابع پیوسته یکنواخت چپ روی G باشد. دو توپولوژی τ_1 و τ_2 روی $LUC(G)^*$ قرار داده و ارتباط این دو توپولوژی را با هم و با توپولوژی های شناخته شده روی $LUC(G)^*$ مورد مطالعه قرار می دهیم. نشان می دهیم که اگر G گروهی جابه جایی و فشرده باشد، توپولوژی τ_1 با نرم توپولوژی برای گروه های نامتناهی متفاوت هستند. اگر G گروهی غیر فشرده باشد، توپولوژی τ_1 با توپولوژی ضعیف ستاره با هم متفاوتند. عملگرهای جابه جا شونده با عملگرهای پیچشی که نسبت به این توپولوژی ها پیوسته هستند، نیز مورد مطالعه قرار می دهیم.
2020 MSC: 43A10 43A60	

۱. مقدمه

فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. مجموعه همه توابع پیوسته روی G را که در بی نهایت صفر می شود با نماد $C_0(G)$ و مجموعه همه توابع پیوسته یکنواخت چپ را با $LUC(G)$ نمایش می دهیم. در واقع $f \in LUC(G)$ اگر و تنها اگر نگاشت $x \mapsto L_x f$ از G به توی $L^\infty(G)$ پیوسته باشد. $M(G)$ فضای همه اندازه های بورل، منظم و کراندار روی G است و می دانیم $M(G) = C_0(G)^*$. روی هر گروه هاسدورف و فشرده موضعی، اندازه هار چپ موجود است و از این رو $L^1(G)$ تعریف می شود [۴]. فضای برداری $L^1(G)$ با عمل ضرب پیچشی و نرم روی $L^1(G)$ یک جبر باناخ است. دوگان اول و دوم این جبر باناخ را به ترتیب با $L^1(G)^*$ و $L^1(G)^{**}$ نمایش می دهیم. می دانیم $L^1(G)$ ایده آلی دو طرفه در $M(G)$ بوده و همه اندازه های احتمال در $L^1(G)$ را با $P^1(G)$ نمایش می دهیم. $P^1(G)$ یک نیم گروه است. ضرب های زیادی روی جبرهای متنوع تعریف و مورد بررسی قرار گرفته است. ضرب آرنز از مهم ترین ضرب ها روی دوگان دوم جبرهای باناخ است که در حالت خاص به تعریف آن می پردازیم.

برای $f \in L^1(G)^* = L^\infty(G)$ و $\varphi \in L^1(G)$ تابع $f \varphi \in L^\infty(G)$ را با ضابطه $\langle f \varphi, \psi \rangle = \langle f, \varphi * \psi \rangle$ تعریف می کنیم. برای $F \in L^\infty(G)^*$ تابع $Ff \in L^\infty(G)$ را به صورت $\langle Ff, \varphi \rangle = \langle F, f \varphi \rangle$ و در نهایت برای $G \in L^\infty(G)^*$ تابع $GF \in L^\infty(G)^*$ را به صورت $\langle GF, f \rangle = \langle G, Ff \rangle$ تعریف می کنیم. می دانیم $L^\infty(G)^*$ با این ضرب یک جبر باناخ است و به این ضرب، ضرب آرنز نوع اول گویند [۴].

برای $f \in L^\infty(G)$ و $\alpha \in G$ نگاشت $L_\alpha : L^\infty(G) \rightarrow L^\infty(G)$ را با ضابطه $L_\alpha f(y) = f(\alpha y)$ تعریف می کنیم. واضح است که اگر تور $\{F_\alpha\}$ به F در $LUC(G)^*$ همگرا باشد، در این صورت برای هر $f \in LUC(G)$ تور $\{F_\alpha f\}$ به Ff همگراست. سوال این است که آیا عکس این موضوع همواره صحیح است؟ این سوال منجر به تعریف یک توپولوژی جدیدی شده است که در زیر توضیحات تکمیلی آورده شده است.

* سخنران

پست الکترونیک: aghaffari@semnan.ac.ir (علی غفاری)

برای هر $f \in LUC(G)$ تابع $\rho_f(F) = \|Ff\|$ یک شبه‌نرم روی $LUC(G)^*$ است و خانواده همه چنین شبه‌نرم‌هایی یک توپولوژی محذب موضعی روی $LUC(G)^*$ تولید می‌کند. ما این توپولوژی را با τ_1 نمایش می‌دهیم. واضح است که خانواده همه زیر مجموعه‌هایی چون

$$\bigcap_{i=1}^n \{F \in LUC(G)^*; \|Ff_i\| < \epsilon\}$$

پایه‌ای موضعی برای صفر در توپولوژی τ_1 است. این توپولوژی‌ها را می‌توان به شکل دیگری نیز بیان کرد. در واقع $LUC(G)^*$ قابل نشان دادن در $(B(LUC(G), LUC(G)), LUC(G))$ به صورت $F \mapsto T_F$ بوده که در آن $T_F(f) = Ff$ و از این‌رو توپولوژی نسبی حاصل از توپولوژی عملگر قوی همان توپولوژی τ_1 است [۷]. توپولوژی‌های متنوعی روی فضای تبدیلات خطی روی یک فضای باناخ تعریف و مطالعات زیادی روی آنها انجام شده است، خواننده برای دیدن توپولوژی‌های مشابه به [۱۰]، [۶]، [۵] مراجعه کند. توجه کنید که توپولوژی عملگر ضعیف نیز روی $(B(LUC(G), LUC(G)))$ وجود دارد و توپولوژی نسبی روی $LUC(G)^*$ را با τ_2 نمایش می‌دهیم.

در این مقاله ما این توپولوژی‌ها را با توپولوژی‌های شناخته شده روی دوگان این جبر، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شرایط لازم و کافی برای سازگار بودن این توپولوژی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان دادیم در بیشتر مواقع این توپولوژی‌ها با هم سازگار نیستند. عملگرهای کراندار روی $L^\infty(G)$ که با انتقال و با پیچش جابه‌جا می‌شوند از مسائل مهم بوده و هست. قهرمانی و لائو روی قدر مطلق این نوع عملگرها مطالعات خوبی انجام داده‌اند [۸]. یکی از نتایج مهم که چندین سال به عنوان مسئله حل نشده مطرح بوده، در این مقاله ثابت شده است. در واقع فشردگی گروه G با وجود یک ضرب گر چپ ضعیف فشرده ناصفر روی دوگان دوم جبر گروهی معادل است [۸]. همین‌طور بیکر، لائو و پیم فضای باناخ همه هم‌ریختی‌های موجود روی دوگان یک جبر باناخ، با واحد تقریبی کراندار را به‌طور دقیق مشخص کرده‌اند [۳]. ثابت شده است عملگری روی $L^\infty(G)$ موجود است که با انتقال جابه‌جا می‌شود ولی با پیچش جابه‌جا نمی‌شود. عملگرهای بطور ضعیف فشرده نسبت به یک توپولوژی خاص در [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفت. یکی از نتایج اصلی در این بخش، قضیه ۴.۳ می‌باشد. ثابت کردیم اگر عملگر نسبت به توپولوژی تعریف شده در بالا پیوسته باشد، این عملگر با عملگر انتقال جابه‌جا می‌شود اگر و تنها اگر با عملگر پیچش جابه‌جا شود و به‌طور دقیق این نوع عملگرها را مشخص کردیم.

۲. بررسی خواص توپولوژی‌ها

فرض کنیم تور $\{F_\alpha\}$ به F در توپولوژی τ_1 همگرا باشد. برای $f \in LUC(G)$ و $\epsilon > 0$ ، $\alpha_0 \geq \alpha$ موجود است که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$ ، $\|F_\alpha f - Ff\| \leq \epsilon$. اکنون فرض کنیم تور $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in J}$ یک واحد تقریبی برای $L^1(G)$ بوده که اعضای آن اندازه‌های احتمال هستند. برای $\alpha \geq \alpha_0$

$$|\langle F_\alpha, f \rangle - \langle F, f \rangle| \leq \sup\{|\langle F_\alpha f - Ff, \varphi_\beta \rangle|; \beta \in J\} \leq \|F_\alpha f - Ff\| \leq \epsilon.$$

این بدین معناست که تور $\{F_\alpha\}$ به F در توپولوژی ضعیف ستاره همگراست. بنابراین توپولوژی τ_1 ظریفتر از توپولوژی ضعیف ستاره است.

گزاره ۱.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. یک تابع روی $LUC(G)^*$ نسبت به توپولوژی τ_1 پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی τ_2 پیوسته باشد.

از گزاره بالا نتیجه می‌شود که بستار زیر مجموعه‌های محذب از $LUC(G)^*$ نسبت به توپولوژی τ_1 و τ_2 با هم برابر هستند.

گزاره ۲.۲. فرض کنیم G گروهی جابه‌جایی، هاسدورف و فشرده موضعی باشد. توپولوژی τ_1 با توپولوژی نرم روی $LUC(G)^*$ با هم سازگار هستند اگر و تنها اگر G گروهی متناهی باشد.

اثبات. ما تنها قسمت ساده این گزاره را ثابت می‌کنیم. اگر G گروهی متناهی باشد، $LUC(G)$ و از این‌رو $LUC(G)^*$ دارای بعد متناهی است و از این‌رو هر دو توپولوژی محذب موضعی روی این فضا با هم سازگار هستند. بنابراین توپولوژی نرم و توپولوژی τ_1 با هم سازگار هستند [۴]. □

در بحث بالا ارتباط بین دو توپولوژی نرم و τ_1 را بررسی کردیم. قصد داریم در ادامه راه به بررسی ارتباط بین دو توپولوژی ضعیف ستاره و τ_1 بپردازیم. این نتایج بیان می‌کنند که فاصله زیادی بین توپولوژی‌های شناخته شده و توپولوژی τ_1 وجود دارد.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف، فشرده موضعی باشد. توپولوژی ضعیف ستاره با توپولوژی τ_1 با هم سازگار هستند اگر و تنها اگر برای هر $f \in LUC(G)$ ، زیرفضای تولید شده توسط $\{f\varphi; \varphi \in L^1(G)\}$ زیر فضایی از بعد متناهی از $LUC(G)$ باشد.

گزاره ۴.۲. اگر G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد، اگر توپولوژی τ_1 با توپولوژی ضعیف ستاره با هم سازگار باشد، در این صورت G گروهی فشرده است.

در بالا دیدیم که توپولوژی ضعیف ستاره با توپولوژی τ_1 در بیشتر اوقات سازگار نیست. می توان ثابت کرد که اگر G گروهی فشرده باشد، همگرایی دنباله ها نسبت به این توپولوژی ها یکسان است.

جبرهای باناخ با بعد متناهی همان فضاهای اقلیدسی هستند. بعلاوه اینکه جبرهای باناخ انعکاسی تعداد کمتری از جبرهای باناخ هستند. توجه دارید که جبرهای گروهی در صورتی انعکاسی هستند که گروه زمینه، گروه متناهی باشد. در قضیه زیر ثابت خواهیم کرد که اگر تابعی روی دوگان فضای توابع پیوسته یکنواخت چپ با توپولوژی τ_1 پیوسته باشد، این تابع عضو $LUC(G)$ است.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم G گروهی هاسدورف، فشرده باشد. دوگان $LUC(G)^*$ نسبت به توپولوژی τ_1 فضای $LUC(G)$ است.

۳. عملگرهایی که با پیچش جابه جا می شوند

اگر \mathcal{A} جبری باناخ باشد، خانواده همه عملگرهای کراندار T از \mathcal{A}^* به \mathcal{A}^* که برای هر $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$ $T(fa) = T(f)a$ را با نماد $Hom(\mathcal{A}^*)$ نمایش می دهیم. این نوع عملگرها برای بیشتر جبرهای باناخ و در حالت خاص برای جبرهای گروهی مورد توجه ریاضیدانان بوده و هست. ضربگرهای روی جبرهای باناخ خاص مورد بررسی قرار گرفته است. منابع ارزنده [۷]، [۸] و [۹] نتایج قابل چشمگیر را شامل است. ثابت شده است که اگر \mathcal{A} جبری باناخ با واحد تقریبی کراندار با کران یک باشد، آنگاه $Hom(\mathcal{A}^*)$ به طور طولپا با $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}^*)$ یکرخت است [۳].

تعریف ۱.۳. زیر مجموعه X از $LUC(G)^*$ را شبه تقریباً متناوب گوئیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک زیر مجموعه متناهی $S \subseteq LUC(G)^*$ موجود باشد که برای هر $E \in ball(LUC(G)^*)$ عنصر $E' \in S$ موجود باشد که برای هر $F \in X$ $\|EF - E'F\| < \epsilon$.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. یک عملگر $T \in Hom(LUC(G)^*)$ نسبت به توپولوژی τ_1 فشرده است اگر و تنها اگر $T(ball(LUC(G)^*))$ شبه تقریباً متناوب باشد.

یک عملگر $T : LUC(G)^* \rightarrow LUC(G)^*$ را تقریباً متناوب گوئیم هرگاه مجموعه همه انتقال های T یعنی $\{L_x T; x \in G\}$ نسبت به توپولوژی عملگر قوی فشرده نسبی باشد. توابع تقریباً متناوب، توابع تقریباً متناوب ضعیف در فضاهای توابع پیوسته روی گروه ها و نیم گروه ها مطالعه شده است. همبیطور تابع های تقریباً متناوب و تابع های تقریباً متناوب ضعیف روی جبرهای باناخ نیز مورد توجه بوده و هست. توضیحات بیشتر در منابع [۴]، [۱۰] و [۱۳] آمده است.

گزاره ۳.۳. اگر G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد، عملگر کراندار $T : LUC(G)^* \rightarrow LUC(G)^*$ تقریباً متناوب است اگر و تنها اگر هر عنصر $T(ball(LUC(G)^*))$ تقریباً متناوب باشد.

عملگرها روی جبرهای گروهی که با انتقال ها جابه جا می شوند، با پیچش نیز جابه جا می شوند. قضیه معروف وندل همه این عملگرها را بطور کامل مشخص کرده و ثابت کرده است که مجموعه همه این چنین عملگرها، با جبر اندازه های بول و کراندار روی گروه زمینه بطور طولپا یکرخت است. بعلاوه عملگرهای کراندار روی دوگان اول جبرهای گروهی که با انتقال و پیچش جابه جا می شود نیز توسط ریاضیدانان معروف از جمله لائو و قهرمانی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. ثابت شده است که این چنین عملگرها اگر با پیچش جابه جا شود، با انتقال ها نیز جابه جا می شود ولی عکس این موضوع درست نیست. مثال قابل توجه در این مورد، از اینکه میانگین پایای چپ روی دوگان جبرهای گروهی وجود دارد که یک میانگین پایای چپ توپولوژیک نیست، بدست می آید. توضیحات تکمیلی در مورد میانگین های پایای چپ و میانگین پایای چپ توپولوژیک در منابع [۱]، [۲]، [۱۱] و [۱۲] یافت می شود. در قضیه زیر این چنین عملگرها را روی دوگان فضای توابع پیوسته یکنواخت چپ مورد بررسی قرار می دهیم.

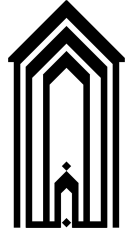
قضیه ۴.۳. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. فرض کنیم $T : LUC(G)^* \rightarrow LUC(G)^*$ عملگری کراندار بوده که نسبت به توپولوژی τ_1 پیوسته است. برای هر $x \in G$ و $F \in LUC(G)^*$ $T(F\delta_x) = T(F)\delta_x$ اگر و تنها اگر برای هر $\mu \in M(G)$ و $F \in LUC(G)^*$ $T(F\mu) = T(F)\mu$ در واقع T با پیچش جابجا می شود.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. گروه G فشرده است اگر و تنها اگر برای هر عملگر کراندار $T : LUC(G)^* \rightarrow LUC(G)^*$ که با پیچش جابه جا می شود، نتیجه شود که برای هر $E, F \in LUC(G)^*$ $T(EF) = T(E)F$.

مراجع

- [1] A. Aminpour, A. Dianatifar and R. Nasr Isfahani, *Asymptotically non-expansive actions of strongly amenable semigroups and fixed points*, J. Math. Anal. Appl. **461** (2018) 364–377.

-
- [2] J.F. Berglund, H.D. Junghenn and P. Milnes, *Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compaticifications, Representations*, Wiley-Interscience and Canadian Mathematics Series of Monographs and Texts, 1988.
- [3] J. Baker, A.T. Lau and J. Pym, *Module homomorphisms and topological centres associated with weakly sequentially complete Banach algebras*, J. Funct. Anal. **158** (1998) 186–208.
- [4] H.G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series 24, Oxford Univ. Press, 2000.
- [5] M. Eshaghi, A. Ghaffari and M.B. Sahabi, *Induced topologies on certain Banach algebras*, Filomat **37** (2023) 1311–1318.
- [6] A. Ghaffari, T. Hadadi, S. Javadi and M. Sheibani, *On the structure of hypergroups with respect to the induced topology*, Rocky Mountain J. Math. **52** (2022) 519–533.
- [7] A. Ghaffari and S. Amirjan, *Invariantly complemented and amenability in Banach algebras related to locally compact groups*, Rocky Mountain J. Math. **47** (2017) 445–461.
- [8] F. Ghahramani and A.T. Lau, *Multipliers and modulus on Banach algebras related to locally compact groups*, J. Funct. Anal. **150** (1997) 478–497.
- [9] A. Medghalchi and A. Mollakhalili, *Compact and weakly compact multipliers of locally compact quantum groups*, Bull. Iran. Math. Soc. **44** (2018) 101–136.
- [10] A.M. Peralta, I. Villanueva, J.D.M. Wright and K. Ylinen, *Weakly compact operators and the strong* topology for a Banach space*, Proc. R. Soc. Edinb. A **140** (2020) 1249–1267.
- [11] V. Runde, *Amenable Banach Algebras*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2020.
- [12] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2002.
- [13] J.M. Sepulcre and T. Vidal, *A note on spaces of almost periodic functions with values in Banach spaces*, Canad. Math. Bull. **65** (2022) 953–962.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN-206، صص. ۲۰-۲۲

بررسی توابع محدب میانی و محدب لگاریتمی

محسن حیدری*، آ، امیر قرجه‌لو^ب

^آ کارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه زنجان
^ب دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه زنجان

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: توابع محدب لگاریتم محدب محدب میانی	توابع محدب و محدب میانی در ریاضیات نقش بسزایی را ایفاء می‌کنند و مطالعه خواص ویژگی این توابع تأثیر فزاینده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضیات بر جا گذاشته است. در این مقاله به بررسی توابع محدب میانی و h -محدب میانی می‌پردازیم.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

توابع محدب میانی در مسائل مربوط به بهینه‌سازی از اهمیت خاصی برخوردارند.

تعریف ۱.۱. تابع حقیقی $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ که $I \subseteq \mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in I$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

تعریف ۲.۱. تابع حقیقی $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ که $I \subseteq \mathbb{R}$ محدب میانی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

واضح است که هر تابع محدب تابع محدب میانی است.

تعریف ۳.۱. تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ که $I \subseteq \mathbb{R}$ محدب لگاریتمی نامیده می‌شود هرگاه f اکیداً مثبت باشد و به ازای هر $x, y \in I$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (f(x))^\lambda \cdot (f(y))^{1-\lambda}$$

تعریف ۴.۱. تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ را ضربی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ داشته باشیم $f(xy) = f(x)f(y)$ در این تابع اگر $1 \in I$ خواهیم داشت $f(1) = 1$

*سخنران

پست الکترونیک: mohsen.heidari_d10@yahoo.com (محسن حیدری)، amirgharajelo@yahoo.com (امیر قرجه‌لو)

تعریف ۵.۱. تابع $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ که $I \subseteq \mathbb{R}$ را تابع h -محدب می‌نامیم هرگاه تابع $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)(f(x) + f(y))$$

قضیه ۶.۱. هر تابع محدب میانی پیوسته الزاماً تابع محدب است.

قضیه ۷.۱. تابع حقیقی f در بازه I دارای مشتق دوم نامنفی است اگر و تنها اگر f در روی I محدب باشد.

قضیه ۸.۱. اگر $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابع محدب و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

در صورت پیوسته بودن f این نامساوی شرط معادل برای تابع‌های محدب میانی است.

۲. نتایج اصلی

نامساوی ینسن یکی از مهمترین و اساسی‌ترین نامساوی‌های حوزه ریاضیات است. این نامساوی در تجزیه و تحلیل اطلاعات کاربرد ویژه‌ای دارد و نقش جالبی در نظریه نامساوی‌های توابع محدب و مقعر ایفا می‌کند.

قضیه ۱.۲ (نامساوی کلاسیک ینسن). اگر f تابع محدب بر روی بازه $[a, b]$ باشد آنگاه برای هر $x_i \in [a, b]$ که $1 \leq i \leq n$ و $\lambda \in [0, 1]$ که $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ داریم

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

قضیه ۲.۲. اگر $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ تابع لگاریتم محدب باشد محدب میانی و در نتیجه محدب است.

قضیه ۳.۲. اگر $f : I \rightarrow [0, +\infty)$ یک تابع محدب لگاریتمی روی I و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{f(a+b-x)f(x)} \leq \sqrt{f(a)f(b)}$$

قضیه ۴.۲. اگر $f : I \rightarrow (0, +\infty)$ یک تابع محدب لگاریتمی روی بازه I و $a, b \in I$ و $a < b$ آنگاه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq H(f(a), f(b))$$

که در آن

$$H(f(a), f(b)) = \begin{cases} f(b) & f(a) = f(b) \\ \frac{f(a) - f(b)}{\log f(a) - \log f(b)} & f(a) \neq f(b) \end{cases}$$

قضیه ۵.۲. اگر f یک تابع محدب میانی روی (a, b) و از بالا کراندار باشد f روی بازه (a, b) پیوسته است.

قضیه ۶.۲. اگر f روی بازه (a, b) محدب میانی و $M \subseteq (a, b)$ مجموعه‌ای باشد که دارای اندازه لبگ مثبت باشد و f روی آن از بالا کراندار باشد f بر روی این بازه پیوسته است.

مراجع

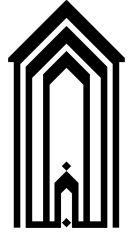
- [1] MW. Alomari, M. Darus and U. S. Kirmaci. *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s -couver functions*. Acta Math. Sci, 31B(4), 1643-1652, 2011.
- [2] V. Darvish. S. S. Dragomir, H. M. Nazari and A. Taghavi. *Some inequalities associated with the Hermite-Hadamard inequalities for operator $/i$ -convex functions*. Acta Math. Appl. Sim-E, 21C(2), 1840-1848, 2017.
- [3] S. S. Dragomir. *The Hermite-Hadamard's type Inequalities for operator convex functions*. Appl. Math. Comput, 218(3), 766-772, 2011.
- [4] SS. Dragomir and C. E. M. Pearce. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA, Monographys, 2002.
- [5] S. S. Dragomir. *Inequalities of Hermite-Hadamard Type for A -Convex Functions on Linear Spaces*. Acta. Math. Univ. Comenion. (N.S), 34(4), 323-341, 2015.
- [6] Hussain, M.I. Bhatti and M. Iqbal. *Hadamard-type inequalities for convex functions I*. Punjab Univ, J. Math, 41(2), 51-60, 2009.
- [7] U.S. Kirmaci, M. Klaricie Bakuln, M.E. and J. Pečarić *Hadamard-type inequalities for s -convex functions*. Appl. Math. Comp, 193, 1-10, 2007.
- [8] M.S. Moslehian, J. Mičić and M. Kian. *An operator inequality and its consequences*. Linear Algebra Appl, 439, 584-591, 2013.
- [9] M.A. Noor, K.I. Noor and MU. Awan. *Integral Inequalities for Two-dimensional pq -convex functions*. Filomat, 30(2), 343-351, 2016.
- [10] M.A. Noor, K.I. Noor and M.U. Awan. *A new Hermite-Hadamard type inequality for a convex functions*. Acta. Math. Univ. Comenian. (N.S), 24(2), 191-197, 2015.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN-273، صص. ۲۳-۲۹

بعضی نتایج درباره‌ی داشتن خاصیت فردهلم عملگرهای WCT روی فضاهای اورلیچ

سعیده شمسی گمچی^آ، سهیلا نجومی^{ب*}

^آگروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، ایران، تهران، S.shamsi@pnu.ac.ir
^بگروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، ایران، تهران، Nojoumi.Soh@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: فضای اورلیچ ۱ عملگرهای امید شرطی وزن دار ۲ عملگرهای فردهلم ۳ عملگرهای نوع شرطی وزن دار ۴	در این مقاله به عملگرهای نوع شرطی وزن دار (WCT) روی فضاهای اورلیچ می‌پردازیم. سپس بعضی شرایط لازم و کافی برای عملگرهای نوع شرطی ضربی بین دو فضای اورلیچ که برد بسته داشته باشند را ارائه خواهیم داد. همچنین فردهلم بودن این نوع عملگرها را بررسی خواهیم نمود.
2020 MSC:	

۱. مقدمه

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و فرض کنید $T: X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. T را فردهلم گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $ker(T)$ از بعد متناهی باشد.

۲) $Ran(T)$ برد بسته باشد.

۳) $coker(T)$ هم بعد متناهی باشد که در آن هم بعد از T چنین تعریف می‌شود:

$$coker T := \frac{Y}{im T}$$

عملگر فردهلم بین دو فضای باناخ دارای برد بسته است. اگر T فردهلم باشد در آن صورت شاخص T را که با نماد $Ind(T)$ نمایش می‌دهیم را طبق ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$Ind(T) := \dim(ker(T)) - \dim(co ker(T)) \in \mathbb{Z}.$$

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و $u \in B(X, Y)$. در این صورت عملگر u را فردهلم نامند اگر $\ker(u)$ با بعد متناهی و $u(X)$ از هم بعد متناهی باشد. قرار می‌دهیم؛

$$\text{nullity}(u) = \text{nul}(u) := \dim(\ker(u)) \quad (\text{پوچ‌ساز } u)$$

همچنین؛

$$\text{defect}(u) = \text{def}(u) := \text{codimension}(u(x))$$

و اگر عملگر کراندر u فردهلم باشد شاخص آن را چنین تعریف می‌کنیم؛

$$\text{index}(u) = \text{ind}(u) := \text{nul}(u) - \text{def}(u). \quad (\text{شاخص } u)$$

عملگر کراندار u فردهلم از X به Y را با نماد $F(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. در واقع یک عملگر فردهلم یک عملگر خطی بین دو فضای باناخ با متناهی بودن هسته (kernel) و هم‌هسته (cokernel) و با بسته بودن برد هم‌ارز است. به مرجع [۱۴، ۱۹] مراجعه شود. تابع $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ را تابع یانگ گویند هرگاه Φ محدب باشد و $\Phi(0) = 0$ و $\Phi \not\equiv 0$ (Φ متحد با صفر نباشد). توجه می‌کنیم که محدب بودن تابع یانگ Φ و شرط $\Phi(0) = 0$ نتیجه می‌دهد؛

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0$$

همچنین شرط تحدب تابع یانگ Φ و این‌که $\Phi \not\equiv 0$ نتیجه می‌دهد؛

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$$

به ازای تابع یانگ Φ اعداد زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$a_\Phi := \sup\{a \geq 0 : \Phi(a) = 0\}, \quad b_\Phi := \inf\{b > 0 : \Phi(b) = \infty\}$$

همچنین تابع یانگ Φ در بازه‌ی $[0, b_\Phi)$ پیوسته، نانزولی روی بازه‌ی $[a_\Phi, b_\Phi)$ اکیداً صعودی است اگر $a_\Phi < b_\Phi$ باشد. فرض کنید $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ تابع یانگ باشد. وارون تعمیم‌یافته (یا وارون راست-پیوسته‌ی) Φ^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi^{-1}(+\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \Phi^{-1}(y), \quad \Phi^{-1}(y) = \inf\{x \geq 0 : \Phi(x) > y\} \quad (y \in [0, +\infty)).$$

به ازای هر $0 \leq x < +\infty$ ، $\Phi(\Phi^{-1}(x)) \leq x$. اگر $\Phi(x) < +\infty$ آن‌گاه $x \leq \Phi^{-1}(\Phi(x))$. همین‌طور اگر (Φ, Ψ) یک زوج از توابع یانگ مکمل باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$x < \Phi^{-1}(x)\Psi^{-1}(x) \leq 2x$$

برای همه‌ی $0 \leq x$ مرجع [۱۷] را ببینید.

اگر Φ تابع یانگ باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم؛

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} \quad (y \in \mathbb{R})$$

Ψ را تابع مکمل Φ می‌نامند. از تعریف واضح است که Ψ تابعی محدب و صعودی و زوج است و به علاوه

$$\Psi(0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \Psi(y) = +\infty.$$

توجه شود همان‌طور که تابع یانگ Ψ ، تابع مکمل تابع Φ است، تابع یانگ مکمل Ψ ، تابع Φ است.

به همین خاطر، زوج (Φ, Ψ) را یک زوج مکمل از توابع یانگ می‌نامند.

از تعریف به راحتی می‌بینیم زوج (Φ, Ψ) در نابرابری:

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

معروف به نابرابری یانگ صدق می‌کند. یک N -تابع یک تابع یانگ است که فقط در صفر، صفر است. فقط مقادیر حقیقی متناهی را می‌گیرد

به طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$ توجه می‌کنیم که $a_\Phi = 0$ و $b_\Phi = \infty$ و مانند آن‌چه در قبل گفته شده Φ روی بازه‌ی

$[0, \infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است. به علاوه مکمل یک N -تابع دوباره یک N -تابع است. [۱] این توابع را توابع نیکوی بانگ یا N -تابع می‌نامند. گوییم تابع بانگ Φ قوی‌تر از تابع بانگ Ψ است و با نماد

$$\Phi \stackrel{\ell}{>} \Psi \quad [\text{یا } \Psi \stackrel{\ell}{<} \Phi]$$

نمایش می‌دهیم هرگاه برای بعضی $a \geq 0, x \geq x_0 > 0$ با $\Psi(x_0) < \infty$ داشته باشیم

$$\Psi(x) \leq \Phi(ax)$$

اگر $x_0 = 0$ برقرار باشد، گوییم Φ به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) قوی‌تر از Ψ است و آن را با نماد $\Psi \stackrel{\alpha}{>} \Phi$ یا $\Phi \stackrel{\alpha}{<} \Psi$ نمایش می‌دهیم. گوییم تابع بانگ Φ در شرط Δ_2 در بی‌نهایت صدق می‌کند، اگر

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x) \quad (x \geq x_0 \geq 0)$$

برای بعضی مقادیر ثابت مانند $k > 0$ و $x_0 \geq 0$ می‌نویسیم $\Phi \in \Delta_2$. همچنین گوییم تابع Φ به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) در شرط Δ_2 صدق می‌کند هرگاه رابطه‌ی بالا برای $x_0 = 0$ برقرار باشد. گوییم تابع بانگ Φ در شرط Δ'_2 (در بی‌نهایت ∞) صدق می‌کند اگر عددی مانند $c > 0$ ($b > 0$) وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &\leq c\Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \geq x_0 \geq 0) \\ (\Phi(bxy)) &\geq \Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \geq x_0 \geq 0) \end{aligned}$$

اگر $x_0 = 0$ آن وقت گوییم که این خاصیت به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) برقرار است. توجه کنید که اگر $\Phi \in \Delta'_2$ آن‌گاه $\Phi \in \Delta_2$. اگر f تابعی اندازه‌پذیر روی X باشد منظور از محمل f عبارت است از

$$S(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}.$$

فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه‌ی σ -متناهی باشد. فضای $L^p(X, \Sigma, \mu)$ تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار است که $L^p(\Sigma)$ -نرم آن‌ها متناهی است یعنی $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ فضای اندازه‌ی $L^p(X, \Sigma, \mu)$ را به‌طور خلاصه $L^p(\Sigma)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$L^p(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \int |f|^p d\mu < \infty, \text{ } f \text{ اندازه‌پذیر است.}\}$$

همچنین مجموعه‌ی تمام توابع Σ -اندازه‌پذیر را با L^0 نشان می‌دهیم.

$$L^0(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ اندازه‌پذیر است.}\}$$

برای تابع Φ داده شده فضای

$$L^\Phi(\mu) = \{f \in L^0(\Sigma) : \exists \lambda > 0, \int_X \Phi(\lambda f) d\mu < \infty\}$$

یک فضای اورلیچ نامیده می‌شود؛ تعریف می‌کنیم

$$N_\Phi(f) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_X \Phi \left(\frac{f}{\lambda} \right) d\mu \leq 1 \right\}$$

$(L^\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ یک فضای خطی نرم‌دار است همچنین $(L^\Phi(\mu), N_\Phi(\cdot))$ یک فضای باناخ است.

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_X \Phi(f/\lambda) d\mu \leq 1 \right\}.$$

زوج $(L^\Phi(\Sigma), \|\cdot\|_\Phi)$ فضای اورلیچ تولید شده توسط تابع بانگ Φ گوییم. اگر تعریف کنیم $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ برای $1 < p < \infty$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\Phi, \quad L^\Phi(X) = L^p(X)$$

عنصر $A \in \Sigma$ با شرط $\mu(A) > 0$ به طوری که برای هر $F \in \Sigma$ اگر $F \subseteq A$ ، آن گاه یا $\mu(F) = 0$ یا $\mu(F) = \mu(A)$ یک اتم به اندازه μ است. در واقع هر فضای اندازه (X, Σ, μ) و σ -متناهی به طور یکتایی به صورت $X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup B$ افزای می شود جایی که $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک مجموعه شمارا دوبه دو مجزا از Σ -اتم ها و B مجزا از هر A_n نا اتمی است. فضای اندازه (X, Σ, μ) بدون اتم فضای اندازه نا اتمی نامیده می شود.

همیشه در یک فضای اندازه σ -متناهی همه اتم ها، اندازه متناهی دارند. فضای اندازه دلخواه (X, Σ, μ) دارای خاصیت زیر مجموعه متناهی است هرگاه هر مجموعه اندازه پذیر با اندازه مثبت آن دارای یک زیر مجموعه اندازه پذیر با اندازه مثبت متناهی باشد.

فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای σ -متناهی باشد در این صورت خانواده ای یکتا مانند A از μ -اتم های دوبه دو مجزا وجود دارد به طوری که $X \setminus \bigcup_{A_n \in \mathcal{A}} A_n$ دارای هیچ اتمی نیست.

اتم های فضای اندازه (X, Σ, μ) را با \mathcal{U} و قسمت نا اتمی را با \mathcal{B} نشان می دهیم.

متناظر با هر σ -زیر جبر σ -متناهی $A \subseteq \Sigma$ عملگر $E^A = E$ عملگر امید شرطی تعریف شده روی فضای توابع اندازه پذیر نامنفی و شرایط زیر به طور یکتا معین می شود [۱]:

۱. $E(f)$ یک تابع A -اندازه پذیر است.

۲. برای هر $A \in \mathcal{A}$ اگر $\int_A f d\mu$ موجود باشد، آن گاه:

$$\int_A f d\mu = \int E(f) d\mu.$$

این عملگر یکی از ابزارهای اصلی در کار ما خواهد بود. لذا بعضی از خواص مهم آن را در زیر می آوریم:

۱. $E^A f$ یک عملگر روی $L^1(\Sigma)$ و $L^\infty(\Sigma)$ است.

۲. E^A خود توان است.

۳. $E^A(L^1(\Sigma)) = L^1(A)$ و $E^A(L^\infty(\Sigma)) = L^\infty(A)$ می تواند روی همه فضاهای الحاقی L^1 و L^∞ به ویژه روی فضاهای اورلیچ

که فضای برداری بین $L^\infty \cap L^1$ و $L^\infty + L^1$ است تعریف شده باشد. اگر باعث سردرگمی نشود به جای $E^A(f)$ می نویسیم $E(f)$.

در خواص زیر فرض بر این است که توابع f و g اعضایی از دامنه تعریف عملگر امید شرطی E هستند.

۴. اگر f و g حقیقی مقدار با شرط $f \leq g$ باشند آن گاه $E(f) \leq E(g)$.

۵. اگر g, A -اندازه پذیر باشد، آن گاه، $E(fg) = E(f)g$.

۶. اگر a تابع مختلط مقدار و f تابع A -اندازه پذیر باشد آن گاه $E(af) = aE(f)$.

۷. $E(1) = 1$.

۸. $E(\Phi(f)) \leq \Phi(E(f))$ جایی که Φ تابع محدب باشد.

۹. اگر $f \geq 0$ آن گاه $E(f) \geq 0$ ، اگر $f > 0$ آن گاه $E(f) > 0$.

۱۰. برای هر $f \geq 0$ ، $S(f) \subseteq S(E(f))$ ، جایی که $S(f)$ محمل f است و $S(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ و $S(E(f))$ کوچکترین مجموعه A -اندازه پذیر شامل $S(f)$ است.

گوئیم زوج (E, Φ) در نوع شرطی تعمیم یافته نابرابری هولدر یا به اختصار نابرابری GCH صدق می کند هرگاه، برای بعضی مقادیر مثبت C و برای هر $f \in L^\Phi(X, \Sigma, \mu)$ و $g \in L^\Psi(X, \Sigma, \mu)$ داشته باشیم

$$E(|fg|) \leq C \Phi^{-1}(E(\Phi(|f|))) \Psi^{-1}(E(\Psi(|g|)))$$

جایی که Ψ مکمل تابع یانگ Φ است. مثال های زیادی از زوج (E, Φ) که در نابرابری GCH صدق می کند در مرجع [۹] قابل مراجعه است. فرض کنید $\mathbb{C} \rightarrow X: u$ تابعی اندازه پذیر مثبت باشد یعنی $u \in L^1_+(X, \Sigma, \mu)$ ضابطه ای که u را به uf نسبت می دهد، یک تبدیل خطی روی $L^0(X)$ تعریف می کند که آن را با M_u نمایش داده و در حالتی که M_u پیوسته باشد، آن را عملگر ضربی ایجاد شده توسط u می خوانیم.

$$M_u(f) = uf$$

$$M_u(f)(t) = u(t)f(t) \quad (t \in X)$$

فرض کنید Φ و Ψ توابع یانگ باشند و $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی (X, Σ, μ) باشد. عملگر امید شرطی ضربی یا به اختصار MCE از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود؛

$$EM_u(f) = E(uf)$$

برای هر $f \in L^\Phi(\Sigma)$ به طوری که $E(uf) \in L^\Psi(A)$ باشد. [۱] در مرجع [۱] بعضی خاصیت‌های عملگر MCE از جمله کران‌داری-بردهسته داشتن عملگرهای امید شرطی ضربی در فضاها‌ی مختلف اورلیچ بررسی شده است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش فرضی را که به ما اجازه می‌دهد که عملگر $T = M_w EM_u, WCT$ یک عملگر کراندار روی فضای اورلیچ $L^\Phi(\mu)$ است را تعیین می‌کنیم.

تعریف ۱.۰۲. فرض کنید Φ یک تابع یانگ باشد و $u, w : X \rightarrow \mathbb{C}$ توابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی (X, Σ, μ) باشند. عملگر نوع شرطی وزن‌دار (عملگر WCT) از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Phi(\Sigma)$ با ضابطه‌ی $wEM_u(f) = wE(uf)$ تعریف می‌شود به طوری که برای هر $f \in L^\Phi(\Sigma)$ داشته باشیم $wE(uf) \in L^\Phi(A)$.

در قضیه بعدی شرطی را که تحت آن عملگر $T = M_w EM_u, WCT$ روی فضای اورلیچ $L^\Phi(\mu)$ کراندار است را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۰۲. فرض کنید (Φ, Ψ) یک زوج از توابع یانگ مکمل باشند به طوری که در شرط نابرابری هولدر- GCH صدق کنند و $T = M_w EM_u$ یک عملگر WCT باشد. اگر $E(\Psi(u)) \in L^\infty(\Sigma)$ و $w\Psi^{-1}(E(\Psi(u))) \in L^\infty(\Sigma)$ آن‌گاه T روی فضای اورلیچ $L^\Phi(\mu)$ عملگری کراندار است.

قضیه ۳.۰۲. فرض کنید Φ تابع یانگ باشد که در شرایط Δ_2 صدق می‌کند. فرض کنید Ψ تابع یانگ مکمل تابع یانگ Φ باشد. اگر $u \in L^\circ(\Sigma)$ تابعی اندازه‌پذیر باشد (می‌دانیم $L^\circ(\Sigma)$ فضای توابع Σ -اندازه‌پذیر روی X است). و (X, Σ, μ) یک فضای اندازه‌ی σ -متناهی باشد و A یک σ -زیرجبر از σ -جبر، Σ به طوری که $A \subset \Sigma$ باشد و (X, A, μ_A) σ -متناهی باشد و $L^\infty(\Sigma) \subseteq L^\Phi(\Sigma) \subseteq L^1(\Sigma)$ در نوع شرطی تعمیم‌یافته‌ی نابرابری هولدر صدق کند.

(الف) اگر عملگر $T = EM_u$ از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی خودش یک به یک و برد بسته باشد آن‌گاه $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $v = \Psi^{-1}E(\Psi(u)) \geq \delta$ تقریباً همه‌جا روی S ، (فرض کنید محمول یا ساپورت تابع اندازه‌پذیر f چنین تعریف شود $S(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$) جایی که $S = S(v)$.

(ب) اگر $S(E(u)) = S(E(\Psi(u)))$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $E(u) \geq \delta$ تقریباً همه‌جا روی S که $S = S(E(\Psi(u)))$ آن‌گاه عملگر EM_u روی $L^\Phi(\Sigma)$ برد بسته است.

قضیه ۴.۰۲. فرض کنید $\Psi < \Phi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع مکمل به ترتیب Φ و Ψ باشند و $\Phi \in \Delta'$ آن‌گاه:

(a) اگر عملگر EM_u از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ یک به یک و برد بسته باشد آن‌گاه داریم؛

۱. $v = 0$ تقریباً همه‌جا روی \mathfrak{B} و مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۲. M_v از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ دارای رتبه متناهی است. جایی که $v = \Psi^{-1}(E(\Psi(|u|)))$ و $S = \{x \in X : v(x) \neq 0\}$ باشد.

(b) فرض کنید:

۱. عملگر EM_u برد بسته دارد.

۲. عملگر EM_u دارای رتبه متناهی است (برد با بعد متناهی است)

۳. $v = 0$ تقریباً همه‌جا روی $B(a.e)$ و مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۴. $E(u) = 0$ تقریباً همه‌جا روی \mathfrak{B} و مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

آن‌گاه

$$(۳) \rightarrow (۲) \rightarrow (۱) \rightarrow (۴).$$

(c) اگر $u \geq 0$ آن‌گاه در قسمت (b) حالت‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) معادلند.

روشن است طبق قضایای قبلی، هیچ عملگر ضربی نوع شرطی نا-صفر بردسته EM_u با $u \geq 0$ از L^Φ به توی L^Ψ زمانی که $\Psi < \Phi$ و Ψ و Φ توابع یانگ باشند و فضای اندازه ناتمی باشد، وجود ندارد.

قضیه ۵.۲. فرض کنید Φ و Ψ توابع یانگ باشند و $\Psi < \Phi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به ترتیب Φ و Ψ باشند. (a) اگر عملگر EM_u از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ یک به یک و برد بسته باشد. آنگاه:

۱. مجموعه $\{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۲. M_v از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ رتبه متناهی دارد. (برد با بعد متناهی است) جایی که $v = \Psi^{-1}(E(\Psi(u)))$ و $S = \{x \in X : v(x) \neq 0\}$.

(b) فرض کنید

۱. عملگر EM_u بردسته دارد.

۲. عملگر EM_u رتبه متناهی دارد. (برد EM_u بعد متناهی است).

۳. مجموعه $N_v = \{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۴. مجموعه $N_{E(u)} = \{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

آنگاه

$$(۴) \rightarrow (۱) \rightarrow (۲) \rightarrow (۳).$$

(c) اگر $u \geq 0$ ، u ، آنگاه در قسمت (b) حالات (۱) و (۲) و (۳) و (۴) معادلند.

در ادامه به تابع A -اندازه پذیر u می پردازیم. در این حالت $E(u) = u$ و $EM_u = M_u|_{L^\Phi(A)}$ می باشد. بنابراین نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۶.۲. فرض کنید Ψ و Φ توابع یانگ باشند. $\Psi < \Phi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به ترتیب Φ و Ψ باشند. اگر $u \in L^\circ(A)$ و EM_u روی $L^\Phi(\Sigma)$ یک به یک باشد. آنگاه عملگر EM_u بردسته دارد اگر و تنها اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $|u| \geq \delta$ تقریباً همه جا روی S که در آن $S = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$ است.

نتیجه ۷.۲. فرض کنید Ψ و Φ توابع یانگ باشند. $\Psi < \Phi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به ترتیب Φ و Ψ باشند. اگر $u \in L^\circ(A)$ و EM_u از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ یک به یک باشد. آنگاه موارد زیر معادلند:

۱. عملگر M_u بردسته دارد.

۲. عملگر M_u دارای رتبه متناهی است. (برد با بعد متناهی است).

۳. $u = 0$ تقریباً همه جا روی B و مجموعه $N_{E(u)} = \{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

در قضیه بعدی توصیفی از فردهلم بودن عملگرهای نوع شرطی ضربی روی فضاها L^Φ وقتی که فضای اندازه نا-اتمی است ارائه خواهیم داد.

قضیه ۸.۲. فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه نا-اتمی باشد. اگر EM_u یک عملگر کراندار از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Phi(\mathcal{A})$ باشد، آنگاه EM_u فردهلم است اگر و تنها اگر EM_u دوسویی است اگر و تنها اگر EM_u وارون پذیر باشد.

بالاخره در گزاره بعدی نشان می دهیم که اگر وجود داشته باشد یک تابع نا-صفر در فضای پوچ EM_u به طوری که محمل آن مجموعه ای نا-اتمی باشد آنگاه EM_u نمی تواند فردهلم باشد.

گزاره ۹.۲. فرض کنید EM_u از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Psi(\Sigma)$ کراندار باشد. اگر $N(EM_u) \cap L^\Phi(B) \neq \emptyset$ آنگاه EM_u نمی تواند فردهلم باشد.

EM_u دارای بردسته است معادل آنست که $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $u(w) \geq \varepsilon$ برای تقریباً همه جا $w \in \Omega$ و طبق [۱۳] می دانیم که اگر هم بعد از برد EM_u متناهی است، آنگاه EM_u پوشاست.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ یک تابع اندازه پذیر باشد به طوری که $u(w) > 0$ برای تقریباً همه جا $w \in \Omega$. اگر $\Phi \in \Delta_2$ (به طور سراسری) و EM_u یک عملگر پیوسته از $L^\Phi(\Sigma)$ به توی $L^\Phi(\Sigma)$ باشد آنگاه شرایط زیر هم ارزند.

۱. EM_u دوسویی است .

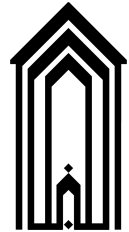
۲. EM_u فردهلم است .

۳. همباعد EM_u متناهی است .

۴. $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $\varepsilon \geq u(w)$ برای تقریباً همه جا $w \in \Omega$.

مراجع

- [1] Y. Estaremi, *Some properties of MCE operators between different orlicz spaces*, European Journal of Mathematics 1375-1387 (2020).
- [2] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic press, INC, 1988.
- [3] R. G. Douglas, *Contractive projections on an L_p space*, Pacific J. Math. 15 (1965), 443-462.
- [4] P. G. Dodds, C. B. Huijsmans, B. Depagter, *Characterizations of conditional expectation type operators*. Pacific Journal of Mathematics, 141 (1990), 55-77.
- [5] Y. Estaremi, *On a class of bounded operators and their ascent and descent*, Re. Cir. Mate. Pal. 69 (2020), 1393-1399.
- [6] Y. Estaremi, *On the algebra of WCE-operators*. Rocky Mountain journal of Mathematics-48 (2018), 501-517.
- [7] Y. Estaremi, *Some classes of weighted conditional type operators and their spectra*. Pasitivity, 19 (2015), 83-93.
- [8] Y. Estaremi, M. R. Jabbarzadeh, *weighted Lambert type operators on L^p-spaces*, Oper Matrices, 101-116 (2013).
- [9] Y. Estaremi, *Multiplication Conditional expectation type operators on orlicz spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 414, 88-98 (2014).
- [10] J. J. Grobler and B. Depagter, *operators representable at multiplication-Conditional expectation operators*, J. operator Theory 48 (2002), 15-40.
- [11] Y. Estaremi, *on properties of Multiplication Conditional type operators between l^p-space*. Filomat, 31 (7), 1933-1940 (2017).
- [12] A. Lamber, *L^p multipliers and nested sigma-algebras*, Oper. Theory Adv. Appl. 104 (1998), 147-153.
- [13] T. Chawziuk, Y. Estaremi, H. Hudzik, *surjectivity, closed Range, and Fredholmness of the composition and Multiplication operators between possibly distinct Orlicz spaces*. Results in mathematics, 75 (3), 1-18, (2020).
- [14] G. J. Murphy, *C* - Algebras and operator Theory*.
- [15] S. T. Moy, *characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces*. Pacific J. Math. 4 (1954) 47-63.
- [16] M. M. Rao, *Conditional measure and applications*, Marcel Dekker, New York, 1993.
- [17] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [18] H. Takagi, K. Yokouchi, *Multiplication and composition operators between two L^p-spaces*, Contemp. Math. 232 (1999), 321-338.
- [19] A. Delfin, *Fredholm operators*. (October 25, 2018) University of Oregon.
- [20] A. C. Zaanan, *Integration*, 2nd ed, North-Holland, Amsterdam, 1967.



یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با مشتق کسری زمانی

علیرضا محمدپور^{*}

آدانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، گروه ریاضی، بابل، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: مشتقات کسری ۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی ۲ آنالیز عددی ۳	در این مقاله، روشی عددی برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با مشتق کسری ارائه شده است. مشتق زمانی بر پایه مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو در نظر گرفته شده و در گسسته‌سازی مساله در سطوح زمانی، طرحی بر مبنای تفاضلات متناهی بکار برده شده و پس از آن، برای حل عددی معادله در هر سطح زمانی، از توابع پایه سینک با تبدیل نمایی دوگانه استفاده شده است. همگرایی اثبات شده و دقت روش معرفی شده با حل چند مثال مورد تایید قرار گرفته است.
26A33 45K05 65M06	2020 MSC:

۱. مقدمه

در سالهای اخیر، موضوع حسابان کسری به دلیل کاربردهای فراوان در زمینه‌های مختلف، به خصوص فیزیک و مکانیک مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. ابزار بسیار مهم و کاربردی برای تشریح پدیده‌هایی با رفتار غیر موضعی که باید با مشتق کسری بیان شوند [۱]. مشتق کسری، عملگری کاملاً غیر موضعی است که در تمام دامنه مورد نظر توسط یک انتگرال تعریف می‌شود و تعمیمی بر مشتق معمول است که در \mathcal{E} همسایگی یک نقطه بطور موضعی تعریف میشود [۲]. محققین زیادی در مقالات خود، مشتق کسری را تعریف نموده‌اند. به عنوان نمونه مشتق کسری کاپوتو^۱، گران والد-لتنیکوف^۲ و ریمان-لیوویل^۳ و غیره [۴، ۷]. این تعاریف، شامل انتگرال با هسته منفرد هستند [۸]. در سالهای اخیر، در مقالات متعددی، از مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو^۴ (CFD) استفاده شده است که برخلاف تعاریف قبلی، شامل انتگرال با هسته نامنفرد است [۲]. این تعریف اولین بار توسط کاپوتو^۵ و فابریزیو^۶ در تشریح مدلی برای رفتار مواد ویسکو الاستیک^۷ ارائه شده است. با رویکردی بر مشتقات کسری با هسته نامنفرد، در این مقاله به حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی به فرم

$$D_{0,t}^{\alpha} u(x, t) = A(x, t)u_x(x, t) + B(x, t)u_{xx}(x, t) + \int_0^t K(t, \xi)G(u(x, \xi))d\xi + F(x, t), \quad (1)$$

^{*}سخنران

پست الکترونیک: mohammadpour@baboliau.ac.ir (علیرضا محمدپور)

¹Caputo²Grunwald-Letnikov³Riemann-Liouville⁴Caputo-Fabrizio⁵Michele Caputo⁶Mauro Fabrizio⁷Viscoelastic materials

به ترتیب با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x, \circ) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (۲)$$

$$u(x, t) = \circ, \quad x \in \partial\Omega, \quad (۳)$$

پرداخته می شود که در آن $0 < \alpha < 1$ مرتبه مشتق کسری و $K(\cdot, \cdot)$ هسته معادله انتگرال، همچنین $\Omega := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ و $\partial\Omega$ مرز آن می باشد. بعلاوه $J := [0, T_0] \subseteq \mathbb{R}$ توابع $A(x, t)$ و $B(x, t)$ توابعی حقیقی و تحلیلی روی $\Omega \times J$ فرض می شوند. در این معادله $G, F(x, t) \in C^1(\Omega \times J)$ تابع "پیوسته لیپ شیتس"^۸ نسبت به u و $\varphi(x)$ تابع هموار روی Ω فرض می شوند. این نوع معادلات در مدل سازی و حل بسیاری از مسایل در فیزیک، ریاضی، بیولوژی و غیره مطرح میشوند [۳، ۶]. عملگر $\mathcal{D}_{\circ, t}^\alpha$ (مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو) به صورت زیر تعریف می شود [۲].

$$\mathcal{D}_{\circ, t}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{\circ}^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau, \quad (۴)$$

که در آن $M(\alpha)$ تابعی است نرمال ساز^۹ بطوریکه $M(0) = M(1) = 1$ لوزادا^{۱۰} و نیتو^{۱۱} در [۴] فرم معادلی برای CFD بصورت

$$\mathcal{D}_{\circ, t}^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\circ}^t \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right) f'(\tau) d\tau. \quad (۵)$$

را برای حل مسایلی از برخی مدل سازیها به کار برده اند. در این مقاله از فرم اخیر CFD استفاده شده است. در ادامه، نخست مختصری در مورد تابع سینک و خواص آن توضیحاتی بیان میشود. در بخش بعدی یک گسسته سازی برای مشتق کسری زمانی ارائه می شود. در بخش چهارم گسسته سازی مکانی و همگرایی روش ارائه شده بررسی خواهد شد. در بخش آخر، طی حل چند مثال، تاییدی برکارایی روش ارائه شده خواهیم داشت.

۲. تابع سینک^{۱۲} و برخی خواص آن

تعریف ۱.۰۲. تابع سینک روی اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است [۱۰].

$$\text{Sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq \circ, \\ 1, & x = \circ. \end{cases}$$

با این تعریف، تابعی مثل $f(x)$ را بصورت

$$f(x) \approx \sum_{r=-N}^N f(rh)S(r, h)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (۶)$$

تقریب میزنیم که در آن

$$S(r, h)(x) = \text{Sinc}\left(\frac{x}{h} - r\right), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (۷)$$

^۸Lipschitz continuous function

^۹Normalization function

^{۱۰}Jorge Losada

^{۱۱}Juan J. Nieto

^{۱۲}Sinc function

به عنوان r -آمین تابع سینک بوده و در آن $h > 0$ طول گام روی فاصله مکانی و وابسته به $N \in \mathbb{Z}^+$ است. از آنجا که تابع سینک روی کل \mathbb{R} تعریف می شود، جهت تقریب تابع $f(x)$ روی بازه دلخواه $Y = [a, b]$ ، در (۶) تغییر متغیر $x = \phi(t)$ را با تبدیل

$$\phi(t) = \frac{b-a}{\pi} \tanh\left(\frac{\pi}{\pi} \sinh(t)\right) + \frac{b+a}{\pi}, \quad (8)$$

و معکوس آن

$$t = \psi(x) = \log\left(\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{x-a}{b-x}\right) + \sqrt{1 + \left\{\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right\}^2}\right). \quad (9)$$

بکار میگیریم. ما حاصل این تغییر، درونیابی تابع $f(x)$ روی Y در (۶) را بصورت

$$f(x) \approx \mathcal{F}_N(x) = \sum_{r=-N}^N f(\phi(rh)) \mathcal{S}_r(x).$$

خواهد داد که در آن $\mathcal{S}_r(x) = S(r, h)(\psi(x))$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید \mathcal{B} دامنه پیوسته و ساده، $\partial \mathcal{B}$ مرز آن، $Y \subset \mathcal{B}$ و ϑ عددی ثابت و مثبت باشد. برای همه توابع تحلیلی f روی \mathcal{B} تعریف می کنیم:

$$\mathbf{L}_\vartheta(\mathcal{B}) = \{f : |f(z)| \leq C|Q^\vartheta(z)|, \quad z \in \mathcal{B}\},$$

که در آن C ثابت و $Q(z) = (z-a)(b-z)$ به ازای $d > 0$ فرض کنیم

$$\mathcal{B}_d = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| < d\},$$

اگر ϕ یک نگاشت همدیس از \mathcal{B} بروی \mathcal{B}_d باشد بطوریکه $\phi(a) = -\infty$ و $\phi(b) = \infty$ ، دامنه $\phi(\mathcal{B}_d)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(\mathcal{B}_d) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left| \arg\left(\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{z-a}{b-z}\right) + \sqrt{1 + \left\{\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)\right\}^2}\right) \right| < d\right\},$$

قضیه ۳.۲. [۷] فرض کنیم $f \in \mathbf{L}_\vartheta(\phi(\mathcal{B}_d))$ که در آن $0 < d < \frac{\pi}{\vartheta}$. اگر N یک عدد صحیح مثبت و

$$h = N^{-1} \log\left(\frac{\vartheta d N}{\vartheta}\right)$$

، آنگاه یک عدد ثابت C مستقل از N وجود دارد بطوری که

$$\max_{x \in Y} |f(x) - \mathcal{F}_N(x)| \leq C \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\vartheta d N / \vartheta)}\right). \quad (10)$$

قضیه ۴.۲. [۷] اگر مفروضات قضیه ۳.۲ برقرار باشد، آنگاه به ازای $n = 1, 2, \dots, m$ ، ثابت C مستقل از N وجود دارد بطوری که

$$\sup_{x \in Y} \left| f^{(n)}(x) - \frac{d^n}{dx^n} (\mathcal{F}_N(x)) \right| \leq \frac{c N^n}{(\log(\vartheta d N / \vartheta))^n} \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\vartheta d N / \vartheta)}\right).$$

ملاحظه ۵.۲. در بخش مربوط به گسسته سازی مکانی، لازم می شود که مشتقات تابع $S(i, h)(\phi^{-1}(x))$ را در نقاط مش $x_j = \phi(jh)$ با تابع همدیس ϕ محاسبه کنیم.

با در نظر گرفتن $\psi = \phi^{-1}$ و $\delta_i(x) = S(i, h)(\phi^{-1}(x))$ در هر نقطه مش $x = x_j$ برای نمایش مشتق k -ام $S_i(x)$ نسبت به ψ از نماد زیر استفاده می کنیم.

$$\delta_{ij}^{(k)} = h^k \frac{d^k}{d\psi^k} [S_i(x)]|_{x=x_j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

بخصوص به ازای $k = 0, 1, 2$ مقادیر مشتق عبارتند از [۵]

$$\delta_{ij}^{(0)} \equiv [S_i(x)]|_{x=x_j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{(1)} \equiv h \frac{d}{d\psi} [S_i(x)]|_{x=x_j} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \frac{(-1)^{j-i}}{j-i}, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{(\nu)} \equiv h^\nu \frac{d^\nu}{d\psi^\nu} [S_i(x)]|_{x=x_j} = \begin{cases} \frac{-\pi^\nu}{\nu}, & i = j, \\ \frac{-\nu(-1)^{j-i}}{(j-i)^\nu}, & i \neq j. \end{cases}$$

۳. گسسته سازی مشتق کسری زمانی کاپوتو-فابریزیو

فرض کنیم

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t$$

نقاط مش فاصله زمانی باشد با طول گام $\tau = \frac{T_0}{N_t}$ و $u^n(x) = u(x, t_n)$ ، $u_x^n(x) = u_x(x, t_n)$ و $u_{xx}^n(x) = u_{xx}(x, t_n)$ به ترتیب تقریب توابع $u(x, t)$ ، $u_x(x, t)$ و $u_{xx}(x, t)$ در هر نقطه $t = t_n$ باشند.

برای گسسته سازی مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو از لم زیر استفاده می کنیم که اثبات آن در [۱۱] آمده است.

لم ۱.۳. [۱۱] فرض کنیم $u(x, t)$ تابعی در $C(\Omega)$ باشد و $0 < \alpha < 1$. در این صورت تقریب زیریک تقریب مرتبه دوم است.

$$\mathcal{D}_{0, t_{n+1}}^\alpha u(x, t) \cong \frac{\eta}{\alpha\tau} \sum_{j=0}^n \omega_j (u^{n+1-j}(x) - u^{n-j}(x)) + \mathcal{O}(\tau^\alpha), \quad (11)$$

که در آن

$$\omega_j = \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \tau j\right), \quad (12)$$

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \tau\right). \quad (13)$$

جهت نیل به فرم گسسته معادله (۱)، در انتگرال واقع در سمت راست این معادله، بجای تابع $G(u(x, \cdot))$ یک درونیابی خطی به فرم زیر قرار می دهیم:

$$G(u(x, t)) \cong s(x, t) = \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} G(u(x, t_k)) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} G(u(x, t_{k+1})). \quad (14)$$

انتگرال مورد نظر بصورت زیر تقریب خواهد شد.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_{n+1}} K(t_{n+1}, \xi) G(u(x, \xi)) d\xi &\cong \int_0^{t_{n+1}} K(t_{n+1}, \xi) s(x, \xi) d\xi \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{n+1}, \xi) s(x, \xi) d\xi \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{n+1}, \xi) \frac{\xi - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} d\xi \right) G(u(x, t_k)) \\
 &+ \sum_{k=0}^n \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{n+1}, \xi) \frac{\xi - t_k}{t_{k+1} - t_k} d\xi \right) G(u(x, t_{k+1})) \\
 &= \sum_{k=0}^n (p_{n+1,k} G(u(x, t_k)) + q_{n+1,k} G(u(x, t_{k+1}))),
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن ضرایب $p_{n+1,k}$ و $q_{n+1,k}$ از انتگرال های ذیل محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned}
 p_{n+1,k} &:= \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{n+1}, \xi) \frac{\xi - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} d\xi, \\
 q_{n+1,k} &:= \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_{n+1}, \xi) \frac{\xi - t_k}{t_{k+1} - t_k} d\xi.
 \end{aligned}$$

اکنون، با جاگذاری (۱۱) و (۱۵) در (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \gamma [u^{n+1}(x) - u^n(x) + \sum_{j=1}^n \omega_j (u^{n+1-j}(x) - u^{n-j}(x))] = \\
 A(x, t_{n+1}) u_x^{n+1}(x) + B(x, t_{n+1}) u_{xx}^{n+1}(x) + \sum_{l=0}^n \left(p_{n+1,l} G(u^l(x)) + q_{n+1,l} G(u^{l+1}(x)) \right) + F(x, t_{n+1}),
 \end{aligned}$$

که در آن $\gamma = \frac{\eta}{\alpha \tau}$

نتیجه اینکه، برای محاسبه $u^{n+1}(x)$ بصورت زیر می توانیم ارایه نماییم:

برای $n = 0$:

$$\gamma u^1(x) - A(x, t_1) u_x^1(x) - B(x, t_1) u_{xx}^1(x) - F(x, t_1) - q_{1,0} G(u^1(x)) = \gamma u^0(x) + p_{1,0} G(u^0(x)), \tag{۱۶}$$

و برای $n > 0$:

$$\begin{aligned}
 \gamma u^{n+1}(x) - A(x, t_{n+1}) u_x^{n+1}(x) - B(x, t_{n+1}) u_{xx}^{n+1}(x) - F(x, t_{n+1}) - q_{n+1,n} G(u^{n+1}(x)) = \\
 \gamma u^n(x) - \gamma \sum_{l=1}^n \omega_l (u^{n-l+1}(x) - u^{n-l}(x)) + p_{n+1,0} G(u^0(x)) + \\
 \sum_{l=1}^n (p_{n+1,l} + q_{n+1,l-1}) G(u^l(x)),
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

البته با شرایط اولیه و مرزی

$$u^{\circ}(x) = \varphi(x), \quad (18)$$

$$u^n(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

همانطور که ملاحظه می شود، در طرح فوق، برای رسیدن به جواب معادله (۱) با شرایط (۲) و (۳)، باید به ازای هر سطح زمانی $t = t_n$ یک معادله دیفرانسیل معمولی حل شود. در بخش بعدی، با استفاده از تابع سینک، جواب عددی برای معادلات دیفرانسیل ذکر شده محاسبه می کنیم.

۴. گسسته سازی مکانی

جواب تقریبی (۱۷) روی بازه (a, b) را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$u^n(x) = \sum_{i=-N}^N d_i^n S_i(x). \quad (20)$$

که در آن $S_i(x) = S(i, h)(\phi^{-1}(x))$. فرض کنید به ازای $r = 0, 1, 2$ ، همان نمادهایی باشند که در (۵.۲) آمده اند. از آنجا که $\delta_{ij}^{(0)} = \delta_{ji}^{(0)}$ ، لذا در هر نقطه $x = x_k$ داریم:

$$u^n(x_k) = \sum_{i=-N}^N d_i^n \delta_{ki}^{(0)}. \quad (21)$$

از معادله (۲۰) نسبت به x مشتق میگیریم:

$$u_x^n(x) = \sum_{i=-N}^N d_i^n \psi'(x) \frac{d}{d\psi} S_i(x), \quad (22)$$

با توجه به خاصیت $\delta_{ik}^{(1)} = -\delta_{ki}^{(1)}$ بازای هر نقطه $x = x_k$ بدست می آوریم:

$$u_x^n(x_k) = \sum_{i=-N}^N d_i^n \psi'(x_k) \frac{-\delta_{ki}^{(1)}}{\tau}, \quad (23)$$

به همین ترتیب برای مشتق مرتبه دوم در هر نقطه $x = x_k$ نیز خواهیم داشت:

$$u_{xx}^n(x_k) = \sum_{i=-N}^N d_i^n \left(\psi''(x_k) \frac{-\delta_{ki}^{(1)}}{\tau} + (\psi'(x_k))^2 \frac{\delta_{ki}^{(2)}}{\tau^2} \right). \quad (24)$$

۵. تحلیل همگرایی

قضیه ۱.۵. فرض کنیم $u^n(x)$ جواب دقیق (۱۷) باشد. اگر $u_N^n(x)$ یک جواب تقریبی حاصل از اجرای طرح ارائه شده با جمله باقی مانده $R_N^n(x)$ باشد. آنگاه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N^n(x) \rightarrow 0$$

اثبات. با جاگذاری جواب تقریبی $u_N^n(x)$ در (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} \gamma u_N^{n+1}(x) - A(x, t_{n+1}) \frac{d}{dx} (u_N^{n+1}(x)) - B(x, t_{n+1}) \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} (u_N^{n+1}(x)) - q_{n+1,n} G(u_N^{n+1}(x)) = \\ \gamma u_N^n(x) - \gamma \sum_{i=1}^n \omega_i (u_N^{n-i+1}(x) - u_N^{n-i}(x)) + p_{n+1,0} G(u_N^0(x)) \\ + \sum_{i=1}^n (p_{n+1,i} + q_{n+1,i-1}) G(u_N^i(x)) + F(x, t_{n+1}) + R_N^n(x), \end{aligned} \quad (25)$$

در اینجا $R_N^n(x)$ تابع باقی مانده بوده و بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} R_N^n(x) = -\gamma e_N^{n+1}(x) + A(x, t_{n+1}) \frac{d}{dx} (e_N^{n+1}(x)) + B(x, t_{n+1}) \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} (e_N^{n+1}(x)) + q_{n+1,n} \mathcal{Y}_N^{n+1}(G)(x) \\ + \gamma e_N^n(x) - \gamma \sum_{i=1}^n \omega_i (e_N^{n-i+1}(x) - e_N^{n-i}(x)) \\ + \sum_{i=1}^n (p_{n+1,i} + q_{n+1,i-1}) \mathcal{Y}_N^i(G)(x), \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن

$$e_N^i(x) = u^i(x) - u_N^i(x)$$

و

$$\mathcal{Y}_N^i(G)(x) = G(u^i(x)) - G(u_N^i(x)).$$

از (۲۶) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} |R_N^n(x)| \leq |\gamma| |e_N^{n+1}(x)| + |A(x, t_{n+1})| \left| \frac{d}{dx} (e_N^{n+1}(x)) \right| + |\lambda q_{n+1,n}| |\mathcal{Y}_N^{n+1}(G)(x)| \\ + |B(x, t_{n+1})| \left| \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} (e_N^{n+1}(x)) \right| + |\gamma| |e_N^n(x)| + |\gamma| \sum_{i=1}^n |\omega_i| (|e_N^{n-i+1}(x)| + |e_N^{n-i}(x)|) \\ + \sum_{i=1}^n |(p_{n+1,i} + q_{n+1,i-1})| |\mathcal{Y}_N^{n+1}(G)(x)|. \end{aligned} \quad (27)$$

از قضیه ۳.۲ داریم:

$$|e_N^i(x)| \leq c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (28)$$

تابع G در شرط لیبشیتس صدق می کند. بنابراین، ثابت مثبتی مثل $\hat{\theta}$ وجود دارد بطوریکه:

$$|G(u^i(x)) - G(u_N^i(x))| \leq \hat{\theta} |u^i(x) - u_N^i(x)|, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (29)$$

از این نامساوی، (۲۸) و قضیه ۳.۲ نامساوی زیر حاصل می شود:

$$|\mathcal{Y}_N^i(G)(x)| \leq \hat{\theta} c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (30)$$

این بار از قضیه ۴.۲ استفاده میکنیم برای حصول دو نتیجه زیر:

$$\left| \frac{d}{dx} (e_N^{n+1}(x)) \right| = |u_x^{n+1}(x) - \frac{d}{dx} u_N^{n+1}(x)| \leq \frac{c_\gamma N}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right). \quad (31)$$

$$\left| \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} (e_N^{n+1}(x)) \right| = |u_x^{n+1} x(x) - \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} u_N^{n+1}(x)| \leq \frac{c_\gamma N^\gamma}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right). \quad (32)$$

اجازه دهید که فرض کنیم $A_1 = \max_{i=-N, \dots, N} |A(x_i, t_{n+1})|$ و $B_1 = \max_{i=-N, \dots, N} |B(x_i, t_{n+1})|$. از این فرض و (۲۸)-(۳۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} |R_N^n(x)| &\leq |\gamma| c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) + \frac{A_1 c_\gamma N}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) \\ &+ |q_{n+1, n}| \hat{\theta} c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) + \frac{B_1 c_\gamma N^\gamma}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) \\ &+ |\gamma| c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) + |\gamma| \sum_{i=1}^n |\omega_i| \gamma c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^n |(p_{n+1, i} + q_{n+1, i-1}) \hat{\theta} c_1 \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right) \\ &\leq \left(\mu + \frac{c_\gamma N^\gamma}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \right) \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\lambda_\gamma = \sum_{i=1}^n |(p_{n+1, i} + q_{n+1, i-1})|$ و $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n |\omega_i|$ داریم:

$$\begin{aligned} |R_N^n(x)| &\leq \left(|\gamma| c_1 + \frac{A_1 c_\gamma N}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} + |q_{n+1, n}| \hat{\theta} c_1 + \frac{B_1 c_\gamma N^\gamma}{(\log(\gamma d N / \vartheta))^\gamma} \right. \\ &\left. + |\gamma| c_1 + \gamma |\lambda_1 c_1 + \hat{\theta} c_1 \lambda_\gamma| \right) \exp\left(\frac{-\pi d N}{\log(\gamma d N / \vartheta)}\right). \end{aligned}$$

□

بنابراین $R_N^n(x) \rightarrow 0$ وقتی $N \rightarrow \infty$ و اثبات تمام است.

۶. کاربرد و مثال‌ها

در این بخش، با مطرح کردن چند مثال، دقت روش ارائه شده در بخش‌های قبل را، با مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق و محاسبه خطاها ($L_\infty - Norm$ و $L_\gamma - Norm$) مورد بررسی قرار می‌دهیم. در تمامی این مثال‌ها فرض می‌کنیم: $\alpha = 0.5$, $d = \frac{\pi}{11}$ و $h = \log(\frac{\pi N}{\varphi})/N$.

مثال ۱.۰۶. به عنوان اولین مثال، مساله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{D}_{\alpha, t}^\alpha u(x, t) = t u_x(x, t) + (x + 1) u_{xx}(x, t) + \int_0^t e^{t-\xi} u(x, \xi) (1 - u(x, \xi)) d\xi + F(x, t), \quad (33)$$

که در آن $\Omega \times J := [0, 1] \times [0, 1]$ و

$$\begin{aligned} F(x, t) &= (\gamma + x - x^\gamma + \gamma x^\gamma - \gamma x^\gamma) t - (1 - \gamma x + x^\gamma - \gamma x^\gamma + x^\gamma) t^\gamma \\ &+ x(1 - e^{-t})(\gamma - x - \gamma x^\gamma + \gamma x^\gamma). \end{aligned}$$

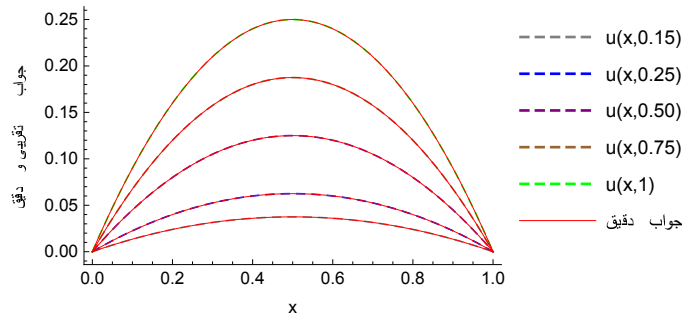
جواب دقیق این معادله عبارتست از:

$$u(x, t) = x(1 - x)t.$$

نرم-۲ خطای مطلق در سطوح زمانی مختلف، در جدول ۱ درج شده است. با توجه به مقادیر مختلف N عملاً همگرایی روش ملاحظه می‌شود. شکل ۱ نشان می‌دهد که جواب تقریبی بدست آمده از روش ذکر شده و جواب دقیق از انطباق بسیار قابل قبول برخوردارند.

جدول ۱: نرم-۲ خطای مطلق، به ازای $\tau = 0.01$ و مقادیر مختلف N در سطوح زمانی مختلف برای مثال ۱.۶.

$N = 20$	$N = 15$	$N = 10$	$N = 5$	t
8.54415×10^{-8}	8.29315×10^{-7}	5.32012×10^{-6}	1.78673×10^{-3}	0.15
1.33801×10^{-8}	1.38580×10^{-7}	8.70213×10^{-6}	2.91995×10^{-3}	0.25
2.42371×10^{-7}	2.97068×10^{-7}	1.76667×10^{-6}	5.91953×10^{-3}	0.50
3.21269×10^{-7}	4.61777×10^{-6}	2.61173×10^{-5}	8.72962×10^{-3}	0.75
7.81308×10^{-7}	6.43542×10^{-6}	3.46913×10^{-5}	1.15774×10^{-2}	1.00



شکل ۱: جواب دقیق و تقریبی به ازای $n = 16$ و $\tau = 0.01$ برای مثال ۱.۶

مثال ۲.۶. در این مثال، فرض کنیم برای معادله (۱) داشته باشیم: $A(x, t) = (x + t^2)$ ، $B(x, t) = x$ ، $\varphi(x) = (5 - x)\sin x$ و $(x, t) \in [0, 5] \times [0, 1]$. بعلاوه توابع داخل انتگرال معادله نیز $K(t, \xi) = t + \xi$ و $G(u(x, \xi)) = u(x, \xi)$ باشند. تحت این شرایط، جواب دقیق معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = (5 - x) \sin x e^{-at}.$$

شکل ۲ جواب دقیق و تقریبی، همچنین خطای مطلق را به ازای $n = 20$ و $\tau = 0.02, 0.01, 0.005$ نشان می دهد، که حاکی از همگرایی بسیار خوب روش ارائه شده است. در جدول ۲ جواب دقیق و تقریبی به ازای $N = 20$ ، $\tau = 0.1, 0.05, 0.025$ در $t = 1$ درج شده است.

جدول ۲: جواب دقیق و تقریبی به ازای $N = 20$ در $t = 1$ برای مثال ۲.۶

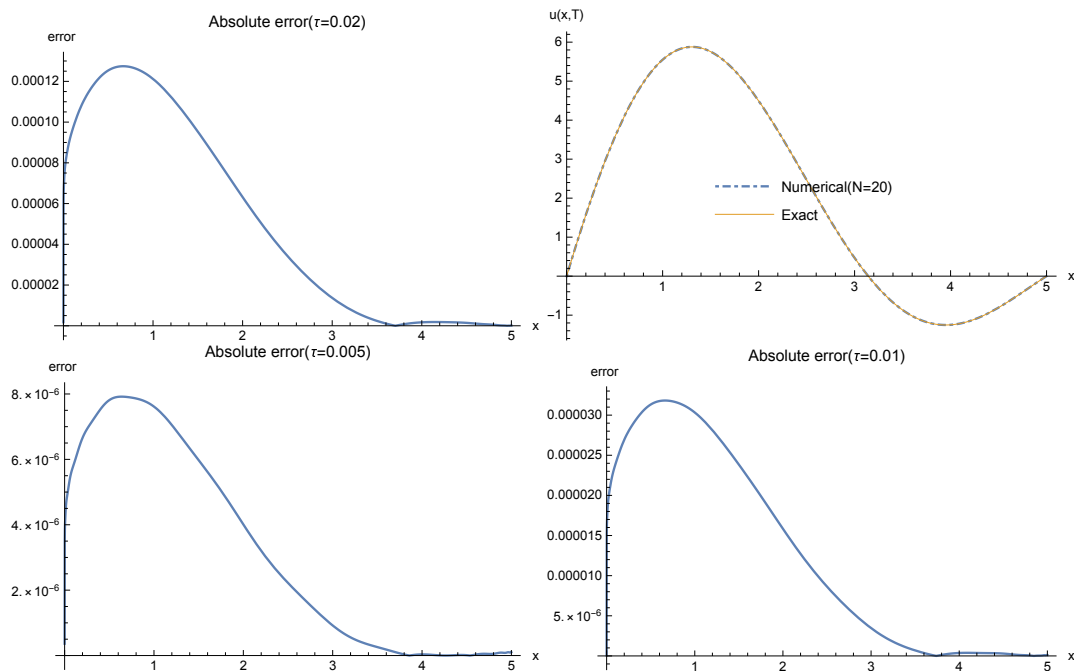
x	جواب تقریبی			جواب دقیق
	$\tau = 0.025$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	
0.5	3.55717	3.55776	3.65012	3.55698
1.5	5.76622	5.75667	5.75846	5.75607
2.5	2.46684	2.46700	2.46764	2.46678
3.5	-0.867512	-0.867501	-0.867459	-0.867516
4.5	-0.80584	-0.805847	-0.805875	-0.805837

مثال ۳.۶. در مثال سوم، حل معادله

$$\mathcal{D}_{0,t}^{\alpha} u(x, t) = (x + t)u_x(x, t) + u_{xx}(x, t) + \int_0^t te^{\xi} (u_x(x, \xi) + u_{xx}(x, \xi)) d\xi + F(x, t), \quad (34)$$

را هدف قرار می دهیم که در آن $\Omega \times J := [0, 1] \times [0, 1]$ و

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(0.75e^{-t} + te^{-t} (-3x^{\frac{t}{2}} + 3.5x^t) + t^2 (0.75 - \sqrt{x} + 1.5x) \right)$$



شکل ۲: جواب دقیق، تقریبی و خطای مطلق به ازای $n = 20$ و $\tau = 0.02, 0.01, 0.005$ برای مثال ۲.۶

جدول ۳: مرتبه همگرایی و نرم های خطای مطلق به ازای $N = 20$ در $t = 0.5$ برای مثال ۲.۶

τ	نرم- ∞	نرم-۲	مرتبه همگرایی
0.02	4.02087×10^{-7}	7.43835×10^{-7}	-
0.01	2.41225×10^{-7}	3.14003×10^{-7}	۲,۱۴۹۵۳
0.005	4.12951×10^{-8}	5.71965×10^{-8}	۲,۳۲۴۷۵
0.0025	5.47607×10^{-9}	7.83107×10^{-9}	۲,۵۱۰۳۱

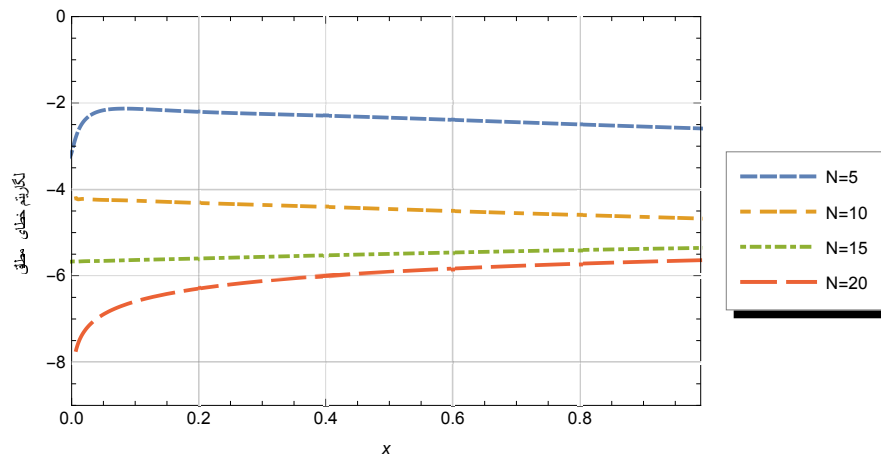
در شکل ۳ لگاریتم خطای مطلق به ازای $N = 5, 10, 15, 20$ در $t = 1$ نشان داده شده است. در جدول ۳ به ازای $N = 20$ و $\tau = 0.02, 0.01, 0.005, 0.0025$ نرم خطاها آورده شده است. در این جدول مرتبه همگرایی با در نظر گرفتن:

$$\log_2 \frac{e_\tau(h, \tau)}{e_\tau(h, \frac{\tau}{2})}$$

محاسبه شده است.

۷. نتیجه

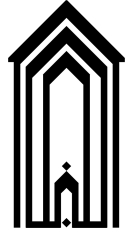
در این مقاله، جهت حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری زمانی کاپوتو-فابریزیو، روشی بر اساس تفاضلات متناهی ارائه گردیده است. جهت حل معادلات دیفرانسیل حاصل از گسسته سازی در هر مرحله زمانی، توابع پایه سینک بکار گرفته شده است. قضیه ای برای همگرایی روش ارائه شده، بیان و اثبات شده است. در پایان، دقت و همگرایی روش ارائه شده، با حل چند مثال نشان داده شده است.



شکل ۳: لگاریتم خطای مطلق برای مثال ۳.۶

مراجع

- [1] K. S. Al-Ghafri, A. T. Alabdala, S. S. Redhawn, O. Bazighifan, A. Hasan Ali and L. F. Iambor. Symmetrical Solution for Non-Local fractional Integro- Differential Equation via Caputo-Katogampola Derivatives. ,Symmetry ,15 .662 .2023
- [2] M. Caputo and M. Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progress in Fractional Differentiation and Applications 1 (2) ,73-85 .2015
- [3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science, New York, .2006
- [4] J. Losada and J. J. Nieto. Properties of a New Fractional Derivative without Singular Kernel. Progress in Fractional Differentiation and Applications 1 (2) ,87-92 .2015
- [5] J. Lund and K. L. Bowers. Sinc methods for quadrature and differential equations. SIAM, Philadelphia, .1992
- [6] F. Mainardi. Fractional calculus and waves in linear viscoelatiity: An introduction to mathematical models. World Scientific Publishing, .2010
- [7] T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara. Error estimates with explicit constants for Sinc approximation, Sinc quadrature and Sinc indefinite integration. Mathematical Engineering Technical Reports, The University of Tokyo, .2009
- [8] I. Podlubny. Fractional Diferential Equations. Academic Press, San Diego, Calif, USA, .1999
- [9] S. Santra and J. Mohapatra. A novel finite difference technique with error estimate for time fractional partial integro- differential equation of volterra type. Journal of Computational and Applied Mathematics, ,400 ,11 ,37-46 .2022
- [10] F. Stenger. Numerical methods based on Sinc and analytic functions. Springer, New York, .1993
- [11] A. Taghavi, A. Babaei and A. Mohammadpour. On the Stable Implicit Finite Differences Approximation of Diffusion Equation with the time Fractional Derivative without Singular Kernel. Asian-European Journal of Mathematics. doi: 10.1142/S1793557120501119.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، NA-241، صص. ۴۱-۴۹

حل عددی - تحلیلی معادله کان-هیلیارد با مشتق کسری زمانی

علیرضا محمدپور^{*}، آ

آ دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، گروه ریاضی، بابل، ایران

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله، روشی بر پایه تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده برای یافتن جواب تحلیلی - عددی معادله کان-هیلیارد با مشتق کسری زمانی ارائه شده است. جواب حاصل از این روش، با جواب بدست آمده از روش آنالیز هموتوبی، با در نظر گرفتن مرتبه های مختلف مشتق کسری، مورد مقایسه و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می دهد که علی رغم ساده تر بودن روش، جواب های حاصل از دو روش مطابقت بسیار خوبی دارند.	واژه های کلیدی : مشتقات کسری ۱ معادلات انتشار ۲ تبدیل دیفرانسیل ۳
	2020 MSC: 26A33 35K57 35A22

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده های فیزیکی، از فعل و انفعالات ما بین همرفت - انتشار^۱ و واکنش^۲ ناشی می شوند. در مدل سازی چنین پدیده هایی، معادلات با مشتقات جزئی (PDEs) غیر خطی حاصل می شوند که تفکرات جدیدی در تعاملات انتشار و غیرخطی بودن ارائه می نمایند. اهمیت جواب های تحلیلی- عددی چنین مسایل انتشار غیرخطی را می توان در نظریه سالیتون^۳ یافت [۱۴]. در سالهای اخیر، روش های مختلفی از سوی محققین برای حل انواع (PDEs) ارائه شده است. به عنوان نمونه، روش تجزیه آدومیان^۴ [۱۶]، روش آشفستگی هموتوبی^۵ [۳]، روش تکراری تغییرات^۶ [۴]، روش آنالیز هموتوبی^۷ [۶]، روش تبدیل دیفرانسیل^۸ [۹] و غیره. در تشریح پدیده های غیر عادی نفوذ، معمولاً معادلات نفوذ با مشتق کسری خیلی بهتر آن را توصیف می کنند [۱۵]. از این رو، موضوع مشتق و انتگرال کسری، بخش قابل توجهی از مقالات محققین را به خود اختصاص داده است. محققین زیادی در مقالات خود، مشتق کسری را تعریف نموده اند. به عنوان نمونه مشتق کسری کاپوتو^۹، گران والد-لتنیکوف^{۱۰} و ریمان-لیوویل^{۱۱} و غیره [۱۳]. در این مقاله از روش تبدیل دیفرانسیل

^{*}سخنران

پست الکترونیک: mohammadpour@baboliau.ac.ir (علیرضا محمدپور)

¹ Convection-diffusion

² Reaction-diffusion

³ Soliton theory

⁴ Adomian decomposition method (ADM)

⁵ Homotopy perturbation method (HPM)

⁶ variational iteration method (VIM)

⁷ homotopy analysis method (HAM)

⁸ Differential transform method (DTM)

⁹ Caputo

¹⁰ Grunwald-Letnikov

¹¹ Riemann-Liouville

اصلاح شده^{۱۲} که از تبدیل ديفرانسیل برگرفته شده، استفاده شده است.

روش تبدیل ديفرانسیل در سال ۱۹۸۶ توسط ژو^{۱۳} برای حل برخی مسائل خطی و غیر خطی در تحلیل مدارهای الکتریکی ارائه شد [۱۷]. این روش برای یافتن جواب‌های معادلات ديفرانسیل معمولی و معادلات ديفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و غیر خطی توسعه داده شد [۱، ۱۰]. خوب است در اینجا بیان کنیم که، جواب‌هایی که از روش اخیر بدست می‌آیند، بصورت تحلیلی، و یا تحلیلی-عددی و گاهی اوقات هم به صورت فرم بسته هستند [۱۷، ۱۰].

در این مقاله، به حل معادله کان-هیلیارد با مشتق کسری زمانی^{۱۴} پرداخته می‌شود. در سال ۱۹۵۸ میلادی معادله کان-هیلیارد (C-H) توسط دو دانشمند آمریکایی^{۱۵} [۲] ارائه گردید. این معادله، یکی از معادلات پراهمیت فیزیک ریاضی است که در بررسی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، بعنوان نمونه تجزیه اسپینودال^{۱۶}، جداسازی مرحله ای^{۱۷} و دینامیک ترتیب مرحله^{۱۸} مطرح می‌شود.

یکی از کاربردهای این معادله فیزیک ریاضی، توصیف فرآیند جداسازی مرحله ای می‌باشد که در آن، دو جزء یک سیال دوتایی بطور خود به خود از هم جدا می‌شوند. اخیراً چند محقق در جفت کردن بخش جداسازی معادله ناویر استوکس^{۱۹} جریان سیال، با فرض $u(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ به عنوان غلظت سیال، معادله ذکر شده را بدین صورت مطرح نمودند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^{\alpha}(u^{\gamma} - u - \gamma\nabla^{\alpha}u) + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \omega u(1 - u), \quad (1)$$

که در آن، جمله دوم سمت راست موسوم به جمله فرارفت^{۲۰} و قسمت آخر نیز جمله واکنش^{۲۱} نامیده می‌شود. در این معادله D ضریب انتشار و ω, β, γ ضرایب ثابتی هستند که در مدل‌های مختلف در نظر گرفته می‌شوند.

در سال‌های اخیر، مدل سازی سیستم‌های غیر خطی، محبوبیت فوق العاده‌ای در میان مهندسان و محققین فیزیک و مکانیک پیدا نموده است. زیرا اغلب پدیده‌ها در طبیعت با سیستم‌های غیر خطی بیان می‌شوند. بخصوص، مسائل غیر خطی با مشتق کسری، بخاطر ماهیت تصادفی خود، در ابعاد گسترده تری مورد تحقیق قرار گرفته‌اند. معادلات انتشار کسری، با جایگذاری مشتق کسری از مرتبه α که $0 < \alpha < 1$ بجای مشتق مرتبه اول حاصل می‌شوند. با در نظر گرفتن اینکه اینها ماهیت غیر مارکوفی^{۲۲} دارند، حرکت براونی کسری^{۲۳} ایجاد می‌کنند و خاصیت حافظه^{۲۴} دارند، تحقیق روی ویژگی‌های چنین سیستم‌هایی، بسیار بیشتر از قبل شده است. با عنایت به مواردی که خلاصه وار بیان شد، هدف ما در این مقاله، حل حالت کسری معادله کان-هیلیارد:

$$D_t^{\alpha}u(x, t) = D\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}(u^{\gamma} - u - \gamma\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}}) + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \omega u(1 - u), \quad (2)$$

با شرط اولیه

$$u(x, t) = x. \quad (3)$$

می‌باشد، که در آن D_t^{α} مشتق کسری کاپوتو بوده و در بخش بعدی تعریف آن آورده می‌شود [۸، ۱۳].

۲. مختصری از حسابان کسری

تعریف ۱.۰.۲. می‌گوییم تابع حقیقی $f(x)$ ($x > 0$) متعلق به $C_{\mu}(\mu \in \mathbb{R})$ است هرگاه، عدد حقیقی q بیشتر از μ وجود داشته باشد بطوری که $f(x) = x^q g(x)$ ، که در آن $g(x) \in C[0, \infty]$. اگر علاوه بر آن $f^{(m)} \in C_{\mu}(m \in \mathbb{N})$ می‌گوییم $f \in C_{\mu}^m$.

¹²Modified differential transform method (MDTM)

¹³Zhou

¹⁴Fractional Chan-Hilliard Equation

¹⁵J W Cahn, J Hilliard

¹⁶spinodal decomposition

¹⁷phase separation

¹⁸phase ordering dynamics

¹⁹Navier-Stokes equation

²⁰advection term

²¹reaction term

²²non-Markovian nature

²³fractional Brownian motion

²⁴memory effect

تعریف ۲.۲. برای تابع $f \in C_\mu(\mu \geq -1)$ ، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α عبارتست از:

$$\begin{cases} J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, & \alpha > 0, x > 0, \\ J^0 f(x) = f(x). \end{cases} \quad (4)$$

گزاره ۳.۲. [۱۳] برای تابع $f \in C_\mu(\mu \geq -1)$ و $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ، عملگر J^α دارای دو خاصیت زیر است.

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x) \quad \square$$

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x) \quad \square$$

تعریف ۴.۲. (مشتق کسری کاپوتو) فرض کنیم برای عدد صحیح و مثبت m داشته باشیم $m-1 < \alpha \leq m$. برای همه توابع f که $f \in C_{-1}^m$ تعریف می‌کنیم:

$$D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t) & \alpha = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5)$$

برخی از خواص مشتق کاپوتو [۱۳]

$$D_t^\alpha c = 0, \quad c \text{ ثابت} \quad \square$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t) \quad \square$$

$$D_t^\alpha D_t^m f(t) = D_t^{\alpha+m} f(t), \quad n-1 < \alpha < n, m \in \mathbb{N} \quad \square$$

□

$$D_t^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} & \beta > \alpha - 1, \\ 0, & \beta \leq \alpha - 1 \end{cases}$$

لم ۵.۲. [۸] (ترکیب مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل) برای عدد طبیعی m که $m-1 < \alpha < m$ داریم:

$$D_t^\alpha J^\alpha f(t) = f(t) \quad \square$$

$$J^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0^+)}{k!} t^k, \quad t \geq 0. \quad \square$$

قضیه ۶.۲. [قضیه تیلر تعمیم یافته] فرض کنیم به ازای $k = 0, 1, \dots, n+1$ و $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم: $D_t^{k\alpha} f(x) \in C(a, b)$ در این صورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} D_t^{k\alpha} f(a) + \frac{D_t^{(n+1)\alpha} f(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}, \quad a \leq \xi \leq x, \forall x \in (a, b) \quad (6)$$

که در آن $(n \text{ بار}) D_t^\alpha = D_t^\alpha D_t^\alpha \dots D_t^\alpha$

□

اثبات. به [۱۱] صفحه ۴ مراجعه شود.

تقریب یک تابع در نقطه داده شده:

قضیه ۷.۲. [۱۱] فرض کنیم $D_t^{k\alpha} f(x) \in C(a, b)$ ، $0 < \alpha < 1$ ، به ازای $k = 0, 1, \dots, n+1$. اگر $x \in [a, b]$ آنگاه

$$f(x) \cong P_N^\alpha(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} (D_t^{k\alpha} f)(a) \quad (۷)$$

بعلاوه، عددی مثل ξ ، $a \leq \xi \leq x$ وجود دارد بطوری که در آن جمله خطا به بصورت زیر است.

$$R_N^\alpha(x) = \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((N+1)\alpha+1)} (x-a)^{(N+1)\alpha}. \quad (۸)$$

۳. تبدیل ديفرانسیل اصلاح شده

روش تبدیل ديفرانسیل اصلاح شده، در حقیقت همان روش تبدیل ديفرانسیل دو بعدی است که با اصلاحاتی، برای توابع دو متغیره بکار برده می شود. روش تبدیل ديفرانسیل برای حل معادلات، مشابه تقریب توابع با بسط تیلر است که بجای محاسبه مشتقات مرتبه های بالا، در آن از رابطه بازگشتی برای محاسبه ضرایب چند جمله ای تقریب استفاده می شود.

آدیبات^{۲۵} و همکاران، در [۱۲] اولین بار تبدیل ديفرانسیل تعمیم یافته را برای حل معادلات ديفرانسیل کسری ارائه نمودند.

تعریف ۱.۳. [۱۲] تبدیل ديفرانسیل تعمیم یافته k امین مشتق تابع $f(x)$ عبارتست از

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} [D_t^{k\alpha} f(x)]_{x=x_0}, \quad 0 < \alpha \leq 1, k = 0, 1, \dots, \quad (۹)$$

که در آن $(k$ مرتبه) $D_t^{k\alpha} = D_t^\alpha D_t^\alpha \dots D_t^\alpha$.

تعریف ۲.۳. تبدیل ديفرانسیل معکوس $F_\alpha(k)$ عبارتست از:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k) (x-x_0)^{k\alpha}. \quad (۱۰)$$

با جاگذاری (۹) در (۱۰) داریم:

$$F_\alpha(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} [D_t^{k\alpha} f(x)]_{x=x_0} (x-x_0)^{k\alpha}.$$

از تساوی اخیر و (۶) می توان ملاحظه کرد که مفهوم تبدیل ديفرانسیل کسری، به نوعی همان سری تیلور تعمیم یافته است. اکنون جهت حل معادله (۲)، تعریف تبدیل ديفرانسیل اصلاح شده را بیان می کنیم.

تعریف ۳.۳. اگر تابع دو متغیره $u(x, t)$ تحلیلی و دارای مشتقات پیوسته نسبت به t باشد و x یک نقطه دلخواه از دامنه تعریفش باشد، تبدیل ديفرانسیل اصلاح شده (MDT) تابع $u(x, t)$ را با $U_k(x)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0}, \quad (۱۱)$$

همچنین، تبدیل ديفرانسیل معکوس $U_k(x)$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) (t-t_0)^{k\alpha}, \quad (۱۲)$$

از ترکیب روابط (۱۱) و (۱۲) می توان نوشت:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^{k\alpha}. \quad (13)$$

بدون از دست دادن کلیت روش، به جهت اینکه می خواهیم به مقایسه جواب های بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده (MDTM) و روش آنالیز هموتوبی (HAM) پردازیم، جوابهایی که بدست می آوریم با فرض $t_0 = 0$ می باشد. به عبارت دیگر، جواب هایی که بدست خواهیم آورد، به فرم زیر خواهند بود.

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0}, \quad (14)$$

$$u(x, t) \cong u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N U_k(x) t^{k\alpha}. \quad (15)$$

برخی از خواص تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده که اثبات آنها در [۵] آمده است، در جدول ۱ لیست شده اند.

جدول ۱: برخی خواص تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده

تابع اصلی	تابع تبدیل
$u(x, t) = v(x, t) \pm w(x, t)$	$U_k(x) = V_k(x) \pm W_k(x)$
$u(x, t) = cv(x, t)$	$U_k(x) = cV_k(x)$ (ثابت c)
$u(x, t) = x^m t^n$	$U_k(x) = x^m \delta(k\alpha - n) = \begin{cases} x^m & k\alpha = n \\ 0 & k\alpha \neq n \end{cases}$
$u(x, t) = x^m t^n u(x, t)$	$U_k(x) = x^m U_{k\alpha - n}(x)$
$u(x, t) = v(x, t)w(x, t)$	$U_k(x) = \sum_{k_1=0}^k V_{k_1}(x)W_{k-k_1}(x) = \sum_{k_1=0}^k W_{k_1}(x)V_{k-k_1}(x)$
$u(x, t) = v^m(x, t)$	$U_k(x) = \sum_{k_{m-1}=0}^k \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_1=0}^{k_2} V_{k_1} V_{k_2-k_1} \dots V_{k_{m-1}-k_{m-2}} V_{k-k_{m-1}}$
$u(x, t) = \frac{\partial^{N\alpha}}{\partial t^{N\alpha}} v(x, t)$	$U_k(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + N\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} V_{k+N}(x)$
$u(x, t) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} v(x, t)$	$U_k(x) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} V_k(x)$

۴. حل معادله کان-هیلیارد

تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده را روی معادله (۲) اعمال می کنیم:

$$MDT(D_t^\alpha u(x, t)) = MDT\left(D \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} (u^\gamma - u - \gamma \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma})\right) + MDT\left(\beta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + MDT(\omega u(1 - u)). \quad (16)$$

پس از بکار گیری خواص اشاره شده در جدول ۱ برای هر یک از عبارات، با اندکی جابجایی و مرتب کردن، یک رابطه بازگشتی بصورت:

$$U_{k+1}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)} \left(D \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} (U_{k_1}(x) U_{k_2-k_1}(x) U_{k-k_2}(x)) \right. \\ \left. - \omega \sum_{k_1=0}^k U_{k_1}(x) U_{k-k_1}(x) \right. \\ \left. + \left(\omega + \beta \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} - \gamma D \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} \right) U_k(x) \right). \quad (17)$$

بدست می آید.

با جایگذاری $U_0(x) = MDT(u(x, \circ)) = \delta(k\alpha)x$ در رابطه اخیر، $U_1(x)$ و متوالیا جملات بعدی $U_k(x)$ بدست می آیند. نهایتاً، این ضرایب، جواب معادله (۲) را بصورت سری (۱۵) بدست می دهند.

۵. تحلیل همگرایی

قضیه ۱.۵. فرض کنیم $u(x, t)$ جواب دقیق معادله (۲) باشد. اگر $u_N(x, t)$ یک جواب تقریبی حاصل از $MDTM$ با جمله باقی مانده $R_N(x, t)$ باشد. آنگاه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x, t) \rightarrow 0$$

اثبات. بنا به تعریف انتگرال ریمان-لیوویل، برای $0 < \alpha < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} & (J^{k\alpha} D_t^{k\alpha} u)(x, t) - (J^{k\alpha+1} D_t^{k\alpha+1} u)(x, t) \\ &= (J^{k\alpha} D_t^{k\alpha} u)(x, t) - (J^{k\alpha} (J^\alpha D_t^{k\alpha+1} u))(x, t) \\ &= J^{k\alpha} \left((D_t^{k\alpha} u)(x, t) - (J^\alpha D_t^{k\alpha+1} u)(x, t) \right) \\ &= J^{k\alpha} \left((D_t^{k\alpha} u)(x, t) - (J^\alpha D_t^\alpha) (D_t^{k\alpha} u)(x, t) \right) \\ &= J^{k\alpha} \left((D_t^{k\alpha} u)(x, \circ) \right) \quad \text{با توجه به لم ۵.۲ قسمت دوم} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} D_t^{k\alpha} u(x, \circ) t^{k\alpha} \\ &= U_k(x) t^{k\alpha}. \quad \text{با توجه به (۱۴)} \end{aligned}$$

در ادامه، بجای تقریب مرتبه N ام $u(x, t)$ ، معادل آن از تساوی اخیر را جاگذاری میکنیم:

$$\begin{aligned} u_N(x, t) &= \sum_{k=0}^N U_k(x) t^{k\alpha} = \sum_{k=0}^N (J^{k\alpha} D_t^{k\alpha} u)(x, t) - (J^{k\alpha+1} D_t^{k\alpha+1} u)(x, t) \\ &= u(x, t) - (J^{(N+1)\alpha} D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, t) \\ &= u(x, t) - \frac{1}{\Gamma((N+1)\alpha)} \int_0^t \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, \xi)}{(t-\xi)^{1-(N+1)\alpha}} d\xi \\ &= u(x, t) - \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, \xi)}{\Gamma((N+1)\alpha)} \int_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1-(N+1)\alpha}} \quad \text{بنا به قضیه مقدار میانگین انتگرال} \\ &= u(x, t) - \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, \xi)}{\Gamma((N+1)\alpha + 1)} t^{(N+1)\alpha}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|R_N(x, t)\| = \left\| u(x, t) - \sum_{k=0}^N U_k(x) t^{k\alpha} \right\| = \left\| \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, \xi)}{\Gamma((N+1)\alpha + 1)} t^{(N+1)\alpha} \right\|.$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم ماکزیمم است. در نتیجه

$$\|R_N(x, t)\| = \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{(D_t^{(N+1)\alpha} u)(x, \xi)}{\Gamma((N+1)\alpha + 1)} t^{(N+1)\alpha} \right|,$$

□

و $\|R_N(x, t)\| \rightarrow 0$ هرگاه $N \rightarrow \infty$ و اثبات تمام است.

جدول ۲: جوابهای حاصل از دو روش در $t = 0.5, 1$ به ازای $\alpha = 0.75$.

روش MDTM	روش HAM	x	t
۵,۰۰۰۰۳E۵	۵,۰۰۰۰۲۹E۵	$x = 0.3$	$t = 0.5$
۵,۰۰۰۰۶E۵	۵,۰۰۰۰۰۶E۵	$x = 0.6$	
۴,۹۹۹۴۴E۵	۴,۹۹۹۴۵E۵	$x = 0.9$	
۵,۰۰۰۲۳۹E۵	۵,۰۰۰۲۳E۵	$x = 0.3$	$t = 1$
۵,۰۰۰۰۷۶E۵	۵,۰۰۰۰۷۵E۵	$x = 0.6$	
۴,۹۹۶۰۷E۵	۴,۹۹۶۱E۵	$x = 0.9$	

اکنون که با توجه به قضیه اخیر، امکان محاسبه جواب تقریبی به روش MDTM محیا شده است، به محاسبه جواب معادله (۲) می پردازیم.

در [۱۴]، جواب این معادله به روش HAM با چهار جمله تقریب، با فرض $\gamma = 1$ و $D = \beta = -1$ محاسبه و بررسی شده است. به جهت مقایسه جواب های حاصل از دو روش، ما نیز در جواب بدست آمده، همین مفروضات را اعمال خواهیم کرد. لازم به ذکر است که در این مقاله، برای محاسبه هریک از جملات رابطه (۱۷)، از نرم افزار متمتیکا^{۲۶} استفاده شده است. با جایگذاری هریک از ضرایب بدست آمده، در سری تقریب (۱۴)، جواب معادله بصورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & x + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (\beta + x(\omega - \omega x + x^2)) \\
 & + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (\omega^2(-1+x)x(-1+2x) + \omega(2 + \beta(2-4x) + (4-5x)x^2) + 3x(-2+2\beta x + x^4)) \\
 & + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)} \left((-4\beta^2(\omega-3x) - 36\omega x - \omega^2(1-2x)^2(-1+x)x - 78x^3 + 9x^5 \right. \\
 & \quad \left. + \omega^2(-1+2x)(-8+x^2(-7+8x)) \right. \\
 & \quad \left. + \beta(-18+4\omega(6-11x)x^2 + 33x^4 + \omega^2(3+14(-1+x)x)) \right. \\
 & \quad \left. + 3\omega(40+x(-10+26x+5x^2-7x^5)) \right) \\
 & \quad \left. \Gamma(1+\alpha)^2 - (\omega-3x)(\beta+x(\omega-\omega x+x^2))\Gamma(1+2\alpha) \right) \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{18}$$

در شکل ۱، نمودار جواب های تقریبی به ازای مقادیر مختلف α و با فرض عدم حضور جمله واکنش ($\omega = 0$) نشان داده شده است. همچنین شکل ۲، به ازای $\alpha = 0.9$ ، انطباق خوب جواب های حاصل از دو روش MDTM و HAM را در سه حالت مختلف برای جمله واکنش یعنی $\omega = -1, 0, 1$ نشان می دهد.

در جدول ۲ می توانید جوابهای حاصل از دو روش را در $t = 0.5, 1$ به ازای $\alpha = 0.75$ و $\omega = 1$ مشاهده نمایید. شکل ۳ نیز تفاضل جواب های حاصل از دو روش را با فرض $\omega = 1$ ، به ازای $\alpha = 0.8$ نشان می دهد.

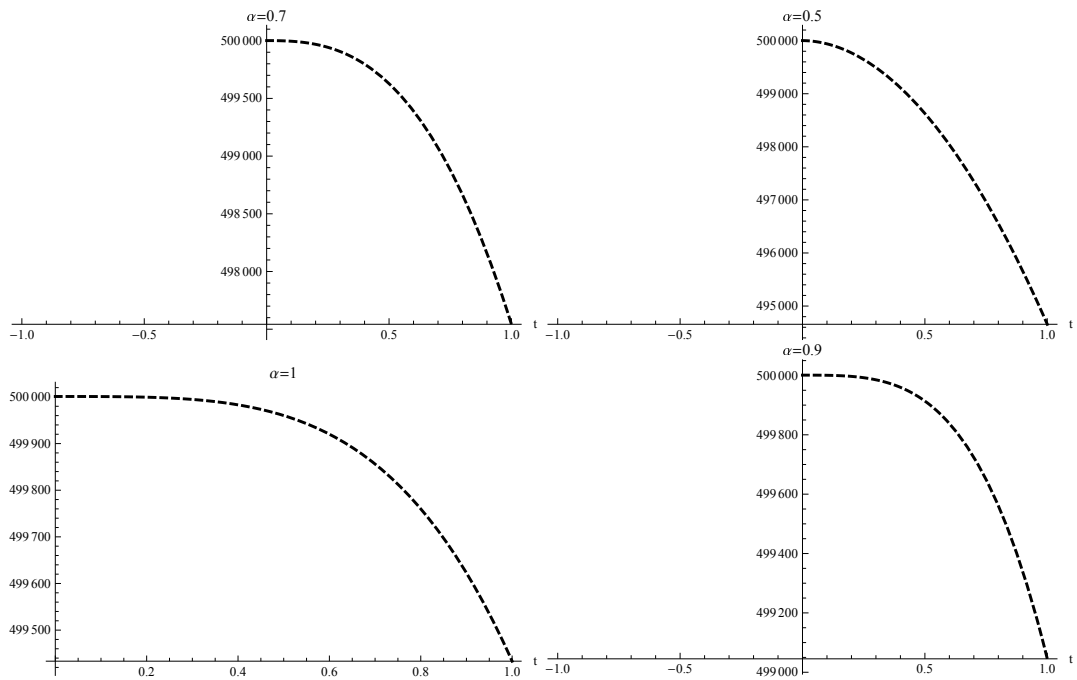
۶. نتیجه

در این مقاله، جهت حل معادله کان-هیلیارد با مشتقات کسری زمانی کاپوتو، روشی بر اساس تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده ارائه گردیده است. همگرایی روش ارائه شده، بیان و اثبات شده است. در آخر، جواب بدست آمده با این روش و روش آنالیز هموتوبی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان داده اند که روش ارائه شده، ساده تر و با محاسبات کمتر، و از نظر دقت، با روش آنالیز هموتوبی مطابقت خوبی دارد.

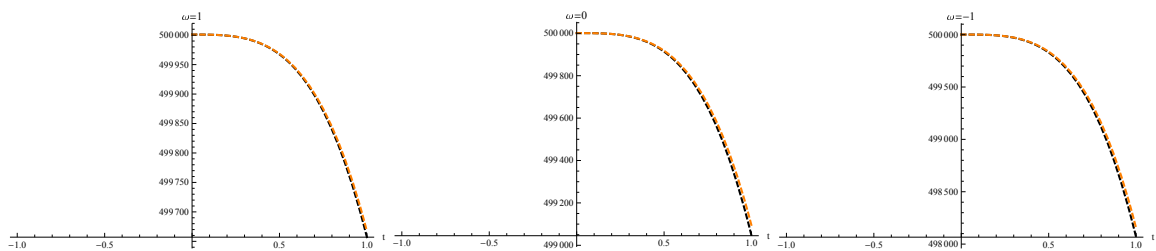
مراجع

- [1] A. Arikoglu and L. Ibrahim Ozkol. Solution of integro-differential equation systems by using differential transform method. Computer and Mathematics with applications, 56, 2411-2417. 2008

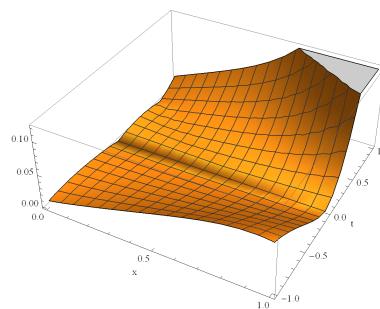
²⁶Wolfram mathematica 11



شکل ۱: جواب تقریبی به روش MDTM به ازای مقادیر مختلف α

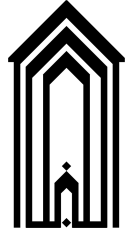


شکل ۲: مقایسه جواب های حاصل از دو روش HAM و MDTM به ازای $\alpha = 0.9$



شکل ۳: تفاضل جواب های حاصل از دو روش HAM و MDTM به ازای $\alpha = 0.8, \omega = 1$

-
- [3] J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Comput. Math. Appl. Mech. Eng.*, ,178 ,257-262 .1999
- [4] J. H. He. Variational iteration method kind of non-linear analytical technique: Some examples. *Int. J. Non-Linear Mech.*, ,34 ,699-708 .1999
- [5] Y. Keskin and G. Oturanc. The reduced differential transform method: A new approach to fractional partial differential equations. *Nonlinear Science Letter*, 1 ,(2) ,61-72 .2010
- [6] S. J. Liao. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Appl. Math. Comput.*, ,147 ,499-513 .2004
- [7] F. Mainardi. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. World Scientific Publishing, .2010
- [8] S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, USA, .1993
- [9] S. Momani and Z. Odibat. A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, ,220 ,85-95 .2008
- [10] Z. Odibat and S. Momani. A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order. *Appl. Math. Lett.*, ,21 ,194-199 .2007
- [11] Z. M. Odibat and N. T. Shawagfeh. Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and Computation*, ,186 ,286-293 .2007
- [12] Z. M. Odibat, S. Momani and V. S. Erturk. Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order. *Applied Mathematics and Computation*, ,197 ,467-477 .2008
- [13] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, Calif, USA, .1999
- [14] N. K. Tripathi, S. Das, SH. Ong, H. Jafari and M. M. Al Qurashi. Solution of time-fractional Cahn–Hilliard equation with reaction term using homotopy analysis method. doi.org/10.1177/1687814017740773 .2020
- [15] J. G. Wang, Y. B. Zhou and T. Wei. Two regularization methods to identify a space-dependent source for the time-fractional diffusion equation. *App. Num. Math.*, ,68 ,39-57 .2013
- [16] A. M. Wazwaz. A reliable technique for solving linear and nonlinear Schrodinger equations by Adomian decomposition method. *Bull. Inst. Math.*, ,29 ,125-134 .2001
- [17] J. K. Zhou. *Differential transform and its applications for electrical circuits*. Huazhong University Press, Wuhan, China, .1986



حل مسئله کمترین مربعات با زبان برنامه‌نویسی پایتون

علی نظیری کردکندی^۱، حبیب کرم‌پور^۲

آگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: رگرسیون خطی رگرسیون چندگانه پایتون مسئله کمترین مربعات	حل عددی بسیاری از مسائل در علوم مختلف مهندسی، اقتصادی و آمار منجر به تشکیل مسئله کمترین مربعات می‌شود. تناظریابی کمترین مربعات یکی از دقیق‌ترین روش‌های تناظریابی در فتوگرامتری و سنجش از دور است. همچنین الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی برای حل مدل‌های سوئیچینگ پیشنهاد شده است. در اغلب مسائل برای حل مسائل کمترین مربعات لازم است یک معادله با ابعاد بالا حل شود. در این مقاله، با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون مسئله کمترین مربعات خطی در حل معادلات رگرسیون خطی و چندجمله‌ای مورد تحلیل عددی قرار گرفته است.

۱. مقدمه

تناظریابی کمترین مربعات^۱ یکی از دقیق‌ترین روش‌های تناظریابی در فتوگرامتری و سنجش از دور است. یکی از محدودیت‌های اساسی این روش پیچیدگی محاسباتی بالا به دلیل ابعاد بزرگ معادلات مشاهدات و روند تکراری آن تا دستیابی به جواب است. در این تحقیق روشی جدید به منظور بهبود سرعت و کارایی الگوریتم تناظریابی کمترین مربعات، الگوریتمی جدیدی با عنوان تناظریابی کمترین مربعات سریع^۲ ارائه شده است. ایده اساسی در روش پیشنهادی کاهش تعداد معادلات مشاهدات در سرشکنی کمترین مربعات به منظور افزایش کارایی فرآیند تناظریابی است. برای این منظور پیکسل‌های واقع در پنجره تناظریابی با استفاده از یک معیار ویژه با عنوان استحکام رتبه بندی شده و درصد مشخصی از پیکسل‌ها با بالاترین استحکام در روند سرشکنی شرکت داده می‌شوند. به منظور محاسبه استحکام پیکسل‌ها از ترکیب معیار تناسب فاز و آنتروپی استفاده شده است. روش پیشنهادی بر روی هشت جفت تصویر بردکوتاه، هوایی و ماهواره‌ای در دو دسته شبیه‌سازی شده و واقعی پیاده‌سازی شده و نتایج بیانگر بهبود قابل توجه سرعت (حدود سه برابر) با حفظ کیفیت فرآیند تناظریابی است [۳، ۴].

تناظریابی یکی از پردازش‌های اساسی در فتوگرامتری و سنجش از دور است. از جمله کاربردهای مهم تناظریابی می‌توان به بازسازی سه بعدی متناظر، مثلث‌بندی هوایی، هم‌مرجع‌سازی تصاویر، آشکار سازی تغییرات و شناسایی اهداف مکانی در تصاویر اشاره کرد. به طور کلی روش‌های تناظریابی به دو دسته کلی روش‌های ناحیه‌منا و روش‌های عارضه‌منا دسته‌بندی می‌شوند [۳].

الگوریتم کمترین مربعات^۳ یکی از مهمترین و پرکاربردین روش‌ها برای تخمین پارامترها است. این الگوریتم یک تابع هزینه را تعریف می‌کند که از خطاهای بین خروجی واقعی و خروجی پیش‌بینی شده تشکیل شده است. تخمین پارامترها با مشتق‌گیری از تابع هزینه بدست می‌آید. الگوریتم کمترین مربعات دارای نرخ همگرایی بسیار بالایی است اما حجم عملیات زیادی دارد. علاوه بر این، در الگوریتم کمترین مربعات باید معکوس یک ماتریس محاسبه شود. در صورتیکه ماتریس بد حالت یا دارای بعد بالا باشد الگوریتم کمترین مربعات ناکارآمد خواهد بود [۲، ۷].

برای کاهش حجم عملیات و مشکلات ناشی از محاسبه معکوس ماتریس الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی^۴ پیشنهاد بسیار مناسبی است. الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی تخمین پارامترها را در هر مرحله به روز رسانی می‌کند. در واقع، تابع هزینه در الگوریتم کمترین مربعات

*سخنران

¹Least Square Matching

²Fast Least Square Matching

³least-square algorithm

⁴recursive least-square algorithm

بازگشتی فقط از یک مجموعه داده به جای مجموعه‌ای از داده‌های جمع‌آوری شده استفاده می‌کند. زیرا این الگوریتم نیازی به محاسبه معکوس ماتریس ندارد و حجم عملیات کمتری دارد. نرخ همگرایی الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی نسبت به الگوریتم کمترین مربعات کمتر است. با هدف افزایش نرخ همگرایی، الگوریتم کمترین مربعات توسعه داده شده و الگوریتم‌های زیادی مانند الگوریتم کمترین مربعات سلسله مراتبی^۵ و الگوریتم کمترین مربعات نوآورانه چندگانه^۶ در این زمینه ارائه شده‌اند [۵، ۶].

هر چند الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی و سایر الگوریتم‌هایی که از این الگوریتم مشتق شده‌اند دارای نرخ همگرایی مناسبی هستند و می‌توانند با نرخ همگرایی بالایی به جواب برسند، این روش‌ها برای مواردی هستند که سیستم یک سیستم واحد باشد.

اگر سیستم با یک مدل سوئچینگ توصیف شود این الگوریتم‌ها ناکارآمد هستند. مدل‌های سوئچینگ در علوم مهندسی کاربرد وسیعی دارند. چنین مدل‌هایی دارای چندین حالت با خواص دینامیکی متفاوت هستند و شرایط عملیاتی مختلفی دارند.

مشکل در شناسایی مدل‌های سوئچینگ این است که زمان نقاط عملیاتی و هویت‌های مدل ممکن است ناشناخته باشد. برای شناسایی مدل‌ها سوئچینگ باید در ابتدا، نقاط عملیاتی و هویت‌های آن را تعیین کرد.

دو الگوریتم کلاسیک روش مبتنی بر خودسازماندهی^۷ و روش پیشینه‌سازی انتظار^۸ برای شناسایی و تعیین هویت در مدل‌های سوئچینگ هستند. روش مبتنی بر خودسازماندهی چندین تابع هزینه معرفی می‌کند که هر یک توابع متناظر با یک زیر مدل در هر تکرار است و کمترین تابع هزینه مربوط به مدل واقعی در هنگام نمونه‌برداری است [۲، ۴].

الگوریتم پیشینه‌سازی انتظار هویت‌های مدل را به عنوان متغیرهای پنهان در نظر می‌گیرد و این هویت‌ها را در مرحله EM-E به روزرسانی می‌شوند بعد از اینکه هویت مدل تخمین زده شد تخمین پارامترها در مرحله EM-E صورت می‌گیرد. این دو مرحله با هم به صورت تعاملی تا همگرایی مقادیر تخمین زده شده به مقدار واقعی اجرا می‌شوند. روش مبتنی بر خودسازماندهی باید چند تابع هزینه را در هر تکرار محاسبه کند و روش پیشینه‌سازی انتظار باید در ابتدا هویت مدل را شناسایی کند [۱، ۶].

مفهوم رگرسیون زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در تلاش برای یافتن رابطه بین متغیرها باشیم. در یادگیری ماشین و در مدل‌سازی آماری این رابطه بین متغیرهاست که به ما امکان می‌دهد نتیجه را برای رویدادهای مشابه بعدی پیش‌بینی کنیم.

تعریف ۱.۱. در رگرسیون خطی^۹ به طور کلی دو نوع متغیر وجود دارد:

$noitemsep(i)$ متغیرهای مستقل که اغلب با X نمایش داده می‌شوند. در این مثال مترایز یک متغیر مستقل است.

$noitemsep(ii)$ متغیرهای وابسته، که در نتیجه متغیرهای مستقل محاسبه می‌شوند و به طور معمول با Y نمایش داده می‌شوند. در این مثال، متغیر وابسته قیمت خانه است.

اگر فقط یک نوع متغیر مستقل داشته باشیم، رگرسیون خطی از نوع ساده^{۱۰} و اگر چند نوع متغیر مستقل داشته باشیم، رگرسیون خطی^{۱۱} را چند گانه می‌نامیم. به عنوان مثال، قیمت نهایی خانه برگرفته از عواملی نظیر مترایز، عمر بنا و محله باشد.

مثال ۲.۱. فرض کنید جدول زیر نشان دهنده مترایز و قیمت چند خانه باشد. اگر مقادیر جدول بالا را بر روی نمودار رسم کنیم متوجه وجود

جدول ۱

مترایز خانه	قیمت خانه
۱	۱
۲	۳
۴	۳
۳	۲
۵	۵

یک رابطه خطی بین مترایز و قیمت می‌شویم. به طوریکه در نتیجه افزایش مترایز قیمت نیز افزایش می‌یابد. در چنین مواردی که یک رابطه خطی بین متغیرها وجود دارد، می‌توانیم برای پیش‌بینی مقادیر جدید، از رگرسیون خطی استفاده کنیم. فرمول کلی رگرسیون خطی ساده به صورت زیر است:

$$y = \beta_0 + \beta_1 + \varepsilon.$$

^۵algorithm hierarchical RLS

^۶multi-innovation RLS Algorithm

^۷self-organizing model

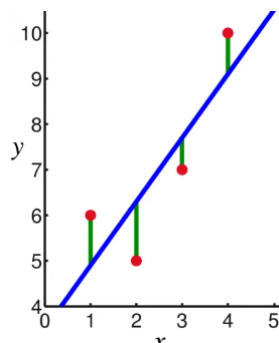
^۸expectation-maximization

^۹Linear Regression

^{۱۰}Simple Linear Regression

^{۱۱}Multiple Linear Regression

با استفاده از این فرمول می‌توانیم به ازای هر ورودی x خروجی y را محاسبه کنیم. با بدست آوردن فرمول بالا می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم قیمت یک خانه ۶ متری چند است. در فرمول بالا مقدار x برابر ۶ است و می‌خواهیم مقدار y را بدست آوریم و مقادیر β_0 و β_1 را بصورت زیر



شکل ۱

محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

و

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

مشخص است که ابتدا باید β_1 را حساب کنیم و سپس β_0 را حساب کنیم. بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 4 + 3 + 5}{5} = 3$$

و

$$\bar{y} = \frac{1 + 1 + 3 + 2 + 5}{5} = 2.8$$

جدول زیر را برای انجام محاسبات تشکیل می‌دهیم: با توجه به جدول بالا داریم:

جدول ۲

$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x}) \times (y - \bar{y})$	$y - \bar{y}$	(y) Price	$x - \bar{x}$	Area
۴	$(-2) \times (-1.8) = 3.6$	$1 - 2.8 = -1.8$	۱	$1 - 3 = -2$	۱
۱	$(-1) \times (0.2) = -0.2$	$3 - 2.8 = 0.2$	۳	$2 - 3 = -1$	۳
۱	$(1) \times (0.2) = 0.2$	$3 - 2.8 = 0.2$	۳	$4 - 3 = 1$	۳
۰	$(0) \times (-0.8) = 0$	$2 - 2.8 = -0.8$	۲	$3 - 3 = 0$	۲
۴	$(2) \times (2.2) = 4.4$	$5 - 2.8 = 2.2$	۵	$5 - 3 = 2$	۵

$$\beta_1 = \frac{10}{10} = 1$$

و

$$\beta_0 = 2.8 - (1 \times 3) = -0.2$$

در نتیجه داریم:

$$y = -0.2 + 1x + \varepsilon$$

۲. نتایج اصلی

در این قسمت، در دو مثال مختلف ابتدا یک مدل رگرسیون خطی با پایتون مدل سازی شده است و در ادامه با رگرسیون خطی چندجمله ای یک مسئله کمترین مربعات حل شده است.

مثال ۱.۲. در زیر نقاط داده شده و همچنین خط برازش با استفاده از رگرسیون خطی با پایتون ترسیم شده اند.

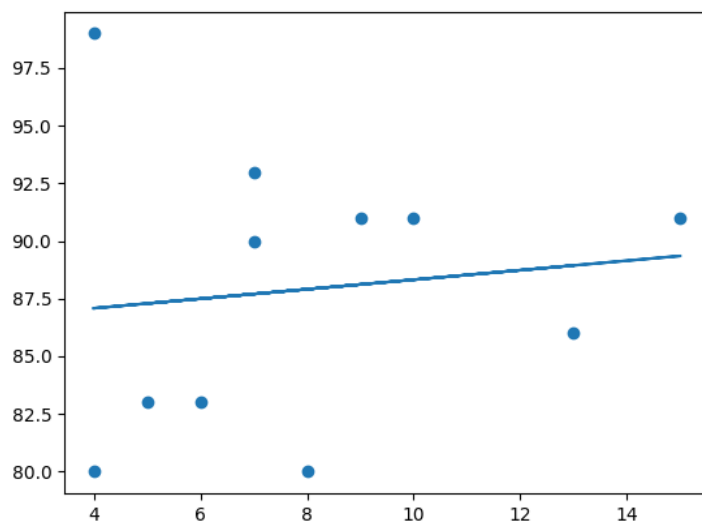
```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from scipy import stats
3
4 x = [4, 7, 6, 15, 4, 9, 5, 13, 10, 8, 7]
5 y = [80, 93, 83, 91, 99, 91, 83, 86, 91, 80, 90]
6
7 slope, intercept, r, p, std_err = stats.linregress(x, y)
8
9 def myfunc(x):
10 return slope * x + intercept
11
12 mymodel = list(map(myfunc, x))
13 plt.scatter(x, y)
14 plt.plot(x, mymodel)
15 plt.show()

```

کد ۱

نتیجه حاصل از اجرای کد فوق را در شکل زیر می بینید:



شکل ۲

مثال ۲.۲. در مثال زیر، نقاط داده شده و همچنین خط برازش با استفاده از رگرسیون چندجمله ای درجه دوم با پایتون ترسیم شده اند. نتیجه حاصل از اجرای کد فوق را در شکل ۳ می بینید.

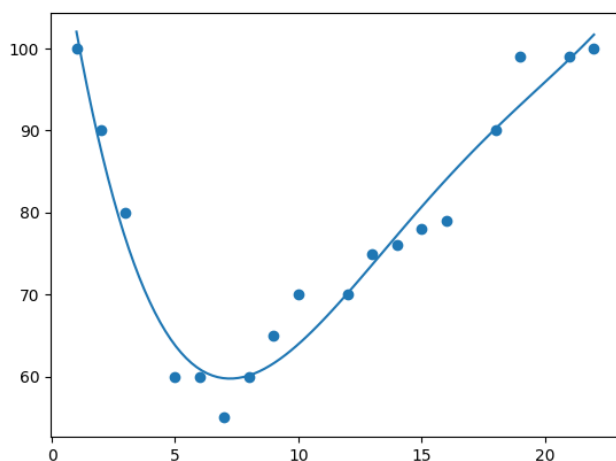
مثال ۳.۲. نقاط داده شده در مثال ۲.۲ و همچنین خط برازش با استفاده از رگرسیون چندجمله ای درجه چهارم با پایتون در شکل ۴ ترسیم شده اند.

```

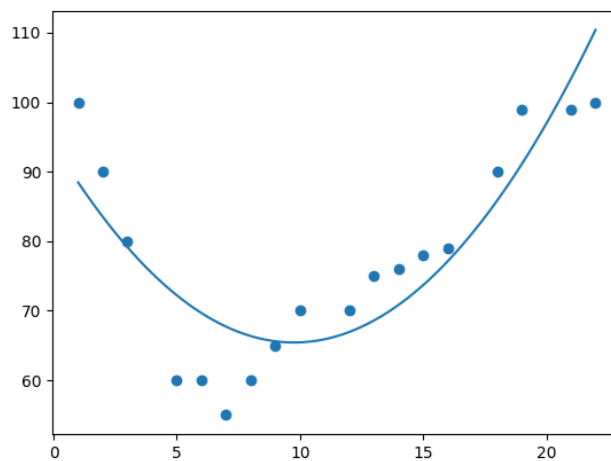
1 import numpy
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 x = [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22]
5 y = [100, 90, 80, 60, 60, 55, 60, 65, 70, 70, 75, 76, 78, 79, 90, 99, 99, 100]
6
7 mymodel= numpy.poly1d(numpy.polyfit(x, y, 4))
8
9 myline = numpy.linspace(1, 22, 100)
10
11 plt.scatter(x, y)
12 plt.plot(myline, mymodel(myline))
13 plt.show()

```

کد ۲



شکل ۴



شکل ۳

۳. نتیجه گیری

رگرسیون مفهومی آماری است که برای ارتباط بین متغیرهای مستقل و وابسته را بر اساس مدل‌سازی ریاضی برقرار می‌کند. با توجه به مدل‌سازی‌های متنوع الگوریتم‌های متعددی برای رگرسیون ارائه شده‌است. برای بدست آوردن جواب مسئله کمترین مربعات حاصل از الگوریتم‌های رگرسیون کتابخانه‌های متعددی در زبان برنامه‌نویسی پایتون ارائه شده‌است که در این مقاله الگوریتم‌های رگرسیون با زبان برنامه‌نویسی پایتون کد نویسی شدند.

سپاسگزاری

این مقاله، پژوهشی مستخرج از پایان‌نامه کارشناسی ارشد نویسنده دوم این مقاله می‌باشد. نویسندگان از هیئت محترم علمی و اجرایی در چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار دانشگاه گنبد کاووس و سایر دوستان و عزیزانی که در برگزاری این همایش نقش داشته‌اند ممنون و سپاسگزارند.

مراجع

- [1] Yunxia Ni, Lixing Lv, and Yuejiang Ji. Flexible least squares algorithm for switching models. *Complexity*, 2022, 2022. Article ID 2605570, 11 pages.

- [۲] شهران شفیعی و وحید برادران. توسعه مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز کشور. فصل‌نامه مطالعات اقتصاد انرژی، سال ۱۵ (۶۳): ۲۶۷-۲۴۳، زمستان ۱۳۹۸.
- [۳] امین صداقت و نازیلا محمدی. افزایش کارایی و سرعت فرآیند تناظریابی کمترین مربعات در تصاویر رقومی. نشریه علمی پژوهشی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی، صفحات ۱۹۳-۲۱۰، سال هفتم، شماره نخست، بهار ۱۳۹۸.
- [۴] فرزاد مرادپوری. وارون‌سازی داده‌های لرزه‌ای به روش مهاجرت زمانی معکوس، حداقل مربعات بهینه. نشریه روش‌های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن، دوره ۱۱ (۲۶): ۱۳-۲۱، بهار ۱۴۰۰.
- [۵] حسن نظری و میثم رئیس دانایی. مکان‌یابی منبع تشعشع با استفاده از کمترین مربعات خطی در مشاهدات DRSS جدید. مجله علمی پژوهشی رادار، صفحات ۳۹-۴۴، بهار و تابستان ۱۳۹۹.
- [۶] فاطمه سادات حسینی نژاد و مظفر صرافی. ارتباط رضایتمندی از خدمات شهری و کیفیت زندگی شهروندان، با استفاده از روش حداقل مربعات جزئی (مورد پژوهی: کلانشهر تهران). علوم و تکنولوژی محیط زیست، دوره ۲۳ (۷): ۱۸۹-۱۷۵، مهر ۱۴۰۰.
- [۷] مهدی گلی. مقایسه روش‌های کولوکیشن کمترین مربعات و انتگرال پواسن در انتقال فرسوی داده‌های گرانی هوابرد. فیزیک زمین و فضا، ۱ (۱): ۷۳-۶۳، بهار ۱۴۰۱.



کاربرد مسئله کمترین مربعات در یادگیری ماشین

علی نظیری کردکندی^۱، حبیب کرم پور^۱^۱گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: یادگیری ماشین پایتون رگرسیون کمترین مربعات	یکی از مهمترین شاخه‌های هوش مصنوعی یادگیری ماشین است. یادگیری ماشین در سال‌های اخیر به دلیل تلاش برای توسعه سیستم‌های هوشمند و خودکار بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در یک تقسیم‌بندی کلی یادگیری ماشین به سه شاخه اصلی تقسیم می‌شود و هر شاخه شامل چندین الگوریتم است. مدل سازی رگرسیون خطی چندگانه از الگوریتم‌های یادگیری ماشین منجر به تشکیل یک مسئله کمترین مربعات می‌شود. در این مقاله، ضمن تشریح شاخه‌های مختلف یادگیری ماشین با یک مثال رگرسیون خطی چندگانه مدل‌سازی شده و زبان برنامه نویسی پایتون برای ارائه نتایج عددی مورد استفاده قرار گرفته است.

۱. مقدمه

یادگیری ماشین زمینه مطالعاتی است که ریشه در هوش مصنوعی دارد. بشر با استفاده از هوش مصنوعی به دنبال ساخت ماشین‌های بهتر و هوشمند است. پژوهشگران در ابتدا، فقط قادر به حل مسئله ساده مانند یافتن کوتاهترین مسیر بین a و b بودند در صورتیکه در برنامه‌ریزی ماشین‌ها برای انجام وظایف پیچیده‌تری که به طور مداوم با چالش‌های جدید همراه هستند ناتوان بودند. بنابراین، ادراکی مبتنی بر این شکل گرفت که تنها راه ممکن برای تحقق بخشیدن به این مهم، طراحی ماشین‌هایی هست که بتوانند از خودشان یاد بگیرند [۱].

ماشین در این رویکرد همانند کودکی است که از خودش می‌آموزد. بنابراین، یادگیری ماشین به عنوان یک توانایی جدید برای رایانه‌ها مطرح شد. امروزه این علم در بخش‌های مهم فناوری مورد استفاده قرار می‌گیرد و بهره‌گیری از آن به قدری زیاد شده است که افراد اغلب از وجودش در ابزارها و لوازم روزمره بی‌خبر هستند [۱، ۳].

یادگیری ماشین^۱ به موضوع طراحی سیستم‌هایی می‌پردازد که با استفاده از داده‌های عددی موجود، کسب تجربه کنند و بیاموزند. در واقع، یادگیری ماشین قصد دارد با بهره‌گیری از الگوریتم‌ها، یک ماشین را به شکلی طراحی کند که قادر باشد بدون آنکه به طور صریح برنامه‌ریزی شود و تک‌تک اقدامات به آن دیکته شود، بیاموزد و عمل کند [۲].

در یادگیری ماشین به جای برنامه‌ریزی برای همه چیز، داده‌ها به یک الگوریتم عمومی داده می‌شوند و این الگوریتم است که بر اساس داده‌هایی که به آن داده شده است منطق خود را می‌سازد. یادگیری ماشین روش‌های گوناگونی دارد که از آن جمله می‌توان به یادگیری نظارت شده، بدون نظارت و یادگیری تقویتی اشاره کرد. تمام الگوریتم‌هایی که در یادگیری ماشین مورد استفاده قرار می‌گیرند در یکی از این سه دسته قرار می‌گیرند.

۲. یادگیری بدون نظارت

در یادگیری نظارت نشده، الگوریتم باید خود به تنهایی به دنبال ساختارهای جالب موجود در داده‌ها باشد. به بیان ریاضی، یادگیری نظارت نشده مربوط به زمانی است که در مجموعه داده فقط متغیرهای ورودی X وجود داشته باشند و هیچ متغیر داده خروجی وجود نداشته باشد. به این نوع

^{*}سخنران^۱Machine Learning

یادگیری، یادگیری بدون نظارت می‌گویند. در واقع، در این یادگیری هیچ پاسخ صحیح داده شده‌ای وجود ندارد و ماشین خود باید به دنبال پاسخ باشد.

به بیان دیگر، هنگامی که الگوریتم از مجموعه‌ای بهره می‌برد که فاقد داده‌های برچسب‌دار (متغیر خروجی) است، از مکانیزم دیگری برای یادگیری و تصمیم‌گیری استفاده می‌کند. به این نوع یادگیری، یادگیری نظارت نشده می‌گویند. الگوریتم‌های یادگیری نظارت نشده، قابل تقسیم به دو دسته زیر هستند:

قوانین انجمنی: یک مسئله یادگیری هنگامی قوانین انجمنی محسوب می‌شود که هدف کشف کردن قواعدی باشد که بخش بزرگی از داده‌ها را توصیف می‌کنند. به عنوان مثال، شخصی که کالای الف را خریداری می‌کند، تمایل دارد کالای ب را نیز خریداری کند.

خوشه‌بندی: یک مسئله هنگامی خوشه‌بندی محسوب می‌شود که قصد کشف گروه‌های ذاتی، یعنی داده‌هایی که باید در یک گروه خاص بگنجد را داشته باشد. به عنوان مثال، گروه‌بندی که برای مشتریان بر اساس رفتار خرید آن‌ها صورت می‌گیرد.

۳. یادگیری نظارت شده

اغلب روش‌های یادگیری ماشین از یادگیری نظارت شده استفاده می‌کنند. در یادگیری ماشین نظارت شده، سیستم تلاش می‌کند تا از نمونه‌های پیشین بیاموزد که در اختیار آن قرار گرفته است. به بیان دیگر، در این نوع یادگیری، سیستم تلاش می‌کند تا الگوها را بر اساس مثال‌های داده شده به آن فرا بگیرد. به بیان ریاضی، هنگامی که متغیر ورودی x و متغیر خروجی y موجودند و می‌توان بر اساس آن‌ها از یک الگوریتم برای حصول یک تابع نگاشت ورودی به خروجی استفاده کرد در واقع یادگیری نظارت شده است. تابع نگاشت به صورت $y = f(x)$ است.

در واقع، در یادگیری ماشین مجموعه داده‌هایی به الگوریتم داده می‌شود و ماشین بر اساس آن مجموعه داده‌ها منطق خود را شکل می‌دهد. این مجموعه داده دارای سطرها و ستون‌هایی است. سطرها که از آن‌ها به عنوان رکورد و نمونه نیز یاد می‌شود، نماینده نمونه داده‌ها هستند. برای مثال، اگر مجموعه داده مربوط به بازی‌های فوتبال باشد، یک سطر حاوی اطلاعات یک بازی خاص است و ستون‌ها که از آن‌ها با عنوان خصیصه، ویژگی و مشخصه نیز یاد می‌شود، ویژگی‌هایی هستند که هر نمونه داده را توصیف می‌کنند.

در مثالی که پیش‌تر بیان شد، مواردی مانند وضعیت هوا شامل ابری بودن یا نبودن، آفتابی بودن یا نبودن، وجود یا عدم وجود مه، بارش یا عدم بارش باران و تاریخ بازی از جمله ویژگی‌هایی هستند که وضعیت یک مسابقه فوتبال را توصیف می‌کنند. حال اگر در این مجموعه داده به عنوان مثال، ستونی وجود داشته باشد که مشخص کند برای هر نمونه داده در شرایط جوی موجود برای آن نمونه خاص بازی فوتبال انجام شده یا نشده که در این صورت می‌گوئیم مجموعه داده برچسب‌دار است. اگر برای آموزش الگوریتم از چنین مجموعه داده‌ای استفاده شود و به آن آموخته شود که بر اساس نمونه داده‌هایی که وضعیت آن‌ها مشخص است، بازی فوتبال انجام شده یا نشده است، تصمیم‌گیری کند، در اصطلاح می‌گوئیم یادگیری با نظارت صورت گرفته است.

مسائل یادگیری ماشین نظارت شده قابل تقسیم به دو دسته دسته‌بندی و رگرسیون هستند.

دسته‌بندی: یک مسئله، هنگامی دسته‌بندی محسوب می‌شود که متغیر خروجی یک دسته یا گروه باشد. به عنوان مثال، برای تعلق یک نمونه به دسته‌های سیاه یا سفید و یک ایمیل به هرزنامه یا غیرهرزنامه می‌توان از دسته‌بندی استفاده کرد.

رگرسیون: یک مسئله هنگامی رگرسیون است که متغیر خروجی یک مقدار حقیقی مانند قد باشد. در واقع، در دسته‌بندی با متغیر گسسته و در رگرسیون با مقادیر پیوسته کار می‌شود.

۴. یادگیری تقویتی

یادگیری تقویتی یکی از روش‌های مهم در یادگیری ماشین است که برای حل مسائل با تصمیم‌گیری‌های متوالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با تعامل اولیه در یک محیط ناشناخته عامل یادگیری تقویتی می‌تواند در هر حالت، سیاست بهینه را تشخیص دهد و پاداش تجمعی مورد نظر را به حداکثر برساند.

یادگیری تقویتی از تعامل بشر با محیط و یادگیری بر اساس براسیاس تجربیات خود نشأت می‌گیرد. تصور کنید کودکی در یک اتاق است، کودک شومینه را می‌بیند و به آن نزدیک می‌شود.

الگوریتم Q-network عمیق (DQN) از موفق‌ترین و جدیدترین الگوریتم‌های یادگیری تقویتی است. هر چند دارای اشکالاتی مانند همگرایی کند و ناپایداری است. در مقابل، الگوریتم‌های موجود با توابع تقریب خطی که از پایداری بهتری برخوردار هستند و دارای سرعت همگرایی بیشتری می‌باشند، حجم عملیات بالایی دارند [۲].

در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های زیادی در الگوریتم Q-network صورت گرفته است. اما به ندرت از مزایای الگوریتم‌هایی با توابع تقریب خطی برای بهبود کارایی و عملکرد الگوریتم Q-network استفاده شده است.

در این فصل، الگوریتم جدید Q-learning با توابع تقریب خطی معرفی شده است که الگوریتم ریزدسته‌ای کمترین مربعات Q-learning نام دارد که نام کامل Minibatch recursive least squares Q-learning به اختصار با (MRLS-Q) نشان داده می‌شود. مکانیسم یادگیری و

ساختار مدل الگوریتم جدید، برخلاف سایر روش‌های Q-learning با تابع تقریب خطی، بیشتر شبیه الگوریتم Q-network عمیق (DQN) با یک لایه ورودی و یک لایه خروجی خطی است [۲].

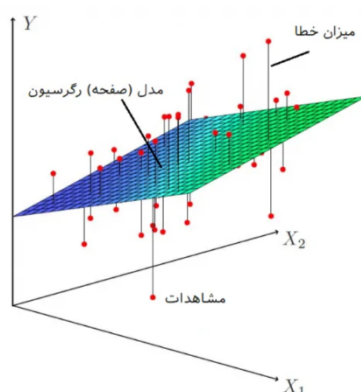
۵. نتایج اصلی

۱.۵. رگرسیون خطی چندگانه

یکی از روش‌های مرسوم در تحلیل چندمتغیره، تکنیک رگرسیون خطی چندگانه^۲ است. بر اساس تحلیل رگرسیونی، یک رابطه خطی بین متغیر پاسخ^۳ با یک یا چند متغیر توصیفی^۴ برقرار می‌شود. البته گاهی به متغیر پاسخ متغیر وابسته^۵ و به متغیرهای مستقل^۶ نیز می‌گویند [۴، ۷]. اگر رابطه خطی بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل برقرار شود، تکنیک رگرسیون را رگرسیون خطی ساده^۷ می‌نامند. ولی در صورت به کار گیری چندین متغیر توصیفی یا مستقل در مدل رگرسیونی، روش رگرسیونی را چندگانه^۸ می‌گویند. از رگرسیون خطی چندگانه در بسیاری از شاخه‌های علوم بخصوص فیزیک و شیمی استفاده می‌شود. همچنین برای پیشگویی روند داده‌های مالی از رگرسیون چندگانه بهره می‌گیرند. در رگرسیون خطی چندگانه، پارامترهای یک مدل خطی به کمک یک تابع هدف و مقدارهای متغیرها، برآورد می‌شوند. در رگرسیون خطی، مدل در نظر گرفته شده، یک رابطه خطی بر حسب پارامترهای مدل است [۵، ۶]. به این ترتیب، اگر n مشاهده از متغیر مستقل p بعدی X داشته باشیم و بخواهیم یک رابطه خطی با متغیر پاسخ y برقرار کنیم. می‌تونیم از مدل رگرسیون خطی زیر استفاده کنیم:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

از آنجائیکه متغیر مستقل X دارای بعد p است، مقدار آن را در هر بعد با یک متغیر مستقل یک بعدی جایگزین جایگزین کرده‌ایم. مشخص است که اندیس i نیز شماره مشاهده را نشان می‌دهد. در انتها نیز ε جمله خطای مدل رگرسیونی محسوب می‌شود [۱].



شکل ۱

در رگرسیون خطی ساده، رابطه بین متغیر مستقل و وابسته به صورت معادله یک خط بیان می‌شود. در رگرسیون چندگانه، اگر دو متغیر مستقل با یک متغیر وابسته در رابطه خطی باشند، شکل این رابطه به صورت یک صفحه^۹ در خواهد آمد. در صورتیکه بیش از دو متغیر مستقل در مدل رگرسیون خطی به کار روند، مدل به شکل یک ابرصفحه^{۱۰} ظاهر می‌شود.

²Multiple Linear Regression

³response variable

⁴explanatory variable

⁵dependent variable

⁶independent variable

⁷simple linear regression

⁸multiple linear regression

⁹plane

¹⁰hyperplane

۲.۵. مدل سازی رگرسیون خطی چندگانه

مدل رگرسیون خطی را به صورت یک رابطه برداری نیز می توان نوشت:

$$y_i = x_i^T \beta + \varepsilon_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

که در آن x_i^T یک بردار است که دارای p ستون است. همچنین β نیز یک بردار است که دارای p ستون است. منظور از $x_i^T \beta$ ضرب داخلی این دو بردار است که حاصل آن یک اسکالر است. اگر بردارهای x_i و β مشخص باشند می توان مقدار متغیر پاسخ یعنی y_i را با میزان خطای متوسط ε ، براساس هر مشاهده برآورد کرد.

این محاسبات را به صورت ماتریسی و برای همه مشاهدات یکجا نیز نوشته اند. فرض کنید y بردار مشاهدات متغیر پاسخ باشد. به همین ترتیب x نیز ماتریس مربوط به متغیر مستقل p بعدی و β نیز پارامترهای مدل با p سطر باشد. اگر بردار خطا را نیز ε بنامیم. مدل رگرسیون خطی را می توان به زبان ماتریس و بردارها به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y = X\beta + \varepsilon.$$

ماتریس ها و بردارهای به کار رفته در رابطه بالا در ادامه قابل مشاهده هستند.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n \times 1}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}_{(p+1) \times 1}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

و

$$X = \begin{pmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{pmatrix}_{n \times (p+1)} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}_{n \times (p+1)}$$

در ادامه به بررسی ماتریس و بردار مورد استفاده در رابطه بالا خواهیم پرداخت.

بردار مشاهدات متغیر پاسخ (y): این بردار از مقدارهای متغیر پاسخ برای هر پاسخ برای هر مشاهده و یعنی y_i ها تشکیل شده است. به این ترتیب y_1 مقدار متغیر پاسخ برای مشاهده n م و در انتها نیز y_n مقدار متغیر پاسخ برای مشاهده n م است. پس y یک بردار n سطر است.

ماتریس متغیرهای مستقل (X): سطرهای این ماتریس، از مقدار مشاهدات متغیرهای مستقل تشکیل شده است. به این ترتیب سطر اول مربوط به مقدارهای متغیرهای مستقل برای مشاهده اول است. از آنجائیکه هر مشاهده دارای p متغیر مستقل است، تعداد ستونهای این ماتریس نیز برابر با $p + 1$ است. از طرفی با توجه به n باشد. پس ابعاد این ماتریس را می توان به صورت $(p + 1) \times n$ است.

مدل برداری و ماتریسی رگرسیون خطی را در نظر بگیرید. همانگونه که اشاره شد، یکی از روشهای برآورد پارامترهای این مدل از تکنیک OLS یا کمینه سازی مربعات خطا¹¹ است. در این قسمت به بررسی این روش به منظور برآورد پارامترهای مدل رگرسیون خطی می پردازیم. اگر $S(\beta)$ را به صورت زیر معرفی کنیم، هدف از برآورد پارامترهای مدل رگرسیونی خطی، محاسبه بردار β بر حسب مقدار مشاهدات است تا $S(\beta)$ حداقل ممکن شود.

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^p X_{ij} \beta_j \right|^2 = \|y - X\beta\|^2.$$

مشخص است که منظور از $\|y - X\beta\|^2$ مربع فاصله یا نرم اقلیدسی است. اگر برآورد بردار پارامترها را با $\hat{\beta}$ نشان می دهیم، پارامترهای مدل، مقادیری هستند که در رابطه زیر صدق کنند.

$$\hat{\beta} = \arg \min S(\beta)$$

به کمک مشتق گیری و حل معادلات ماتریسی، برآورد پارامترها به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

¹¹ordinary least square

مثال ۱.۵ (تخمین تابع سینوس بوسیله رگرسیون خطی). می دانیم که امکان تقریب زدن توابع مثلثاتی به وسیله چند جمله‌ای‌ها وجود دارد. سری تیلور برای تابع سینوس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

در مدل رگرسیون خطی اگر تعداد متغیرها را بیشتر در نظر بگیریم و از جملات بیشتری از سری تیلور استفاده کنیم، دقت برآوردها بیشتر شده و به مقدار واقعی سینوس هر زاویه بیشتر نزدیک می‌شویم. جدول زیر مربوط به داده‌هایی است که بر اساس مقدار توان‌های فرد (یک، سه و پنج) از زاویه‌های مختلف (بر حسب رادیان) و همچنین مقدار سینوس آن زاویه‌ها ساخته شده است. قرار است، بوسیله مدل رگرسیون خطی چندگانه، ضرائب مربوط به سری تیلور را محاسبه کنیم تا با دقت مناسب مقدار سینوس هر زاویه را بدست آوریم. البته از آنجا که مقدار سینوس هر زاویه از قبل مشخص است، می‌توانیم مقدار خطا را اندازه‌گیری کرده و نسبت به مناسب بودن مدل (کم بودن خطای مدل) تصمیم بگیریم.

جدول ۱

$y = \sin(x)$	x^3	x
۰	۰	۰
۰٫۲	۰٫۰۰۸	۰٫۲
۰٫۳۹	۰٫۰۶۴	۰٫۴
۰٫۵۶	۰٫۲۱۶	۰٫۶
۰٫۷۲	۰٫۵۱۲	۰٫۸
۰٫۸۴	۱	۱

از آنجائیکه برای برآورد مقدار تابع سینوس از متغیرهای x و x^3 استفاده خواهیم کرد. لازم است ابتدا ماتریس X و بردارهای y و β را تشکیل دهیم.

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.39 \\ 0.56 \\ 0.72 \\ 0.84 \end{pmatrix}_{6 \times 1}$$

و

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.008 \\ 0.4 & 0.064 \\ 0.6 & 0.216 \\ 0.8 & 0.512 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 2}$$

در واقع، به دنبال بدست آوردن ضرائب زیر هستیم.

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

با انجام محاسبات لازم داریم:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 2.2 & 1.5664 \\ 1.5664 & 1.31296 \end{pmatrix}$$

و

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} ۳,۰۱۹ & -۳,۶۰۱۷ \\ -۳,۶۰۱۷ & ۵,۰۵۸۶ \end{pmatrix}$$

در نهایت داریم:

$$X^T y = \begin{pmatrix} ۱,۹۴۸ \\ ۱,۳۵۶۲ \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} ۰,۹۹۶۴ \\ -۰,۱۵۵۹ \end{pmatrix}$$

با محاسبه بدون استفاده از زبان برنامه نویسی پایتون مشاهده کردیم که ضرائب بدست آمده بسیار به مورد انتظار ما نزدیک بودند. اما واقعیت این است که همیشه محاسبات دستی ساده و ممکن نیست و در اغلب اوقات با پیچیدگی های بسیاری همراه است. بنابراین، از زبان برنامه نویسی پایتون برای حل این مسئله کمک می‌گیریم. کد در ادامه ارائه شده است.

```

1 import numpy as np
2 from sklearn import linear_model
3
4 X = np.array([[0, 0],
5               [0.2, 0.008],
6               [0.4, 0.064],
7               [0.6, 0.216],
8               [0.8, 0.512],
9               [1,1]])
10 y = np.array([0, 0.2, 0.39, 0.56, 0.72, 0.84])
11
12 r = linear_model.LinearRegression()
13 r.fit(x, y)
14
15 predict1 = r.predict([[0.8, 0.512]])
16 print(predict1)

```

کد ۱

در این کد، از کتابخانه‌های `numpy` و `sklearn` پایتون برای تحلیل عددی مدل رگرسیون خطی استفاده می‌کنیم و در نتیجه در ادامه دستور آخر برای تقریب مقداری بدست می‌دهد که به مقدار واقعی خود بسیار نزدیک است.

۶. نتیجه گیری

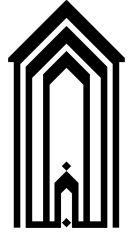
در این مقاله، انواع روش‌های مختلف یادگیری ماشین تبیین شده‌اند. هر روش دارای الگوریتم‌های متعددی است. یک از الگوریتم‌های مربوط به یادگیری با نظارت رگرسیون خطی چندگانه است که منجر به تشکیل معادله کمترین مربعات می‌شود. نتایج حاصل از مدل‌بندی یک مسئله بر اساس رگرسیون خطی چندگانه با زبان برنامه نویسی پایتون تست عددی شده‌اند و با توجه به تسهیلات پایتون برای الگوریتم‌های یادگیری ماشین بهتر است برای تحلیل عددی مورد استفاده قرار گیرد.

سپاسگزاری

این مقاله، پژوهشی مستخرج از پایان‌نامه کارشناسی ارشد نویسنده دوم این مقاله می‌باشد. نویسندگان از هیئت محترم علمی و اجرائی در چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار دانشگاه گنبد کاووس و سایر دوستان و عزیزانی که در برگزاری این همایش نقش داشته‌اند ممنون و سپاسگزارند.

مراجع

- [1] Yunxia Ni, Lixing Lv, and Yuejiang Ji. Flexible least squares algorithm for switching models. *Complexity*, 2022, 2022. Article ID 2605570, 11 pages.
- [2] Junkai Ren, Yixing Lan, Xin Xu, Yichuan Zhang, Qiang Fang, and Yujun Zeng. Deep reinforcement learning using least-squares truncated temporal-difference. *CAAI Transactions on Intelligence Technology*, 2023.
- [3] Chunyuan Zhang, Qi Song, Zeng Meng, et al. Minibatch recursive least squares q-learning. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2021, 2021. Article ID 5370281, 9 pages.
- [۴] شهران شفیعی و وحید برادران. توسعه مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز کشور. فصل‌نامه مطالعات اقتصاد انرژی، سال ۱۵ (۶۳): ۲۶۷-۲۴۳، زمستان ۱۳۹۸.
- [۵] حسن نظری و میثم رئیس دانایی. مکان‌یابی منبع تشعشع با استفاده از کمترین مربعات خطی در مشاهدات DRSS جدید. مجله علمی پژوهشی رادار، صفحات ۴۴-۳۹، بهار و تابستان ۱۳۹۹.
- [۶] فاطمه سادات حسینی نژاد و مظفر صرافی. ارتباط رضایتمندی از خدمات شهری و کیفیت زندگی شهروندان، با استفاده از روش حداقل مربعات جزئی (مورد پژوهی: کلانشهر تهران). علوم و تکنولوژی محیط زیست، دوره ۲۳ (۷): ۱۸۹-۱۷۵، مهر ۱۴۰۰.
- [۷] مهدی گلی. مقایسه روش‌های کولوکیشن کمترین مربعات و انتگرال پواسن در انتقال فرسوی داده‌های گرانی هوابرد. فیزیک زمین و فضا، ۱ (۱): ۷۳-۶۳، بهار ۱۴۰۱.



کاوش در داده‌های بورس اوراق بهادار تهران در دوره شیوع کووید-۱۹: تحلیل اثرات با روش های هوش مصنوعی

محمد جواد شیخ زاده*

آگروه کامپیوتر، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: شاخص کل کووید-۱۹ یادگیری ماشین هوش مصنوعی	تحت تأثیر همه‌گیری کووید-۱۹، اقداماتی مانند قرنطینه شهرها، تعطیلی برخی از کسب و کارها و محدود کردن حمل و نقل عمومی، به طور گسترده‌ای باعث کاهش تولید شد. شرکت‌ها با خطر قطع جریان نقدینگی و کاهش تقاضای خرید مواجه بودند که باعث وخامت کلی محیط تولید و زنجیره تامین شد، اقتصادهای دنیا آسیب دید و موجی از ناامنی در بازارهای سهام سراسر جهان به وجود آمد. بازار بورس تهران نیز از این همه‌گیری در امان نبود و با تاخیر چند ماهه ریزش شدیدی را در قیمت اکثر سهام نظاره‌گر بود. بنابراین در این پژوهش با استفاده از روش‌های یادگیری ماشین، تأثیر کووید-۱۹ و میزان واکنش‌های بر روند بازار بورس اوراق بهادار تهران بررسی شده است. در این پژوهش با استفاده از داده‌های شرکت مدیریت فناوری بورس اوراق بهادار تهران و سازمان جهانی بهداشت و بهره‌گیری از الگوریتم‌های یادگیری ماشین، تأثیر همه‌گیری کووید-۱۹ و میزان واکنش‌های بر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران بررسی شد. نتایج نشان داد که استفاده از داده‌های میزان ابتلا، مرگ و میر و واکنش‌های جهت پیش‌بینی روند شاخص کل دقت پیش‌بینی را بطور محسوسی افزایش می‌دهد.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

اپیدمی سندرم حاد تنفسی ویروس کرونا (کووید-۱۹) در پایان دسامبر ۲۰۱۹ شیوع یافته و به سرعت در حدود ۲۰۰ کشور دنیا گسترش یافت. در ۱۱ مارس ۲۰۲۰، کووید-۱۹ توسط سازمان جهانی بهداشت به عنوان یک بیماری همه-گیر واقعی تعیین شد. علاوه بر اقدامات پزشکی مانند درمان بیماری و ساخت واکسن، دولت‌ها سیاست‌های غیرپزشکی مانند قرنطینه شهرها، ایزوله کردن بیماران، تعطیلی مدارس و کارخانه‌ها، لغو سفر، ممنوعیت تجمع و غیره را اتخاذ کردند (Ercolano, & Alfano, ۲۰۲۰). اگرچه این سیاست‌ها به جلوگیری از گسترش سریع همه‌گیری کووید-۱۹ کمک کردند، اما متأسفانه آسیب زیادی به فعالیت‌های اقتصادی وارد کردند و یکی از بدترین رکودهای اقتصادی را به وجود آوردند. تأثیر منفی این بیماری همه‌گیر بر اقتصاد بسیاری از کشورها، بسیار بیشتر از هر چیزی است که در یک قرن اخیر متحمل شده‌اند. تأثیر منفی کووید-۱۹ به طرق مختلف توسط همه احساس می‌شود. این بیماری همه‌گیر شرایطی را ایجاد کرده است که در آن برخی از افراد به دلیل داشتن شرایط پزشکی که خطر ابتلا را افزایش می‌دهد، احتمال بیشتری برای تجربه بیماری شدید دارند. اینها معمولاً عوامل خطر نامیده می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان به سن، نژاد، جنسیت، فقر، ازدحام جمعیت، مشاغل خاص و بارداری اشاره نمود (Williamson et al., ۲۰۲۰). عوامل اپیدمیولوژیک موجودیت‌های قابل تعریفی هستند که پتانسیل ایجاد تغییر در وضعیت سلامت یا سایر پیامدهای تعریف شده را دارند (Xie et al., ۲۰۲۰)، در حالی که عوامل کلان اقتصادی روند یا شرایطی است که از جمعیت وسیعی از یک اقتصاد به جای جمعیت محدود ناشی می‌شود یا برای آن اعمال می‌شود. عوامل رایج اقتصاد کلان عبارتند از تولید ناخالص داخلی، نرخ اشتغال، چرخه کسب و کار، نرخ تورم و عرضه پول (Firano, & Fatine, ۲۰۲۰). چالشی جدی برای جلوگیری از شیوع این بیماری ویروسی کشنده در بسیاری از کشورها و

*سخنران

پست الکترونیک: sheikhzadeh@gonbad.ac.ir (محمد جواد شیخ زاده)

مناطق ایجاد شد که تأثیر زیادی بر توسعه اقتصادی، مالی، تجاری و اجتماعی داشته است (Roush et al., ۲۰۱۹). در دوران اوج این بیماری همه گیر، اکثر شهرها در کشورهای مختلف جهان از تکنیک‌های مدیریت بسته استفاده کرده‌اند که باعث می‌شود کسب‌وکارها با تأثیر کم یا بدون تأثیر از دنیای خارج فعالیت کنند. هدف از این کار جلوگیری از انتقال بیشتر ویروس و کاهش احتمال ابتلای بیشتر بیماران است (Ekanem et al., ۲۰۲۰؛ Obioma et al., ۲۰۲۰). با ایجاد محدودیت‌های کرونایی، به دلیل کاهش فعالیت‌های تجاری و صنعتی در بیشتر کشورهای جهان، تعداد زیادی از مردم فقیر در خانه‌های خود محبوس شدند و این امر مشکلات اجتماعی، اقتصادی و مالی متعددی را در پی داشته و همچنین تأثیر بسیار زیادی بر توسعه اقتصادی و مالی کشورهای جهان داشته است (Obioma et al., ۲۰۲۰). در این پژوهش با استفاده از داده‌های شرکت مدیریت فناوری بورس اوراق بهادار تهران و سازمان جهانی بهداشت و بهره‌گیری از الگوریتم‌های یادگیری ماشین، تأثیر همه‌گیری کووید-۱۹ و میزان واکسیناسیون بر شاخص کل و شاخص-کل هم‌وزن بورس اوراق بهادار تهران بررسی شد. مدل پیشنهادی در بازه زمانی روزانه و هفتگی از دی ماه ۱۳۹۸ الی اردیبهشت ماه ۱۴۰۱ مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که استفاده از داده‌های میزان ابتلا، مرگ و میر و واکسیناسیون جهت پیش‌بینی روند شاخص‌کل در مدت زمان مذکور، دقت پیش‌بینی را بطور محسوسی افزایش می‌دهد. بر اساس تئوری احساسات، تأثیر اخبار بر احساسات مختلف سرمایه‌گذاران و بازارهای مالی به طور گسترده‌ای متفاوت است (Choi, & Lee, ۲۰۲۰). به طور کلی، اخبار منفی بیشتر از اخبار مثبت باعث نوسانات بازار سهام می‌شود (Iyke, Ho, & ۲۰۲۰). در مورد کووید ۱۹، رسانه‌ها به روند توسعه همه‌گیری توجه زیادی داشته و بعضاً اخبار منفی را به سرمایه‌گذاران منتقل کردند که باعث ترس و وحشت و افزایش نوسانات و عدم اطمینان در بازار سهام شد. (Narayan, ۲۰۲۰). بر اساس تئوری گزینه واقعی، سرمایه‌گذاران در هنگام مواجهه با عدم اطمینان در بازار، حق دارند سرمایه-گذاری را به تعویق بیندازند، توزیع سرمایه در بازار را تغییر دهند و تخصیص دارایی و سبد خود را مجدداً سازماندهی کنند تا از ریسک سرمایه‌گذاری جلوگیری کنند (Uhl, & Pedersen, ۲۰۱۵). که این در نهایت منجر به کاهش قیمت سهام می‌شود. دولت‌ها در نهایت یک سری سیاست‌های مهار و بسته شدن، مانند انسداد و محدودیت‌های سفر را اتخاذ کردند. اگرچه اجرای این سیاست‌ها اثرات نامطلوب اقتصادی کوتاه‌مدتی به همراه داشت، اما این اقدامات می‌تواند میزان آلودگی اپیدمی کووید-۱۹ را کاهش دهد (Ashraf, ۲۰۲۰). جان افراد بیشتری را که می‌توانستند به این بیماری مبتلا شده یا بمیرند، نجات دهد و به پیشگیری و کنترل اپیدمی کمک کند. به این ترتیب، با کنترل بیشتر اپیدمی، اعتماد سرمایه‌گذاران به بهبود و توسعه اقتصادی آینده و بهبود عملکرد شرکت‌ها افزایش می‌یابد و متعاقباً بازده بازار سهام افزایش می‌یابد (Chang et al., ۲۰۲۱). تأثیر اپیدمی کووید-۱۹ بر اقتصادهای اجتماعی و بازارهای مالی نیز توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است (Feng et al., ۲۰۲۱؛ Chang, & Fu, ۲۰۲۱). برخی در مورد تأثیر همه گیر کووید-۱۹ بر بازار سهام بحث کرده‌اند (Chang et al., ۲۰۲۱؛ Yilmazkuday, ۲۰۲۳). به عقیده بیکر و همکاران (۲۰۲۰) تا کنون شیوع هیچ ویروس مسری از جمله آنفولانزای اسپانیایی، بازار سهام را به شدت همه‌گیری کووید-۱۹ مختل نکرده است. منابع رسمی در ۳۱ مارس ۲۰۲۰ گزارش دادند که میانگین صنعتی داوجونز و FTSE ۱۰۰ به ترتیب ۲۳ درصد و ۲۵ درصد سقوط کرده‌اند که بزرگترین افت سه ماهه از سال ۱۹۸۷ تاکنون است. S&P ۵۰۰ نیز در همان زمان ۲۰ درصد از دست داد که بدترین ضرر از زمان بحران مالی ۲۰۰۸ بود. صندوق بین‌المللی پول (۲۰۲۰) در چشم انداز اقتصاد جهانی گزارش داد که این بیماری همه گیر اکثر اقتصادهای جهان را به رکود می‌کشانند و کاهش تولید سرانه جهانی بزرگترین کاهش از سال ۱۸۷۰ خواهد بود. در این گزارش همچنین اشاره شده است که انقباض جهانی در تولید ناخالص داخلی واقعی ۵/۲ درصد خواهد بود. این ارقام برای اقتصادهای پیشرفته و اقتصادهای نوظهور و در حال توسعه به ترتیب ۷ و ۲/۵ درصد خواهد بود. ایجاد شوک در عرضه و تقاضا باعث ایجاد وحشت در بازارهای مالی شد، که این امر باعث شدت نوسانات در بازار سهام شد. انگل و ان جی (۱۹۹۳) دریافته‌اند که شوک‌های بازده منفی بیش از شوک‌های بازده مثبت بر نوسانات بازار تأثیر می‌گذارد. همچنین بورجیگین و همکاران (۲۰۲۰) شواهدی مبنی بر تأثیر بیشتر اخبار منفی در مقایسه با اخبار خوب بر نوسانات بازار پیدا کردند. بیکر و همکاران (۲۰۱۶) دریافته‌اند که سطوح بالاتر نوسانات بازار سهام تأثیر مخربی بر سرمایه‌گذاری، تولید و اشتغال خواهد داشت و عدم اطمینان سیاست‌ها را افزایش می‌دهد. طبیعت غیرخطی، پویا و ناپایدار داده‌های سهام باعث شده ایجاد یک سیستم مطمئن با قابلیت پیش‌بینی دقیق قیمت سهام بسیار دشوار باشد. به دلیل تغییرات نامنظم، داده‌های بازار سهام بسیار پیچیده تر از داده‌های آماری است. عوامل بسیاری همچون شرایط سیاسی، اقتصادی، فصلی و روندها بر روی قیمت سهام تأثیرگذار است (Chandar, ۲۰۲۰). برای پیش‌بینی بازار سهام روش‌های زیادی وجود دارد که به مدل‌های آماری و مدل‌های یادگیری ماشین تقسیم می‌شوند. مدل‌های آماری خطی بوده و پیاده‌سازی آنها ساده است. اما این مدل‌ها قادر به شناسایی اطلاعات مخفی موجود در ساختار غیرخطی داده‌های بازار سهام نیستند (Shin, & Chung, ۲۰۱۸). اخیراً در بسیاری از مسائل آماری از روش‌های هوش مصنوعی و یادگیری ماشین استفاده می‌شود که یکی از مهمترین آنها، پیش‌بینی بازارهای مالی از جمله بازار سهام است. از ویژگی‌های این روش‌ها می‌توان به غیرخطی بودن، خودآموزی، خودانطباقی و خودسازماندهی بودن آنها اشاره کرد، که باعث می‌شود تا بتوانند اطلاعات مخفی موجود در داده‌های ورودی را حتی در مواردی که کشف روابط تابعی بسیار مشکل است، شناسایی کنند. از جمله این الگوریتم‌ها می‌توان به شبکه عصبی پس‌انتشار، شبکه عصبی پیوند عملکردی، شبکه عصبی موجک، شبکه عصبی بازگشتی، نزدیکترین همسایه محدود به شعاعی، بهینه‌سازی گرگ خاکستری- شبکه عصبی المان، تجزیه و تحلیل مؤلفه‌های اصلی هسته، ماشین بردار پشتیبان و نیو بیز اشاره کرد (Nahil, Lyhyaoui, and ۲۰۱۸ Ray, et al., ۲۰۱۴؛ Wang, and Liao, ۲۰۱۰؛ Lei, ۲۰۱۸؛ Chandar, ۲۰۲۰؛ Rahimunnisa, et al., ۲۰۱۹؛ Guo, et al., ۲۰۱۳). الگوریتم‌های یادگیری ماشین قادر به حل مسائل در حوزه‌های مختلف با تجزیه و تحلیل و تفسیر مقادیر زیادی از داده‌ها هستند. بسیاری از محققان از الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای حل مشکلات اقتصادی و مالی بهره می‌برند. بقیه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: بخش دوم جمع‌آوری داده‌ها و روش پژوهش را شرح می‌دهد. در بخش سوم یافته‌های تجربی ارائه شده و بخش چهارم شامل نتیجه‌گیری و توصیه‌هایی برای کارهای آینده است.

۲. روش پژوهش

در این پژوهش با استفاده از داده‌های شرکت مدیریت فناوری بورس اوراق بهادار تهران و سازمان جهانی بهداشت و بهره‌گیری از الگوریتم‌های یادگیری ماشین، تاثیر همه‌گیری کووید-۱۹ و میزان واکسیناسیون بر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران بررسی شد. بدین منظور تعداد هشت ویژگی برای پیش‌بینی روند شاخص کل و شاخص کل هم‌وزن بورس اوراق بهادار تهران محاسبه و مورد استفاده قرار گرفت شامل: قیمت اولین معامله روز، قیمت آخرین معامله روز، بیشترین قیمت روز، کمترین قیمت روز، حجم معاملات روز، تعداد مبتلایان روزانه کووید، تعداد مرگ و میر روزانه کووید و تعداد واکسیناسیون روزانه کووید. برای ارزیابی کیفیت ویژگی‌های انتخاب شده، از روش دسته‌بندی جنگل تصادفی (Biau & Scornet, 2016) استفاده شد. برای اعتبارسنجی این الگوریتم نیز از روش Cross-Validation - Fold^{۱۰} (Bouckaert et al., 2016) استفاده شد. بدین منظور نرم‌افزاری مبتنی بر جاوا طراحی و پیاده‌سازی شد که تاریخچه معاملات روزانه شاخص کل و شاخص کل هم‌وزن را به طور برخط از سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران دریافت می‌کند، همچنین داده‌های مربوط به میزان ابتلا، مرگ و میر و واکسیناسیون را از سایت سازمان جهانی بهداشت دریافت کرده و عملیات پردازشی مانند دسته‌بندی روی داده‌ها اعمال شده و در نهایت نتایج دسته‌بندی را برای هر نماد به صورت یک فایل اکسل ذخیره می‌کند. داده‌های مربوط به بورس مورد استفاده در این تحقیق شامل تاریخچه معاملات روزانه و هفتگی شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۸ تا اردیبهشت ۱۴۰۱ و ۵۳۵ روز کاری است، که از سایت شرکت مدیریت فناوری بورس اوراق بهادار تهران به آدرس <http://tsetmc.com> دریافت شده است. همچنین داده‌های مربوط به کووید-۱۹ مورد استفاده در این مطالعه از پایگاه داده سازمان جهانی بهداشت (<https://covid.who.int/data>) ۱۹ در ۲۰ اکتبر ۲۰۲۲ دریافت شده است. جهت ارزیابی کارایی الگوریتم‌ها از معیارهای متعددی استفاده شد که در ادامه معرفی می‌شوند: میانگین خطای مطلق، میانگین قدرمطلق تفاضل بین مقدار پیش‌بینی شده و مقدار واقعی را محاسبه می‌کند (Chandar, 2020).

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |A_k - P_k| \quad (1)$$

ریشه میانگین مربعات خطا، ریشه میانگین مربعات فاصله بین مقدار پیش‌بینی شده و مقدار واقعی را محاسبه می‌کند (Chandar, 2020).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A_k - P_k)^2} \quad (2)$$

دقت دسته‌بندی برابر است با نسبت تعداد نمونه‌های درست پیش‌بینی شده به تعداد کل پیش‌بینی‌های انجام شده و ضرب نتیجه در ۱۰۰ (Van-100): (Chikkamannur, and dana 2021)

$$ACC = \frac{T}{N} * 100 \quad (3)$$

جایی که T تعداد نمونه‌هایی است که درست دسته‌بندی شده‌اند و N تعداد کل نمونه‌ها است.

۳. یافته‌های پژوهش

جدول ۱ بیانگر همبستگی بین شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران و آمار روزانه کووید-۱۹ از دی ماه ۱۳۹۸ الی اردیبهشت ماه ۱۴۰۱ است. این داده‌ها نشان می‌دهد که همبستگی نسبتاً زیادی بین شاخص کل و میزان واکسیناسیون انجام شده وجود دارد. جدول ۲ نتایج دسته‌بندی جنگل

جدول ۱: همبستگی آمار روزانه کووید-۱۹ و شاخص کل در بازه زمانی مورد مطالعه

مرگ و میر	مبتلایان جدید	واکسیناسیون	شاخص کل
۱	۶۶۱/۰	۱۳۰/۰	۲۹۲/۰
۶۶۱/۰	۱	۰۳۲/۰	۱۲۷/۰
۱۳۰/۰	۰۳۲/۰	۱	۶۸۸/۰
۲۹۲/۰	۱۲۷/۰	۶۸۸/۰	۱

تصادفی بر روی داده‌های روزانه و هفتگی بازار بورس اوراق بهادار تهران را نشان می‌دهد. این یافته‌ها بیانگر آن است که می‌توان روند معاملات آتی را با دقتی نسبتاً مناسب پیش‌بینی کرد. همچنین بیانگر آن است که پیش‌بینی در بازه زمانی هفتگی با دقت بیشتری نسبت به بازه زمانی روزانه انجام می‌شود. جدول ۳ بیانگر نتایج دسته‌بندی جنگل تصادفی بر روی داده‌های روزانه و هفتگی بازار بورس اوراق بهادار تهران علاوه بر داده‌های مربوط به مبتلایان، مرگ و میر و واکسیناسیون روزانه کووید-۱۹ است. این نتایج نشان می‌دهد که استفاده از داده‌های مربوط به کووید-۱۹، دقت پیش‌بینی روند بازار را به طور محسوسی افزایش می‌دهد.

جدول ۲: نتایج دسته‌بندی الگوریتم جنگل تصادفی بدون استفاده از داده‌های کوئید-۱۹

نماد-دوره زمانی	RMSE	MAE	دقت دسته‌بندی
شاخص کل-هفتگی	۴۵۰/۰	۳۶۱/۰	۴۳۸/۷۰
شاخص کل-روزانه	۵۱۹/۰	۴۶۱/۰	۵۶۹/۵۶

جدول ۳: نتایج دسته‌بندی الگوریتم جنگل تصادفی با استفاده از داده‌های کوئید-۱۹

نماد-دوره زمانی	RMSE	MAE	دقت دسته‌بندی
شاخص کل-هفتگی	۳۱۳/۰	۲۲۶/۰	۳۱۴/۸۶
شاخص کل-روزانه	۴۸۶/۰	۴۲۳/۰	۷۶۶/۶۰

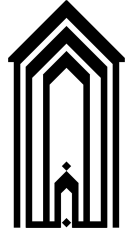
۴. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با شروع همه‌گیری کوئید-۱۹ و تاثیر نامطلوب آن بر اقتصاد کشورها، اکثر بورس‌های دنیا با ریزش ارزش سهام مواجه شدند. اما در ابتدای بحران، بورس اوراق بهادار تهران از سایر بورس‌ها متاثر نشد و به رشد خود ادامه داد. عمده دلیل این رشد افزایش مخارج، کاهش درآمد و کسری بودجه دولت ناشی از شرایط تحریم و هزینه‌های تحمیل شده در اثر شیوع کوئید-۱۹ بود. بنابراین دولت که نمی‌توانست از طریق افزایش فروش نفت و یا افزایش مالیات کسری بودجه خود را تامین کند، به حمایت از بازار سرمایه و فروش سهام خود در این بازار روی آورد. بخش عمده‌ای از کسب و کارها با کاهش درآمد مواجه شدند، بنابراین بسیاری از افراد سرمایه خود را به بازار سهام منتقل کردند که بازده بیشتری داشت، که این موضوع باعث رشد بیشتر بازار سهام شد. با تداوم شیوع کوئید-۱۹، رکود در بازار جهانی و اغلب کسب و کارها و همچنین کاهش حمایت دولت از بورس، بسیاری از سرمایه‌های وارد شده، از بازار سهام خارج و به بازارهای موازی مانند مسکن و خودرو وارد شدند و در نتیجه شاخص سهام ریزش کرده و سفته‌بازی و تورم در سایر بازارها افزایش یافت. با انجام واکنش‌های آمار مبتلایان که با بهبود در بازارهای جهانی نیز همراه بود، وضعیت بازار سهام تا حدی بهبود یافت. بررسی داده‌ها بیانگر این است که همبستگی نسبتاً زیادی بین شاخص کل و میزان واکنش‌های انجام شده وجود دارد. در این پژوهش با استفاده از داده‌های شرکت مدیریت فناوری بورس اوراق بهادار تهران و سازمان جهانی بهداشت و بهره‌گیری از الگوریتم‌های یادگیری ماشین، تاثیر همه‌گیری کوئید-۱۹ و میزان واکنش‌های شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران بررسی شد. پیش‌بینی‌ها در بازه زمانی روزانه و هفتگی انجام گردید. نتایج تجربی نشان می‌دهد که می‌توان روند معاملات آتی را با دقتی نسبتاً مناسب پیش‌بینی کرد. همچنین بیانگر آن است که پیش‌بینی در بازه زمانی هفتگی با دقت بیشتری نسبت به بازه زمانی روزانه انجام می‌شود. احتمالاً به این دلیل که در بازه زمانی روزانه معمولاً به علت وجود نوسان‌های کوتاه مدت ناشی از اخبار روزانه، نوسان‌های فراوانی وجود دارد، که این نوسان‌ها باعث می‌شود پیش‌بینی در بازه‌های زمانی کوتاه مدت نتایج قابل قبولی نداشته باشد. دلیل دیگر اینکه رفتار گله‌ای در معاملات روزانه بسیار بیشتر از معاملات هفتگی یا ماهانه رایج است، که در آن بسیاری از معامله‌گران اطلاعات و تحلیل‌های شخصی خود را نادیده گرفته و به حرکات گله‌ای روی می‌آورند، به شکلی که به تقلید از معامله‌گرانی می‌پردازند که آنها را مطلع می‌پندارند. اخبار جعلی و رفتار گله‌ای معامله‌گران ناآگاه، در بازار ایجاد نوسان می‌کنند، اما تأثیر این نوسانات بسیار کوتاه می‌باشد، به طوری که در بازه زمانی هفتگی بسیار کمتر دیده می‌شود. با استفاده از داده‌های مربوط به همه‌گیری کوئید-۱۹ (تعداد مبتلایان جدید، تعداد مرگ و میر جدید و آمار واکنش‌های شاخص کل) دقت پیش‌بینی به شکل محسوسی افزایش یافت، که بیانگر این نکته است که داده‌های مربوط به کوئید-۱۹ بر بازار بورس اوراق بهادار تهران تاثیر قابل توجهی داشته است. پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آتی از تکنیک‌های پیشرفته یادگیری ماشین، مانند یادگیری عمیق برای بهبود بیشتر دقت و کارایی مدل‌های پیش‌بینی روند سهام استفاده شود. همچنین استفاده از روش‌هایی مانند رگرسیون می‌تواند مفید باشد. بررسی سایر عوامل تاثیرگذار مانند نرخ ارز، طلا، نفت، کانی‌ها و فلزات نیز می‌تواند در کنار داده‌های بازار و کوئید-۱۹ کمک کننده باشد. به طور کلی، پتانسیل قابل توجهی برای ادامه تحقیقات در این زمینه برای دست آوردن بینش‌های ارزشمند و بهبود عملکرد تحلیل و پیش‌بینی بازار سهام وجود دارد.

مراجع

- [1] Alfano, V., & Ercolano, S. (2020). The efficacy of lockdown against COVID-19: a cross-country panel analysis. *Applied health economics and health policy*, 18, 509-517.
- [2] Ashraf, B. N. (2020). Economic impact of government interventions during the COVID-19 pandemic: International evidence from financial markets. *Journal of behavioral and experimental finance*, 27, .100371
- [3] Baker, S. R., Bloom, N., & Davis, S. J. (2016). Measuring economic policy uncertainty. *The quarterly journal of economics*, 131(4), 1593-1636.
- [4] Baker, S. R., Bloom, N., Davis, S. J., Kost, K., Sammon, M., & Viratyosin, T. (2020). The unprecedented stock market reaction to COVID-19. *The review of asset pricing studies*, 10(4), .742-758

- [5] Biau, G., & Scornet, E. (2016). A random forest guided tour. *Test*, 25(2), 197-227.
- [6] Borjigin, S., Gao, T., Sun, Y., & An, B. (2020). For evil news rides fast, while good news baits later?—A network based analysis in Chinese stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 551, .124593
- [7] Bouckaert, R. R., Frank, E., Hall, M., Kirkby, R., Reutemann, P., Seewald, A., & Scuse, D. (2016). WEKA manual for version 3-8-1. University of Waikato, Hamilton, New Zealand.
- [8] Chandar, S. K. (2020). Grey Wolf optimization-Elman neural network model for stock price prediction. *Soft Computing*, 1-10.
- [9] Chang, C. P., Feng, G. F., & Zheng, M. (2021). Government fighting pandemic, stock market return, and COVID-19 virus outbreak. *Emerging Markets Finance and Trade*, 57(8), .2389-2406
- [10] Chung H, Shin KS. (2018). Genetic algorithm-optimized long short-term memory network for stock market prediction. *Sustainability* 10:1–18.
- [11] Ekanem, S. A., Imarenezor, E. P. K., & Okolisah, C. P. (2020). An Essencist Evaluation of Socio-Economic Impacts of Coronavirus Disease (COVID-19) Pandemic in Nigeria. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 11(5), .70-70
- [12] Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of finance*, 48(5), .1749-1778
- [13] Feng, G. F., Yang, H. C., Gong, Q., & Chang, C. P. (2021). What is the exchange rate volatility response to COVID-19 and government interventions?. *Economic Analysis and Policy*, 69, .705-719
- [14] Firano, Z., & Fatine, F. A. (2020). The COVID-19: macroeconomics scenarii and role of containment in Morocco. *One Health*, 10, .100152
- [15] Guo ZQ, Wang HQ, Liu Q (2013) Financial time series forecasting using LPP and SVM optimized by PSO. *Soft Comput* 7(5):805–818.
- [16] Iyke, B. N., & Ho, S. Y. (2020). Consumption and exchange rate uncertainty: Evidence from selected Asian countries. *The World Economy*, 43(9), .2437-2462
- [17] Lee, D., & Choi, B. (2020). Policies and innovations to battle Covid-19—A case study of South Korea. *Health Policy and Technology*, 9(4), .587-597
- [18] Lei L (2018) Wavelet neural network prediction method of stock price trend based on rough set attribute reduction. *Appl Soft Comput* 62:923–932. Liao Z, Wang J (2010) Forecasting model of global stock index by stochastic time effective neural networks. *Expert Syst Appl* 37(1):834–841.
- [19] Nahil, A, Lyhyaoui, A. (2018). Short-term stock price forecasting using kernel principal component analysis and support vector machines: the case of Casablanca stock exchange. *Procedia Comput. Sci.* 127, 161–169. Narayan, P. K. (2020). Oil price news and COVID-19—Is there any connection?. *Energy Research Letters*, .(1)1
- [20] Obioma, A., Reuben, A. A., & Elekwachi, A. B. (2020). Potential impact of COVID-19 pandemic on the socio-economic situations in Nigeria: A huge public health risk of unprecedented concern. *J Qual Healthcare Eco*, 3, .000175
- [21] Rahimunnisa K (2019) Hybrdized genetic-simulated annealing algorithm for performance optimization in wireless adhoc network. *J Soft Comput Paradigm (JSCP)* 1(01):1–13.
- [22] Ray P, Mahapatra GS, Rani P, Panday SK, Dey KN (2014) Robust feed forward and recurrent neural Network based dynamic weighted combination models for software reliability prediction. *Appl Soft Comput* 22:629–637.
- [23] Roush, S., Fast, H., Miner, C. E., Vins, H., Baldy, L., McNall, R., ... & Vundi, V. (2019, June). National Center for Immunization and Respiratory Diseases (NCIRD) Support for Modernization of the Nationally Notifiable Diseases Surveillance System (NNDSS) to Strengthen Public Health Surveillance Infrastructure in the US. In 2019 CSTE Annual Conference. CSTE.
- [24] Uhl, M. W., Pedersen, M., & Malitius, O. (2015). What's in the news? Using news sentiment momentum for tactical asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 41(2), .100-112
- [25] Vandana, C. P., & Chikkamannur, A. A. (2021). Feature selection: An empirical study. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 69(2), 165-170.
- [26] WHO. Novel Coronavirus—China: <https://www.who.int/csr/don/12-january-2020-novel-coronavirus-china/en/>. Accessed: 20 October, 2020.
- [27] Williamson, E. J., Walker, A. J., Bhaskaran, K., Bacon, S., Bates, C., Morton, C. E., ...& Goldacre, B. (2020). Factors associated with COVID-19-related death using OpenSAFELY. *Nature*, 584(7821), .430-436
- [28] Xie, Y., Wang, Z., Liao, H., Marley, G., Wu, D., & Tang, W. (2020). Epidemiologic, clinical, and laboratory findings of the COVID-19 in the current pandemic: systematic review and meta-analysis. *BMC infectious diseases*, 20(1), .1-12
- [29] Yilmazkuday, H. (2023). COVID-19 effects on the S&P 500 index. *Applied Economics Letters*, 30(1), .7-13



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-123، صص ۶۸-۷۱

توزیع مجانبی شاخص نابرابری جدید بر اساس نسبت چندکها

شهریار میرزائی*، آ

آ دانشگاه پیام نور

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: شاخص نابرابری چندک توزیع مجانبی	در این مقاله معیار نابرابری درآمد مبتنی بر نسبت چندکها تعریف می‌شود که اغلب در تحقیقات اقتصادی، به ویژه برای تحلیل توزیع درآمد استفاده می‌شود. برخی ویژگیهای این شاخص نابرابری را مورد بررسی قرار داده، سپس برآوردگر متناظر با آن را تعریف می‌کنیم. سازگاری برآوردگر و خاصیت نرمال بودن توزیع مجانبی برآوردگر این شاخص اثبات می‌شود. علاوه بر آن ترتیبهای تصادفی بر اساس این شاخص نابرابری جدید تعریف می‌شود.
2020 MSC: 91B82 62P20 35G99	

۱. مقدمه

چندین شاخص و معیار در زمینه اندازه گیری نابرابری درآمد معرفی شده است. بیشتر شاخص‌های نابرابری بر اساس نسبت میانگین جزئی یا مجموع جزئی افراد کم درآمد به کل تعریف می‌شوند [۱] و [۵]. بنابراین تأثیر درآمدهای بالا در معیارهای نابرابری مذکور کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در چنین مواردی تأثیر درآمدهای بالا به خوبی در این شاخص‌ها در نظر گرفته نمی‌شود و این معیارها نمی‌تواند نشان دهنده تفاوت طبقاتی افراد جامعه باشد. تابع چندک نقش بسیار مهمی در موضوع نابرابری درآمد ایفا می‌کند. چندک‌های تابع توزیع با توجه به مفهوم آمار ترتیبی تعریف می‌شوند. بسیاری از معیارهای نابرابری درآمدی با مقایسه چندک‌های بالا و پایین توزیع درآمد و با استفاده از نسبت این چندک‌ها به دست می‌آیند. هر چه این نسبت‌ها از یک دورتر باشند، نابرابری توزیع درآمد بیشتر است. معیارهای نابرابری بر اساس چندک‌ها به راحتی به دست می‌آیند و تفسیر اقتصادی ساده‌ای دارند. از مهمترین این شاخصها شاخص پالما [۲] است که از نسبت سهم درآمد اختصاص داده شده توسط ۱۰ درصد بالا نسبت به ۴۰ درصد پایین تعریف می‌شود و به عنوان شاخص معنادارتر و شفاف نابرابری استفاده می‌شود. از آنجا که خاصیت نرمال مجانبی برآوردگر جهت انجام استنباطهای آماری حائز اهمیت است، در این پژوهش ابتدا شاخص نابرابری جدید و برآوردگر متناظر با آن را بر اساس نسبت چندکها تعریف می‌کنیم، سپس سازگاری این برآوردگر را اثبات می‌نماییم. همچنین توزیع مجانبی نرمال این برآورد را به دست می‌آوریم.

۲. نتایج اصلی

یکی از مباحث شاخص‌های نابرابری تعیین ویژگی‌هایی است که هر شاخص نابرابری باید داشته باشد که بتوان آن را برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد مورد مطالعه قرار داد. اما به طور مقایسه‌ای، هر چه شاخص ویژگی‌های بیشتری را داشته باشد، شاخص مناسب‌تری محسوب می‌شود. بسیاری از شاخص‌های نابرابری، تمام این ویژگی‌ها که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم را ندارند. در این جا برخی از این خواص را بیان می‌کنیم که در ادبیات اقتصادی به اصول حاکم بر شاخص‌های نابرابری معروفند.

• اصل بهنجارسازی

این اصل بیان می‌کند که دامنه شاخص نابرابری باید در فاصله $[0, 1]$ باشد. اندازه شاخص در حالت برابری کامل، یعنی همه افراد جامعه درآمد یکسان داشته باشند، برابر صفر و در حالت نابرابری کامل، زمانی که یک فرد کل درآمد جامعه را به خود اختصاص دهد، برابر یک است.

• اصل پایایی مقیاس

هرگاه درآمد همه افراد در مقدار مثبت c ضرب شود، شاخص نابرابری تغییر نکند. این خاصیت بیان می‌کند که شاخص نابرابری مستقل از مقیاس اندازه گیری است.

• حساسیت به افزودن مقدار ثابت

یکی دیگر از ویژگی‌های این شاخص عدم پایایی مکان یا حساسیت به افزودن یک مقدار ثابت است. این ویژگی بیان می‌کند که اگر به همه درآمدها یک مقدار ثابت افزوده شود، مقدار شاخص نابرابری درآمد تغییر خواهد نمود.

۱.۲. معرفی شاخص نابرابری جدید

فرض کنید $0 < \alpha < \beta < 1$ باشند و

$$Q(u) = \inf\{x | F(x) \geq u\} \quad 0 < u < 1,$$

که در آن $F(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی و $Q(\cdot)$ تابع چنک متغیر تصادفی نابرابری درآمد X است. قرار می‌دهیم

$$r_{\alpha, \beta} = \frac{Q(\beta)}{Q(\alpha)}$$

این شاخص نابرابری بر اساس نسبت چنک بالایی ($Q(\beta)$) و چنک پائینی ($Q(\alpha)$) از تابع توزیع تجمعی $F(\cdot)$ تعریف می‌شود. در گزاره‌های ذیل خواص مطلوب برای شاخص نابرابری جدید که بر اساس نسبت چنک‌های بالایی و پایینی تابع توزیع درآمد تعریف شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گزاره ۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی درآمد و به ازای $0 < \alpha < \beta < 1$ با شاخص نسبت $r_{\alpha, \beta}$ باشد. در این صورت شاخص نسبت دارای خاصیت بهنجارسازی است.

گزاره ۲.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی درآمد و به ازای $0 < \alpha < \beta < 1$ با شاخص نسبت $r_{\alpha, \beta}$ باشد. در این صورت شاخص نسبت دارای خاصیت پایایی مقیاس است.

گزاره ۳.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و به ازای $0 < \alpha < \beta < 1$ با شاخص نسبت $r_{\alpha, \beta}$ باشد. در این صورت شاخص نسبت به افزودن یک مقدار ثابت حساس یا دارای خاصیت عدم پایایی مکان است.

۲.۲. برآوردگر شاخص نسبت نابرابری

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی به حجم n از تابع توزیع احتمال F و $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{j:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظرش باشند. برآوردگر این شاخص بصورت

$$\hat{r}_{\alpha, \beta} = \frac{X_{[n\beta]+1:n}}{X_{[n\alpha]+1:n}},$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۴.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی نابرابری درآمد با امید ریاضی منتهای باشد. در این صورت به ازای $0 < \alpha < \beta < 1$ ، برآوردگر $\hat{r}_{\alpha, \beta}$ یک برآوردگر سازگار برای شاخص نابرابری $r_{\alpha, \beta}$ است.

اثبات. با استفاده از خاصیت آماره های مرتب ([۳]) داریم: $X_{[n\alpha]+1:n}$ و $X_{[n\beta]+1:n}$ برآوردگرهای قوی سازگار برای چنکهای $Q(\alpha)$ و $Q(\beta)$ هستند. با بکارگیری قضیه اسلاتسکی نتیجه حاصل میشود.

قضیه ۵.۲. فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی به حجم n از تابع توزیع احتمال F و $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{j:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ آماره های مرتب متناظرش باشند. به ازای $0 < \alpha < \beta < 1$ برآوردگر $\hat{r}_{\alpha, \beta}$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال است.

اثبات. قرار دهید $Y_i = \ln X_i$ در اینصورت: $Y_{i:n} = \ln X_{i:n}$ و نیز فرض کنید

$$\sqrt{n} \begin{bmatrix} Y_{[n\alpha]+1:n} - \gamma_{\alpha}^Y \\ Y_{[n\beta]+1:n} - \gamma_{\beta}^Y \end{bmatrix} \rightarrow N_{\gamma} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(f_Y(\gamma_{\alpha}^Y))^2} & \frac{\alpha(1-\beta)}{(f_Y(\gamma_{\alpha}^Y)f_Y(\gamma_{\beta}^Y))} \\ \frac{\alpha(1-\beta)}{(f_Y(\gamma_{\alpha}^Y)f_Y(\gamma_{\beta}^Y))} & \frac{\beta(\beta-1)}{(f_Y(\gamma_{\beta}^Y))^2} \end{bmatrix} \right)$$

$$\sqrt{n} [(Y_{[n\beta]+1:n} - Y_{[n\alpha]+1:n}) - (\gamma_{\beta}^Y - \gamma_{\alpha}^Y)] \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

که در آن

$$\sigma^2 = \frac{\beta(\beta-1)}{(f_Y(\gamma_{\beta}^Y))^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{(f_Y(\gamma_{\alpha}^Y))^2} - 2 \frac{\alpha(1-\beta)}{(f_Y(\gamma_{\alpha}^Y)f_Y(\gamma_{\beta}^Y))}.$$

$$\sqrt{n} \left[\ln \frac{X_{[n\beta]+1:n}}{X_{[n\alpha]+1:n}} - (\gamma_{\beta}^Y - \gamma_{\alpha}^Y) \right] \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

با روش دلتا و با فرض $g(t) = e^t$ داریم:

$$\sqrt{n} \left[\ln \frac{X_{[n\beta]+1:n}}{X_{[n\alpha]+1:n}} - e^{\gamma_{\beta}^Y - \gamma_{\alpha}^Y} \right] \rightarrow e^{\gamma_{\beta}^Y - \gamma_{\alpha}^Y} N(0, \sigma^2)$$

در توزیع نابرابری درآمد داگوم $\gamma_{\alpha}^Y = \ln \gamma_{\alpha}$ بنابر این داریم:

$$\sqrt{n} \left[\frac{X_{[n\beta]+1:n}}{X_{[n\alpha]+1:n}} - \left(\frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \right) \right] \rightarrow \left(\frac{\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha}} \right) N(0, \sigma^2)$$

بنابراین

$$\sqrt{n} (\hat{r}_{\alpha, \beta} - r_{\alpha, \beta}) \rightarrow r_{\alpha, \beta} N(0, \sigma^2)$$

که در آن

$$\sigma^2 = \frac{1}{(av)^2} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \frac{1}{(1-\beta \frac{1}{a})^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{(1-\alpha \frac{1}{a})^2} - 2 \frac{1-\beta}{\beta} \frac{1}{(1-\alpha \frac{1}{a})(1-\beta \frac{1}{a})} \right).$$

□

۳. ترتیبهای تصادفی بر اساس شاخص جدید

شاخصهای نابرابری نقش بسزایی در بحث نابرابری درآمد دارند. یک نتیجه مهم و اساسی از شاخصهای نابرابری درآمد مربوط به ترتیبهای تصادفی بر اساس این شاخصهاست. ترتیبهای تصادفی با شاخصهای نابرابری این امکان را به وجود می آورد که به مقایسه توزیعهای آماری برحسب نابرابری درآمد پردازیم. به خصوص مقایسه نابرابری در یک توزیع درآمد این امکان را فراهم می کند که نقش پارامترهای توزیع در نابرابری آن جامعه را مطالعه کنیم [۴]. در این جا به تشریح مفهوم ترتیب تصادفی بر اساس شاخص نابرابری جدید می پردازیم.

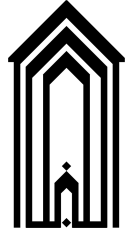
تعریف ۱.۳. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع، به ترتیب F_1 و F_2 و میانگینهای مثبت و متناهی باشند. در این صورت گوییم X_1 در ترتیب شاخص نسبت از X_2 کوچکتر است و آن را با $X_1 \leq_I X_2$ نشان می دهیم، اگر و تنها اگر

$$I_{X_1} \leq I_{X_2},$$

که در آن I_{X_1} و I_{X_2} به ترتیب شاخصهای نابرابری نسبت X_1 و X_2 هستند. این بدین مفهوم است که اگر X_1 و X_2 متغیرهای درآمد در دو جامعه باشند، نابرابری در جامعه اول کمتر از نابرابری در جامعه دوم است.

مراجع

- [1] E. Frigyes. Analysis and planning of the income distribution of workers and employees (in hungarian). *candidate's dissertation*, 2(1):27–43, 1965.
- [2] J. G. Palma. Homogeneous middles vs. heterogeneous tails, and the end of the ‘inverted-u’: It’s all about the share of the rich. *development and Change*, 42(1):87–153, 2011.
- [3] C. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, New York, 2009.
- [4] M. Shaked and G. Shanthikumar. *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press, San Diego, 2007.
- [5] M. Zenga. Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means. *Statistica and Applicazioni*, 5:3–28, 2007.



معرفی یک تعمیم از توزیع لگ نرمال در برازش به داده های درآمد

شهریار میرزائی*، آ

آ دانشگاه پیام نور

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: لگ نرمال توزیع تعمیم یافته داده های درآمد	مدل لگ نرمال یک توزیع آماری پایه ای برای برازش به داده های درآمد غیرمنفی با چولگی مثبت می باشد. آماردانان همواره به دنبال تعمیم توزیع های پایه ای با انعطاف پذیری بیشتر در برازش به داده های درآمد هستند. در این مقاله به تعمیمی از مدل لگ نرمال تمرکز می کنیم. در پایان به عملکرد این مدل در تحلیل نابرابری داده های واقعی درآمد می پردازیم.
2020 MSC: 60E05 62P20	

۱. مقدمه

رفتار پدیده‌های تصادفی انگیزه‌ای بود که الگوهای آماری معرفی شوند تا بتوان این گونه پدیده‌ها را در چارچوبی خاص بیان و کنترل کرد. به این ترتیب توزیع‌های پایه‌ای مهمی مانند نمایی، گاما، لگ نرمال، وایبول و بتا مورد توجه قرار گرفتند و به‌عنوان الگوهای مناسب برای داده‌های اقتصادی، طول عمر و آزمایشگاهی معرفی شدند. اما با پیشرفت علم و گسترش علوم در رشته‌های مختلف، الگوهای پایه جواب‌گوی مسایل جدید نبودند، این مسأله آماردانان را بر آن داشت تا مدل‌های جدیدی معرفی نمایند به طوری که شامل توزیع های پایه‌ای بوده و دارای انعطاف‌پذیری بیشتری باشند. در این راستا، پژوهشگران علم آمار به تعمیم الگوهای پایه‌ای پرداختند.

اخیرا مدل‌های کلاسیک توزیع‌های آماری و فرم‌های تعمیم یافته آنها در برازش به داده‌های واقعی درآمد مورد استفاده قرار گرفته اند. پژوهشگران همواره درصددند که تعمیم یا توسیعی از مدل‌های کلاسیک و پایه‌ای آمار بیابند که این مدل‌ها نسبت به مدل‌های پایه‌ای و نیز مدل‌های رقیب قبلی در برازش به داده‌های درآمد بهتر عمل کنند (کلیبر و کاتز (۲۰۰۳) [۲]).

توزیع لگ نرمال یک مدل پایه‌ای آماری انعطاف پذیر برای برازش به داده ای درآمد است. این توزیع به طور عمده برای تجزیه و تحلیل داده های مثبت و چوله به راست مورد استفاده قرار می گیرد. این داده ها معمولا در مطالعات و تحقیقات زیست شناسی، پزشکی و اقتصادی بدست می آیند. ویانلی (۱۹۸۳) [۳] تعمیمی از توزیع لگ نرمال ارائه داد. در این مقاله به تعمیمی دیگر از توزیع کلاسیک لگ نرمال تمرکز می‌کنیم. در برازش به داده های واقعی درآمد عملکرد آن را با مدل پایه ای و تعمیم یافته ویانلی مورد بررسی و مقایسه قرار می دهیم.

۲. نتایج اصلی

هر گاه $\log(X)$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ باشد، آنگاه تابع چگالی X دارای توزیع لگ نرمال با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x) - \mu)^2\right\}, \quad x > 0.$$

است که در آن $\mu \in (-\infty, +\infty)$ پارامتر مکان و $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس توزیع است. ویانلی (۱۹۸۳) [۲] توزیع لگ نرمال تعمیم یافته سه پارامتری را با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} r^{\frac{1}{r}} \sigma_r \Gamma(1 + \frac{1}{r})} \exp\left\{-\frac{1}{r} \left| \frac{\log(x) - \mu}{\sigma_r} \right|^r\right\}, \quad x > 0. \quad (1)$$

تعریف نمود. که در آن μ پارامتر مکان، $r > 0$ پارامتر شکل و $\sigma_r = [E|X - \mu|^r]^{\frac{1}{r}}$ پارامتر مقیاس توزیع است. این توزیع حالت خاص توزیع لگ نرمال به ازای $r = 2$ است. همچنین مدل آماری لگ لاپلاس به ازای $r = 1$ در تابع چگالی ۱ حاصل می‌شود. با تغییر متغیر $Y = \log(X)$ در تابع چگالی احتمال معادله ۱ می‌توان به تابع چگالی احتمال تعمیم یافته جدید لگ نرمال

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{r} r^{\frac{1}{r}} \sigma_r \Gamma(1 + \frac{1}{r})} \exp\left\{-\frac{1}{r} \left| \frac{y - \mu}{\sigma_r} \right|^r\right\}, \quad y > 0. \quad (2)$$

دست یافت که در این مدل نیز μ پارامتر مکان، $r > 0$ پارامتر شکل و σ_r پارامتر مقیاس توزیع است.

۱.۲. برازش مدل جدید به داده‌های واقعی

در این بخش، مدل تعمیم یافته جدید لگ نرمال را به داده‌های درآمد رده‌بندی نشده، براساس درآمد ۱۴۸۲۷ خانوار اتریشی در سال ۲۰۰۶ تجزیه و تحلیل می‌کنیم تا نشان دهیم مدل جدید در عمل چگونه کار می‌کند. مجموعه داده‌های به دست آمده در بسته نرم افزار R در دسترس است. در شکل ۱ داده‌ها با توزیع‌های لگ نرمال (LN)، لگ نرمال تعمیم یافته ویانلی (۱) (GLN) و نیز لگ نرمال تعمیم یافته مطروحه (۲) (GLN) برازش داده شدند. در شکل ۱ ملاحظه می‌شود که بصورت بصری نمی‌توان برتری و عملکرد بهتر توزیع جدید را در برازش به داده‌های درآمد تشخیص داد. برای مقایسه دقیق‌تر، از مقادیر معیارهای اطلاع آکائیکه (AIC)، اطلاع بیزی (BIC)، اطلاع هان-کوبین (HQIC) و نیز اطلاع آکائیکه سازگار (CAIC) استفاده می‌شود [۱]. این معیارها بر اساس مفهوم آنتروپی برای سنجش نیکویی برازش به کار می‌روند و نشان می‌دهند که استفاده از یک مدل به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. این ملاک‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} AIC &= -2\hat{\ell} + 2k, \\ BIC &= -2\hat{\ell} + k \log(n), \\ HQIC &= -2\hat{\ell} + 2k \log[\log(n)], \\ CAIC &= -2\hat{\ell} + \frac{2kn}{(n-k-1)}, \end{aligned}$$

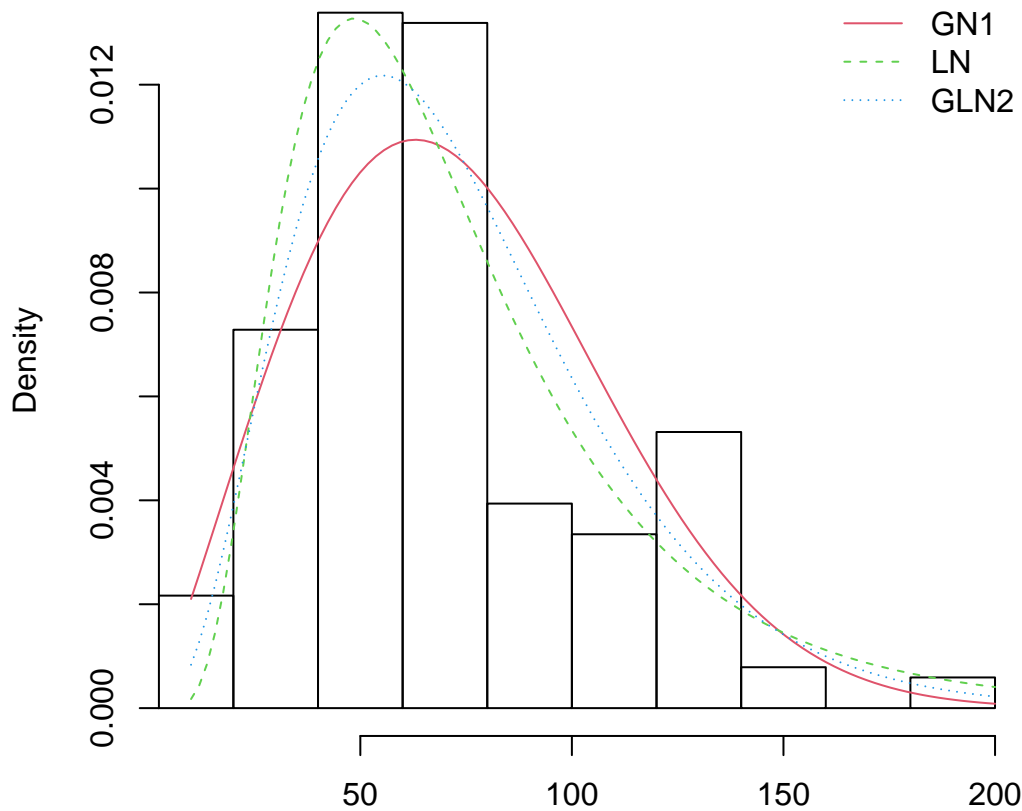
که در آن‌ها k تعداد پارامترهای مدل، n اندازه نمونه و $\hat{\ell}$ مقدار ماکسیمم لگاریتم تابع درستنمایی برای مدل برآورد شده است. با توجه به تعاریف فوق، مدلی بهتر است که دارای مقادیر ملاک‌های نیکویی برازش کمتری باشد. در جدول ۱ مقادیر برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی، و نیز ملاک‌های سنجش نیکویی برازش گزارش شده است. داده‌ها با توزیع‌های لگ نرمال (LN)، لگ نرمال تعمیم یافته ویانلی (۱) (GLN) و نیز لگ نرمال تعمیم یافته مطروحه (۲) (GLN) برازش شدند. ما از معیارهای آکائیک بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع برازش برای تعیین مناسب بودن مدل استفاده می‌کنیم. مقادیر آکائیک در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: مقادیر پارامترها و ملاک‌های نیکویی برازش برای داده‌های درآمد خانوارهای اتریشی

ملاک‌های نیکویی برازش				پارامترها			مدل
CAIC	HQIC	BIC	AIC	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	\hat{r}	
۳۱۳۴۸۳	۳۱۳۴۸۸	۳۱۳۴۹۸	۳۱۳۴۸۳	-	۲۲۴۷۲	۰۱۲/۲	LN
۳۱۲۱۵۲	۳۱۲۱۵۹	۳۱۲۱۷۵	۳۱۲۱۵۲	۶۵۶۹/۱	۲۲۱۲۸	۴۲۱/۱	۱GLN
۳۱۱۹۹۸	۳۱۲۰۰۸	۳۱۰۲۴۵	۳۱۱۷۶۵	۵۵۸۰/۱	۲۱۴۷۹	۳۷۹/۱	۲GLN

مقادیر نیکویی برازش آکائیک برای ۲GLN کوچکتر از دو مدل دیگر است که نشان می‌دهد که این داده‌ها با ۲GLN بهتر از دو مدل دیگر برازش دارند.

Histogram and theoretical densities



شکل ۱: برازش مدل‌ها به هیستوگرام داده‌ها

۲.۲. مقایسه روش‌های برآورد با شبیه‌سازی

برای بررسی دقت روش‌های گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی در برآورد پارامتر جدید σ ، نمونه‌هایی با اندازه‌های متفاوت از توزیع جدید با پارامترهای $\mu = 2$ ، $\sigma = 20000$ و مقادیر مختلف $r = 2, 3, 5$ تولید می‌کنیم. مقادیر اریبی، میانگین مربع خطا و متوسط برآورد در ۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی برای دو روش برآوردیابی گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی در جدول ۲ گزارش شده‌اند. با توجه به یافته‌های جدول ۲ واضح است که دو روش دارای اریبی مثبت‌اند، یعنی پارامتر r را بیشتر از مقدار واقعی آن برآورد می‌کنند. همان‌گونه که مورد انتظار است با افزایش اندازه نمونه مقدار اریبی و میانگین مربع خطای برآورد کاهش می‌یابد. علاوه بر آن، روش ماکسیمم درست‌نمایی نسبت به روش گشتاوری در برآورد پارامتر σ دارای اریبی و میانگین مربع خطای کمتری است. بنابراین این روش دارای عملکرد بهتری در برآورد پارامتر جدید σ است.

جدول ۲: مقایسه روش های گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی در برآورد پارامتر r

r	n	گشتاوری			ماکسیمم درستنمایی		
		متوسط برآورد	آزبی	میانگین مربع خطا	متوسط برآورد	آزبی	میانگین مربع خطا
۲	۳۰۰	۵۰۶۶/۲	۵۰۶۶/۰	۹۳۵۱۰۴/۰	۰۴۰۶/۰	۰۴۰۶/۲	۱۰۱۲۳۸۷/۰
	۵۰۰	۰۱۳۱/۲	۳۷۱۰/۰	۳۸۰۶۹۵/۰	۰۱۳۱/۰	۰۱۳۱/۲	۰۵۵۴۶۵۶/۰
	۷۰۰	۰۰۲۳/۲	۳۵۳۵/۰	۳۰۹۱۶۷/۰	۰۰۲۳/۰	۰۰۲۳/۲	۰۴۴۲۵۹۴/۰
	۱۰۰۰	۰۰۱۷/۲	۲۷۶۵/۰	۲۰۳۸۹۲/۰	۰۰۱۷/۰	۰۰۱۷/۲	۰۳۴۹۰۶۰/۰
۳	۳۰۰	۰۵۲۲۱۳/۳	۳۸۸۶۷۵/۰	۵۵۶۱۴۲/۰	۰۵۲۲۱۳/۰	۰۵۲۲۱۳/۳	۱۷۶۸۳۸/۰
	۵۰۰	۰۱۶۷۲۴/۳	۲۹۲۸۱۷/۰	۳۰۵۳۸۶/۰	۰۱۶۷۲۴/۰	۰۱۶۷۲۴/۳	۰۹۸۵۹۰/۰
	۷۰۰	۰۲۹۰۹۹/۳	۲۹۴۴۹۸/۰	۲۵۴۳۴۷/۰	۰۲۹۰۹۹/۰	۰۲۹۰۹۹/۳	۰۷۶۵۷۴/۰
	۱۰۰۰	۰۰۱۹۷۰/۳	۲۳۷۳۵۲/۰	۱۶۹۰۲۳/۰	۰۰۱۹۷۰/۰	۰۰۱۹۷۰/۳	۰۵۲۲۸۲/۰
۵	۳۰۰	۰۶۲۰۲۷/۵	۴۰۱۸۶۶/۰	۶۱۴۴۱۳/۰	۰۶۲۰۲۷/۰	۰۶۲۰۲۷/۵	۲۱۷۴۳۰/۰
	۵۰۰	۰۲۲۶۶۴/۵	۱۳۲۴۲۷/۰	۳۶۷۴۵۴/۰	۰۲۲۶۶۴/۰	۰۲۲۶۶۴/۵	۱۲۰۵۶۵/۰
	۷۰۰	۰۳۶۳۴۹/۵	۳۱۴۲۰۱/۰	۲۷۵۹۲۴/۰	۰۳۶۳۴۹/۰	۰۳۶۳۴۹/۵	۰۹۳۸۶۲/۰
	۱۰۰۰	۰۰۶۵۶۴/۵	۲۶۸۲۵۷/۰	۱۹۴۷۳۳/۰	۰۰۶۵۶۴/۰	۰۰۶۵۶۴/۵	۰۶۴۰۰۵/۰

مراجع

- [1] Joseph E Cavanaugh and Andrew A Neath. The akaike information criterion: Background, derivation, properties, application, interpretation, and refinements. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 11(3):e1460, 2019.
- [2] Christian Kleiber and Samuel Kotz. *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*. John Wiley & Sons, 2003.
- [3] S Vianelli. The family of normal and lognormal distributions of order r . *Metron*, 41(1-2):3-10, 1983.



برآورد آستانه بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره نارایب اشتاین ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر

زیبا بتوندی^آ، محمود افشاری^{*آ}، حمید کریمی کبیر^آ

^آگروه آمار، دانشکده مهندسی سیستمهای هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: آستانه نرم برآوردگر بیز تعمیم یافته موجکی برآورد مخاطره نارایب اشتاین توزیع نرمال ماتریس متغیر ماتریس میانگین	فرض کنید X یک ماتریس تصادفی $p \times m$ با توزیع نرمال ماتریس متغیر با ماتریس میانگین Θ و ماتریس کوواریانس Σ باشد، که در آن Σ و Θ ماتریس‌های کوواریانس معین مثبت معلوم هستند. در این مقاله برآورد بیز تعمیم یافته موجکی ماتریس میانگین Θ تحت تابع زیان تعادل و براساس توزیع پیشین ناسره $\pi(\Theta) = 1$ مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا با استفاده از برآوردگر بیز تعمیم یافته به عنوان برآوردگر هدف در تابع زیان تعادل و روش تعیین آستانه مخاطره نارایب اشتاین، آستانه بیز تعمیم یافته موجکی به دست می‌آید. سپس با به کارگیری آستانه پیشنهادی جدید، برآوردگر بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره نارایب اشتاین ماتریس میانگین حاصل می‌شود. در پایان با استفاده از مطالعه شبیه سازی و یک مثال کاربردی عملکرد برآوردگر معرفی شده بررسی شده است. نتایج شبیه سازی و مثال کاربردی بیانگر برتری برآوردگر بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره نارایب اشتاین نسبت به چهار برآوردگر موجکی انقباضی کلاسیک است.
2020 MSC:	
34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

بیان خصوصیات بسیاری از پدیده‌ها در دنیای واقعی متأثر از چندین متغیر یا ویژگی می‌باشد و در پردازش داده‌های مربوطه یک فرآیند مهم توصیف روابط احتمالی بین این متغیرها می‌باشد. با توجه ویژگی ذاتی این نوع داده‌ها برای نمایش آن‌ها می‌توان از بردارها یا ماتریس‌های تصادفی کمک گرفت، به عبارتی می‌توان گفت این داده‌ها از الگوهای چندمتغیره یا ماتریس متغیر پیروی می‌کنند. ماتریس تصادفی ماتریسی است که در آن برخی یا همه عناصر متغیرهای تصادفی هستند. برآورد پارامتر توزیع‌های ماتریس متغیر به دلیل لزوم درک روابط تعداد زیادی متغیر که تحلیل‌ها را به طور ذاتی مشکل می‌سازد و همچنین پیچیدگی محاسبات ماتریسی و نیاز به اطلاعات جبرخطی کمتر مورد توجه و بررسی قرار گرفته است لذا برآورد پارامترهای این نوع توزیع‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای است. توزیع نرمال پرکاربردترین توزیع‌های آماری است چرا که بسیاری از داده‌های واقعی یا توزیع نرمال دارند یا می‌توانند بر اساس قضیه حد مرکزی نرمال فرض شوند. توزیع نرمال ماتریس متغیر تعمیمی از توزیع نرمال چندمتغیره می‌باشد که مانند توزیع نرمال چندمتغیره بعلا قابلیت‌های محاسباتی و اینکه بسیاری از مشاهدات به طور مجانبی دارای توزیع نرمال هستند مورد توجه است.

در قرن ۱۹ فوریه ریاضیدان فرانسوی نشان داد که هر تابع تناوبی می‌تواند به صورت مجموع توابع نمایی مختلط (توابع سینوس، کسینوس) نمایش داده شود. یک ضعف تبدیل فوریه این است که حوزه عملکرد آن موضعی نیست و پس از انجام تبدیل اطلاعات زمان از بین می‌رود به عبارتی وضوح زمانی آن صفر است. از طرفی تبدیل فوریه بر روی سیگنال‌های غیر ایستا مانند سیگنال‌های صوتی عملکرد خوبی ندارد.

*سخنران

پست الکترونیک: zibatvandi@gmail.com (زیبا بتوندی)، afshar@pgu.ac.ir (محمود افشاری)، h_karamikabir@pgu.ac.ir (حمید کریمی کبیر)

همچنین در توابعی (یا سیگنال) که در برخی زمانها تغییرات ناگهانی و شدید دارند تبدیل فوریه این بخش از تابع را به خوبی نمایش نمی‌دهد زیرا باید تعداد بسیار زیادی از توابع پایه سینوسی مورد استفاده قرار گیرد تا تبدیل فوریه بتواند آن را نمایش دهد. برای برطرف کردن ضعف‌های تبدیل فوریه محققین تبدیلات موجک را معرفی و ارائه کردند. موجک‌ها برای تحلیل پدیده‌های گذرا که در بسیاری از نقاط دامنه خود صفر هستند یا برای تحلیل توابعی که در بعضی از زمانها تغییرات سریع دارند به کار می‌روند. همچنین موجک‌ها در نقاطی که مشتق تابع وجود ندارد یا تابع ناپیوسته است نسبت به فوریه عملکرد بهتر و سرعت همگرایی بالاتری دارند. موجک‌ها امکان تحلیل توابع غیرپایا را نیز فراهم می‌کنند. توجه جوامع آماری زمانی به موجک‌ها جلب شد که ملات [۲۴] رابطه بین موجک‌ها و پردازش سیگنال را نشان داد. داناو و جانستون [۷] نشان دادند آستانه‌های موجکی خواص بهینه آماری مطلوبی دارند. هال و پاتیل [۱۳] برآوردگرهای موجکی توابع چگالی و تابع بقا را معرفی کردند. آنتونیادیس و همکاران [۲] برآوردگر موجکی تابع چگالی و تابع خطر را برای داده‌های سانسور شده راست بررسی کردند. افشاری [۱]، دوستی و همکاران [۸] و چائویی و همکاران [۴] مطالعاتی در رابطه با برآوردگر تابع چگالی و مشتق تابع چگالی و تابع رگرسیون تصادفی برای متغیرهای تصادفی آمیخته انجام داده و نرخ همگرایی برآوردگرها و همچنین توزیع مجانبی ضرایب موجکی را ارائه کردند. کرمی‌کبیر و همکاران [۱۶] آستانه موجکی برآوردگرهای مخاطره ناریب اشتاین برای بردار میانگین محدود شده توزیع نرمال چندمتغیره با ماتریس کواریانس مجهول را بر اساس تابع زیان تعادل وزنی درجه دو مورد مطالعه قرار دادند. در زمینه برآورد پارامتر مکان توسط روش‌های موجک می‌توان به کرمی‌کبیر و افشاری [۱۸] و [۲۰] مراجعه کرد. برای اطلاع از جزئیات بیشتر در رابطه با کاربرد موجک‌ها در آمار به ویدا کوویک [۳۰] مراجعه نمائید.

موجک انقباضی یک روش ناپارامتری برای به دست آوردن یک برآورد غیرخطی از یک تابع معین است. داناو و جانستون [۶] این استراتژی را ارائه کردند به طوری که می‌توان نوفه^۱ را تا حد زیادی سرکوب کرد و در عین حال اطلاعات منحصر به فرد داده‌های اصلی را به خوبی حفظ کرد. این روش به انتخاب آستانه و تابع آستانه بستگی دارد. آستانه مقداری است که بر اساس آن ضرایب موجکی به دو دسته ضرایب کم‌اهمیت و پراهمیت تقسیم می‌شوند، به این صورت که اگر ضریب موجکی بیشتر از مقدار آستانه باشد متعلق به دسته ضرایب پراهمیت و در غیر این صورت جزو دسته ضرایب کم‌اهمیت خواهد بود. برای دستیابی به برآورد بهتر توابع، توابع آستانه مختلفی از قبیل تابع آستانه نرم و سخت ارائه شده‌اند. تابع آستانه نرم توسط داناو و جانستون [۷] ارائه شده است. این تابع ضرایب کم‌اهمیت را صفر و ضرایب پراهمیت را به اندازه مقدار آستانه می‌کاهد. تابع آستانه نرم با آستانه λ به فرم زیر است:

$$\text{Soft}(x, \lambda) = \text{sgn}(x) \max(0, |x| - \lambda).$$

لازم به ذکر است برای یک دامنه وسیعی از توابع زیان و برای کلاسی از توابع کلی؛ برآورد موجک انقباضی دارای ریسکی نزدیک به ریسک مینیماکس است. مدل داده‌های نوفه‌دار $\mathbf{X} = \Theta + \epsilon$ را در نظر بگیرید که در آن مقدار واقعی پارامتر Θ شامل نوفه ϵ باشد. با بکارگیری موجک انقباضی سعی در حذف نوفه از \mathbf{X} جهت دستیابی به $\hat{\Theta}$ بعنوان برآوردگر پارامتر Θ می‌گردد. مراحل موجک انقباضی نرم به اختصار به صورت زیر است.

۱. فرض کنید x_i ها، داده‌های آلوده به نوفه باشند. با فرض این که ماتریس تبدیل موجکی گسسته W و تابع مشاهدات به صورت $\mathbf{X} = \Theta + \epsilon$ باشد، ضرایب موجکی از تبدیل موجکی $\mathbf{W}\mathbf{X} = W\Theta + W\epsilon = \delta$ به دست می‌آیند.
۲. با استفاده از مقدار آستانه، ضرایب پراهمیت و ضرایب کم‌اهمیت تعیین می‌شوند. سپس بر اساس تابع آستانه نرم ضرایب اصلاح می‌شوند.
۳. از ضرایب موجکی اصلاح شده حاصل از مرحله قبل تبدیل موجک معکوس گرفته می‌شود. داده‌های حاصل، داده‌های بهسازی شده است.

برآوردگری که با استفاده از روش موجک انقباضی پارامتر را برآورد می‌کند، برآوردگر موجکی انقباضی نامیده می‌شود. در صورتی که این برآوردگر از تابع آستانه نرم با آستانه دلخواه $\lambda > 0$ استفاده کند، به آن برآوردگر موجکی انقباضی نرم^۲ گویند. اگر \mathbf{X} یک ماتریس تصادفی $p \times m$ باشد و $\delta(\mathbf{X})$ برآوردگر ماتریس میانگین Θ باشد به طوری که

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \delta_{11}(x) & \delta_{12}(x) & \cdots & \delta_{1m}(x) \\ \delta_{21}(x) & \delta_{22}(x) & \cdots & \delta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{p1}(x) & \delta_{p2}(x) & \cdots & \delta_{pm}(x) \end{bmatrix}$$

برآوردگر موجکی انقباضی نرم θ_{ij} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta_{ij}^{\text{Soft}}(x) = (x_{ij} - \text{sgn}(x_{ij})\lambda)I(|x_{ij}| > \lambda), \quad \lambda \geq 0 \quad i = 1 \cdots p \quad j = 1 \cdots m. \quad (1)$$

¹Noise

²Soft shrinkage wavelet estimator

بنابراین برآوردگر موجکی انقباضی نرم ماتریس میانگین θ را می‌توان به شرح زیر نوشت.

$$\delta^{soft}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X}),$$

که در آن

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = [g(X_{ij})], \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

و

$$g(X_{ij}) = -\lambda \operatorname{sgn}(X_{ij}) I(X_{ij} > \lambda) - X_{ij} I(|X_{ij}| \leq \lambda). \quad (3)$$

لم ۱.۱. اشتاین نشان داد اگر متغیر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه به ازای تمام توابع پیوسته $g: R \rightarrow R$ به طوری که $E|g'| < \infty$ رابطه زیر برقرار است.

$$E[g'(X)] = E[Xg(X)]. \quad (4)$$

□

اثبات. به اشتاین [۲۷] مراجعه کنید.

لم ۲.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ و $g: R^p \rightarrow R^p$ باشد، بطوریکه σ^2 معلوم است، آنگاه لم اشتاین به صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

$$E[(X - \theta)^T g(X)] = \sigma^2 E[\nabla \cdot g(X)].$$

که در آن $\nabla \cdot g(X)$ معرف عملگر واگرایی نسبت به متغیر X است که به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla \cdot g(X) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(X).$$

داناها و جانستون [۷] تکنیک تعیین آستانه مخاطره ناریب اشتاین را با به حداقل رساندن برآوردگر مخاطره ناریب اشتاین معرفی کردند. فرض کنید $X_i \sim N(\theta_i, 1), i = 1, \dots, p$ و $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ بردار $\delta(X)$ برآوردگر بردار میانگین θ باشد. اگر تابع $g = g_{i=1}^p$ در برآوردگر انقباضی $\delta(X) = X + g(X)$ مشتق‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه به ازای $\sigma^2 = 1$ در تابع زیان درجه دوم، با استفاده از تعمیم لم اشتاین ۲.۱ مخاطره زیر را داریم.

$$R(\theta, \delta(X)) = E_\theta (\|\delta(X) - \theta\|^2) = p + E_\theta (\|g(X)\|^2) + E_\theta (\nabla \cdot g(X)). \quad (5)$$

حال فرض کنید تابع $g(X) = (g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_p))$ که $g(X_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g(X_i) = \begin{cases} \lambda & X_i < -\lambda, \\ -X_i & |X_i| \leq \lambda, \\ -\lambda & X_i > \lambda. \end{cases}$$

باشد، در این حالت برآوردگر موجکی انقباضی نرم به شکل $X + g(X)$ است. به دلیل این‌که $\delta(X)$ مشتق‌پذیر ضعیف است با استفاده از لم ۲.۱ برای مخاطره (۵) عبارت زیر بدست می‌آید:

$$SURE(X, \lambda) = p - \sum_{i=1}^p I(|X_i| \leq \lambda) + \sum_{i=1}^p (|X_i| \wedge \lambda)^2, \quad (6)$$

که یک برآورد ناریب برای مخاطره است. لذا می‌توان نوشت:

$$R(\theta, \delta(X)) = E_\theta (\|\delta^{soft}(X) - \theta\|^2) = E_\theta [SURE(X, \lambda)]. \quad (7)$$

برای به دست آوردن یک آستانه جدید، می توان از برآوردگر ناریب مخاطره $SURE(X, \lambda)$ در (۶) به صورت زیر استفاده کرد.

$$\lambda^{sure} = \arg \min_{\lambda \leq \lambda^u} SURE(X, \lambda),$$

به طوری که اگر X و Y دو مجموعه دلخواه باشند و تابع دلخواه $f: X \rightarrow Y$ تعریف شده باشد. در این صورت مقدار $\arg \min f(\cdot)$ تابع $f(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\arg \min_{x \in X} f(x) = \{x | \forall y \in X : f(y) \geq f(x)\}.$$

تکنیک برآورد بیز یک روش مبتنی بر تابع زیان است. یکی از انواع توابع زیان، تابع زیان تعادل است. این تابع زیان به طور همزمان دو معیار نیکویی برازش $(\delta(X) - \delta_0(X))$ و خطای برآورد $(\delta(X) - \theta)$ را در نظر می گیرد. در این مقاله از تابع زیان تعادل

$$L(\delta; \theta) = \omega \text{tr}(\delta - \delta_0)^T Q (\delta - \delta_0) + (1 - \omega) \text{tr}(\delta - \theta)^T Q (\delta - \theta), \quad (۸)$$

به طوری که $0 \leq \omega < 1$ و Q یک ماتریس معین مثبت $p \times p$ باشد. این تابع زیان توسط زین الدینی و همکاران [۳۳] معرفی گردیده است. اتصال مدل سازبهای بیزی و موجکها زمینه های هیجان انگیز جدیدی را برای تحقیقات این دو حوزه با پتانسیل قابل توجه در حوزه مسائل کاربردی ایجاد کرد. هوانگ [۱۴] به بررسی موجک انقباضی در توزیع نرمال چندمتغیره تحت تابع زیان خطی جهت یافتن نوع خاصی از برآوردگر نرم موجکی پارامتر مکان با استفاده از برآوردگر بیز تعمیم یافته پرداخت که این برآوردگر دارای خواص بهینه مجاز و مینیماکس نیز بود. توره زاده و آرشی [۲۸] مقاله هوانگ را برای توزیع نرمال چندمتغیره آمیخته مقیاس تعمیم دادند. کرمی کبیر و افشاری [۱۵] برآوردگر بیز تعمیم یافته انقباضی موجکی پارامترهای خانواده توزیع بیضوی را تحت تابع زیان خطی نمایی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین کرمی کبیر و افشاری [۱۷] برآورد بردار پارامتر مکان را با رویکرد بیزی موجکی در خانواده توزیع های کروی بر اساس تابع زیان تعادل مورد مطالعه و تحقیق قرار دادند و توانستند یک برآوردگر مجاز و مینیماکس برای پارامتر مکان ارائه دهند. همچنین برآورد ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر در سال های اخیر مورد توجه پژوهشگران بوده است. زین الدینی و همکاران [۳۳] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر را بر اساس دو تابع زیان متعادل و کلاسیک مختلف مورد مطالعه قرار دادند. آنها بر اساس تابع زیان اول یک تابع زیان تعادلی بود که بسط یافته تابع زیان بکار گرفته شده توسط اصغر زاده و فارسی پور [۳] بود کلاسی از برآوردگرهای بیز تجربی ارائه کردند که بر برآوردگر حداکثر احتمال غلبه می کند. همچنین آنها کلاسی از برآوردگرهای مینیماکس با استفاده تکنیک اشتاین بدست آوردند. بر اساس تابع زیان درجه دوم نیز کلاسی از برآوردگرهای مینیماکس ماتریس میانگین که بر برآوردگر حداکثر احتمال برتری دارد نیز معرفی شد. زین الدینی و همکاران [۳۲] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر تحت تابع زیان تعادل با واریانس مجهول را ارائه دادند. آنها بسط چندمتغیره تابع زیان مطرح شده توسط چانگ و چانسو [۵] را در این تحقیق مورد استفاده قرار دادند و دامنه ای از برآوردگرهای بهینه بیز تعمیم یافته مینیماکس را برای ماتریس میانگین معرفی کردند. تسوکوما [۲۹] برآورد ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر با کواریانس مجهول تحت تابع زیان درجه دو پایا را مورد مطالعه و تحقیق قرار داد. بر اساس روش بیز تعمیم یافته سلسله مراتبی برآوردگر بیز تعمیم یافته ماتریس میانگین معرفی شد که یک برآوردگر پایا انقباضی است و تحت شرایطی نشان داد که این برآوردگر مینیماکس است. کونو [۲۲] دو کلاس از برآوردگرهای مینیماکس ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\beta, \mathbf{I}_m \otimes \Sigma)$ را تحت تابع زیان درجه دو ارائه کرد. او ماتریس کواریانس توزیع را مجهول در نظر گرفت. کرمی کبیر و همکاران [۱۹] برآورد موجکی انقباضی آستانه نرم ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر را در حالت محدود شده و ابعاد بالا را مورد بررسی و تحقیق قرار دادند. در زمینه دستیابی به برآوردگر بهینه ماتریس پارامتر مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر برآوردگرهای مختلفی توسط محققین معرفی گردید که می توان به قوش و شیه [۱۰] مراجعه کرد.

ما مسئله برآورد ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر با بکارگیری تکنیک موجک انقباضی و برآوردگر بیز را مورد بررسی قرار دادیم که تعمیمی از نتایج داناو و جانستون است. آنها برآورد موجک انقباضی بردار مکان توزیع نرمال چندمتغیره تحت تابع زیان درجه دو را بررسی کردند. ما در این تحقیق برآورد بیزی موجکی ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر تحت تابع زیان تعادل (۸) بررسی می کنیم. همچنین جهت دستیابی به برآوردگر بیزی موجکی ماتریس مکان، در این تحقیق برآوردگر بیز تعمیم یافته ماتریس مکان را بعنوان تابع هدف تابع زیان تعادل (۸) برای تعیین مقدار آستانه موجکی مورد استفاده قرار دادیم. ابتدا برآوردگر بیز تعمیم یافته ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\theta, \Sigma \otimes \Sigma)$ تحت توزیع پیشین ناسره $\pi(\theta) = 1$ را تعیین می کنیم. سپس با استفاده از برآوردگر بیز تعمیم یافته و روش تعیین آستانه مخاطره ناریب اشتاین یک مقدار آستانه بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین را معرفی می کنیم و برآوردگر بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین ماتریس میانگین توزیع نرمال ماتریس متغیر را ارائه می دهیم. ساختار مقاله به شرح زیر است. در بخش ۱ به مقدمه و پیشینه تحقیق پرداختیم. در بخش ۲ برآوردگر بیز $\delta^B(X)$ ماتریس مکان θ را تحت توزیع پیشین $N_{p,m}(\theta, \Sigma \otimes \Sigma)$ ارائه می دهیم. با در نظر گرفتن برآوردگر بیز تعمیم یافته بعنوان تابع هدف در تابع زیان تعادل به صورت $\delta_0 = \delta^{GB}(X)$ و بر اساس روش تعیین آستانه مخاطره ناریب اشتاین آستانه بیز تعمیم یافته موجکی معرفی می گردد. مطالعه شبیه سازی مونت کارلو و مثال های کاربردی جهت ارزیابی عملکرد آستانه بیزی موجکی انقباضی در بخش های ۳ و ۴ ارائه می شوند. بخش پایانی به بحث و نتیجه گیری می پردازد.

۲. برآورد آستانه بیز تعمیم یافته موجکی انقباضی مخاطره ناریب اشتاین

فرض کنید \mathbf{X} یک ماتریس $p \times m$ به صورت
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \cdots & X_{pm} \end{bmatrix}$$

با ماتریس میانگین Θ و ماتریس واریانس کوواریانس $\Theta \otimes \Sigma$ است. که در آن $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ و $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ماتریس های معین مثبت هستند اگر تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر باشد.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (\pi)^{\frac{-1}{\nu}} m^p \det(\Sigma)^{\frac{-1}{\nu}} \det(\Theta)^{\frac{-1}{\nu}} \exp\left(\text{tr}\left\{\frac{-1}{\nu} \Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \Theta) \Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \Theta)^T\right\}\right),$$

که در آن $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{p \times m}$. این توزیع به صورت $\mathbf{X} \sim N_{p,m}(\Theta, \Sigma \otimes \Theta)$ نمایش داده می شود. برای تعیین برآوردگر بیز ماتریس میانگین Θ تحت تابع زیان تعادل براساس توزیع پیشین ناسره $\pi(\Theta) = 1$ ابتدا توزیع پسین را در لم ۱.۲ تعیین می کنیم. سپس در قضیه ۲.۲ برآوردگر بیز تعمیم یافته ماتریس مکان Θ معرفی می گردد.

لم ۱.۲. فرض کنید ماتریس تصادفی \mathbf{X} دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \Sigma \otimes \Theta)$ است. تحت توزیع پیشین ناسره $\pi(\Theta) = 1$ توزیع پسین عبارت است از

$$\Theta | \mathbf{X} \sim N_{p,m}(\mathbf{X}, \Sigma \otimes \Sigma).$$

اثبات. براساس توزیع متغیر تصادفی $\mathbf{X} | \Theta \sim N_{p,m}(\Theta, \Sigma \otimes \Sigma)$ و توزیع پیشین ناسره $\pi(\Theta) = 1$ ، تعیین توزیع پسین $\pi(\Theta | \mathbf{X})$ از رابطه زیر تعیین می گردد.

$$\begin{aligned} \pi(\Theta | \mathbf{X}) &\propto f(\mathbf{X} | \Theta) \pi(\Theta) \\ &\propto \exp\left[\text{trace}\left(\frac{-1}{\nu} \Sigma^{-1}(\Theta - \mathbf{X}) \Sigma^{-1}(\Theta - \mathbf{X})^T\right)\right] \\ &\propto \exp\left[\text{trace}\left(\frac{-1}{\nu} \Sigma^{-1}(\Theta - \mathbf{X}) \Sigma^{-1}(\Theta - \mathbf{X})^T\right)\right]. \end{aligned}$$

لذا توزیع پسین عبارت است از:

$$\Theta | \mathbf{X} \sim N_{p,m}(\mathbf{X}, \Sigma \otimes \Sigma).$$

□

قضیه ۲.۲. فرض کنید ماتریس تصادفی \mathbf{X} دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \Sigma \otimes \Sigma)$ است. تحت توزیع پیشین ناسره $\pi(\Theta) = 1$ ، برآورد بیز تعمیم یافته ماتریس مکان Θ براساس تابع زیان تعادل (۸) به صورت زیر بدست می آید.

$$\delta^{GB}(X) = \omega \mathbf{X} + (1 - \omega) E(\Theta | \mathbf{X}) = \mathbf{X}. \quad (9)$$

اثبات. تحت توزیع پسین، تابع زیان پسین برآوردگر دلخواه $\delta(X)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \rho(\pi(\Theta | X), \delta) &= E[L(\delta, \Theta) | X] \\ &= E\left[\omega \text{tr}(\delta - \mathbf{X})^T \mathbf{Q}(\delta - \mathbf{X}) + (1 - \omega) \text{tr}(\delta - \Theta)^T \mathbf{Q}(\delta - \Theta) | \mathbf{X}\right]. \end{aligned}$$

لذا برآوردگر بیز تعمیم یافته به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\pi(\Theta | X), \delta)}{\partial \delta} &= E\left[\omega ((\delta - \mathbf{X}) \mathbf{Q} + (\delta - \mathbf{X}) \mathbf{Q}^T) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \omega) ((\delta - \Theta) \mathbf{Q} + (\delta - \Theta) \mathbf{Q}^T) | \mathbf{X}\right] \\ &= E\left[\delta (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) - \omega \mathbf{X} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) - (1 - \omega) \Theta (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) | \mathbf{X}\right] = 0, \end{aligned}$$

بنابراین برآوردگر بیز تعمیم یافته تحت تابع زیان (۸) و نتایج لم ۱.۲ عبارت است از:

$$\delta^{GB}(X) = \omega \mathbf{X} + (1 - \omega)E(\theta|\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

□

در قضیه بعد مینیمکس بودن برآوردگر بیز تعمیم یافته $\delta^{GB}(X) = \mathbf{X}$ تحت تابع زیان تعادل (۸) بررسی و اثبات می‌گردد.

قضیه ۳.۲. فرض کنید ماتریس تصادفی \mathbf{X} دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر $(\theta, \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$ با ماتریس‌های معلوم \mathbb{Q} و \mathbb{Q} باشد، تحت توزیع پیشین ناسره $\pi(\theta) = 1$ و برآوردگر هدف $\delta_0(X) = \mathbf{X}$ می‌توان نشان داد برآوردگر بیز تعمیم یافته $\delta^{GB}(X) = \mathbf{X}$ در (۹) تحت تابع زیان تعادل (۸) مینیمکس است.

اثبات. فرض کنید θ دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر با پارامترهای زیر باشد.

$$\theta \sim N_{p,m}(\theta_0, m\mathbf{P} \otimes \mathbb{Q}),$$

به طوری که \mathbf{P} یک ماتریس معین مثبت است. لذا توزیع پسین عبارت است از:

$$\theta|\mathbf{X} \sim N_{p,m}((\mathbf{I}_p - (\mathbb{Q}^{-1} + \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})^{-1} \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})\mathbf{X}, (\mathbb{Q}^{-1} + \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})^{-1} \otimes \mathbb{Q}).$$

بنابراین برآوردگر بیز تحت تابع زیان تعادل (۸) به صورت زیر است.

$$\delta^B(X) = \omega \mathbf{X} + (1 - \omega)E(\theta|\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_p - (1 - \omega)(\mathbb{Q}^{-1} + \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})^{-1} \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})\mathbf{X}.$$

مخاطره بیز برآوردگر بیز $\delta^B(X)$ برابر است با:

$$r_m = (1 - \omega)tr(\mathbb{Q})tr(\mathbf{Q}(\mathbb{Q}^{-1} + \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})^{-1}) + (1 - \omega)tr(\mathbf{Q}\frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})(\mathbb{Q}^{-1} + \frac{\mathbf{P}^{-1}}{m})^{-1},$$

پس

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = (1 - \omega)tr(\mathbb{Q})tr(\mathbf{Q}\mathbb{Q}).$$

چون مخاطره برآوردگر بیز $\delta^{GB}(X) = \mathbf{X}$ برابر است با:

$$R(\mathbf{X}, \theta) = E_{\mathbf{X}}[L(\mathbf{X}, \theta)] = (1 - \omega)tr(\mathbb{Q})tr(\mathbf{Q}\mathbb{Q}),$$

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}, \theta) &= E_{\mathbf{X}}[L(\mathbf{X}, \theta)] \\ &= E[(1 - \omega)tr((\mathbf{X} - \theta)^T \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \theta))] \\ &= E[L(\mathbf{X}, \theta)] = E[(1 - \omega)tr(\mathbf{X} - \theta)^T \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \theta)] = E[(1 - \omega)tr(\mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y})]. \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{Y} = [Y_{ij}]$ و $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ ، لذا (i, j) امین درایه ماتریس $\mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y}$ عبارت است از:

$$\sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p Y_{ti} q_{tk} Y_{kj},$$

بنابراین اثر ماتریس $\mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y}$ عبارت است از

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p Y_{ti} q_{tk} Y_{ki},$$

و در نتیجه مخاطره برآوردگر حداکثر احتمال \mathbf{X} برابر است با:

$$R(\mathbf{X}, \theta) = E[(1 - \omega)tr(\mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y})]$$

$$\begin{aligned}
 &= E((1 - \omega) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p Y_{ti} q_{tk} Y_{ki}) = (1 - \omega) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p E(Y_{ti} q_{tk} Y_{ki}) \\
 &= (1 - \omega) \sum_{i=1}^m \Psi_{ii} \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p q_{tk} \sigma_{tk} = (1 - \omega) \text{tr}(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbf{Q}^{\mathbb{E}}).
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = \sup_{\Theta} R(\mathbf{X}, \Theta). \quad (10)$$

□ بر اساس قضیه ۱۲.۱ لهنم و کسلا [۲۳]، $\delta^{GB}(X)$ یک برآوردگر مینیماکس است.

در این بخش برآوردگر بیز تعمیم یافته δ^{GB} در (۹) بعنوان برآوردگر هدف در نظر گرفته می شود و آستانه بیز تعمیم یافته موجکی در توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \mathbb{E} \otimes \mathbb{E})$ بر مبنای روش مخاطره نااریب اشتاین تحت تابع زیان (۸) معرفی می گردد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید ماتریس تصادفی \mathbf{X} دارای توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \mathbb{E} \otimes \mathbb{E})$ با ماتریس های معلوم \mathbb{E} و \mathbb{E} باشد. تحت تابع زیان (۸) با برآوردگر هدف $\delta^{\circ} = \delta^{GB} = \mathbf{X}$ که یک برآوردگر مینیماکس می باشد، آستانه بیز تعمیم یافته موجکی مخاطره نااریب اشتاین برای برآوردگر موجکی انقباضی نرم $\delta^{soft} = \mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X})$ عبارت است از:

$$\lambda^{G.Bayes-sure} = \arg \min_{0 \leq t \leq \sqrt{\gamma \log p}} SURE(\delta^{soft}, \delta^{GB}),$$

به طوری که

$$\begin{aligned}
 SURE(\delta^{soft}, \delta^{GB}) &= \text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} \mathbf{g}(\mathbf{X})) + (1 - \omega) \text{tr}(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbf{Q}^{\mathbb{E}}) \\
 &\quad - \gamma (1 - \omega) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m I(|X_{ij}| \leq t).
 \end{aligned}$$

اثبات. ابتدا مخاطره به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}
 R(\delta^{soft}, \delta^{GB}, \Theta) &= E[L(\delta^{soft}, \delta^{GB}, \Theta)] \\
 &= E\left[\omega \text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} \mathbf{g}(\mathbf{X})) + (1 - \omega) \text{tr}((\mathbf{X} - \Theta)^T \mathbf{Q} (\mathbf{X} - \Theta))\right. \\
 &\quad \left.+ (1 - \omega) \text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} \mathbf{g}(\mathbf{X})) + \gamma (1 - \omega) \text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} (\mathbf{X} - \Theta))\right] \\
 &= E\left[\text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} \mathbf{g}(\mathbf{X})) + (1 - \omega) \text{tr}(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbf{Q}^{\mathbb{E}}) + \gamma (1 - \omega) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p g(\mathbf{X}_j)\right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SURE(\delta^{soft}, \delta^B) &= \text{tr}(\mathbf{g}^T(\mathbf{X}) \mathbf{Q} \mathbf{g}(\mathbf{X})) + (1 - \omega) \text{tr}(\mathbb{E}) \text{tr}(\mathbf{Q}^{\mathbb{E}}) \\
 &\quad - \gamma (1 - \omega) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m I(|X_{ij}| \leq t),
 \end{aligned}$$

چون $SURE(\delta^{soft}, \delta^{GB})$ برآوردگر نااریب مخاطره می باشد داریم:

$$E(L(\delta^{soft}, \delta^{GB}, \Theta)) = E[SURE(\delta^{soft}, \delta^{GB})],$$

□

$$\lambda^{G.Bayes-sure} = \arg \min_{0 \leq t \leq \sqrt{\gamma \log p}} SURE(\delta^{soft}, \delta^{GB}) \text{ و}$$

جدول ۱: مقدار میانگین مربعات خطای آستانه‌های بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین، سخت و نرم جهانی، بیز و اعتبار متقابل به ازای ابعاد مختلف p و m در توزیع $N_{p,m}(\omega, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$.

p	m	بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین			جهانی سخت	جهانی نرم	اعتبار متقابل
		$\omega = 0.8$	$\omega = 0.5$	$\omega = 0.2$			
4	4	48.0	49.0	56.0	37.2	55.2	37.2
8	8	97.0	100.1	151.1	81.4	93.5	93.4
16	16	32.0	33.0	39.0	27.3	22.5	45.5
32	32	56.0	58.0	66.0	42.3	68.4	15.5
64	64	107.0	106.0	108.0	75.4	97.4	45.5
4	4	24.0	25.0	29.0	91.0	30.1	80.0
8	8	48.0	50.0	58.0	91.3	13.4	21.4
16	16	96.0	98.0	131.1	29.7	53.7	93.7
32	32	95.0	97.0	131.1	96.7	87.1	89.7
64	64	93.0	94.0	108.1	19.6	95.6	47.6
4	4	120.0	124.0	140.0	21.1	16.1	33.1
8	8	24.0	25.0	29.0	14.2	16.2	14.2
16	16	47.0	48.0	57.0	6.4	28.4	28.4
32	32	94.0	96.0	121.1	55.7	33.8	80.7
64	64	92.0	93.0	107.1	99.7	73.7	20.8
4	4	50.0	56.0	70.0	55.0	56.0	57.0
8	8	11.0	12.0	14.0	87298.0	14.1	13.1
16	16	23.0	24.0	28.0	4.2	26.2	21.2
32	32	46.0	47.0	56.0	6.4	19.4	24.4
64	64	93.0	93.0	106.1	68.9	72.8	87.8

۳. مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت آستانه‌های بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین معرفی شده در بخش قبل را به کمک مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و عملکرد این آستانه را با چهار آستانه موجکی کلاسیک برای برآورد پارامتر ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ مقایسه می‌کنیم. آستانه‌های موجکی مورد بررسی عبارتند از آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین به ازاء مقادیر $\omega = 0.2, 0.5, 0.8$. آستانه اعتبار متقابل، آستانه بی‌زی و آستانه‌های نرم و سخت جهانی. آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین در قضیه ۴.۲ معرفی شده است. کلیه محاسبات با نرم افزار $R - 3.6.1$ با استفاده از بسته‌های *MixMatrix*، *wavethresh*، و *mvtnorm* انجام گردید. شایان ذکر است از موجک دوبیچز برای انجام کلیه شبیه‌سازی‌های موجکی استفاده شد. تعداد تکرار شبیه‌سازی برابر $m = 100$ در نظر گرفته شد. ابتدا یک ماتریس تصادفی از توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\Theta, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ با ابعاد $p = 8, 16, 32, 64$ و $m = 4, 8, 16, 32, 64$ از طریق شبیه‌سازی تولید شد. در ادامه نوبت با توزیع نرمال ماتریس متغیر استاندارد $N_{p,m}(\omega, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ به داده‌های حاصل از شبیه‌سازی افزوده شد. سپس داده‌های نوفه‌دار با بکارگیری تبدیل موجک گسسته به ضرائب موجکی تبدیل شدند و پس از اصلاح ضرائب توسط روش موجک انقباضی نرم با بکارگیری آستانه موردنظر، با استفاده از تبدیل موجک گسسته معکوس تخمینی از داده‌های اولیه حاصل شد. شاخص میانگین مربعات خطا نیز برای اندازه‌گیری عملکرد مدل استفاده گردید.

در جدول ۱ مقدار شاخص میانگین مربعات خطا برای توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\omega, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ برای پنج آستانه موردنظر ارائه شده است. با توجه به مقادیر میانگین مربعات خطا می‌توان نتیجه گرفت آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین عملکرد بسیار بهتری از چهار آستانه دیگر داشته است. این آستانه برای ω های مختلف نیز بررسی شده که کمترین مقدار میانگین مربعات خطا برای $\omega = 0.8$ بوده است بدین مفهوم که این آستانه در $\omega = 0.8$ عملکرد بهتری از خود نشان داده‌اند. در تمامی ابعاد ماتریس نیز عملکرد آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین بهتر از آستانه بی‌زی موجکی مخاطره ناریب اشتاین بوده است. با ایجاد یک مجموعه داده شبیه‌سازی شده از توزیع نرمال ماتریس متغیر $N_{p,m}(\omega, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ که ماتریس واریانس کوواریانس \mathcal{I} به صورت تصادفی از توزیع ویشارت تولید گردیده است، مقادیر میانگین مربعات خطا برای پنج آستانه موجکی مدنظر محاسبه و در جدول ۲ ارائه گردید. مشابه نتایج حاصله در جدول ۱ آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین عملکرد بسیار بهتری نسبت به سایر آستانه‌ها از خود نشان داده است. همچنین در ابعاد $p = 4, 8, 16, 32$ این آستانه کمترین مقدار میانگین مربعات خطا را برای مقدار $\omega = 0.8$ دارد و در حالت $p = 64$ برای هر سه مقدار ω مقدار میانگین مربعات خطا تغییری نمی‌کند.

۴. مثال کاربردی

در این قسمت براساس داده‌های واقعی برای بررسی عملکرد آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین ارائه می‌شود. مشابه روش شبیه‌سازی خطا با توزیع $N_{p,m}(\omega, \mathcal{I}_p \otimes \mathcal{I}_m)$ به مجموعه داده‌ها اضافه شد و با کمک تبدیلات موجک گسسته، سعی شد داده‌های اصلی بازسازی شوند. در نهایت مقدار شاخص میانگین مربعات خطا برای بررسی دقت آستانه‌ها محاسبه گردید.

۴.۱. مجموعه داده‌های مقاومت فشاری بتن

بتن مهمترین ماده در مهندسی عمران است. مقاومت فشاری بتن یک تابع غیرخطی از سن و مواد تشکیل دهنده است. مجموعه داده‌های مقاومت فشاری بتن از [۳۱] شامل ۹ متغیر واقعی از ۱۰۳۰ نمونه بتن است. داده‌ها را می‌توان از طریق لینک زیر مشاهده کرد:

جدول ۲: مقدار میانگین مربعات خطای آستانه‌های بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین، سخت و نرم جهانی، بیز و اعتبار متقابل به ازای ابعاد مختلف p و m در توزیع $(Np, m(\omega, \xi) \otimes I_m)$.

اعتبار متقابل	بیز	جهانی نرم	جهانی سخت	بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین			
				$\omega = 0.8$	$\omega = 0.5$	$\omega = 0.2$	
				p	m		
۴۱.۲۵	۹۷.۲۴	۴۱.۲۵	۴۱.۲۵	۵۱.۰	۵۵.۰	۶۲.۰	۴
۰۲.۱۱۳	۷۱.۱۰۱	۹۸.۱۰۱	۱۹.۹۳	۹۷.۰	۹۸.۰	۹۹.۰	۸
۹۷.۱۱۱	۴۶.۱۲۱	۹۵.۱۴۰	۳۲.۱۰۰	۰۱.۱	۰۱.۱	۰۱۸.۱	۱۶
۷۸.۱۱۰۳	۸۲.۱۲۰۲	۸۲.۱۲۸۳	۶۰.۱۰۲۰	۰۰۹.۰	۰۰۹۴.۰	۰۰۹.۰	۳۲
۳۷.۵۱۷۰	۲۵.۴۹۷۰	۵۳.۵	۴۱.۴۵۹۱	۲۳.۰	۲۳.۰	۲۳.۰	۶۴
۶۴.۴	۱۳.۱۰	۴۴.۹	۳۰.۵	۲۵.۰	۲۶.۰	۳۱.۰	۴
۱۹.۴۲	۴۰.۴۴	۶۲.۵۳	۷۰.۴۱	۴۸.۰	۴۹.۰	۵۰.۰	۸
۹۵.۲۵۰	۹۲.۲۴۱	۷۸.۲۴۹	۷۰.۲۱۱	۹۹۳۳.۰	۹۹۳۶.۰	۹۹۵۰.۰	۱۶
۵۴.۲۱۰۹	۴۸.۲۰۹۴	۷۸.۲۲۷۵	۱۴.۱۸۴۹	۹۹.۰	۰۰۲.۱	۰۰۸.۱	۳۲
	۸۰.۶۸۵۰	۸۰.۶۸۳۷	۰۹.۵۶۸۱	۰۰.۱	۰۰.۱	۰۰.۱	۶۴
۳۷.۶	۳۸.۶	۳۷.۶	۳۷.۶	۱۲.۰	۱۳.۰	۱۵.۰	۴
۰۰.۲۶	۹۴.۲۳	۰۰.۲۶	۰۰.۲۶	۲۵.۰	۲۵.۰	۲۵.۰	۸
۹۱.۱۵۲	۵۸.۱۴۶	۲۰.۱۵۷	۳۶.۱۲۵	۴۹۵۰.۰	۴۹۵۰.۰	۴۹۵۰.۰	۱۶
۰۳.۲۰۶۰	۳۷.۱۹۴۸	۰۲.۲۱۵۳	۹۴.۱۹۶۲	۹۹۴.۰	۹۹۶.۰	۰۰.۱	۳۲
۶۷.۷۳۳۷	۹۳.۷۶۹۱	۵۲.۷۸۸۲	۶۶.۷۲۲۰	۰۰۹.۱	۰۰.۱	۰۰.۱	۶۴
۹۰.۳	۷۹.۳	۹۰.۳	۸۷.۳	۰۶۲.۰	۰۶۴.۰	۰۷۱.۰	۴
۳۹.۱۵	۳۷.۱۵	۳۸.۱۵	۲۴.۱۵	۱۲۳۷.۰	۱۲۳۸.۰	۱۲۵.۰	۸
۵۱.۱۰۷	۶۵.۱۰۷	۴۳.۱۰۹	۳۰.۱۰۴	۲۴۸.۰	۲۴۸.۰	۲۴۹.۰	۱۶
۶۷.۷۳۳۷	۹۳.۷۶۹۱	۵۱.۷۸۸۲	۶۶.۷۲۲۰	۰۰.۱	۰۰.۱	۰۰.۱	۳۲
۷۳.۷۴۷۵	۷۲.۷۴۹۱	۶۱.۷۶۹۱	۰۸.۷۳۴۷	۹۹۸.۰	۹۹۸.۰	۹۹۸.۰	۶۴

Concrete Compressive Strenght Data Set

برای سادگی ما از چهار متغیر سنگدانه درشت (X_1) ، سنگدانه ریز (X_2) ، سن (X_3) و مقاومت فشاری بتن (X_4) با حجم نمونه ۲۰۰ استفاده کردیم.

مقدار میانگین مربعات خطا برای آستانه‌های جهانی نرم و سخت، آستانه متقابل، آستانه بی‌زی و آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین برای مقادیر مختلف ω به دست آمد و در جدول ۳ ارائه شد. مشابه نتایج شبیه‌سازی و همچنین مثال قبل، نتایج این مجموعه داده‌ها نیز عملکرد بهتر آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین را نشان می‌دهد.

جدول ۳: مقدار میانگین مربعات خطای آستانه‌های موجکی بی‌زی تعمیم‌یافته مخاطره ناریب اشتاین، سخت و نرم جهانی، بیز و اعتبار متقابل برای مجموعه داده‌های مقاومت فشاری بتن.

اعتبار متقابل	بیز	جهانی نرم	جهانی سخت	بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین		
				$\omega = 0.8$	$\omega = 0.5$	$\omega = 0.2$
				p	m	
۰۵۴.۱	۰۷۸.۱	۹۹.۰	۹۷.۵	۸۹۹.۰	۸۳۹.۰	۸۶۳.۰

۵. نتیجه‌گیری

برآورد پارامتر توزیع‌های چندمتغیره و ماتریس متغیر با در نظر گرفتن کاربرد وسیع آن‌ها در مسائل دنیای واقعی اهمیت ویژه‌ای دارد. محققین روش‌های مختلفی را برای برآورد پارامترها معرفی کردند. رویکرد بی‌زی یک ابزار کلاسیک توانمند و پرکاربرد در برآوردیابی است. موجک انقباضی نیز یک شیوه‌ی ناپارامتری نوین است که برآوردی غیرخطی از هر تابع دلخواه را ارائه می‌دهد. برای دستیابی به یک برآوردگر بهینه ماتریس مکان توزیع نرمال ماتریس متغیر در این مقاله تکنیک برآورد بی‌زی موجکی انقباضی مدنظر قرار گرفت. ابتدا برآوردگر بیز ماتریس مکان تحت توزیع پیشین نرمال ماتریس متغیر و تابع زیان تعادل تعیین شد. در مرحله بعد با در نظر گرفتن برآوردگر بیز تعمیم‌یافته بعنوان تابع هدف در تابع زیان تعادل و بکارگیری روش تعیین مقدار آستانه مخاطره ناریب اشتاین، آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین معرفی گردید. برای ارزیابی عملکرد آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین از مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی استفاده شد. شاخص میانگین مربعات خطا برای مقایسه آستانه بیز تعمیم‌یافته موجکی مخاطره ناریب اشتاین و چهار آستانه کلاسیک موجکی بکار برده شد. مطالعه شبیه‌سازی و مثال کاربردی عملکرد بهتر آستانه بیز تعمیم‌یافته مخاطره ناریب اشتاین را نسبت به سایر آستانه‌های موجکی نشان دادند.

مراجع

- [1] M. Afshari, *Nonlinear wavelet shrinkage estimator of nonparametric regularity regression function via cross-validation with simulation study*, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, **15:6** (2017) 1-16.
- [2] A. Antoniadis, G. Gregoire and G. Nason, *Density and hazard rate estimation for right-censored data by using wavelet methods*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), **61:1** (1999) 63-84.

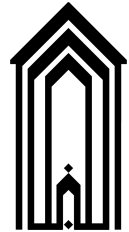
- [3] A. Asgharzadeh and N. S.Farsipour, *Estimation of the multivariate normal mean under the extended balanced loss function*, Internat. J. Statist. Systems. **3** (2008) 131–136.
- [4] Y.P. Chaubey, H. Doosti and B.P. Rao, *Wavelet based estimation of the derivatives of a density for a negatively associated process*, Journal of Statistical Theory and Practice. **2(3)** (2008) 453-463.
- [5] Y. Chung and K. Chansoo, *Simultaneous estimation of the multivariate normal mean under balanced loss function*, Comm. Statist. Theory Methods. **26** (1997) 1599-1611.
- [6] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*, biometrika. **81:3** (1994) 425-455.
- [7] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*, Journal of the american statistical association. **90(432)** (1995) 1200-1224.
- [8] H. Doosti, H.A. Niroomand and M. Afshari, *Wavelet Based Estimation of the Derivatives of a Density for a Discrete-Time Stochastic Process: L_p Losses*, Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. **17:1** (2006) 75-81.
- [9] D. Fourdrinier and W.E. Strawderman, *Robust minimax Stein estimation under invariant data-based loss for spherically and elliptically symmetric distributions*, Metrika. **78:4** (2015) 461-484.
- [10] M. Ghosh and G. Shieh, *Empirical Bayes Minimax Estimators of Matrix Normal Means*, Journal of Multivariate Analysis. **38** (1991) 306-318.
- [11] A.K. Gupta and A.K. Nagar, *Matrix variate distribution*, Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [12] K. Hamidieh, *A data-driven statistical model for predicting the critical temperature of a superconductor*, Computational Materials Science. **154** (2018) 346-354.
- [13] P. Hall and P. Patil, *Formulae for mean integrated squared error of nonlinear wavelet-based density estimators*, The Annals of Statistics. **23:3** (1995) 905-928.
- [14] S.Y. Huang, *On a Bayesian aspect for soft wavelet shrinkage estimation under an asymmetric linex loss*, Statistics and Probability Letters. **56** (2002) 171-175.
- [15] H. Karamikabir and M. Afshari, *Wavelet shrinkage generalized Bayes estimation for elliptical distribution parameters under LINEX loss*, International journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing. **17:3** (2019) 649-669.
- [16] H. Karamikabir, M. Afshari and F. Lak, *Wavelet threshold based on Stein's unbiased risk estimators of restricted location parameter in multivariate normal*, journal of Applied Statistics. **48:10** (2021) 1712-1729.
- [17] H. Karamikabir and M. Afshari, *Generalized Bayesian shrinkage and wavelet estimation of location parameter for spherical distribution under balance-type loss: Minimavity and admissibility*, Multivariate Analysis. **177:c** (2020) 104853.
- [18] H. Karamikabir and M. Afshari, *New wavelet thresholds of elliptical distributions under the balance loss*, Statistica sinica. **31:4** (2021) 1829-1852.
- [19] H. Karamikabir, A.N. Asghari and A. Salimi, *Soft thresholding wavelet shrinkage estimation for mean matrix of matrix variate normal distribution: low and high dimensional*, Soft Computing. (2022) 1-16.
- [20] H. Karamikabir and M. Afshari, *Wavelet shrinkage generalized bayes estimation for multivariate normal distribution mean vectors with unknown covariance matrix under balanced linex loss*, Theoretical Statistics. **45:1** (2022) 107–123.
- [21] G. Kerkycharian and D. Picard, *Density estimation in besov spaces*, Statistics and Probability Letters. **13:1** (1992) 15-24.
- [22] Y. Konno, *Families of minimax estimators of matrix of normal means with unknown covariance matrix*, J.Japan.Statist.Soc. **20:2** (1990) 191-201.
- [23] E.L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*, Springer (1998).
- [24] S.G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. **11:7** (1989) 674-693.
- [25] Y. Meyer, *Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numerique de l'image*, Cambridge University Press, (1992) english translation.
- [26] K.B. Petersen and M.S. Pedersen, *The matrix cookbook*, Technical University of Denmark, **7:15** (2008) p.510.
- [27] M.C. Stein, *Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution*, The Annals of Statistics. **9:6** (1981) 1135-1151.
- [28] S. Torehzadeh and M. Arashi, *A note on shrinkage wavelet estimation in Bayesian analysis*, Statistics and Probability Letters. **84** (2014) 231-234.
- [29] H. Tsukuma, *Generalized bayes minimax estimation of the normal mean matrix with unknown covariance matrix*, Multivariate Analysis. **100** (2009) 2296-2304
- [30] B. Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets*, 2nd Ed., Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley Interscience, (2009).
- [31] C. Yeh, *Modeling of strength of high performance concrete using artificial neural networks*, Cement and Concrete Research. **28 (12)** (1998) 1797-1808.
- [32] S. Zinodiny, S. Rezaie and S. Nadarajah, *Bayes minimax estimation of the mean matrix of matrix-variate normal distribution under balanced loss function*, Statistics and Probability Letters. **125** (2017) 110-120.
- [33] S. Zinodiny, S. Rezaie and S. Nadarajah, *Minimax estimation of the mean matrix-variate Normal Distribuion*, Probability and Mathematical Statistics. **36:2** (2016) 187-200.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-144، صص ۸۶-۹۲

به دست آوردن توابع زیان در یادگیری عمیق با استفاده از روش حداکثر درستنمایی

مهدی کلانتری*

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده	اطلاعات مقاله
روش حداکثر درستنمایی روشی است با قدمتی طولانی در حوزه آمار که کاربردهای فراوان و مختلفی در شاخه‌های متنوع علم آمار دارد. یکی از کاربردهای مهم و جذاب این روش در حوزه یادگیری عمیق، که شاخه‌ای از یادگیری ماشین و هوش مصنوعی است، می‌باشد. در این مقاله نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان چهار تابع زیان معروف و پرکاربرد در یادگیری عمیق شامل میانگین توان دوم خطا، میانگین قدر مطلق خطا، آنتروپی متقابل دودویی و آنتروپی متقابل طبقه‌ای را با استفاده از روش حداکثر درستنمایی به دست آورد.	واژه‌های کلیدی: هوش مصنوعی یادگیری ماشین یادگیری عمیق روش حداکثر درستنمایی تابع زیان
	2020 MSC: 68T05 68T99

۱. مقدمه

در این بخش، ابتدا با مفهوم هوش مصنوعی^۱ آشنا شده و سپس به کاربردهایی از آن در حوزه‌های مختلف اشاره خواهیم کرد. در ادامه توضیحاتی در مورد یادگیری ماشین^۲ و یادگیری عمیق^۳ خواهیم داد و ارتباط آنها با هوش مصنوعی را بیان می‌کنیم.

۱.۱. هوش مصنوعی چیست؟

هوش مصنوعی مبحثی است که هنوز تعریف دقیقی و جامعی از آن که مورد توافق دانشمندان این حوزه باشد ارائه نشده است. تعریف هوش مصنوعی بسته به سازمان و زمینه‌ای که این فناوری در آن استفاده می‌شود، متفاوت است. دانشمندان مختلف نیز با توجه به زمینه پژوهشی و کاربردهای متنوع، تعاریف متفاوتی از هوش مصنوعی ارائه داده‌اند. بر اساس تعریفی که سازمان همکاری و توسعه اقتصادی^۴ در سال ۲۰۱۹ ارائه کرده است، هوش مصنوعی عبارت است از: «یک سیستم مبتنی بر ماشین که می‌تواند برای مجموعه معینی از اهداف تعریف شده توسط انسان، پیش‌بینی، توصیه یا تصمیم‌گیری موثر بر محیط‌های واقعی یا مجازی را انجام دهد».

هوش مصنوعی در دهه ۱۹۵۰ پا به عرصه نهاد. در آن زمان تعداد انگشت شماری از پیشگامان علم نوظهور رایانه این پرسش را مطرح کردند که چگونه می‌توان رایانه‌ها را وادار به «فکر کردن» نمود. تعریف کوتاهی که از هوش مصنوعی می‌توان ارائه داد عبارت است از: «تلاش برای خودکارسازی کارهای هوشمند که به طور معمول توسط انسان انجام می‌شود» [۱].

*سخنران

پست الکترونیک: kalantarimahdi@pnu.ac.ir (مهدی کلانتری)

¹Artificial Intelligence (AI)

²Machine Learning (ML)

³Deep Learning (DL)

⁴Organization for Economic Co-operation and Development (OECD)

هوش مصنوعی در سال ۱۹۵۶ تبدیل به یک حوزه پژوهشی دانشگاهی شد و در سال‌های پس از آن چندین موج خوش‌بینی را تجربه کرده و مجدد دچار امواج ناامیدی و کمبود بودجه شده که به آن «زمستان هوش مصنوعی» می‌گویند. سپس فناوری‌های جدیدی در پی آن آمده و موفقیت و بودجه‌های تحقیقاتی این حوزه مجدداً احیا گشته‌اند. بیشتر کارهای پژوهشی اولیه در هوش مصنوعی بر روی انجام ماشینی بازی‌ها و نیز اثبات قضیه‌های ریاضی با کمک رایانه‌ها بود. در آغاز چنین به نظر می‌آمد که رایانه‌ها قادر خواهند بود چنین فعالیت‌هایی را تنها با بهره گرفتن از تعداد بسیار زیادی کشف و جستجو برای مسیرهای حل مساله و سپس انتخاب بهترین روش برای حل آن‌ها به انجام رسانند. به مدت نسبتاً طولانی، بسیاری از متخصصین بر این باور بودند که هوش مصنوعی در سطح انسان در صورتی قابل دستیابی است که مجموعه بسیار بزرگی از قواعد صریح و روشن برای کار با دانش توسط برنامه نویس‌ها ارائه شود، مثل بازی شطرنج. این رویکرد به نام هوش مصنوعی نمادین^۵ شناخته می‌شود و از دهه ۱۹۵۰ تا اواخر دهه ۱۹۸۰ الگوی عمده هوش مصنوعی بود. اوج محبوبیت آن هنگام رونق سیستم‌های خبره^۶ در طول دهه ۱۹۸۰ بود [۶].

هوش مصنوعی کاربردهای متنوعی دارد. تعدادی از مهمترین کاربردهای هوش مصنوعی عبارتند از: استفاده در موتورهای جستجوی اینترنتی پیشرفته (مثل گوگل)، سامانه توصیه‌گر (که توسط یوتیوب، آمازون و نتفلیکس استفاده شده‌اند)، فهم زبان انسان‌ها (همچون Siri)، دستیار گوگل و Alexa)، وسایل نقلیه خودگردان (مثل پهپادها) و اتومبیل‌های خودران (مثل تسلا)، تشخیص‌های پزشکی، خلق آثار هنری، اثبات قضیه‌های ریاضی، انجام بازی‌های فکری (مثل شطرنج و Go)، تعیین هویت تصاویر (تشخیص چهره) و صداها، ذخیره انرژی، تهیه قراردادهای و پیش‌بینی آرای قضایی. در شبکه‌های اجتماعی مطرح مانند توئیتر یا اینستاگرام، برای تشخیص الگوهای رفتاری انسانی، جلوگیری از هرزنامه و انتشار محتوای مجرمانه و نیز شناسایی مخاطبان هدف برای تبلیغات، از هوش مصنوعی استفاده می‌شود. همچنین، برخی از ربات‌های شبکه اجتماعی بر پایه هوش مصنوعی فعالیت می‌کنند تا در بالاترین سطوح، رفتارهای انسانی را شبیه‌سازی نمایند.

۲.۱. یادگیری ماشین چیست؟

با اینکه هوش مصنوعی نمادین برای حل مسائل «تعریف شده و منطقی» مانند بازی شطرنج کاملاً مناسب بود، در سنجش و تشخیص قواعد مشخص برای حل مسائل پیچیده‌تر مانند دسته بندی تصاویر، تشخیص گفتار و ترجمه زبان به سختی قابل اعمال بود. راه حل این مشکل، رویکرد جدیدی به نام **یادگیری ماشین** برای جایگزینی با هوش مصنوعی نمادین بود. یادگیری ماشین در پاسخ به این پرسش به وجود آمد: آیا کامپیوتر می‌تواند فراتر از «آنچه ما فرمان می‌دهیم» خودش یاد بگیرد که یک کار خاص را چگونه باید انجام دهد؟ به جای اینکه برنامه نویس‌ها قوانین پردازش داده‌ها را به صورت دستی ایجاد کنند، آیا کامپیوتر می‌تواند با بررسی داده‌ها این قوانین را به صورت خودکار یاد بگیرد؟ در برنامه نویسی سنتی یا همان الگوی هوش مصنوعی نمادین؛ افراد، قوانین (برنامه) و داده‌هایی را که باید بر اساس این قوانین پردازش شوند وارد می‌کنند و پاسخها به دست می‌آیند. در یادگیری ماشین؛ افراد، داده‌ها و نیز پاسخهایی که از داده‌ها انتظار می‌رود را وارد می‌کنند و قوانین استخراج شده و به دست می‌آیند. سپس، می‌توان این قوانین را در مورد داده‌های جدید اعمال نموده و پاسخهای اصلی را به دست آورد [۶].

یک سامانه یادگیری ماشین به جای برنامه نویسی معین و مشخص، آموزش داده می‌شود. نمونه‌های زیادی مرتبط با یک وظیفه در اختیار آن قرار داده می‌شود؛ سامانه ساختار آماری موجود در این مثال‌ها را کشف کرده و در نهایت می‌تواند قوانینی را برای خودکارسازی وظایف بسازد. به عنوان مثال، برای تشخیص چهره خودکار، باید به سامانه یادگیری ماشین نمونه‌های زیادی از تصاویری را بدهید که قبلاً افراد، آن چهره مورد نظر را تشخیص داده باشند. بدین ترتیب سامانه قوانین آماری برای ارتباط دادن تصاویر به چهره مورد نظر را یاد می‌گیرد. بنابراین می‌توان گفت الگوریتم‌های یادگیری ماشین یک مدل ریاضی بر اساس داده‌های نمونه یا داده‌های آموزشی به منظور پیش‌بینی یا تصمیم‌گیری بدون برنامه‌ریزی آشکار، ایجاد می‌کنند.

با وجود اینکه یادگیری ماشین از دهه ۱۹۹۰ مطرح شد، اما به سرعت به محبوب‌ترین و موفق‌ترین شاخه هوش مصنوعی بدل شده است. از جمله علل آن، دسترسی به سخت افزارهایی با قدرت پردازش بالا و سریع‌تر و همچنین مجموعه داده‌های بزرگتر بوده است. یادگیری ماشین ارتباط تنگاتنگی با آمار و ریاضی دارد، اما در چند مورد مهم متفاوت از آمار است. برخلاف آمار، یادگیری ماشین با مجموعه داده‌های بزرگ و پیچیده (مانند مجموعه داده میلیون‌ها تصویر که هر کدام ده‌ها هزار پیکسل دارند) سروکار دارد که تحلیل آماری سنتی مانند تحلیل بیزی^۷ در چنین مواردی ناکارآمد است. در نتیجه، یادگیری ماشین به طور نسبی از نظریه ریاضیاتی کمی (شاید خیلی کم) برخوردار بوده و مبتنی بر مهندسی است. یادگیری ماشین رهیافتی تجربی است که در آن ایده‌ها بیشتر به صورت عملی تایید می‌شوند تا نظری [۱].

یادگیری ماشین در بسیاری زمینه‌ها از جمله مهندسی، تجارت، زبان‌شناسی، اقتصاد، صنعت و پزشکی کاربرد دارد. این شاخه از هوش مصنوعی در بسیاری جنبه‌های زندگی روزمره وارد شده است. به عنوان مثال، موتورهای جستجوی اینترنتی در گوگل از یادگیری ماشین استفاده می‌کنند. همین‌طور فیس‌بوک یا برنامه عکس اپل که تصاویر افراد را شناسایی می‌کند، نوعی از یادگیری ماشین است. پالایش هرزنامه‌ها در ایمیل هم از کاربردهای یادگیری ماشین است.

^۵Symbolic

^۶Expert Systems

^۷Bayesian Analysis

۳.۱ یادگیری بازنمایی از داده‌ها

همانطور که قبلاً اشاره شد، یادگیری ماشین برای پردازش داده‌ها، با استفاده از مثال‌هایی در ارتباط با آنچه انتظار می‌رود، قوانین را کشف می‌کند. بنابراین برای انجام یادگیری ماشین به سه مورد نیاز داریم:

۱. **نمونه‌های ورودی**^۸: به عنوان مثال اگر هدف تشخیص گفتار است، داده‌ها می‌توانند فایل صوتی حرف زدن افراد باشد. در صورتی که هدف تگ کردن تصاویر باشد، داده‌ها می‌توانند تصاویر باشند.
۲. **مثال‌هایی از خروجی مورد انتظار**^۹: برای تشخیص گفتار، نمونه‌ها می‌توانند مشتمل بر ضبط فایل‌های صوتی افراد باشد. برای تصاویر، خروجی مورد انتظار می‌تواند تگ‌هایی مانند «خودرو»، «گل» و غیره باشد.
۳. **روشی برای سنجش درستی عملکرد الگوریتم**: این کار برای تعیین فاصله بین خروجی حاضر الگوریتم و خروجی مورد انتظار آن ضرورت دارد. این سنجش به عنوان سیگنال بازخورد برای تنظیم چگونگی کارکرد الگوریتم به کار می‌رود. این مرحله تنظیم، همان چیزی است که «یادگیری»^{۱۰} نامیده می‌شود.

یک مدل یادگیری ماشین، نمونه‌های ورودی خود را به خروجی‌های معنادار تبدیل می‌کند، فرایندی که به واسطه مواجهه با مثال‌های شناخته شده ورودی‌ها و خروجی‌ها «یادگرفته می‌شود». بنابراین، مساله اصلی در یادگیری ماشین تبدیل داده‌ها به صورت معنادار است. به عبارت دیگر، یاد گرفتن «بازنمایی»^{۱۱} مفید نمونه‌های ورودی در دسترس؛ بازنمایی‌هایی که ما را به خروجی مورد انتظار نزدیکتر می‌کنند. در واقع بازنمایی شیوه نگاه متفاوت به داده‌ها است. به عنوان مثال، یک تصویر رنگی را می‌توان با فرمت RGB (قرمز-سبز-آبی) یا فرمت HSV (مقدار اشباع رنگ مایه) کدگذاری کرد. اینها دو نوع بازنمایی متفاوت از داده‌های یکسان می‌باشند. برخی از کارهایی که با یک بازنمایی مشکل می‌نماید، ممکن است با بازنمایی دیگر آسان‌تر انجام گیرد. به عنوان مثال، «انتخاب تمامی پیکسل‌های قرمز» در فرمت RGB آسان‌تر است. در حالی که «اشباع کمتر تصویر» در فرمت HSV آسان‌تر است [۱].

کار تمامی مدل‌های یادگیری ماشین پیدا کردن بازنمایی‌های مناسب برای نمونه‌های ورودی‌شان است؛ یعنی تبدیل داده‌ها به گونه‌ای که برای مساله جاری مناسب‌تر باشد. یادگیری در حیطه یادگیری ماشین، فرایند جستجوی خودکار برای بازنمایی‌های بهتر را توضیح می‌دهد. تمامی الگوریتم‌های یادگیری ماشین مشتمل بر پیدا کردن خودکار تبدیل‌هایی است که داده‌ها را به بازنمایی‌های بهتر برای یک کار مشخص تبدیل می‌کنند. بنابراین، از نظر فنی یادگیری ماشین یعنی جستجوی بازنمایی مناسب برای نمونه‌های ورودی، در فضایی از حالات ممکن از پیش تعریف شده با کمک سیگنال بازخورد [۱].

۴.۱ یادگیری عمیق چیست؟

یادگیری عمیق شاخه خاصی از یادگیری ماشین است. این روش، برداشت جدیدی برای یادگیری لایه‌های^{۱۲} متوالی بازنمایی معنادار از داده‌ها است که هر لایه به لحاظ معنایی غنی‌تر از لایه‌های پیشین است. در یادگیری عمیق، این بازنمایی‌های لایه به لایه (تقریباً همواره) از طریق مدل‌هایی یاد گرفته می‌شوند که شبکه‌های عصبی^{۱۳} نامیده می‌شوند. می‌توان شبکه عصبی عمیق را یک عملیات عصاره‌گیری چند مرحله‌ای در نظر گرفت که در آن اطلاعات از چندین صافی متوالی عبور کرده و کاملاً خالص (متناسب با کار مورد نظر) بیرون می‌آیند. بنابراین از نظر فنی یادگیری عمیق عبارت است از روش چند مرحله‌ای برای یاد گرفتن بازنمایی‌های داده‌ها. لازم به ذکر است که کلمه **عمیق** در یادگیری عمیق به لایه‌های متوالی بازنمایی‌ها اشاره دارد. تعداد لایه‌هایی که سازنده مدل هستند، عمق^{۱۴} مدل نامیده می‌شود [۱]. همانطور که اشاره شد، یادگیری ماشین درباره نگاشت ورودی‌ها به اهداف است که با مشاهده نمونه‌های بسیاری از ورودی و اهداف انجام می‌گیرد. فرض کنید x ورودی و y اهداف یک مدل یادگیری ماشین باشد. از نظر ریاضی، شبکه عصبی عمیق را می‌توان به صورت تابع $y = f(x)$ در نظر گرفت. هدف، یافتن بهترین تقریب از تابع $f(x)$ است به طوری که خروجی‌های شبکه عصبی که با \hat{y} نشان می‌دهیم، به اهداف نزدیک باشند. در یادگیری عمیق احتمالاتی، خطای تصادفی (ϵ) یا نویز^{۱۵} نیز در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، در یادگیری عمیق احتمالاتی مدل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y = f(x) + \epsilon \quad (1)$$

شبکه‌های عصبی عمیق، نگاشت ورودی به هدف را از طریق دنباله عمیق تبدیل داده‌های ساده (لایه‌ها) انجام می‌دهند و تبدیل داده‌ها به واسطه مواجهه با نمونه‌ها یاد گرفته می‌شود. جزئیات کارهایی که یک لایه با نمونه‌های ورودی‌اش انجام می‌دهد، در وزن^{۱۶} همان لایه ذخیره می‌شود

⁸Input Data Points

⁹Expected Output

¹⁰Learning

¹¹Representation

¹²Layers

¹³Neural Networks (NN)

¹⁴Depth

¹⁵Noise

¹⁶Weight

که در اصل یک دسته از اعداد هستند. به بیان تخصصی، وزن لایه (پارامتر لایه)، تبدیل‌هایی را که یک لایه انجام می‌دهد پارامتر بندی می‌کند. از این دیدگاه، یادگیری به معنای یافتن مجموعه‌ای از مقادیر برای وزن‌های تمامی لایه‌ها در شبکه است، به گونه‌ای که شبکه به درستی نمونه‌های ورودی را به اهداف مرتبط نگاشت نماید [۱].

دو نوع از مهمترین مسائلی که یادگیری عمیق به خوبی قادر به حل آنهاست عبارتند از دسته‌بندی^{۱۷} و رگرسیون^{۱۸}. در مسائل دسته‌بندی، هدف این است که مشخص کنیم یک ورودی متعلق به کدام یک از k دسته موجود است. در مسائل رگرسیونی، هدف پیش‌بینی یک مقدار عددی پیوسته است؛ مثل پیش‌بینی دمای هوای فردا یا پیش‌بینی قیمت آتی اوراق بهادار [۲].

در بخش ۲، چهار تابع زیان معروف و پرکاربرد در یادگیری عمیق معرفی شده و در بخش ۳ نیز مروری خواهیم داشت بر روش حداکثر درست‌نمایی. نحوه استخراج چهار تابع زیان مورد نظر با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی^{۱۹} در بخش ۴ به تفصیل شرح داده شده است.

۲. معرفی چهار تابع زیان

برای کنترل خروجی یک شبکه عصبی عمیق باید بتوان میزان تفاوت خروجی آن را با خروجی مورد انتظار سنجید. این سنجش به وسیله تابع هدف^{۲۰} یا معیار^{۲۱} انجام می‌شود. هنگام انجام کمینه‌سازی روی آن ممکن است آن را تابع هزینه^{۲۲}، تابع زیان^{۲۳} یا تابع خطا^{۲۴} نیز بنامیم. تابع هدف، پیش‌بینی‌های شبکه عصبی و هدف واقعی (چیزی که به عنوان خروجی از شبکه می‌خواهیم) را گرفته و میزان فاصله^{۲۵} را محاسبه می‌کند و بدین ترتیب کیفیت کار شبکه را مشخص می‌کند.

از مهمترین توابع زبانی که در مسائل رگرسیونی کاربرد دارند می‌توان به میانگین توان دوم خطا^{۲۶} (MSE) و میانگین قدر مطلق خطا^{۲۷} (MAE) اشاره کرد. در مسائل دسته‌بندی نیز دو تابع زیان آنتروپی متقابل دودویی^{۲۸} (BCE) و آنتروپی متقابل طبقه‌ای^{۲۹} (CCE) کاربردهای زیادی دارند. حال به معرفی هر یک از این توابع زیان خواهیم پرداخت.

۱. ۲. توابع زیان MSE و MAE

فرض کنید در یک مساله رگرسیونی \hat{y} خروجی شبکه عصبی بوده که یک پیش‌بینی برای مقدار واقعی y فراهم می‌کند. تابع زیان MSE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2)$$

وقتی که n برابر با تعداد داده‌های آموزشی^{۳۰} است. تابع زیان MAE نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (3)$$

۲. ۲. توابع زیان BCE و CCE

فرض کنید در یک مساله دسته‌بندی دودویی، متغیر گسسته y نشان دهنده برچسب دسته بوده که می‌تواند دو مقدار، مثلاً ۰ و ۱، داشته باشد. در این حالت خروجی شبکه عصبی عبارت است از $p_1(x) = Pr(y = 1 | x; w)$ ، یعنی احتمال (شرطی) تعلق به دسته‌ای با برچسب ۱. واضح

¹⁷Classification

¹⁸Regression

¹⁹Maximum Likelihood

²⁰Objective Function

²¹Criterion

²²Cost Function

²³Loss Function

²⁴Error Function

²⁵Distance Score

²⁶Mean Squared Error (MSE)

²⁷Mean Absolute Error (MAE)

²⁸Binary Cross Entropy (BCE)

²⁹Categorical Cross Entropy (CCE)

³⁰Training Data

است که احتمال تعلق به دسته‌ای با برچسب صفر برابر است با $p_0(x) = Pr(y = 0|x; w) = 1 - p_1(x)$. پارامتر w نشان دهنده وزن لایه‌ها است.

در مسائل دسته‌بندی دودویی تابع زیان BCE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BCE = \frac{-1}{n} \left\{ \sum_{i:y_i=0} \log(p_0(x_i)) + \sum_{i:y_i=1} \log(p_1(x_i)) \right\} \quad (۴)$$

در مساله دسته‌بندی چند کلاسی، متغیر گسسته y می‌تواند چندین مقدار مثل $0, 1, \dots, k-1$ داشته باشد. در این حالت خروجی شبکه عصبی عبارت است از $p_j(x) = Pr(y = j|x; w)$ ، یعنی احتمال (شرطی) تعلق به دسته‌ای با برچسب j . واضح است که $\sum_{j=0}^{k-1} p_j(x) = 1$. تابع زیان CCE که در مساله دسته‌بندی چند کلاسی کاربرد دارد، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$CCE = \frac{-1}{n} \left\{ \sum_{i:y_i=0} \log(p_0(x_i)) + \dots + \sum_{i:y_i=k-1} \log(p_{k-1}(x_i)) \right\} \quad (۵)$$

همانطور که انتظار می‌رود، تابع زیان BCE حالت خاصی از تابع زیان CCE است. کفایت قرار دهیم $k = 2$.

۳. روش حداکثر درستنمایی

یکی از مهمترین روش‌ها برای برآورد (تخمین) پارامترهای یک مدل آماری، روش حداکثر درستنمایی است. مجموعه‌ای از تعداد n نمونه تصادفی $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ را در نظر بگیرید. فرض می‌شود این نمونه‌ها مستقل بوده و هر کدام دارای توزیع احتمال $p(x; \theta)$ باشند. کمیت θ نشان دهنده پارامتر مجهول توزیع احتمال مذکور (مدل آماری) است. در روش حداکثر درستنمایی به دنبال یافتن مقادیری از پارامتر هستیم که به ازای آن، احتمال مشاهده n نمونه تصادفی x_1, \dots, x_n بیشترین مقدار را داشته باشد. به عبارت دیگر، برآوردگر حداکثر درستنمایی که با نماد $\hat{\theta}_{ML}$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(S; \theta) \quad (۶)$$

با توجه به استقلال n نمونه تصادفی خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \quad (۷)$$

به دلیل اینکه مقدار احتمال همواره عددی است بین صفر و یک، استفاده از ضرب روی چندین احتمال در رابطه (۷) می‌تواند به دلایل مختلفی نامناسب باشد. مثلاً محاسبات می‌تواند مستعد سرریز^{۳۱} و یا پاریز^{۳۲} عددی شود [۴]. برای دستیابی به یک مساله بهینه‌سازی مناسب‌تر و هم‌ارز، به این نکته توجه می‌کنیم که گرفتن لگاریتم از تابع درستنمایی در رابطه (۷)، argmax آن را تغییر نداده و به راحتی حاصل ضرب به مجموع تبدیل می‌شود:

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \log(p(x_i; \theta)) \quad (۸)$$

مساله بهینه‌سازی در رابطه (۸) معادل بهینه‌سازی زیر است:

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left[- \sum_{i=1}^n \log(p(x_i; \theta)) \right] \quad (۹)$$

رابطه (۹) نشان می‌دهد که برآوردگر حداکثر درستنمایی پارامتر θ برابر است با مقداری از پارامتر θ که به ازای آن کمیت $\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(x_i; \theta))$ کمترین مقدار را داشته باشد. توجه داشته باشید که از روش حداکثر درستنمایی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های احتمال شرطی نیز می‌توان استفاده کرد.

در بخش ۴ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان توابع زیان معرفی شده در بخش ۲ را با استفاده از روش حداکثر درستنمایی به دست آورد.

³¹Overflow

³²Underflow

۴. به دست آوردن توابع زیان با استفاده از روش حداکثر درستنمایی

نوع تابع زیان انتخاب شده در یادگیری عمیق می‌تواند خروجی مدل را تحت تاثیر قرار دهد [۳، ۵]. امروزه بیشتر شبکه‌های عصبی از روش حداکثر درستنمایی آموزش داده می‌شوند. یکی از مزایای استفاده از این روش در یادگیری عمیق این است که بار طراحی توابع زیان برای هر مدل را بر طرف می‌کند [۷]. در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان توابع زیان معرفی شده در بخش ۳ را با استفاده از روش حداکثر درستنمایی به دست آورد.

در یک مساله رگرسیونی، اگر فرض کنیم که نوفه تصادفی (ϵ) در رابطه (۱) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار معلوم σ باشد آنگاه توزیع شرطی \mathcal{Y} به شرط x نرمال با میانگین \hat{y} و انحراف معیار σ خواهد بود. در نتیجه تابع چگالی احتمال شرطی \mathcal{Y} به شرط x به صورت زیر خواهد بود:

$$p(y|x; w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\hat{y}}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

وقتی که w وزن‌های شبکه عصبی هستند. برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی w کفایت عبارت زیر را کمینه سازیم:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(y_i|x_i; w)) = - \sum_{i=1}^n \left\{ \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma}\right)^2 \right\} \quad (11)$$

به دلیل اینکه پارامتر σ معلوم فرض شده و مقادیر ثابت نیز تاثیری در مساله کمینه‌سازی ندارند، برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی w کفایت عبارت $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ را کمینه سازیم. با در نظر گرفتن میانگین عبارت اخیر، همان تابع زیان MSE که در رابطه (۲) تعریف شده است، به دست می‌آید.

اگر در مساله رگرسیونی فرض کنیم که ϵ دارای توزیع لاپلاس^{۳۳} با پارامتر مکان صفر و پارامتر مقیاس معلوم σ باشد آنگاه توزیع شرطی \mathcal{Y} به شرط x توزیع لاپلاس با پارامتر مکان \hat{y} و پارامتر مقیاس σ خواهد بود. بنابراین تابع چگالی احتمال شرطی \mathcal{Y} به شرط x به صورت زیر خواهد بود:

$$p(y|x; w) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{|y-\hat{y}|}{\sigma}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (12)$$

برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی w کفایت عبارت زیر را کمینه سازیم:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(y_i|x_i; w)) = - \sum_{i=1}^n \left\{ \log\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) - \frac{1}{\sigma} |y_i - \hat{y}_i| \right\} \quad (13)$$

با توجه به اینکه پارامتر σ معلوم فرض شده و مقادیر ثابت نیز تاثیری در مساله کمینه‌سازی ندارند، برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی w کفایت عبارت $\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$ را کمینه سازیم. با میانگین‌گیری از عبارت اخیر نیز، همان تابع زیان MAE که در رابطه (۳) تعریف شده است، به دست می‌آید.

همانطور که قبلاً اشاره شد، در مساله دسته‌بندی دودویی که متغیر گسسته \mathcal{Y} فقط می‌تواند دو مقدار ۰ و ۱ اختیار کند، خروجی شبکه عصبی عبارت است از $p_1(x) = Pr(y = 1|x; w)$ یعنی احتمال تعلق به دسته‌ای با برچسب ۱. احتمال تعلق به دسته‌ای با برچسب صفر نیز برابر است با $p_0(x) = 1 - p_1(x)$. برای به دست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی w کفایت عبارت زیر را کمینه سازیم:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(y_i|x_i; w)) = - \left\{ \sum_{i:y_i=0} \log(p_0(x_i)) + \sum_{i:y_i=1} \log(p_1(x_i)) \right\} \quad (14)$$

در اینجا نیز با میانگین‌گیری از رابطه (۱۴) به تابع زیان BCE که در رابطه (۴) تعریف شده است، خواهیم رسید.

³³Laplace

قبلاً اشاره کردیم که در مساله دسته‌بندی چند کلاسی، متغیر گسسته y می‌تواند چندین مقدار مثل $1, \dots, k-1, 0$ داشته باشد. در این حالت خروجی شبکه عصبی برابر است با $p_j(x) = Pr(y = j|x; w)$ یعنی احتمال تعلق به دسته‌ای با برچسب j . در اینجا نیز برای به دست آوردن برآورد حداکثر درست‌نمایی w کفایست عبارت زیر را کمینه سازیم:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(y_i|x_i; w)) = - \left\{ \sum_{i:y_i=0} \log(p_0(x_i)) + \dots + \sum_{i:y_i=k-1} \log(p_{k-1}(x_i)) \right\} \quad (15)$$

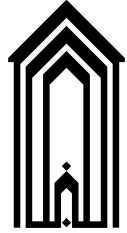
حال با میانگین‌گیری از رابطه (۱۵) به تابع زیان CCE که در رابطه (۵) تعریف شده است، خواهیم رسید.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که چگونه می‌توان چهار تابع زیان معروف و پرکاربرد در یادگیری عمیق شامل میانگین توان دوم خطا، میانگین قدر مطلق خطا، آنتروپی متقابل دودویی و آنتروپی متقابل طبقه‌ای را با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی به دست آورد. یکی از مزایای استفاده از این روش در یادگیری عمیق این است که نیازی نیست برای هر مدل به طور جداگانه به دنبال یافتن یک تابع زیان مناسب باشیم. با تعیین توزیع شرطی $p(y|x; w)$ به راحتی می‌توانیم با استفاده از کمیت $\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \log(p(y_i|x_i; w))$ تابع زیان مناسب را یافت.

مراجع

- [1] Francois Chollet. *Deep learning with Python*. Simon and Schuster, 2nd edition, 2021.
- [2] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016. <http://www.deeplearningbook.org>.
- [3] Hamideh Hajiabadi, Diego Molla-Aliod, Reza Monsefi, and Hadi Sadoghi Yazdi. Combination of loss functions for deep text classification. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 11:751–761, 2020.
- [4] N Ketkar. *Deep learning with python, a hands-on introduction*. Apress, 2017.
- [5] Hamed Masnadi-Shirazi and Nuno Vasconcelos. On the design of loss functions for classification: theory, robustness to outliers, and savageboost. *Advances in neural information processing systems*, 21, 2008.
- [۶] فرانسوا شوله. یادگیری عمیق با پایتون. ترجمه‌ی اسماعیل نورانی، امین گلزاری اسکویی، جلیل قویدل نیجران، و سید ناصر رضوی. انتشارات دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، اورمیه، ۱۳۹۹.
- [۷] یان گودفلو، یوشوا بنجیو، و آرون کورویل. یادگیری ژرف. ترجمه‌ی سجاد ملکی و مانده حاجی آقامحسینی. انتشارات آتی نگر، تهران، ۱۳۹۷.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-177، صص ۹۳-۹۸

توزیع گوسی معکوس به عنوان توزیع احتمال زمان اولین گذر در حرکت براونی

علیرضا حسین زاده*، مهدی یعقوبی اول ریابی^ا

آگروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی، گناباد، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: فرآیند وینر توزیع گوسی معکوس تبدیل لاپلاس تابع مشخصه توزیع پایدار	فرآیند وینر یکی از مهمترین فرآیندهای تصادفی در نظریه احتمال و آمار کاربردی است که به عنوان توصیفی از حرکت براونی در فیزیک سرچشمه گرفته است. حرکت براونی که در سال ۱۸۲۸ توسط روبرت براون گیاه‌شناس انگلیسی کشف شده عبارت است از حرکت تصادفی ذرات کوچک غوطه‌ور در یک سیال (مایع یا گاز)، بر اثر برخورد این ذرات با اتم‌ها یا مولکول‌های آن سیال. در مقاله حاضر توزیع زمان اولین گذر فرآیند وینر از یک موقعیت مکانی مفروض، که از توزیع گوسی معکوس پیروی می‌کند، را استخراج خواهیم نمود.

۱. مقدمه

یکی از توزیع‌های کلاسیک پیوسته در آمار و احتمال توزیع گوسی معکوس^۱ است. به دلیل کاربردهای فراوان این توزیع در عرصه‌های مختلف مانند قابلیت اعتماد، قیمت‌های بازار سهام، زیست‌شناسی، هیدرولوژی، فرآیندهای لوی و مدل‌های خطی تعمیم یافته، تاکنون مقالات متعددی توسط پژوهشگران در خصوص این توزیع مهم آماری نوشته شده است. این توزیع اولین بار در سال ۱۹۰۰ توسط لوئیس باچلیه^۲ تحت عنوان "زمانی که یک سهام برای اولین بار به قیمت معینی می‌رسد" استخراج گردید و بعدها در سال ۱۹۱۵ توسط اروین شرودینگر^۳، فیزیکدان اتریشی، به دلیل خواص مهم فیزیکی آن تحت عنوان "توزیع زمان اولین گذر در حرکت براونی" مورد استفاده قرار گرفت. برای دومین بار و در سال ۱۹۴۴ آبراهام والد^۴ این توزیع را به عنوان فرم حدی "آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای"^۵ به دست آورد. از این جهت، توزیع گوسی معکوس به توزیع والد^۶ نیز مشهور است. نام گوسی معکوس توسط تویدی^۷ در سال ۱۹۴۵ به دلیل وجود ارتباطی معکوس بین تابع مولد انباشتگی این توزیع و توزیع نرمال (توزیع گوسی) پیشنهاد گردید. او این توزیع را در سال ۱۹۵۷ بررسی و برخی ویژگی‌های آماری آن را استخراج نمود. خانواده توزیع‌های گوسی معکوس دو پارامتری توسط چیکارا^۸ و فولکر^۹ (۱۹۷۴ و ۱۹۸۹) و سشادری^{۱۰} (۱۹۸۳ و ۱۹۹۹) از دیدگاه نظری و

*سخنران

پست الکترونیک: hoseinzade1@yahoo.com (علیرضا حسین زاده)

¹Inverse Gaussian Distribution

²Louis Bachelier

³Ervin Schrodinger

⁴Abraham Wald

⁵Sequential Probability Ratio Test

⁶Wald Distribution

⁷Tweedie

⁸Chhikara

⁹Folks

¹⁰Seshadri

کاربردهای آماری مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. لناک^{۱۱} و سشادری (۱۹۸۳) به کمک کسرهای مسلسل صورت تعمیم یافته‌ای برای توزیع گوسی معکوس ارائه نمودند. پیلائی^{۱۲} و سادیش^{۱۳} (۱۹۹۲)، توزیع‌های α -گوسی معکوس را به عنوان تعمیمی دیگر از توزیع گوسی معکوس به دست آوردند. در خصوص آزمون نیکویی برازش توزیع گوسی معکوس، وکسلر^{۱۴} و همکاران (۲۰۱۱)، تحقیقاتی انجام داده‌اند. علیزاده نوقایی (۲۰۱۷) مسئله نیکویی برازش توزیع گوسی معکوس با پامترهای مجهول را به کمک آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی مورد بررسی قرار داد. اخیراً کلاسی از آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر مشخص‌سازی تابع توزیع، برای توزیع گوسی معکوس توسط جیمز^{۱۵} و همکاران (۲۰۲۲) ارائه شده است. سنجری فارسی پور (۱۳۶۵) و حسین زاده (۱۳۷۳) به تفصیل توزیع گوسی معکوس و تعمیم‌های آن را مورد مطالعه قرار دادند. در مقاله حاضر ابتدا به معرفی توزیع گوسی معکوس و بیان پاره‌ای از ویژگی‌های مهم آن می‌پردازیم. سپس تعریف فرآیند وینر و ویژگی‌های آن را مرور می‌کنیم و در پایان توزیع گوسی معکوس را به عنوان "توزیع زمان اولین گذر فرآیند وینر از یک موقعیت مکانی مفروض" استنتاج می‌کنیم.

۲. توزیع گوسی معکوس

گوییم متغیر تصادفی پیوسته و مثبت X دارای توزیع گوسی معکوس با پارامترهای μ و λ است و می‌نویسیم $X \sim IG(\mu, \lambda)$ ، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\pi x^3}}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{\sqrt{\pi} x}\right), & x > 0, \mu > 0, \lambda > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که خانواده توزیع‌های فوق به یک خانواده نمایی دو پارامتری تعلق دارد. علاوه بر این میانگین و واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع از روابط زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}, M_X(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{\mu^2 t}}{\lambda}\right)^{-1}\right]\right\}, t < \frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2}}.$$

اگر تعریف کنیم $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ ، آنگاه ضرایب چولگی و کشیدگی فیشر که نشان دهنده شکل تابع چگالی احتمال است، به ترتیب برابر $\frac{15}{\varphi}$ و $\frac{3}{\sqrt{\varphi}}$ خواهند بود که فقط به پارامتر φ وابسته‌اند و بنابراین به φ گاهی اوقات پارامتر شکل توزیع نیز می‌گویند. توزیع گوسی معکوس یک توزیع تک نمایی با چولگی مثبت است لذا منحنی تابع چگالی آن کشیده به راست می‌باشد.

۳. فرآیند وینر و حرکت براونی

در سال ۱۸۲۸ رابرت براون^{۱۶} گیاه‌شناس انگلیسی در آزمایشگاه خود مشغول مطالعه دانه‌های گرده معلق در یک ظرف آب بود که متوجه حرکت این دانه‌ها در ظرف آب شد. این حرکات کنجکاو او را برانگیخت اما نتوانست پاسخی برای آن بیابد تا اینکه در سال ۱۹۰۵ علت حرکت دانه‌های گرده توسط فیزیکدان آلمانی، آلبرت انیشتن^{۱۷}، بیان گردید. او مشخص کرد که علت حرکت گرده‌ها مربوط به ضربه‌هایی است که توسط مولکول‌های آب به آن وارد می‌شوند. چون مایع دانه‌های گرده را احاطه نموده است، این ضربه‌ها از جهات مختلف و تقریباً با یک اندازه به طور مداوم به دانه گرده وارد می‌شوند و در هر لحظه برآیند این ضربه‌ها تغییر مکان کوچکی در دانه ایجاد می‌کند و از به هم پیوستن این تغییر مکان‌ها حرکت دانه شکل می‌گیرد. روشن شدن علت حرکت، گامی بزرگ در پاسخگویی به کنجکاوای براون بود اما هنوز مدل‌سازی ریاضی آن امکان پذیر نبود. سرانجام نوربرت وینر^{۱۸} ریاضیدان آمریکایی در سال ۱۹۲۳ توانست این حرکت را از نظر ریاضی کاملاً روشن نموده و قوانین احتمالی حاکم بر آن را معین نماید. از این رو در مدل‌های ریاضی، فرآیند حرکت براونی را فرآیند وینر^{۱۹} نیز می‌نامند.

¹¹Letac

¹²Pillai

¹³Satheesh

¹⁴Vexler

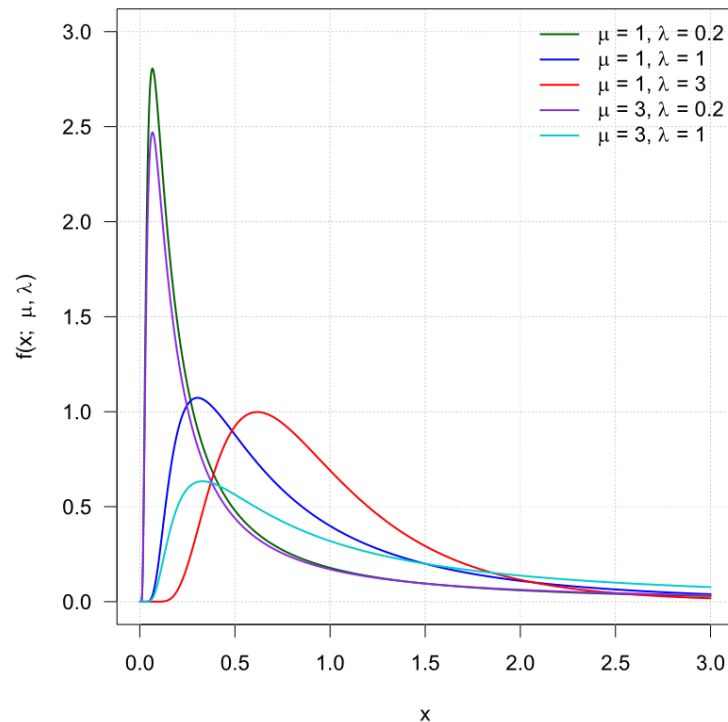
¹⁵James

¹⁶Robert Brawn

¹⁷Albert Einstein

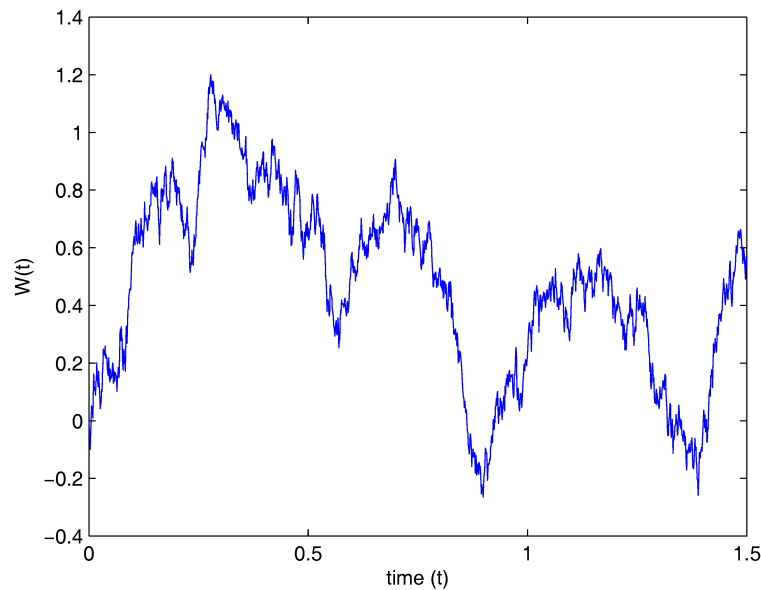
¹⁸Norbert Wiener

¹⁹Wiener Process



شکل ۱: نمودار تابع چگالی گوسی معکوس برای مفادیر مختلف پارامترها

- تعریف ۱.۳** فرآیند تصادفی $\{X(t) = X_t; t \geq 0\}$ دارای ضریب شناوری v و واریانس σ^2 ، با ویژگی‌های زیر را یک فرآیند وینر می‌نامیم.
- (الف) $X(0) = 0$.
- (ب) فرآیند دارای نمو‌های مستقل باشد. یعنی برای هر $n \geq 1$ و هر $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ، نمو‌های فرآیند در فواصل زمانی جدا از هم (t_1, t_2) و \dots و (t_{n-1}, t_n) به عنوان $n-1$ متغیر تصادفی، متغیرهای تصادفی مستقل باشند.
- (ج) فرآیند دارای نمو‌های مانا باشد. یعنی برای هر h, s, t ، متغیرهای تصادفی $X_{t+h} - X_{s+h}$ و $X_t - X_s$ هم توزیع باشند. توجه داریم که در اینجا مانند استقلال نموها لازم نیست بازه‌ها جدا از هم باشند. در واقع باید نمو‌های فرآیند روی بازه‌های هم طول، هم توزیع باشند.
- (د) برای هر $t \geq 0$ متغیر تصادفی X_t دارای توزیع نرمال با میانگین vt و واریانس $\sigma^2 t$ باشد.
- توجه کنید که اگر ضریب شناوری و واریانس به ترتیب برابر صفر و یک باشند، آنگاه فرآیند را یک فرآیند وینر استاندارد می‌نامند.
- از تعریف فرآیند وینر گزاره‌های زیر قابل استنتاج است.
- (۱) با توجه به این که X_t مسیر حرکت و یا به عبارتی موقعیت ذره در زمان t را مشخص می‌کند، $X(0) = 0$ بدان معنی است که ذره در مبدا زمان از مبدا مکان شروع به حرکت نموده است.
- (۲) تغییر مکان در زمان‌های جدا از هم مستقلند. به عبارت دیگر اگر $s < t < u < v$ ، آنگاه متغیرهای تصادفی $X_t - X_s$ و $X_v - X_u$ مستقلند.
- (۳) تغییر مکان در بازه زمانی (s, t) یعنی $X_t - X_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین $v(t-s)$ و واریانس $\sigma^2(t-s)$ است.
- (۴) X_t به عنوان تابعی از t ، مسیر حرکت ذره را مشخص می‌کند و بنابراین باید تابعی پیوسته از t باشد. البته با توجه به ویژگی‌های فرآیند، از لحاظ ریاضی ثابت می‌شود که X_t تابعی پیوسته از t است.
- (۵) برای به دست آوردن سرعت ذره در زمان t بنا به تعریف سرعت باید $\frac{dX_t}{dt}$ ، یعنی مشتق مسیر حرکت ذره نسبت به زمان محاسبه گردد. اما ثابت می‌شود که این مشتق در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. مشتق نداشتن مسیر حرکت براونی به طور شهودی قابل انتظار است. زیرا به محض اینکه ذره مسیری را برای حرکت انتخاب می‌کند، برآیند ضربه‌های بعدی مسیر آن را می‌شکنند و در نتیجه یک مسیر حرکت دندان‌ه‌ای را تولید می‌کنند. شکل زیر مسیر حرکت یک فرآیند وینر (حرکت براونی) را نشان می‌دهد. محور افقی زمان و محور عمودی مکان ذره را مشخص می‌کند.



۴. توزیع گوسی معکوس به عنوان توزیع زمان اولین گذر در فرآیند وینر

فرض کنید $\{X(t) = X_t; t \geq 0\}$ یک فرآیند تصادفی وینر باشد. با توجه به تعریف بالا اگر فرآیند از نقطه x_0 شروع شود یعنی $X(0) = x_0$ آنگاه بنا بر ویژگی (د) فرآیند وینر، متغیر تصادفی $X(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $x_0 + vt$ و واریانس $\sigma^2 t$ خواهد بود و لذا در این حالت تابع چگالی احتمال $X(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x; x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - x_0 - vt)^2}{2\sigma^2 t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

حال فرض کنید متغیر تصادفی T نشان دهنده زمانی باشد که فرآیند برای اولین بار در این زمان از موقعیت a ($a > x_0$) می‌گذرد. به عبارت دیگر فرض کنید:

$$\begin{cases} X(t) < a, 0 < t < T, \\ X(t) = a, t = T, \end{cases} \quad \text{و} \quad X(0) = x_0.$$

اکنون با فرض $T < \infty$ ، هدف ما بدست آوردن توزیع احتمال متغیر تصادفی T است. بر این اساس فرض کنید $g(t; x_0, a)$ تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی T با فرض $T < \infty$ باشد. همچنین فرض کنید $F(x; x_0, \theta)$ و $G(\theta; x_0, a)$ به ترتیب نشان دهنده تبدیلات لاپلاس توابع $f(x; x_0, t)$ و $g(t; x_0, a)$ نسبت به متغیر زمان t باشند. لذا بنا بر تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(x; x_0, \theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(x; x_0, t) dt,$$

$$G(\theta; x_0, a) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} g(t; x_0, a) dt.$$

توجه داریم که چون $g(t; x_0, a)$ تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی T با فرض $T < \infty$ است، لذا $G(0; x_0, a) = 1$ و $G(-\theta; x_0, a)$ در واقع تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی T با فرض $T < \infty$ خواهد بود. یعنی:

$$G(-\theta; x_0, a) = E[e^{\theta T} | T < \infty].$$

قضیه زیر در پیدا کردن تابع مولد گشتاور فوق مفید واقع می‌شود. حال چون تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی به طور منحصر به فرد توزیع آن متغیر را مشخص می‌کند لذا به تبعیت از تابع مولد گشتاور حاصله، توزیع مورد نظر مشخص خواهد شد.

قضیه ۱.۴. برای $x < a < x_0$ داریم:

$$P(T < \infty) \times G(\theta; x_0, a) = \frac{F(x; x_0, \theta)}{F(x; a, \theta)}.$$

اثبات قضیه بالا در (۲) آمده است.

اکنون با توجه به قضیه بالا کافی است $F(x; x_0, \theta)$ را محاسبه نماییم. پس از پاره‌ای محاسبات انتگرالی نسبتاً ساده خواهیم داشت:

$$F(x; x_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2\sigma^2\theta}} \exp\left\{-\frac{x - x_0}{\sigma^2} \left(\sqrt{v^2 + 2\sigma^2\theta} - v\right)\right\}.$$

حال با تبدیل x_0 به a در رابطه بالا و جایگذاری در کسر مربوط به قضیه (۱.۴) بدست می‌آوریم:

$$P(T < \infty) \times G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{x_0 - a}{\sigma^2} \left(\sqrt{v^2 + 2\sigma^2\theta} - v\right)\right\}. \quad (۱)$$

اکنون برای ضریب شناوری v سه حالت مثبت، منفی و صفر را در نظر گرفته و در هر حالت توزیع شرطی T با فرض $T < \infty$ را به دست می‌آوریم.

حالت (۱) اگر ضریب شناوری v مثبت باشد در این صورت رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(T < \infty) \times G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{(a - x_0)v}{\sigma^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2\sigma^2\theta}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

حال با جایگذاری $\theta = 0$ در تساوی بالا و توجه به این نکته که $G(0; x_0, a) = 1$ به دست می‌آوریم، $P(T < \infty) = 1$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{(a - x_0)v}{\sigma^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2\sigma^2\theta}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

با قرار دادن $\lambda = \left(\frac{a - x_0}{\sigma}\right)^2$ و $\mu = \frac{a - x_0}{v}$ تابع مولد گشتاور T با فرض $T < \infty$ به صورت زیر خواهد بود:

$$G(-\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2\theta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

همان گونه که قبلاً بیان نمودیم، تابع مولد گشتاور فوق مربوط به توزیع $IG(\mu, \lambda)$ است.

حالت (۲) مشابه حالت قبل اگر ضریب شناوری v منفی باشد در این صورت رابطه (۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P(T < \infty) \times G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \left[1 + \left(1 + \frac{2\mu^2\theta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

در این حالت به ازای $\theta = 0$ در تساوی بالا به دست می‌آوریم، $P(T < \infty) = \exp\left\{\frac{2\lambda}{\mu}\right\}$ توجه کنید که در این حالت به علت منفی بودن

v نسبت $\mu = \frac{a - x_0}{v} < 0$ خواهد بود. لذا داریم:

$$G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{-\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 + \frac{2\mu^2\theta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

با تبدیل θ به $-\theta$ تابع مولد گشتاور به صورت زیر خواهد بود:

$$G(-\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{-\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2\theta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

در این حالت تابع مولد گشتاور فوق مربوط به توزیع $IG(-\mu, \lambda)$ است. حالت (۳) مشابه حالت قبل اگر ضریب شناوری ν منفی باشد در این صورت رابطه (۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P(T < \infty) \times G(\theta; x_0, a) = \exp\left\{\frac{x_0 - a}{\sigma^2} \sqrt{2\sigma^2\theta}\right\} = \exp\{-\sqrt{2\lambda\theta}\}.$$

در این حالت نیز مشابه حالت (۱) برای $\theta = 0$ به دست می‌آوریم. $P(T < \infty) = 1$ در نتیجه تابع مولد گشتاور در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$G(-\theta; x_0, a) = \exp\{-\sqrt{-2\lambda\theta}\}.$$

تابع مولد گشتاور فوق دیگر به فرم گوسی معکوس نیست. ثابت شده که در این حالت توزیع متغیر هدف یک توزیع پایدار است. یعنی تابع مشخصه متغیر تصادفی T را می‌توان به صورت $\exp\{-\gamma_\alpha |\theta|^\alpha\}$ نوشت که در آن $\alpha = 0.5$ و γ_α یک ثابت موهومی است.

۵. نتیجه

مسئله اولین گذر، موضوعی کلاسیک در فرآیندهای تصادفی است که در بسیاری از موضوعات کاربردی خودنمایی می‌کند. به عنوان مثال در ریاضیات مالی مسئله اولین گذر، در قلب موضوعاتی مانند مدل سازی ریسک اعتباری و همچنین گزینه‌های مانع قیمت‌گذاری نمایان است. اگر X_t یک فرآیند تصادفی با وضعیت اولیه $X(0) = x_0$ باشد زمان اولین گذر یا زمان اولین خروج فرآیند از وضعیتی که در آن قرار دارد در واقع یک زمان توقف است که فرآیند برای اولین بار از این موقعیت مفروض گذر می‌کند. توزیع زمان اولین گذر و در نتیجه میانگین و واریانس آن، هنگامی که فرآیند تحت بررسی یک فرآیند انتشار باشد، بسیار مورد توجه است و در مسائل مرزی این زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با توجه به این نکته که اگر فرآیندی دارای مسیرهای پیوسته باشد آنگاه زمان خروج متغیری تصادفی است و به دلیل اهمیت کاربردی زمان خروج، در این مقاله ضمن بررسی اجمالی فرآیند وینر، توزیع احتمال زمان اولین گذر فرآیند وینر از یک موقعیت مکانی مفروض را استنتاج نمودیم.

مراجع

- [۱] سنجر فارسی پور، ناهید (۱۳۶۵)، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شیراز.
- [۲] حسین زاده، علیرضا (۱۳۷۳)، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [3] Bachelier, L. (1990), Théorie de la spéculation. Ann. Sci. L'École Norm. SupÉrieure, 17, 21–86.
- [4] Chhikara, R. S and Folks, J. L., (1974), Estimation of the inverse Gaussian distribution function, J. Amer. Statist. Assoc. 69, 250–254.
- [5] Chhikara, R. S and Folks, J. L., (1989), The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology, and Applications; Marcel Dekker, Inc.: New York, NY, USA.
- [6] Einstein, A., (1905), Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Courier Corporation, Dey 10, 1334 AP-Science- 119 pages.
- [7] James S. Allison, Steffen Betsch, Bruno Ebner, and Jaco Visagie. (2022), On Testing the Adequacy of the Inverse Gaussian Distribution. Mathematics 10, 350. <https://doi.org/10.3390/math10030350>.
- [8] Letac, C. and Seshadri, V. (1983), A characterization of the generalized inverse Gaussian distribution by continued fractions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 62, 485–489.
- [9] Noughabi, H.A. (2017), An extensive power evaluation of some tests for the inverse Gaussian distribution. Commun. Stat.—Simul. Comput. 46, 5410–5422.
- [10] Pillai R.N. and Satheesh S. (1992), α -inverse Gaussian distributions. Sankhya, Vol. 54, Series A, PT.2, 288–290.
- [11] Seshadri, V. (1983), The inverse Gaussian distribution: some properties and characterizations, Canad. J. Statist. 11 (1983), no. 2, 131–136.
- [12] Seshadri, V. (1999), The Inverse Gaussian Distribution: Statistical Theory and Applications; Lecture Notes in Statistics; Springer: New York, NY, USA, Volume 137.
- [13] Schroedinger, E. Zur, (1915), Theorie der Fall- und Steigversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung. Phys. Z., 16, 289–295.
- [14] Tweedie, M.C.K. (1957), Statistical properties of inverse Gaussian distributions. I. Ann. Math. Stat., 28, 362–377.
- [15] Tweedie, M.C.K. (1957), Statistical properties of inverse Gaussian distributions. II. Ann. Math. Stat., 28, 696–705.
- [16] Vexler, A.; Shan, G.; Kim, S.; Tsai, W.-M.; Tian, L.; Hutson, A.D. (2011), An empirical likelihood ratio based goodness-of-fit test for inverse Gaussian distributions. J. Stat. Plan. Inference 141, 2128–2140.
- [17] Wald, A. (1944), On cumulative sums of random variables. Ann. Math. Statist, 12; 283–296.
- [18] Wiener, Norbert (1923), Note on a paper of M. Banach. Fund. Math. 4: 136–143. doi:10.4064/fm-4-1-136-143.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-232، صص. ۹۹-۱۰۳

مروری بر روش آستانه سازی دو تایی در برآورد تابع چگالی احتمال

اسماعیل شیرازی*، آ

آگروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی و مهندسی، دانشگاه گنبد کاووس، ایران

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله مروری بر برآورد تابع چگالی احتمال به روش موجک و بر اساس شیوه آستانه سازی چند متغیره انجام می گیرد و به طور خاص شیوه آستانه سازی دو تایی معرفی می شود. همچنین نرخ همگرایی این برآوردها را بر روی کلاس بزرگی از توابع آماری مورد بررسی قرار داده و یک کران بالا بر اساس معیار کمترین مربعات خطا برای آنها بدست می آید.	واژه های کلیدی: آستانه سازی دو تایی تابع چگالی موجک نرخ همگرایی
	2020 MSC: 34B16 34B40 65M70

۱. مقدمه

یک مسئله مهم در رگرسیون ناپارامتری برآورد تابع چگالی احتمال $f: [0, 1] \rightarrow R$ بر اساس مشاهدات آمیخته به اغتشاش Y_i که در فاصله برابر از هم قرار گرفته اند می باشد. بر این اساس مدل رگرسیونی زیر را در نظر می گیریم

$$Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \varepsilon_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

به طوری که ε_i ها متغیرهای تصادفی با $E(\varepsilon_i) = 0$ می باشد. در بحث برآورد تابع چگالی f به روش موجک، با توجه به توزیع توام $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ و با در نظر گرفتن میزان همواری تابع f ، روشهای مختلفی از جمله بحث آستانه سازی بر روی ضرایب موجکها مطرح شده است (برای مشاهده جزئیات بیشتر به [۹] مراجعه شود).

ایده اصلی اکثر این روشها بر اساس تبدیل موجکی مدل (۱) از طریق استفاده از یک تبدیل خطی متعامد چند مقیاسی یا ماتریس W می باشد که به آن تبدیل موجک خطی گسسته (DWT) می گویند. بر پایه این توضیحات می توان تبدیل موجکی مدل (۱) را به صورت زیر نشان داد

$$\xi_{j,k} = \beta_{j,k} + \varepsilon_{j,k}; \quad j = 0, \dots, \log_2^{n-1}, \quad k = 1, \dots, 2^j, \quad (2)$$

که j و k به ترتیب پارامترهای مقیاس و مکان و $\xi_{j,k}$ ضرایب موجک تجربی از Y_i و $\beta_{j,k}$ ضرایب موجک تابع f هستند که باید برآورد شوند. همچنین $\varepsilon_{j,k}$ ها مشابه قبل مستقل با توزیع $N(0, \sigma^2)$ هستند.

*سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (اسماعیل شیرازی)

در بسیاری از روشهای آستانه سازی ضرایب موجک که تاکنون مورد بحث و بررسی قرار گرفته است از جمله روش آستانه‌های سخت، هر یک از ضرایب $\beta_{j,k}$ تنها با استفاده از ضرایب موجک تجربی متناظرش یعنی $\xi_{j,k}$ برآورد می‌شود و به صورت فردی با یک مقدار آستانه مشخص مورد مقایسه قرار می‌گیرد که در صورت بزرگتر شدن از مقدار آستانه مشخص، مقدار آن وارد مدل می‌شود. این روش پژوهشگر را مطمئن می‌سازد که بخش عمده‌ای از اغتشاش $\varepsilon_{j,k}$ خارج می‌شود (مراجعه شود به [4]). همچنین در نهایت با انجام یک تبدیل موجک گسسته معکوس (IDWT) بر روی ضرایب آستانه سازی شده، برآورد تابع f بدست می‌آید. به این شیوه آستانه سازی ضرایب، آستانه سازی تک متغیره نیز گفته می‌شود که به مراجع مختلفی در این خصوص می‌توان اشاره کرد از جمله مهمترین آنها [3]، [4] و [5].

همانطور که در بالا اشاره شد، در روش آستانه سازی تک متغیره ارزیابی ضرایب برای ورود به مدل تنها بر اساس مقدار اندازه گیری شده برآورد متناظر با آنهاست و این موضوع باعث از دست دادن برخی اطلاعات مفید در فرایند برآورد می‌شود. زیرا اصولاً ضرایبی که در همسایگی هم قرار می‌گیرند دارای اطلاعات تکمیلی بیشتری برای برآورد بهتر یک تابع تحت بررسی هستند. از اینرو، نویسندگان بسیاری شیوه ای دیگری از آستانه سازی ضرایب را مورد مطالعه قرار داده اند که تحت عنوان روش آستانه‌های چند متغیره معرفی می‌شود. بر اساس این روش قضاوت در خصوص حذف یک ضریب مشخص همانند $\beta_{j,k}$ از مدل تنها بر اساس اطلاعات موجود در برآوردش یعنی $\xi_{j,k}$ صورت نمی‌گیرد، بلکه از اطلاعات موجود در ضرایب همسایگی آن در همان مقیاس $0 = \hat{z}_j$ نیز استفاده می‌شود.

بر این اساس بنا بر آنچه در کای [1] بیان شده می‌توان ضرایب تجربی موجک $\xi_{j,k}$ را به صورت گروهی درون بلوک‌های متوالی قرار داد. بر همین اساس، در هر سطح تفکیک‌پذیری z مقادیر صحیح k را در بلوک‌های نامتناحل با طول l ، به صورت

$$\Gamma_{jt} = \{k : (t-1)l + 1 \leq k \leq tl, -\infty < t < \infty\}$$

قرار داده و سپس درون هر بلوک Γ_{jt} میانگین توان دوم ضرایب هر بلوک به صورت

$$\hat{A}_{jt} = l^{-1} \sum_{k \in B(t)} \xi_{jk}^2 \quad (3)$$

محاسبه می‌شود و با یک مقدار آستانه جدید λ مقایسه می‌شود. در اینجا $B(t)$ نشان دهنده مجموعه اندیس‌های k است که در بلوک Γ_{kt} قرار دارند. در صورتی که میانگین توان دوم ضرایب مربوط به یک بلوک خاص از مقدار آستانه مدل بیشتر باشد، کلیه ضرایب موجود در بلوک، در مدل باقی می‌مانند و در غیر این صورت از مدل حذف می‌گردند. بنابراین بر اساس دستورالعمل حذف ضرایب موجک در کای [1]، می‌توان برآوردگر موجک تابع چگالی به روش آستانه‌های بلوکی به صورت زیر تعریف نمود:

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{j=1}^{2^{\ell}-1} \hat{\alpha}_{\ell j} \phi_{\ell j}(x) + \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \xi_{jk} I(|\hat{A}_{tk}| > \lambda) \psi_{jk}(x) \quad (4)$$

که پارامتر هموارسازی R^1 ، مرتبط با بالاترین سطح تفکیک‌پذیری جزئیات 2^{ℓ} می‌باشد و مقدار آستانه λ برابر $C_0 n^{-1}$ در نظر گرفته شده است که C_0 یک ثابت آستانه نامیده می‌شود.

از جمله مقالاتی که در خصوص ریسک برآورد ضرایب به این شیوه، که بیشتر تحت عنوان روش آستانه سازی بلوکی شناخته می‌شود، کار کرده‌اند می‌توان به [7]، [8] و [2] اشاره کرد. آنها نشان دادند که تحت برخی شرایط اولیه، این برآوردگر نرخ همگرایی بهینه $O(n^{-2s/(1+2s)})$ را بدست می‌آورد که پارامتر s درجه همواره تابع چگالی تحت بررسی است.

در این مقاله ما با شیوه متفاوت دیگری از خوشه بندی ضرایب تحت عنوان آستانه سازی دو تایی آشنا خواهیم شد. در این روش نیز همانند روش آستانه‌های بلوکی، حذف هر یک از ضرایب موجک مشخص $\beta_{j,k}$ تنها با استفاده از ضرایب موجک تجربی متناظرش یعنی $\xi_{j,k}$ صورت نمی‌گیرد بلکه با معرفی یک کمیت ابتکاری دیگر همانند $\xi_{j,k}^*$ ، که حاوی اطلاعات محلی است، که از همسایگی $\xi_{j,k}$ بدست آمده است، برای برآورد $\beta_{j,k}$ استفاده می‌شود. به سخن دیگر برای برآورد ضرایب $\beta_{j,k}$ از دو برآوردگر $\xi_{j,k}$ و $\xi_{j,k}^*$ استفاده می‌شود که $\xi_{j,k}^*$ ضریب همسایه $\xi_{j,k}$ است.

در ادامه در بخش دوم روش آستانه سازی دو تایی را به طور کامل شرح می‌دهیم و در بخش سوم با دو شیوه مهم از آستانه سازی دو تایی به جهت حذف عامل اغتشاش از سیگنال‌ها به جهت انجام برآورد بهتر نمودار تحت بررسی آشنا خواهیم شد و نتایج مهم بر اساس آنها معرفی خواهند شد.

¹Smoothing parameter

²Highest detail resolution

۲. روش آستانه سازی دو تایی

برای آشنایی با این روش مجدداً مدل (۲) که چگونگی ارتباط بین ضرایب تجربی و ضرایب اصلی تابع چگالی را نشان می دهد، در نظر می گیریم. می دانیم به ازای هر مقدار j و k ، هدف برآورد ضرایب اصلی $\beta_{j,k}$ می باشد. بدین منظور با فرض اینکه ξ^* یک کمیت با توزیع نرمال باشد، در اینصورت (ξ, ξ^*) دارای توزیع نرمال دو متغیره با میانگین $\underline{\beta}$ و ماتریس کواریانس Σ می باشد که به صورت

$$\underline{\beta} = (\beta, \beta')^T$$

$$\Sigma = \sigma^2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

حال بر اساس تعاریف فوق، برآورد بردار ضرایب β به روش آستانه ای دو تایی به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{\beta}^{BT}(\lambda) = \xi I \{ (\xi, \xi^*) \Sigma^{-1} (\xi, \xi^*)^T > \lambda^2 \} \quad (5)$$

که در رابطه فوق λ پارامتر آستانه و T علامت ترانهاده است. در اینجا با انجام یک مقایسه ساده بین روش آستانه ای تک متغیره به شیوه سخت با روش آستانه ای دو تایی بر پایه معیار کمترین مربعات خطا (MSE)، مشاهده می کنیم که مقدار این معیار برای این دو به صورت زیر تعریف می شود

$$R_{\beta, \sigma}^H(\lambda) = E (\hat{\beta}^H(\lambda) - \beta)^2 \quad (6)$$

$$R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda) = E (\hat{\beta}^{BT}(\lambda) - \beta)^2 \quad (7)$$

که بر اساس [۱۰]، در رابطه (۶) مقدار $B^H(\lambda) = \xi I (\xi^2 / \sigma^2 > \lambda^2)$ می باشد. حال در ادامه برای ارائه یک قیاس ساده بین روشهای آستانه ای سخت و دو تایی در ارزیابی ضرایب موجه، به مثال ساده زیر توجه کنید.

مثال ۱.۲. فرض کنید ضرایب ξ و ξ^* ناهمبسته باشند به طوری که $\rho = 0$ و $\sigma^2 = 1$ باشد. همچنین $\beta = \beta'$ باشد یعنی میانگین های ξ و ξ^* با هم برابر باشد. حال با در نظر گرفتن مقادیر $\lambda = 1, 2, 3, 4$ و رسم نمودارهای $R_{\beta, \sigma}^H(\lambda)$ و $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ در مقابل β ، به کمک حل عددی انتگرالهای موجود در روابط (۶) و (۷)، می توان نمودار زیر را رسم نمود.

در شکل (۱) مشاهده می کنیم که مقدار ریسک $R_{\beta, \sigma}^H(\lambda)$ نسبت به $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ در تمامی مقادیر λ به مقدار قابل توجهی بیشتر است مگر در موارد نادر از جمله در مقدار $\lambda = 1$ و برای برخی مقادیر کوچک β که آن هم قابل اغماض است. بنابراین در حالت کلی می توان چنین نتیجه گیری کرد که صرف نظر از مقدار λ همواره روش آستانه ای دو تایی نسبت به حالت آستانه ای تک متغیره، از کارایی بالاتری برخوردار است.

۳. روش آستانه ای دو تایی در مقابل روش آستانه ای چند متغیره

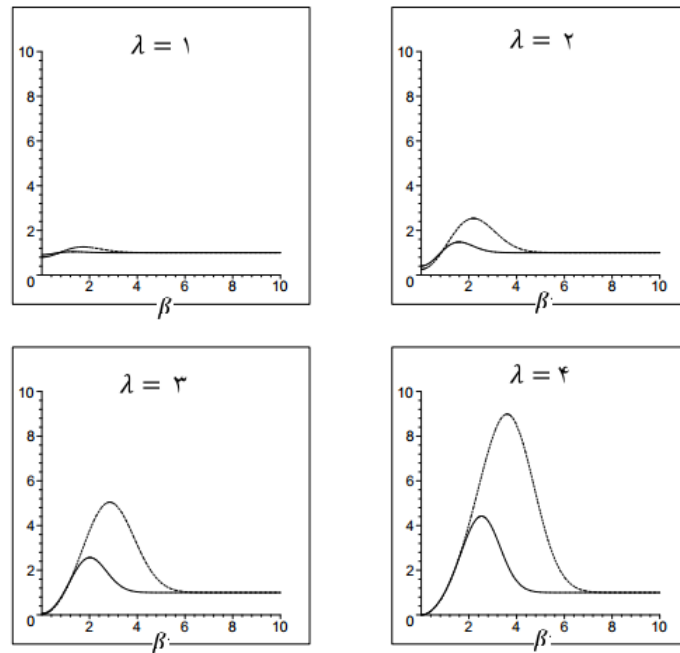
در بخش قبل پس از نشان دادن کارایی بالاتر روش آستانه ای دو تایی نسبت به روش تک متغیره، در این بخش به دنبال آن هستیم که کارایی این روش را نسبت به حالت آستانه ای چند متغیره که در آن ضرایب موجه در بلوک های m تایی مورد ارزیابی قرار می گیرند، را نشان دهیم. مجدداً خاطر نشان می کنیم که روش های آستانه ای چند متغیره تحت عنوان روش های آستانه ای بلوکی نیز شناخته می شوند. بدین منظور در ادامه یک کران بالا برای $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ بدست می آوریم.

بر این اساس فرض کنید متغیر جدید $U = (\xi^* - \rho\xi) / (1 - \rho^2)^{1/2}$ را تعریف کنیم. در اینصورت $E(U) = \xi$ و همچنین داریم $Cov(\xi, U) = 0$ و $Var(U) = \sigma^2$. در ادامه بر اساس تعاریف جدید داریم

$$\hat{\beta}^{BT}(\lambda) = \xi I (\xi^2 + U^2 > \lambda^2 \sigma^2)$$

که بر اساس تعاریف فوق، میانگین مربع ریسک دو تایی $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ به صورت زیر تعریف خواهد شد

$$R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda) = \sigma^2 + \int \int_{t^2 + u^2 \leq \lambda^2 \sigma^2} \{ \beta^2 + (t - \beta)^2 \} f_{\xi, U}(t, u) dt du \quad (8)$$



شکل ۱: نمودارهای $R_{\beta, \sigma}^H(\lambda)$ (خطوط نقطه چین) و $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ (خطوط پیوسته) به ازای مقادیر مختلف λ

در مقاله [۶] نشان داده شده است که با توجه به تعاریف فوق، یک کران بالا به صورت $R_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda) \leq \tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ بدست می‌آید که مقدار $\tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda)$ برابر است با

$$\tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT}(\lambda) = \begin{cases} \tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT_1}(\lambda) & \text{if } \delta < \lambda\sigma, \\ \tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT_2}(\lambda) & \text{if } \delta \geq \lambda\sigma. \end{cases}$$

که در رابطه بالا $\delta = \{\beta^2 + \xi^{m2}\}^{1/2}$ است و مقادیر $\tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT_1}(\lambda)$ و $\tilde{R}_{\beta, \sigma}^{BT_2}(\lambda)$ به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$R_{\beta, \sigma}^{BT_1}(\lambda) = \beta^2 \left[1 - \exp\left\{-\frac{(\lambda\sigma + \delta)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] + \sigma^2 \exp\left\{-\frac{(\lambda\sigma + \delta)^2}{2\sigma^2}\right\} \left\{ -\frac{(\lambda\sigma - \delta)^2}{2\sigma^2} + 1 \right\} \quad (9)$$

$$R_{\beta, \sigma}^{BT_2}(\lambda) = \frac{\beta^2 \lambda \sigma}{2\delta} \left[\exp\left\{-\frac{(\lambda\sigma + \delta)^2}{2\sigma^2}\right\} - \exp\left\{-\frac{(\lambda\sigma - \delta)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] + \sigma^2 \quad (10)$$

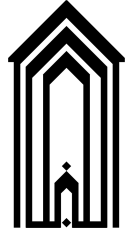
که با توجه به روابط (۸)، (۹) و (۱۰) کران بالایی فوق بدست می‌آید. به منظور حذف اغتشاش از برآورد، [۶] دو الگوریتم به منظور تعیین برآوردگرهای جدید جهت اعمال روش آستانه‌سازی دوتایی معرفی کرد (مراجعه شود به [۶] ص ۹)، که بر اساس هر دو روش نرخ همگرایی بدست آمده نزدیک به بهینه معرفی شده است.

نتیجه گیری

در این بررسی نشان داده شد که روشهای بلوکی نسبت به روش آستانه‌ای دو تایی قابلیت دستیابی به نرخ همگرایی بهینه بر اساس معیار MSE را دارا می‌باشند. ولی [۶] نشان داده است که هیچ شواهد محکمی مبنی بر اینکه روش آستانه سازی m متغیره با $m > 2$ ، بهتر از روش آستانه‌ای دو تایی باشد، وجود ندارد و حتی در برخی موارد در مباحث عملی با حجم نمونه محدود، نشان داده است که روش آستانه‌ای چند متغیره دارای کارایی به مراتب پایین تر است. نویسنده در نظر دارد در کار پژوهشی آینده این مطلب را به صورت دقیقتر مورد بررسی قرار داده و کارایی برآوردگرهای بلوکی در مقایسه با شیوه آستانه‌سازی دوتایی را در قالب مثالهای کاربردی مورد کنکاش بیشتر قرار دهد.

مراجع

- [1] T. Cai. Adaptive wavelet estimation: a block thresholding and oracle inequality approach. *Ann. Stat.*, 27(3):898–924, 1999.
- [2] T. Cai and B. W. Silverman. Incorporating information on neighbouring coefficients into wavelet estimation. *Sankhya Ser. B*, 63:127–148, 2001.
- [3] D. L. Donoho. Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from in direct and noisy data. *Math. Soc.*, 47: 173–205, 1993.
- [4] D. L. Donoho. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455, 1994.
- [5] D. L. Donoho. Denoising by soft thresholding. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41(3):613–627, 1995.
- [6] P. Fryzlewicz. Bivariate hard thresholding in wavelet function estimation. *Statistica Sinica*, 17:1457–1481, 2007.
- [7] Kerkyacharian G. Hall, P. and D. Picard. Block threshold rules for curve estimation using kernel and wavelet methods. *Ann. Statist.*, 26: 922–942, 1997.
- [8] Kerkyacharian G. Hall, P. and D. Picard. Block threshold rules for curve estimation using kernel and wavelet methods. *Stat. Sinica*, 9:33–50, 1999.
- [9] B. Vidakovic. *Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley, New York, 1999.
- [۱۰] اسماعیل شیرازی. مجله علوم آماری. برآورد موجکی تابع چگالی چنک به روش سگستانهای بلوکی تحت تابع زیان L_2 . ۱۴(۱):۱۹۵–۲۱۴، ۱۳۹۹.



انواع روشهای برآورد پارامتر چولگی در توزیع چوله نرمال

فرهاد سعیدی رامیانی*

آمار ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گلستان

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: تابع مولد گشتاور توزیع نرمال چوله درست نمایی ماکزیمم برآورد بیزی	ما در این مقاله به معرفی توزیع چوله نرمال در حالت تک متغیره خواهیم پرداخت و برخی خواص مهم این توزیع را بیان خواهیم کرد. همچنین برای پارامتر چولگی آن که مهمترین پارامتر این توزیع می‌باشد، روشهای متفاوتی جهت برآورد معرفی خواهیم نمود.

۱. مقدمه

هنگامی که از توزیع نرمال صحبت می‌کنیم در واقع منحنی متقارن وزنگی شکلی را تصور می‌کنیم که حول عددی که به آن میانگین توزیع گفته می‌شود، دارای تقارن باشد. توزیعی را که در مورد آن بحث خواهیم کرد، در واقع همان توزیع نرمال می‌باشد که چولگی پیدا کرده است. چولگی در آمار، درجه عدم تقارن مشاهده شده در توزیع احتمال است. توزیع‌ها می‌توانند چولگی راست (مثبت) یا چولگی چپ (منفی) را به درجات مختلف نشان دهند. یک توزیع نرمال چولگی صفر را نشان می‌دهد.

در بسیاری از پژوهش‌های آماری، توزیع نرمال به عنوان یک توزیع پیش فرض در تحلیل داده‌ها در نظر گرفته می‌شود، این توزیع برای برازش داده‌های متقارن، مناسب می‌باشد. اما سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا واقعا می‌توان همیشه فرض نرمال بودن را در نظر گرفت؟ جواب سوال خیر می‌باشد زیرا ممکن است متغیرهای تصادفی مورد بررسی از مدل‌های نامتقارن پیروی کنند یا داده‌های پرت، نرمال بودن توزیع داده‌ها را رد کند ولی می‌توانیم از توزیعی استفاده کنیم که خواص توزیع نرمال را داشته باشد. یکی از معروفترین خانواده‌های توزیع چوله که مورد توجه آماردانان قرار گرفته، توزیع نرمال چوله است. زمانی که فرض نرمال بودن داده‌ها درست نباشد، این توزیع جایگزین مناسبی برای توزیع نرمال است.

پیدا کردن تبدیل مناسب گاه‌ها کاری دشوار در عمل غیر ممکن نیز است. اگر توزیع نامتقارنی وجود داشته باشد که دارای خواص مشابه توزیع نرمال باشد، این توزیع می‌تواند نقشی اساسی در تحلیل داده‌های نامتقارن ایفا کند. یکی از این توزیع‌ها که اخیرا معرفی شده و مورد توجه قرار گرفته است و خواصی مشابه توزیع نرمال دارد، به توزیع چوله-نرمال معروف شده است.

در نیمه دوم قرن بیستم بررسی و بسط توزیع‌های نامتقارن یا چوله مورد توجه زیادی قرار گرفت. مقاله آزالینی در سال ۱۹۸۵ نقطه عطفی در شناسایی چنین خانواده‌هایی است. او توزیع یک متغیره چوله نرمال را معرفی کرد که از حاصل ضرب تابع چگالی احتمال توزیع نرمال در یک تابع چوله کننده ایجاد می‌شود، البته با تغییر تابع چگالی نرمال به هر چگالی متقارن دیگری می‌توان توزیع‌هایی با خواص مشابه درست کرد که در مجموع به آنها توزیع‌های چوله-متقارن (SS) نامیده می‌شود. خانواده توزیع‌های مختلفی از این نوع ساخته شده است که اطلاعات بیشتری در این باره در کتاب جنتون (۲۰۰۴) آورده شده است.

در سال ۱۹۹۹ آزالینی و کاپیتانیو توزیع چند متغیره چوله نرمال را معرفی کرده اند، همچنین آنها در سال ۲۰۰۳ توزیع چوله-تی-نرمال را که دارای دم های کلفت تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع تر نسبت به توزیع چوله نرمال است، برای مدل بندی داده هایی با توزیع نامتقارن استفاده می شود. برای مشاهده این کاربردها می توانید به کتاب آزالینی ۲۰۱۴ مراجعه کنید .

تعمیم های مختلفی از توزیع های چوله در سالیان اخیر معرفی شده است . آرنولد و بیویر (۲۰۰۰) یک خانواده از توزیع های چند متغیره چوله-کُشی معرفی کردند .

بهبودیان و همکاران (۲۰۰۶) یک توزیع چوله-کُشی مرتبط با توزیع چوله-نرمال آزالینی معرفی نمودند . همچنین در سال ۲۰۱۲، کابرال و همکارانش توزیع های چند متغیره آمیخته مقیاسی توزیع چوله نرمال را مورد مطالعه قرار دادند .

الینگ (۲۰۱۲) از توزیع های چوله-نرمال و چوله-تی برای برازش به داده های بورس و بیمه استفاده نمود .

در بخش دوم ما به معرفی توزیع چوله-نرمال و در بخش سوم به خواص توزیع چوله-نرمال، تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال چوله و گشتاورهای توزیع نرمال چوله، سپس در بخش چهارم به برآورد چولگی در توزیع نرمال چوله تک پارامتری به دو روش، برآورد گشتاوری و درست نمایی ماکزیمم (MLE) می پردازیم .

۲. توزیع نرمال چوله

بعضی وقت ها در تحقیق های کاربردی (مانند اقتصاد و روانشناسی و ...) با داده های زنگوله ای شکل که دارای چولگی نیز می باشند، برخورد می کنیم . یکی از توزیع هایی که برای مدل بندی این گونه داده ها مفید می باشد توزیع چوله-نرمال می باشد .

اگر Z یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال :

$$f_Z(z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} e^{-\frac{z^2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\lambda z} \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} e^{-\frac{t^2}{\lambda}} dt = \lambda \varphi(Z) \phi(\lambda Z)$$

باشد، که در آن $\varphi(\cdot)$ و $\phi(\cdot)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال و توزیع احتمال متغیر تصادفی نرمال استاندارد هستند [۱] پارامتر چولگی است و جهت و میزان چولگی را مشخص می کند که برای $\lambda > 0$ توزیع چولگی به راست و برای $\lambda < 0$ توزیع چولگی به چپ خواهیم داشت . این توزیع را اولین بار توسط آزالینی ارائه گردید.

۳. خواص توزیع چوله-نرمال

در این بخش برخی از خواص توزیع نرمال چوله را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱. توزیع نرمال استاندارد حالت خاصی از توزیع نرمال چوله است زمانی که $\lambda = 0$ است $SN(0) \stackrel{d}{=} N(0, 1)$

۲. اگر $Z \sim SN(\lambda)$ آنگاه $-Z \sim SN(-\lambda)$

۳. اگر $X \sim N(0, 1)$ و $\lambda \rightarrow \pm\infty$ آنگاه $|X| \xrightarrow{d} Z_\lambda$ می باشد .

۴. $\phi(z, -\lambda) = 1 - \phi(-z, \lambda)$ که $\Phi(z, \lambda)$ تابع توزیع تجمعی نرمال چوله^۱ است .

۵. اگر $Z \sim SN(\lambda)$ باشد، آنگاه Z^λ دارای توزیع کای-دو^۲ با تابع چگالی $f_Z(z) = e^{-\frac{z^2}{\lambda}} / \sqrt{\lambda\pi z} \geq 0$ می باشد .

۶. $\phi(z, 1) = [\phi(z)]^2$

۷. برای ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$ ، تابع چگالی $\phi(z, \lambda)$ تک مدی است، به طوری که $\log \phi(z, \lambda)$ یک تابع مقعر^۳ از Z است.

در ادامه برای بدست آوردن تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال چوله از قضیه زیر استفاده می کنیم .

قضیه ۱: اگر $Z \sim SN(\lambda)$ آنگاه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Z به صورت زیر است :

$$M_Z(t) = \lambda \exp\left(\frac{t^2}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda + \lambda^2}}\right)$$

۱- Cumulative Distribution Function

۲- Chi-square Distribution

۳- Concave Function

بر اساس تابع مولد گشتاور می توانیم امید ریاضی^۴، واریانس، چولگی و کشیدگی را برای توزیع نرمال-چوله محاسبه کنیم. برای محاسبه امید ریاضی کافی است مشتق اول تابع مولد گشتاور را در نقطه صفر محاسبه کنیم.

$$E(Z) = M'(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

برای محاسبه واریانس، توان دوم امید ریاضی را از مشتق دوم تابع مولد گشتاور را در نقطه صفر کم می کنیم.

$$E(Z^2) = M''(0) = 1$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) = 1 - \frac{2\lambda^2}{\pi(1 + \lambda^2)}$$

برای محاسبه چولگی، مشتق سوم تابع مولد گشتاور را در نقطه صفر بدست می آوریم. با محاسبه بدست می آوریم:

$$\gamma_1(Z) = \frac{1}{\sqrt[3]{Var(Z)}} (\pi - 3) \text{sign}(\lambda) \left[\frac{\{E(Z)\}^3}{Var(Z)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

دلیل این که از $\text{sign}(\lambda)$ استفاده شده این است که اگر $\lambda < 0$ باشد $E(Z) < 0$ و در نتیجه $\{E(Z)\}^3 < 0$ خواهد شد. همچنین برای محاسبه کشیدگی توزیع نرمال چوله با محاسبه مشتق چهارم تابع مولد گشتاور در نقطه صفر و با جایگذاری در رابطه:

$$\gamma_2(Z) = \frac{E(Z - \mu)^4}{(Var(Z))^2}$$

خواهیم داشت:

$$\gamma_2(Z) = 2(\pi - 3) \left[\frac{(E(Z))^4}{(Var(Z))^2} \right]$$

۴. برآورد پارامتر چولگی در توزیع نرمال چوله تک پارامتری

در توزیع نرمال چوله مهمترین مسئله برآورد پارامتر چولگی است که در این بخش چند روش برآورد متفاوت این پارامتر را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱.۴. برآورد به روش گشتاوری^۵
با توجه به امید ریاضی:

$$E_{\lambda}(X) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \tilde{\lambda}^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

پس می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n = \bar{X}_n = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \tilde{\lambda}^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

و با محاسبه ای ساده داریم:

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi \bar{X}_n^2}{2 - \pi \bar{X}_n^2}}$$

در فرمول قبل با شرط $\bar{X}_n < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ یک برآورد گشتاوری خواهیم داشت.

⁴- Expected Value

⁵Method of Moments

۲.۴. برآورد به روش درست نمایی ماکزیمم (MLE)

در این قسمت نشان می دهیم که معادله ی درست نمایی برای برآورد پارامتر λ در توزیع $SN(\lambda)$ توسط توابع برداری^۶ متعامدی بر بردار نمونه تولید می شود. اگر $X \sim SN(\lambda)$ و x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از این توزیع باشد، آنگاه تابع درست نمایی^۷ بر اساس این نمونه برای پارامتر λ به صورت زیر می باشد :

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \gamma \phi(x_i) \varphi(\lambda x_i)$$

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = n \log \gamma + \sum_{i=1}^n \log \phi(x_i) + \sum_{i=1}^n \log \varphi(\lambda x_i)$$

بنابراین :

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\lambda x_i)}{\varphi(\lambda x_i)} x_i = \sum_{i=1}^n R(i) x_i$$

که در آن $R(i) = \frac{\phi(\lambda x_i)}{\varphi(\lambda x_i)}$

پس برای بدست آوردن برآورد λ کافی است که معادله $\sum_{i=1}^n R(i) x_i = 0$ را حل کنیم. یعنی باید $R(i)$ را طوری پیدا کنیم که $R = (R(1), \dots, R(n))'$ بر بردار $X = (x_1, \dots, x_n)'$ عمود باشد. می دانیم که $R'X$ تابعی از λ است. بنابراین می نویسیم :

$$f(\lambda) = R'X$$

بنابراین برآوردگر درست نمایی ماکزیمم λ بردارهای X و R بر هم عمود می کند. این تابع واضح است که برای تمام مقادیر λ پیوسته می باشد. قضیه زیر شرایطی را برای اینکه معادله $f(\lambda) = R'X$ یک ریشه واحد داشته باشد بررسی می کند.

قضیه ۲: اگر $X = (x_1, \dots, x_n)'$ و k وجود داشته باشد بطوریکه $x_j < 0$ و $x_k > 0$ ، آنگاه $f(\lambda) = 0$ یک ریشه حقیقی یکتا دارد.

۳.۴. برآورد به روش بیزی^۸ (MBE)

آماردانان در تحلیل داده ها از دو رویکرد کلاسیک و بیزی استفاده می کنند. در رویکرد کلاسیک پارامتر مورد بررسی ثابت و نامعلوم بوده و بر اساس نمونه ای تصادفی در مورد آن تصمیم گیری می شود. این در حالی است که در رویکرد بیزی پارامتر مورد بررسی، تحقیقی از یک متغیر تصادفی است که تغییرات آن توسط یک توزیع احتمال، تحت عنوان توزیع پیشین، توصیف می شود. این توزیع بر اساس تجربیات قبلی آزمایشگر تعیین شده و بر اساس نمونه تصادفی به روز می شود. اصطلاحاً توزیع پیشین اصلاح شده بر اساس مشاهدات جدید را توزیع پسین نامیده و تصمیم گیری در مورد پارامترهای مدل بر اساس آن انجام می شود. (کونگ دان ۲۰۰۳، بولستند ۲۰۰۴، گلدستین و وف ۲۰۰۷). فرض کنید $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ بردار مشاهدات نمونه ای تصادفی از توزیع $f(y|\theta)$ باشد. توزیع پسین را می توان به صورت

$$\pi(\theta|\lambda) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{m(y)} \propto f(y|\theta)\pi(\theta)$$

نوشت، که در آن $m(y) = \int f(y, \theta) d\theta$ توزیع کناری y است. در رویکرد بیزی معمولاً توزیع پیشین از یک خانواده انعطاف پذیر که دارای یک یا چند پارامتر است، انتخاب می شود. یعنی توزیع پیشین θ به صورت $\pi(\theta|\gamma)$ است، که در آن γ پارامتری با مقدار حقیقی یا برداری است و می تواند معلوم یا نامعلوم باشد. در حالتی که نامعلوم باشد می تواند ثابت و یا متغیری تصادفی با یک توزیع خاص باشد. بنابراین در بحث آمار بیزی سه روش بیز با تک پیشین^۹ (در این حالت مقدار γ معلوم است)، بیز سلسله مراتبی^{۱۰} (در این حالت γ نامعلوم و متغیری تصادفی است که دارای یک توزیع خاص می باشد) و بیز تجربی^{۱۱} (در این حالت γ نامعلوم و ثابت که توسط نمونه و فرم توزیع پیشین برآورد می گردد) مطرح می شود.

6- Vector Functions
7- Likelihood Function
8-Method Bayes Estimation
9-Single Prior Bayes
10-Hierarchical Bayes
11-Empirical Bayes

۴. ۱. ۳. برآورد پارامتر با استفاده از توزیع های پیشین و توأم پسین

با توجه به خصوصیت مهمی که آزالینی (۲۰۰۵) ثابت کرد این است که اگر X_1, X_2 مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه توزیع، متغیر تصادفی

$$Y = \lambda |X_1| + X_2$$

دارای توزیع چوله نرمال استاندارد با پارامتر λ است. حال می توان تابع چگالی چوله نرمال را به فرم دسته معادلات

$$f_{\theta}(y|t) \sim N(y - \mu - \lambda|t|, \sigma^2)$$

$$f(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$f_{\theta}(y, t) = f_{\theta}(y|t) \times f(t)$$

نوشت. همچنین با در نظر گرفتن $\theta = (\mu, \sigma^2, \lambda)$ می توان توزیع پسین را به صورت

$$\pi(\theta|y, t) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha_{\sigma} + n + 1} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu - \lambda|t_i|)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2\sigma^2} - \frac{(\mu - \mu_{\mu})^2}{2\sigma_{\mu}^2} - \frac{(\lambda - \mu_{\lambda})^2}{2\sigma_{\lambda}^2} - \frac{\beta_{\sigma}}{\sigma^2}\right)$$

به دست آورد. حال توزیع های شرطی کامل پارامترها عبارتند از

$$(\lambda|y, \sigma^2, \mu, t) \sim N\left(\frac{\frac{\mu_{\lambda}}{\sigma_{\lambda}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n |t_i|(y_i - \mu)}{\sigma^2}}{\frac{\sum_{i=1}^n |t_i|}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\lambda}^2}}, \frac{\sum_{i=1}^n |t_i|}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\lambda}^2}\right)$$

$$(\mu|y, \sigma^2, \lambda, t) \sim N\left(\frac{\frac{\mu_{\mu}}{\sigma_{\mu}^2} + \frac{(n\bar{y} - \lambda \sum_{i=1}^n |t_i|)}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2}}, \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma^2}|y, \lambda, \mu, t\right) \sim \Gamma\left(\alpha_{\sigma} + n + \frac{\beta_{\sigma}}{\sigma^2}, \frac{\beta_{\sigma}}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu - \lambda|t_i|)^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 + \beta_{\sigma}\right)$$

۵. نتیجه گیری

همان طور که می دانیم در بسیاری از استنباط های آماری از توزیع نرمال برای برازش داده های واقعی و تحلیل های آماری استفاده می شود. کاربرد توزیع نرمال در بسیاری از موارد از دقت لازم برخوردار نخواهد بود، به همین دلیل با معرفی توزیع نرمال چوله سعی کردیم تا دقت تحلیل های آماری را افزایش دهیم. این توزیع می تواند جایگزین مناسبی برای توزیع نرمال در برازش به داده های واقعی باشد و در شرایطی که بررسی فرض نرمال بودن داده ها میسر نبوده می تواند انتخاب مناسبی محسوب شود. اگر نمودار داده ها دارای چولگی باشد استفاده از توزیع نرمال چوله یک راهکار مناسب برای توضیح تغییرات داده ها از دیدگاه نظری می باشد.

مراجع

- [1] Arellano-Valle, R. B., Gómez, H. W., and Quintana, F. A. (2004). A new class of skew-normal distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 33, 1465-1480
- [2] Arnold, B. C., Beaver R. J., Groeneveld R. A. and Meeker W. Q. (1993). The nontruncated marginal of a truncated bivariate normal distribution. *Psychometrika* 58, 471-478.
- [3] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 171-178.
- [4] Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones, *Statistica*, 46, 199-208.
- [5] Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution, *Biometrika*, 83, 715-726.
- [6] Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* 61, 579-602.
- [7] Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t - distribution, *J. R. Statist.* 65, Part 2, pp. 367-389.
- [8] Azzalini, A. (3005), The Skew-Normal Distribution and Related Multivariate Family, *Scandinavian Journal of Statistics*, 32, 159-188.

-
- [9] Azzalini, A. with the collaboration of Capitanio, A. (2014) The Skew-Normal and Related Families. IMS monographs. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [10] Behboodian, J., Jamalizadeh, A. and Balakrishnan, N.(2006). A. new class of skew-Cauchy distributions, *Statistics , Probability Letters*, 76, 1488-1493.
- [11] Bolstand, W. M. (2004), *Introduction to Bayesian Statistics*, Canada, John Wiley and Sons.
- [12] Congdon, P. (2003), *Applied Bayesian Modeling*, England, John Wiley and Sons.
- [13] Goldstein, M. and Wooff, D. (2007), *Bayes Linear Statistics Theory and Methods*, England, John Wiley and Sons.
- [14] Eling, M. (2012). Fitting insurance claims to skewed distributions: Are the skew-normal and skew-student good models?. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(2), 239-248.
- [15] Sartori n. (2006). Bias prevention of maximum likelihood estimator: skew normal and t distribution. *J. Statist. Plann. Inference*, 136, 12, 4259-4275.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-279، صص. ۱۱۰-۱۱۵

بیان ساده‌ای از ضریب جینی

علیرضا حسین‌زاده*^۱، مهدی یعقوبی اول ریابی^۱

^۱گروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی، گناباد، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: منحنی لورنتس ضریب جینی منحنی‌های نابرابری شاخص‌های نابرابری	منحنی لورنتس و ضریب جینی از متداول‌ترین و پرکاربردترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل و اندازه‌گیری میزان نابرابری توزیع درآمد در یک جامعه به شمار می‌روند. به ویژه ضریب جینی که توسط محققین متعدد و از جنبه‌های متفاوت مورد بررسی گرفته است. بیشتر ارائه‌های شهودی ضریب جینی مبتنی بر منحنی لورنتس است که مفهومی نسبتاً انتزاعی است. سیاست‌گذاران و گزارشگران به ندرت از مزایای مفهومی و آماری آن بهره می‌برند و تنها از این واقعیت استفاده می‌کنند که هر چقدر مقدار این شاخص در جامعه هدف بیشتر باشد، نابرابری درآمد در آن جامعه بیشتر است و برعکس. این فقدان تفسیرپذیری عینی، منجر به ایجاد شبهاتی در ارتباط با عملکرد ضریب جینی از دیدگاه سیاست‌گذاران و کارشناسان شده به گونه‌ای که برخی از منتقدین ادعا می‌کنند که شاخص‌های آماری مانند ضریب جینی دیدگاهی انتزاعی و عقیم از نابرابری درآمد در جامعه ارائه می‌دهند. مقاله حاضر به تبیین از ایسکادرو (۲۰۱۸) بیان ساده‌ای از ضریب جینی بر اساس میانگین اختلاف درآمدهای اعضای جامعه، بدون توسل به منحنی لورنتس، ارائه می‌کند.

۱. مقدمه

اساساً شاخص‌های نابرابری توزیع درآمد آماره‌هایی هستند که میزان پراکندگی نسبی الگوی توزیع درآمد را ارزیابی می‌کنند. بر این اساس هر چه اندازه این شاخص‌ها بزرگتر باشند به این معنی است که نابرابری درآمد در آن جامعه بیشتر است و برعکس. تا کنون برای اندازه‌گیری میزان نابرابری توزیع درآمد در یک جامعه شاخص‌های متفاوتی ارائه شده است. برخی از این شاخص‌ها به جهت راحتی در محاسبه، برخی به جهت ملاحظات آماری و برخی نیز بنا به مفهومی که از عدالت، مساوات و رفاه اجتماعی دارند معرفی شده‌اند. در یک تقسیم بندی کلی، شاخص‌های نابرابری را به دو گروه شاخص‌های عینی و شاخص‌های قیاسی تقسیم می‌کنند. مطابق این تقسیم بندی شاخص‌های عینی ابزارها و معیارهای آماری هستند که بر مبنای اندازه‌گیری میزان پراکندگی درآمد افراد جامعه به تجزیه و تحلیل الگوی درآمد و تعیین میزان نابرابری آن پرداخته و توجه مستقیم به مطلوبیت‌های جامعه، تابع رفاه فردی و تابع رفاه اجتماعی ندارند. برعکس، توجه شاخص‌های قیاسی به تابع رفاه باعث می‌شود که این شاخص‌ها نابرابری در توزیع درآمد را با در نظر گرفتن فرض‌هایی برای تابع رفاه فردی و اجتماعی اندازه‌گیری نمایند. حد و مرز مشخص و صریحی بین این دو طبقه وجود ندارد به طوری که برخی معتقدند هر شاخص عینی یک شاخص قیاسی نیز هست، چون این شاخص‌ها نیز در بردارنده اشکال خاصی از توابع رفاه اجتماعی هستند. ویلفرد پارتو^۱ (۱۸۹۸) اقتصاددان ایتالیایی اولین کسی است که قانون توزیع درآمد او، الگوی ساده حاکم بر توزیع درآمد را ابداع کرد. او درآمد فردی را روی محور افقی و جمعیت را بر روی محور عمودی نشان داد و دریافت که تعداد اندکی از مردم دارای درآمد زیاد و اکثریت افراد جامعه

*سخنران
پست الکترونیک: hoseinzade1@yahoo.com (علیرضا حسین‌زاده)

^۱Pareto

دارای درآمد اندکی هستند و به این ترتیب نمودار پارتو توسط وی ابداع شد. یک تئوری مشابه توسط مکس اتو لورنتس^۲ (۱۹۰۵) اقتصاددان آمریکایی بیان گردید و در آن یک ارائه تصویری از نحوه توزیع درآمد در جامعه را پیشنهاد نمود. هردو محقق اشاره داشتند که بیشترین سهم درآمد یا ثروت، به تعداد بسیار کمی از مردم تعلق دارد.

تا کنون شاخص‌های متعدد و متنوعی برای اندازه‌گیری میزان نابرابری درآمد جامعه بر اساس منحنی لورنتس تعریف شده است که متداول‌ترین و پرکاربردترین آنها ضریب جینی است. این شاخص اولین بار توسط کورادو جینی^۳ (۱۹۱۲) آماردان ایتالیایی معرفی شد. در محاسبه ضریب جینی تفاضل درآمدها نه از میانگین جامعه، بلکه از هر فرد دیگر سنجیده می‌شود.

منحنی و شاخص بن‌فرنی با داشتن ویژگی‌های جالب توسط بن‌فرنی^۴ (۱۹۳۰) پیشنهاد گردید. همچنین منحنی و شاخص زنگا توسط زنگا^۵ (۱۹۸۴) معرفی و ویژگی‌های آن بررسی شد. این منحنی‌ها و شاخص‌ها با منحنی لورنتس و شاخص جینی مرتبط هستند. برای دسترسی به اطلاعات بیشتر در زمینه شاخص جینی می‌توانید به ایتزاکي^۶ (۱۹۹۸) مراجعه کنید. در مقاله حاضر به تبعیت از ایسکادرو^۷ (۲۰۱۸) بیان ساده‌ای از ضریب جینی بر اساس میانگین اختلاف درآمدهای اعضای جامعه، بدون توسل به منحنی لورنتس، ارائه می‌کنیم.

۲. منحنی لورنتس و ضریب جینی

منحنی لورنتس به عنوان یکی از ابزارهای مهم نمایش توزیع درآمد در جامعه، درصد تجمعی درآمد را با درصد تجمعی جمعیت مرتبط می‌کند. لذا در صفحه نمایش منحنی لورنتس، محور عمودی درصد تجمعی درآمد و محور افقی درصد تجمعی جمعیت است که در مربع واحد تعریف می‌شود. در حالتی که توزیع درآمد کاملاً عادلانه باشد، منحنی لورنتس بر قطر مربع واحد منطبق خواهد بود که به آن خط برابری یا خط عدالت می‌گویند.

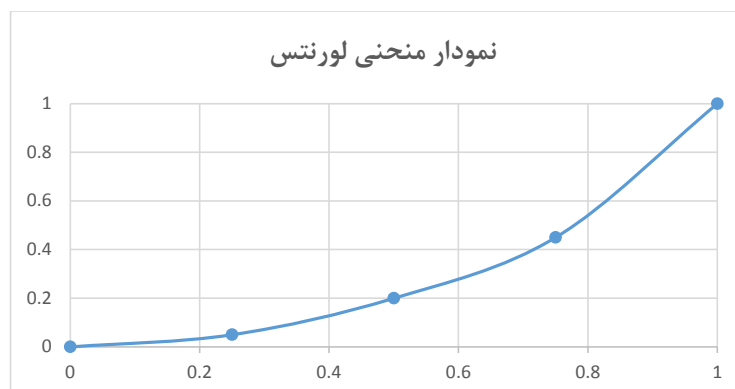
فرض کنید x_1, \dots, x_n معرف درآمدهای نامنفی n فرد جامعه و $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ درآمدهای مرتب شده به صورت صعودی باشد. تابع لورنتس تجربی (با توزیع یکنواخت گسسته) را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$L\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^k x_{(i)}}{n\bar{x}}, k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

که در آن k تعداد گروه‌های درآمدی و $L(0) = 0$ و $L(1) = 1$ است. با مشخص نمودن نقاط $\left(\frac{k}{n}, L\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ در یک دستگاه مختصات و اتصال نقاط به یکدیگر منحنی محدب حاصل می‌شود که به آن منحنی لورنتس می‌گویند. به عنوان مثال اگر درآمدهای یک جامعه چهار عضوی اعداد ۱، ۳، ۵، ۱۱ باشند آنگاه نقاط منحنی لورنتس با توجه به رابطه (۱) به صورت زیر خواهند بود:

$$(0, 0) \text{ و } (0.25, 0.05) \text{ و } (0.5, 0.2) \text{ و } (0.75, 0.45) \text{ و } (1, 1)$$

با رسم نقاط بالا در یک دستگاه مختصات، نمودار منحنی لورنتس به صورت زیر حاصل خواهد شد.



²Max Otto Lorenz

³Corrado Gini

⁴Boferroni

⁵Zenga

⁶Yitzhaki

⁷Escudero

رابطه (۱) تابع لورنتس را به ازاء مقادیر $1, \dots, \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, 0$ در حالت گسسته مشخص می‌کند. حال اگر بخواهیم تابع لورنتس $L(p)$ را برای هر p در بازه $[0, 1]$ مشخص نماییم، به کمک رابطه زیر این امر ممکن خواهد شد.

$$L(p) = \frac{1}{n\bar{x}} \left[\sum_{i=1}^{[np]} x_{(i)} + (np - [np]) x_{([np]+1)} \right], 0 \leq p \leq 1, \quad (2)$$

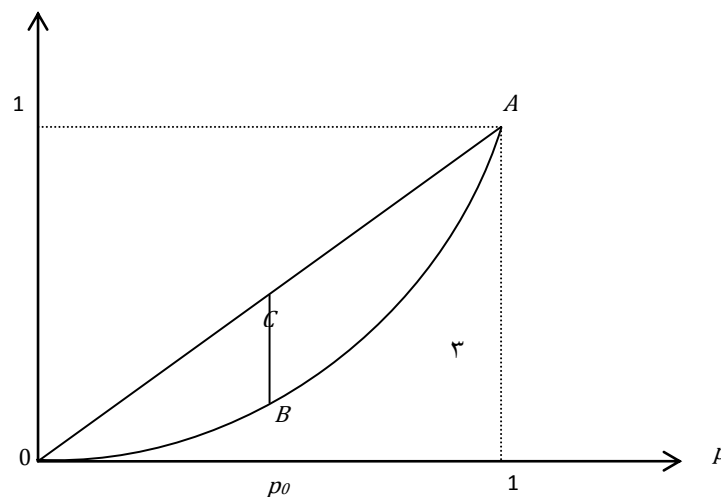
که در آن $[np]$ معرف بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی np می‌باشد. به منظور ارائه تعریف مناسبی برای منحنی لورنتس یک توزیع احتمال، با در نظر گرفتن رابطه (۱) بعنوان دنباله‌ای از گشتاورهای ناقص استاندارد شده مرتبه اول و همچنین توجه به تعریف $\mu = E(X) = \int_0^1 F^{-1}(t) dt$ به عنوان گشتاور مرتبه اول، می‌توان تعریف زیر را برای منحنی لورنتس با بازنویسی رابطه (۱) بیان نمود.

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(t) dt, p \in [0, 1], \quad (3)$$

که در آن F^{-1} تابع چنلکی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{-1}(t) = \sup \{x | F(x) \leq t\}, t \in [0, 1].$$

شکل زیر نمونه‌ای از یک منحنی لورنتس را نشان می‌دهد.



در این شکل، منحنی OA منحنی لورنتس، خط OA خط برابری کامل توزیع درآمد و اندازه پاره خط BC شکاف درآمدی در سطح درآمد x متناظر با p_0 است که $F(x) = p_0$. از خواص منحنی لورنتس به موارد زیر می‌توان اشاره نمود:
۱. تابع لورنتس $L(p)$ بر بازه $[0, 1]$ پیوسته است و $L(0) = 0$ ، $L(1) = 1$. در واقع $L(p)$ را می‌توان به عنوان یک تابع توزیع در نظر گرفت.

۲. $L(p)$ یک تابع صعودی و محدب است و به واحد اندازه‌گیری درآمد بستگی ندارد.

۳. با اعمال تغییر متغیر $y = F^{-1}(t)$ می‌توان شکل دیگر تابع لورنتس را به فرم زیر استخراج نمود:

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)} y dF(y), p \in [0, 1]. \quad (4)$$

۴. برای هر $0 \leq p \leq 1$ به وضوح داریم $0 \leq L(p) \leq p$ ، که با انتگرالگیری از طرفین این نامساوی نتیجه زیر قابل حصول است:

$$0 \leq \int_0^1 L(p) dp \leq \frac{1}{4}.$$

متداول‌ترین شاخص تجزیه و تحلیل و اندازه‌گیری میزان نابرابری توزیع درآمد ضریب جینی است. این شاخص که بر اساس میانگین قدرمطلق اختلافات بین تمامی جفت مشاهدات درآمدی بنا می‌شود یک شاخص نسبی است که تحت تکرارهای جامعه ناورداست. از این رو مقایسه‌ی نابرابری بین جوامع با درآمدهای مختلف و جمعیت‌های متفاوت را ممکن می‌سازد. بعلاوه نابرابری اندازه‌گیری شده با این شاخص به شکاف‌های درآمدی جامعه بستگی دارد. دامنه تغییرات این شاخص بازه $[0, 1]$ است. هر چه مقدار این شاخص به صفر نزدیکتر باشد، توزیع درآمد عادلانه‌تر است و هر چه به یک نزدیکتر باشد، معرف نابرابری بیشتر در توزیع درآمد خواهد بود. ضریب جینی صفر به این معنی است که همه افراد درآمد یکسان دارند (برابری مطلق) و ضریب جینی یک به معنی نابرابری مطلق است، به این معنی که تمامی درآمد جامعه تنها به یک نفر تعلق دارد و مابقی افراد هیچ درآمدی ندارند. فرمول ضریب جینی به صورت زیر است:

$$G = \frac{1}{2n^2\bar{x}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|. \quad (5)$$

بر اساس منحنی لورنتس، ضریب جینی نسبت مساحت محصور بین خط عدالت و منحنی لورنتس به مساحت کل زیر خط عدالت را نشان می‌دهد که معادل دو برابر ناحیه محصور بین منحنی لورنتس و خط عدالت است. یعنی اگر $L(p)$ منحنی لورنتس یک توزیع احتمال باشد آنگاه ضریب جینی از دستور زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp. \quad (6)$$

تا کنون بیان‌های متفاوتی برای ضریب جینی توسط محققین ارائه شده است. برخی از آنها عبارتند از:

$$G = \frac{1}{n} \left(n + 1 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n (n+1-i)x_{(i)}}{n\bar{x}} \right). \quad (7)$$

$$G = \frac{2 \sum_{i=1}^n ix_{(i)}}{n^2\bar{x}} - \frac{n+1}{n}. \quad (8)$$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n (2i-n)x_{(i)}}{n^2\bar{x}} - \frac{1}{n}. \quad (9)$$

بر اساس سه فرمول اخیر ضریب جینی جامعه چهار عضوی با درآمدهای ۱، ۳، ۵، ۱۱ برابر ۴۰۰ است. به لحاظ نظری علاوه بر فرمول‌های بالا می‌توان ثابت کرد که اگر Y, X دو متغیر تصادفی نامنفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F و $E(X) = \mu$ باشند آنگاه داریم:

$$G = \frac{E|X-Y|}{2\mu}.$$

بر این اساس می‌توان گفت، ضریب جینی در واقع میانگین تفاوت نسبی درآمد بین دو فرد یا دو خانوار که به طور تصادفی از جامعه انتخاب می‌شوند را بیان می‌کند. توجه داریم که چون ضریب جینی یک شاخص نسبی است لذا به واحد پولی درآمد بستگی ندارد. به عنوان مثال ضریب جینی ۴۵٪ بیان می‌کند که اگر متوسط درآمد جامعه ۱۰۰۰ تومان باشد آنگاه تفاوت نسبی مورد انتظار درآمدهای دو فرد یا دو خانوار که به طور تصادفی از جامعه انتخاب می‌شوند برابر ۴۵۰ تومان خواهد بود.

ضریب جینی دارای ویژگی‌ها و در عین حال معایبی است که ذیلاً به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

ضریب جینی یک شاخص نسبی است و از این رو به واحد اندازه‌گیری درآمد وابسته نیست. همچنین دارای این قابلیت است که برای درآمدهای منفی نیز می‌توان از آن استفاده کرد. این در حالی است که دیگر ابزارهای سنجش نابرابری فاقد این قابلیت هستند. ضریب جینی با تغییر همه درآمدها به یک اندازه معین حساسیت نشان می‌دهد. به این ترتیب که با افزوده شدن مقدار معینی به همه درآمدها یا کم شدن از آنها اندازه شاخص جینی کاهش یا افزایش می‌یابد. این به خاطر آن است که ضریب جینی نسبت به تبدیلات مکانی پایا نیست. اما چون نسبت به تبدیلات مقیاس پایاست، لذا ضرب همه درآمدها در یک مقدار ثابت و مثبت در اندازه ضریب جینی تأثیری ندارد.

از جمله معایب عمده ضریب جینی می‌توان به عدم سازگاری آن با اصل تجزیه پذیری جمعی اشاره نمود. این اصل بیان می‌کند که اگر جامعه به چند گروه مجزا با حجم‌ها و میانگین‌های درآمدی متفاوت افزایش شده باشد آنگاه اگر ترتیب جدیدی از افراد در داخل گروه‌ها ایجاد کنیم به طوری که نابرابری در هر کدام از این گروه‌ها افزایش یابد آنگاه باید نابرابری کل جامعه افزایش یابد. یعنی نابرابری کل را باید بتوان به مجموع نابرابری بین و داخل گروه‌های جامعه تجزیه کرد، اما ضریب جینی در این اصل صدق نمی‌کند و با افزایش نابرابری در هر کدام از گروه‌های جامعه، ضریب جینی تغییر نکرده و حتی ممکن است کاهش یابد.

از ضریب جینی تنها در موارد خاص می‌توان برای مقایسه میزان نابرابری دو جمعیت استفاده کرد. اگر منحنی لورنتس دو جمعیت یکدیگر را قطع نکنند آنگاه می‌توان از ضریب جینی برای مقایسه و رتبه‌بندی شدت نابرابری آن استفاده کرد. در غیر این صورت رتبه‌بندی جمعیت‌ها با این ضریب نتایج اشتباه و گمراه‌کننده‌ای به دنبال خواهد داشت.

ضریب جینی وزن خیلی کمی را به دم‌های توزیع درآمد می‌دهد. در نتیجه ممکن است دولتی جهت بهبود وضع توزیع درآمد سیاستی را در پیش گیرد که این سیاست باعث افزایش درآمد اقشار خیلی کم درآمد، یا کاهش درآمد اقشار با درآمد بالا و یا هر دو شود، اما این سیاست تأثیری در اندازه ضریب جینی نداشته و با اعتماد دولت به این ضریب موجبات سرخوردگی از اعمال چنین سیاستی پیش آید.

۳. بیان ساده‌ای از ضریب جینی

در عصر حاضر که عصر اطلاعات نام دارد، داده‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. متخصصان در هر شاخه علمی به دنبال روش‌های مبتکرانه‌ای هستند تا روزانه طیف وسیعی از داده‌ها را اندازه‌گیری نموده و نمایش مناسبی برای آنها ارائه دهند. اما داده‌ها به خودی خود و به تنهایی فاقد ارزش هستند، به جز اینکه بتوان با روشهای علمی و با نگاهی عمیق به داده‌ها، الگوها و روابط بین آنها را شناسایی و معانی نهفته در این الگوها را جهت ارائه به دیگران تحلیل نمود. در این بخش و به تبعیت از ایسکادرو (۲۰۱۸) بنا داریم فارغ از دیدگاه انتزاعی ضریب جینی، نمایشی آسان و قابل فهم برای آن ارائه دهیم.

فرض کنید x_1, \dots, x_n معرف درآمدهای نامنفی n فرد جامعه و \bar{x} میانگین حسابی درآمدها و $T = \sum_{i=1}^n x_i$ جمع کل درآمدها باشد. در این صورت ضریب جینی داده‌ها از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$G = \frac{1}{2n\bar{x}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|.$$

فرض کنید PD نماد نشان دهنده میانگین قدر مطلق تفاوت‌های درآمدی ازواج جامعه باشد. یعنی:

$$PD = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|.$$

یک روش آسان برای نمایش PD از طریق تعریف ماتریس نابرابری M با درایه عمومی $d_{ij} = |x_i - x_j|$ به صورت زیر امکان پذیر خواهد بود:

$$M = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

به وضوح PD برابر میانگین n^2 درایه ماتریس M است.

به طور شهودی، ضریب جینی میزان "بزرگ" بودن این ماتریس نابرابری درآمد را به معنای نسبی اندازه‌گیری می‌کند. در یک جامعه کاملاً عدالت‌خواه همه افراد درآمد یکسان دارند و لذا عناصر M همگی صفرند. در حالت نابرابری کامل تمام درآمد و ثروت متعلق به یک فرد است و بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم این فرد را آخرین فرد در نظر بگیریم. ماتریس M در این حالت به ماتریس M_T تحویل خواهد شد که به صورت زیر است:

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & T \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T \\ T & T & \dots & T & 0 \end{bmatrix}$$

با نمایش بالا و به طور طبیعی واضح است که در جامعه کاملاً عدالت‌خواه مقدار PD برابر صفر است. اگر در حالت نابرابری کامل PD را با PD_T نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$PD_T = \frac{2(n-1)T}{n^2} = 2 \frac{n-1}{n} \frac{T}{n} \sim 2\bar{x}.$$

توجه داریم که تساوی تقریبی آخر برای مقادیر بزرگ n معتبر خواهد بود. لذا در این حالت ضریب جینی به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$G = \frac{PD}{PD_T}$$

به عنوان مثال اگر درآمد یک جامعه سه عضوی ۱، ۲، ۹ دلار باشد آنگاه $\bar{x} = 4$ و $T = 12$ و $PD = 3/55$ و $PD_T = 5/33$ و در نتیجه ضریب جینی برابر $0/66$ خواهد بود. توجه داریم که به دلیل کوچک بودن n از فرمول دقیق PD_T استفاده شده است.

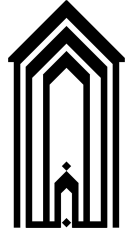
در حالت برابری کامل به وضوح ملاحظه می‌شود که در نمایش جدید، مقدار ضریب جینی صفر است. همچنین در حالت نابرابری کامل ($PD = PD_T$) مقدار ضریب جینی برابر یک است. نامنفی بودن ضریب جینی به واسطه نامنفی بودن PD به وضوح محرز است. اگر همه درآمدها نامنفی باشند به کمک نامساوی مثلث به راحتی می‌توان دید که $PD \leq PD_T$ و بنابراین $0 \leq G \leq 1$.

۴. نتیجه

از آنجایی که مسئله اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل نابرابری توزیع درآمد در عرصه‌های اقتصادی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است لذا در این مقاله ضمن معرفی اجمالی شاخص نابرابری جینی و بیان برخی ویژگی‌ها و معایب آن و فارغ از نگاه انتزاعی مبتنی بر منحنی لورنتس، بیان ساده‌ای از ضریب جینی مبتنی بر اختلاف درآمدهای زوجی افراد جامعه را معرفی نمودیم. لازم به ذکر است که محاسبه شاخص جینی مبتنی بر اختلاف درآمدهای زوجی افراد جامعه هیچ مزیت آشکاری نسبت به سایر فرمول‌های مبتنی بر منحنی لورنتس ندارد. زیرا همه آنها به برآوردهای سازگار ضریب جینی جامعه منتهی می‌شوند.

مراجع

- [۱] Lorenz, M. O. (۱۹۰۵). (Methods of measuring the concentration of wealth Publications of the American Statistical Association. Vol. ۹ (New Series, No. ۷) (۲۰۹-۲۱۹). doi: ۱۰.۲۳۰۷/۲۲۷۶۲۰۷
- [۲] Yitzhaki, S. (۱۹۹۸). (More than a dozen alternative ways of spelling Gini. Research on economic inequality: a research annual, ISSN ۱۰۴۹-۲۵۸۵. ZDB-ID ۱۰۶۸۷۳۶-۱. - Vol. ۸. ۱۹۹۸, p. ۱۳-۳۰.
- [۳] Escudero, W.S. (۲۰۱۸). (A note on a sample interpretation of the Gini coefficient. Econ'omica, La Plata, Vol. LXIV, Nro. ۱.
- [۴] Pareto, Vilfredo (۱۸۹۸). ("Cours d'economie politique". Journal of Political Economy. ۶. doi: ۱۰.۱۰۸۶/۲۵۰۵۳۶.
- [۵] Gini, C. (۱۹۱۲). ('Variabilita e Mutabilita', Studi Economico-Giuridicidell'Universita di Cagliari, ۳)۲:(۱-۱۵۸.
- [۶] Zenga, M. (۱۹۸۴). (Tendeza alla massima ed alla minima concentrazione per variabili casuali continue. Statistica ۴۴)۴:(۶۱۹ - ۶۴۰.
- [۷] Bonferroni, C. E. (۱۹۳۰). (Elementi di Statistica Generale. Liberia Seiber: Firenze.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ST-283، صص. ۱۱۶-۱۲۸

برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از تابع مفصل زمان - متغیر

سارینا علی پور^{*}، صدیقه شمس^ب، مهدی علی محمدی^{آب}

آگروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا
ب-گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا
آگروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض خطر تابع توزیع تعمیم یافته $g-h$ توکی تابع مفصل زمان-متغیر مدل GARCH	امروزه در مبحث سرمایه گذاری برای برآورد ارزش در معرض خطر سبدهای از تابع مفصل استفاده می شود. تابع مفصل می تواند ساختار وابستگی متغیرهای تصادفی را به خوبی و مستقل از توزیع های حاشیه ای آن ها توصیف کند و در واقع یک تابع توزیع چندمتغیره با توزیع حاشیه ای یکنواخت است. در برآورد ارزش در معرض خطر، معمولاً مشاهدات متغیرهای تصادفی به صورت سری زمانی هستند و اگر باقی مانده های مدل های GARCH برازش داده شده به آن ها، دارای توزیع های چوله با دم سنگین باشند یکی از توزیع های مناسب برای توجیه رفتار تصادفی باقی مانده ها توزیع $g-h$ توکی است.
2020 MSC: 62H10 62P05 62M10	در این پژوهش، مدل GARCH با تابع مفصل زمان-متغیر با توزیع های حاشیه ای $g-h$ توکی معرفی میشود و با استفاده از آن، روش برآورد ارزش در معرض خطر ارائه می شود. کاربرد عملی این روش در مورد ارزش در معرض خطر سبدهای شامل سهام شرکت های فحوز، فملی و فولاد نشان داده می شود

۱. مقدمه

ریسک در بازار مالی همیشه یکی از موضوعات مهم بوده است. یکی از روش های اندازه گیری آن، محاسبه ارزش در معرض خطر (VaR)^۱ است. محاسبه دقیق VaR یکی از کلیدها برای تخمین توزیع احتمال بازده آتی دارایی های مالی است. معمولاً فرض می شود بازده ها مستقل از یکدیگر هستند و از توزیع نرمال پیروی می کنند، اما در عمل چنین نیست. اغلب بازده ها به صورت سری زمانی بوده و توزیع بازده ها نامتقارن و دم سنگین هستند. در سال های اخیر توزیع های دم سنگین، مانند توزیع لجستیک، توزیع تی، و $g-h$ توکی مورد استفاده قرار گرفته اند. توزیع $g-h$ توکی می تواند برازش خوبی برای ویژگی عدم تقارن و ویژگی دم سنگین سری بازده دارایی های مالی داشته باشد. مدل GARCH^۲ می تواند به طور جامع وابستگی سریالی بازده دارایی ها را توصیف کند و تابع مفصل می تواند توزیع توام و توزیع های حاشیه ای آن ها را به هم متصل کند. توزیع $g-h$ توکی، مدل GARCH و تابع مفصل در پژوهش های مانند [۳]، [۴]، [۸] و [۶] به کار رفته اند. در پژوهش هایی مانند [۲] مسئله مهم انتخاب تابع مفصل بهینه است که به این مسئله با برآورد ناپارامتری تابع چگالی هسته ای پرداخته شده است. در این پژوهش، از نقاط قوت توزیع $g-h$ توکی، مدل GARCH و تابع مفصل در به تصویر کشیدن توزیع توام بازده دارایی های مالی و ساخت تابع مفصل زمان-متغیر که به طور همزمان می تواند عدم تقارن، کشیدگی و دم سنگین، نوسانات متغیر با زمان بازده ها را نشان دهد، استفاده

*سخنران

پست الکترونیک: sarina.1376.alipour@gmail.com (سارینا علی پور)، s.shams@alzahra.ac.ir (صدیقه شمس)،
m.alimohammadi.stat@alzahra.ac.ir (مهدی علی محمدی)

^۱Value at Risk

^۲Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity

می شود. در ادامه این بخش تعاریف و مفاهیم مربوط به موضوع پژوهش ارائه می شوند. در بخش دوم مدل GARCH مبتنی بر تابع مفصل زمان-متغیر چند متغیره ساخته می شود. و در بخش سوم محاسبه VaR با استفاده از روش ذکر شده در [1] شرح داده می شود. در بخش آخر کاربرد عملی این روش در مورد برآورد ارزش در معرض خطر سبد سهام شامل سهام شرکت های فخرز، فملی و فولاد نشان داده می شود.

سری زمانی، مجموعه ای از مشاهدات است که در فواصل زمانی مساوی و منظمی جمع آوری شده است. طبیعت ذاتی یک سری زمانی همبسته بودن مشاهدات است. از اهداف تجزیه و تحلیل سری های زمانی می توان به توصیف، تشریح، پیش بینی و کنترل اشاره کرد. مهم ترین هدف از تحلیل سری های زمانی در قلمرو زمان، پیش بینی مقادیر آینده است. این پیش بینی بر اساس بررسی توصیفی و مدل بندی رفتار سری زمانی و هم چنین لحاظ کردن تغییرات مقطعی و درازمدت عناصر سری انجام می شود. در این راستا، برای مطالعه وابستگی های موجود بین عناصر سری، تحلیل توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی مورد توجه می باشد. تجزیه و تحلیل سری زمانی به طور گستردهای در بسیاری از زمینه های علمی از جمله مباحث اقتصاد، نجوم، مالی و علوم محیط زیست مورد استفاده قرار می گیرد. اگر X یک بردار باشد، سری زمانی را می توان به صورت $\{X_t, t = 1, 2, 3, \dots\}$ نشان داد. که در آن t بیانگر زمان و X نیز یک متغیر تصادفی است. طبق این تعریف، زمان t نیز قابل تعریف است. این لحظه می تواند زمان تولد یک پدیده یا هنگامی باشد که اولین اطلاعات در آن لحظه ثبت شده است.

مدل میانگین متحرک جمع بسته اتورگرسیو ARIMA³ به صورت $ARIMA(p, d, q)$ نشان داده می شود، که در آن (p, d, q) اعداد حقیقی غیر منفی هستند. بخش $AR(p)$ در مدل، نشان دهنده خودهمبسته بودن مرتبه p مدل است، که نشان می دهد متغیر بر اساس p مقدار قبلی خود پسرفت می کند. بخش $MA(q)$ در مدل، نشان دهنده بخش میانگین-متحرک مدل است، که نشان می دهد خطای رگرسیون در واقع یک ترکیب خطی از q خطاهای زمان قبل است. بخش $I(d)$ ("جمع بسته") در مدل، به عنوان بخش تفاضلی شناخته می شود، و به معنای تفاضل بین داده های متوالی یک سری زمانی است.

تعریف ۱.۱. فرآیند $ARIMA(p, d, q)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i)(1 - B)^d X_t = \mu + (1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i) \epsilon_t \quad (1)$$

که در آن ϵ_t ها، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یکسان σ^2 هستند و $B^i X_t = X_{t-i}$.

تحلیل های مربوط به سری زمانی معمولاً بر پایه فرض پایداری واریانس بنا شده اند، اما در عمل گاهی با ناهمسانی واریانس مواجه می شویم. از این رو باید داده ها را به نحوی تبدیل کنیم تا پایدار واریانس به دست آید یا از مدل هایی استفاده کنیم که مشروط به ناهمسانی واریانس باشند. این مدل ها مدل های ناهم واریانس شرطی خودبازگشتی ARCH⁴ نامیده می شوند.

تعریف ۲.۱. در مدل ARCH عبارت ϵ_t عبارت است از $\epsilon_t = \sigma_t^2 Z_t$ و در آن Z_t متغیر تصادفی فرآیند نوفه سفید است و سری σ_t^2 به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (2)$$

تعریف ۳.۱. در مدل های ناهم واریانس شرطی خودبازگشتی تعمیم یافته GARCH سری σ_t^2 به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3)$$

تابع مفصل یک تابع توزیع تجمعی چند متغیره است که توزیع احتمال حاشیه ای هر یک از متغیرها، توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ است. از تابع مفصل، برای توصیف یا مدل سازی وابستگی (همبستگی بین متغیرهای تصادفی) استفاده می شود. یک بردار تصادفی $X' = (X_1, \dots, X_n)$ را در نظر بگیرید، فرض کنید که دارای تابع توزیع توام F و توابع توزیع حاشیه ای پیوسته $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ هستند و $U_i = F_i(X_i)$ به ازای $i = 1, \dots, n$ ، در این صورت مطابق قضیه اسکالر [7] تابع C وجود دارد که

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_n(X_n) \leq u_n) \quad (4)$$

³AutoRegressive Integrated Moving Average

⁴AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity

و

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (5)$$

اگر F پیوسته باشد، آن گاه C یکتاست ([5]). اگر تابع توزیع چند متغیره F دارای تابع چگالی f باشد، آن گاه:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (6)$$

که در آن $f_i(x_i)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X_i و $c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$.

تعریف ۴.۱. (تابع مفصل دوبعدی) فرض کنید $\mathbb{I} = [0, 1]$. یک تابع مفصل دوبعدی یک تابع دو متغیره از $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ است به طوری که:

۱. حاشیه‌ای‌ها یکنواخت باشند، یعنی برای هر $u, v \in \mathbb{I}$

$$C(u, 0) = 0, \quad C(u, 1) = u, \quad C(0, v) = 0, \quad C(1, v) = v \quad (7)$$

۲. دو-افزایشی^۵ باشد، یعنی برای هر $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ به طوری که $u_1 \leq u_2$ و $v_1 \leq v_2$.

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (8)$$

تعریف ۵.۱. (تابع مفصل تجربی) فرض کنید $\{(R_k, S_k)\}$ از تبه‌های مرتبط با نمونه تصادفی $\{(X_k, Y_k)\}$ ، به ازای $k = 1, \dots, n$ باشند. تابع مفصل تجربی C_n مربوطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}\left(\frac{R_k}{n+1} \leq u, \frac{S_k}{n+1} \leq v\right) \quad (9)$$

که در آن $u, v \in \mathbb{I}$ و یک تابع شاخص است.

زیر کلاس خاصی از توابع مفصل، توابع مفصل ارشمیدسی نامیده می‌شود، که ویژگی‌های بسیار مفیدی دارند (رجوع شود به [5]). برای تعریف تابع مفصل ارشمیدسی، ابتدا به تعریف تابع مولد نیاز داریم:

تعریف ۶.۱. (وارون‌نما) فرض کنید $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ به طوری که γ پیوسته و اکیداً کاهشی باشد، با $\gamma(1) = 0$ ؛ هم‌چنین فرض کنید که γ^{-1} وارون عادی تابع γ باشد. وارون‌نمای تابع γ یعنی $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\gamma^{[-1]}(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \gamma(0) \\ 0 & \gamma(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (10)$$

توجه داشته باشید که $\gamma^{[-1]}$ بر $[0, \infty]$ پیوسته و ناپارامتری است، و بر $[0, \gamma(0)]$ کاهشی اکید است. هم‌چنین، $\gamma^{[-1]}(\gamma(t)) = t$ بر \mathbb{I} و

$$\gamma(\gamma^{[-1]}(t)) = \min\{t, \gamma(0)\} \quad (11)$$

به وضوح، اگر $\gamma(0) = \infty$ ، آن‌گاه $\gamma^{[-1]} = \gamma^{-1}$.

تعریف ۷.۱. (تابع مفصل ارشمیدسی) فرض کنید که $C: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ به صورت زیر ارائه شود

$$C(u, v) = \gamma^{[-1]}(\gamma(u) + \gamma(v)), \quad (12)$$

که در آن γ ، $\gamma^{[-1]}$ همانند تعریف ۶.۱ باشند. آن‌گاه C یک تابع مفصل دوبعدی ارشمیدسی است، اگر و تنها اگر، γ محدب باشد ([5]).

اگرچه توابع مفصل ارشمیدسی تمام خانواده‌های تابع مفصل را در بر نمی‌گیرد، با این وجود برای مدل‌سازی کاربرد فراوان دارد. جدول ۱ پرکاربردترین توابع مفصل ارشمیدسی دو متغیره، و جدول ۲ تابع مولد متناظر آن‌ها ارائه می‌دهد.

جدول ۱: نمونه‌ای از توابع مفصل ارشیدسی

θ	$C_\theta(u, v)$	خانواده
$\theta \in [-1, 1)$	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	علی-میکائیل-حق
$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$[\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0\}]^{-1/\theta}$	کلاپتون
$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	فرانک
$\theta \in [1, \infty)$	$\exp\left[-\left((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right)^{1/\theta}\right]$	گامبل
$\theta \in [1, \infty)$	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$	جو
	uv	مستقل

جدول ۲: توابع مولد متناظر با توابع مفصل ارشمیدسی در جدول ۱

$\gamma^{-1}(t)$	$\gamma(t)$	خانواده
$\frac{1-\theta}{e^t - \theta}$	$\log\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$	علی-میکائیل-حق
$(1 + \theta t)^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	کلاپتون
$-\frac{1}{\theta} \log(1 + \exp(-t)(\exp(-\theta) - 1))$	$-\log\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	فرانک
$\exp(-t^{1/\theta})$	$(-\log t)^\theta$	گامبل
$1 - (1 - \exp(-t))^{1/\theta}$	$-\log(1 - (1-t)^\theta)$	جو
$\exp(-t)$	$-\log t$	مستقل

تعریف ۸.۱. (تابع مفصل بیضوی) توابع مفصل بیضوی، توابعی هستند که در آنها توزیع های حاشیهای یک متغیره توسط توابع بیضوی به یکدیگر مرتبط می شوند. دو تا از مهمترین اعضای این خانواده، تابع مفصل نرمال و تابع مفصل t است. **تابع مفصل نرمال** به صورت زیر تعریف میشود:

$$C_\Sigma(u_1, \dots, u_d) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (13)$$

که در آن Φ_Σ تابع توزیع چند متغیره نرمال با ماتریس واریانس کوواریانس Σ و Φ^{-1} وارون تابع توزیع نرمال استاندارد است. **تابع مفصل تی** به صورت زیر تعریف میشود:

$$C_{\Sigma, \nu}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\Sigma, \nu}(\Phi_\nu^{-1}(u_1), \dots, \Phi_\nu^{-1}(u_d)) \quad (14)$$

که در آن $\Phi_{\Sigma, \nu}$ تابع توزیع چند متغیره تی با ماتریس واریانس کوواریانس Σ و Φ_ν^{-1} وارون تابع توزیع تی با ν درجه آزادی است.

تعریف ۹.۱. (اندازه وابستگی) یک اندازه عددی $\delta_{X, Y}$ بین دو متغیره تصادفی پیوسته X و Y با تابع مفصل C اندازه وابستگی است، اگر ویژگی های زیر را دارا باشد:

۱. δ برای هر زوج (X, Y) از متغیره های تصادفی پیوسته تعریف شده باشد.

$$0 \leq \delta_{X, Y} \leq 1 \quad 2.$$

$$\delta_{X, Y} = \delta_{Y, X} \quad 3.$$

۴. $\delta_{X, Y} = 0$ ، اگر و فقط اگر X و Y مستقل باشند.

۵. $\delta_{X, Y} = 1$ ، اگر و فقط اگر هر یک از X و Y به طور تقریباً مطمئن یک تابع اکیداً یکنوا از دیگری باشد.

۶. اگر α و β به طور تقریباً مطمئن توابع یکنوای اکید به ترتیب بر برد X و برد Y باشند، آنگاه $\delta_{\alpha(X), \beta(Y)} = \delta_{X, Y}$.

۷. اگر $\{(X_n, Y_n)\}$ برای $n \in \mathbb{N}$ یک دنباله از متغیره های تصادفی پیوسته با تابع مفصل C_n باشند و اگر $\{C_n\}$ همگرای نقطه‌ای به یک تابع مفصل C باشد، آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{X_n, Y_n} = \delta_{X, Y}.$$

توجه کنید که در مفهوم بالا ضریب خطی همبستگی پیرسن ρ_p یک اندازه وابستگی نیست؛ در حقیقت $\rho_p(X, Y) = 0$ دلالت بر این که X و Y مستقلند، ندارد. در مقابل، یک اندازه وابستگی با ضریب همبستگی بیشینه ρ_p^* به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_p^* = \sup_{f, g} \rho_p(f(X), g(Y)), \quad (15)$$

که در آن سوپریمم روی توابع بولر اندازه پذیر f و g که برای آن‌ها همبستگی $\rho_p(f(X), g(Y))$ خوش تعریف است، گرفته شده است. اگرچه این اندازه اغلب مساوی با یک است و نمی تواند به صورت مؤثری محاسبه شود.

تعریف ۱۰.۱. (تاو کندال τ_k) فرض کنید (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) بردارهایی از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و هم توزیع باشند. تفاوت زیر به عنوان نسخه جمعیتی τ_k تعریف می شود:

$$\tau_k = \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} \quad (16)$$

از قرار معلوم، اگر C تابع مفصل X و Y باشد، آن گاه:

$$\tau_k^{X, Y} = \tau_k^C = 4 \iint_{\mathbb{R}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (17)$$

به ویژه در مورد تابع مفصل ارشمیدسی، τ_k با توجه به تابع مولد γ از C به صورت زیر بیان می شود:

$$\tau_k^C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} dt \quad (18)$$

تعریف ۱۱.۱. (روی اسپیرمن ρ_s) فرض کنید (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) و (X_3, Y_3) سه بردار تصادفی مستقل با توزیع پیوسته توأم متداول باشند. اختلاف زیر نسخه جمعیتی ρ_s تعریف می شود:

$$\rho_s = 3(\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}) \quad (19)$$

از قرار معلوم اگر C تابع مفصل (X, Y) باشد، آن گاه $(X_1, Y_1) \sim C$ ، اما $(X_2, Y_2) \sim \Pi_2$ ، زیرا X_2 و Y_3 مستقل هستند. در نتیجه:

$$\rho_s^{X, Y} = \rho_s^C = 3Q(C, \Pi_2) \quad (20)$$

اغلب ρ_s را از نظر امید ریاضی ممکن می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho_s^C = 12 \int \int_{\mathbb{R}^2} uv d(u, v) - 3 = 12\mathbb{E}(uv) - 3 \quad (21)$$

یک تفسیر عملی از ρ_s از بازنویسی فرمول بالا به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho_s^C = 12 \int \int_{\mathbb{R}^2} [C(u, v) - uv] dudv \quad (22)$$

تعریف ۱۲.۱. (ارزش در معرض خطر) حداکثر خسارت ممکن یک سبد سهام با توجه به تابع چگالی مجموع خسارت ها که با f نمایش داده می شود، اندازه گیری می شود. ارزش در معرض خطر در حقیقت چندانک در سطح بحرانی α (تحت به تابع چگالی f) است، به عبارت دیگر

$$P(\text{Loss} \leq VaR) = \int_0^{VaR} f(L) dL = 1 - \alpha \quad (23)$$

تعریف ۱۳.۱. (توزیع تعمیم یافته $g-h$ توکی) فرض کنید U متغیر تصادفی استاندارد شده (میانگین صفر، واریانس یک) با تابع چگالی متقارن حول مبدا باشد و

$$T_{g, h}(U) = \frac{1}{g} (e^{gu} - 1) e^{\frac{hu^2}{2}} \quad (24)$$

که در آن $h \in \mathbb{R}$ و $g \neq 0$. تابع توزیع متغیر $T_{g, h}(U)$ را تابع توزیع تعمیم یافته $g-h$ توکی مینامند. پارامترهای g و h به ترتیب نشان دهنده چولگی و کشیدگی دم های توزیع تعمیم یافته $g-h$ توکی هستند.

۲. مدل چندمتغیری GARCH

فرض کنید سری زمانی مربوط به بازده دارایی های p ریسک در زمان t ، به صورت $r_t = \{r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{p,t}\}$ نشان داده شود. همچنین مجموعه اطلاعاتی که قبل از زمان t وجود داشته است، عبارت باشد از: $I_{t-1} = \{r_{t-1}, h_{t-1}, r_{t-2}, h_{t-2}, \dots\} = \prod_{i=1}^p I_{i,t-1}$ باشد که در آن $I_{i,t-1} = \{r_{i,t-1}, h_{i,t-1}, r_{i,t-2}, h_{i,t-2}, \dots\}$ است و $h_{i,t}$ نشان دهنده نواسانات شرطی $r_{i,t}$ به شرط $I_{i,t-1}$ است. فرض کنید $C(\cdot | I_{t-1})$ تابع مفصل p متغیره شرطی و تابع $F_i(r_{i,t} | I_{i,t-1})$ تابع توزیع حاشیه ای شرطی ریسک i ام باشد. در این صورت

$$F(r_t | I_{t-1}) = C(F_1(r_{1,t} | I_{1,t-1}), \dots, F_p(r_{p,t} | I_{p,t-1})) \quad (25)$$

بسیاری از مطالعات مبتنی بر شواهد تجربی نشان میدهد که سری بازده دارایی های از مدل $GARCH(1, 1)$ پیروی میکند. طبق این فرض داریم:

$$\begin{aligned} r_{i,t} &= \mu_i + \epsilon_{i,t}, \\ \epsilon_{i,t} &= \sqrt{h_{i,t}} z_{i,t}, \\ h_{i,t} &= \omega_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{i,t-1}, \\ F(z_t | I_{t-1}) &= C(F_1(z_{1,t} | I_{1,t-1}), \dots, F_p(z_{p,t} | I_{p,t-1})) \end{aligned} \quad (26)$$

در این روابط $\omega_i, \alpha_i, \beta_i > 0$ و سری z_t از توزیع تعمیم یافته $g-h$ توکی پیروی می کند. با در نظر گرفتن تابع مفصل تی و توابع توزیع حاشیه ای $g-h$ توکی و استفاده از رابطه ۶ خواهیم داشت:

$$c_{\eta, \rho_t}^t(u_1, \dots, u_p) = \frac{f_{\eta, \rho_t}^t(f_{v_1}^{-1}(u_{1,t}), \dots, f_{v_p}^{-1}(u_{p,t}))}{\prod_{i=1}^p f_{\eta}(f_{v_i}^{-1}(u_{i,t}))} \quad (27)$$

که در آن تابع چگالی توام توزیع تی با v درجه آزادی و ماتریس همبستگی زمان-متغیر $\rho_t = (\rho_{i,j,t})_{p \times p}$ هستند. با فرض اینکه θ فضای پارامتر تعریف شده توسط مدل را نشان دهد و نمونه های بازده دارایی های سهم در T زمان، تولید شده باشند، برآورد حداکثر درستنمایی بردار پارامتر به صورت است:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^T f_{\rho_t | I_{t-1}}(r_t | I_{t-1}, \theta) \quad (28)$$

لازم است که بردار پارامتر θ به دو قسمت $\theta = (\theta_c, \theta_r)$ تفکیک شود، که در آن بردار پارامترهای تابع مفصل و بردار پارامترهای توزیع های حاشیه ای است. بنابراین با روش دو مرحله ای IFM^۶ برآوردها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_r &= \arg \max_{\theta_r} \sum_{t=1}^T \log f_{i,t}(r_{i,t} | \theta_r), i = 1, \dots, p \\ \hat{\theta}_c &= \arg \max_{\theta_c} \sum_{t=1}^T \log c_{\theta}(F_{1,t}(r_{1,t} | \hat{\theta}_r), \dots, F_{p,t}(r_{p,t} | \hat{\theta}_r)). \end{aligned} \quad (29)$$

۳. برآورد نرخ ارزش در معرض خطر

بعد از برآورد پارامترهای یک مدل $GARCH$ چند متغیره مبتنی بر تابع مفصل زمان-متغیر، می توان نرخ ارزش در معرض خطر را اندازه گیری کرد. فرض کنید مجموع وزنی سبد سهام دارایی های p ریسک در زمان t به صورت $\sum_{i=1}^p \lambda_i r_{i,t}$ نشان داده شود، بطوریکه λ_i وزن دارای سهم i ام، باشد و باید در شرط $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ صدق کند. ارزش در معرض خطر سبد سهام تحت سطح اطمینان q در زمان t ، با نماد Var_t نشان داده می شود و در رابطه $q = P(\sum_{i=1}^d \lambda_i r_{i,t} \leq Var_t)$ صدق می کند.

⁶Inference For Margins

تعیین چندک از تابع مفصل زمان-متغیر بسیار مشکل است، براساس مدل GARCH مبتنی بر تابع مفصل زمان-متغیر، الگوریتم زیر برای برآورد Var به کار می رود.

۱- مدل ۲۶ به داده ها برازش داده شده و پارامترهای مدل برآورد می شوند.

۲- به ازای $t = 1, \dots, T$ به باقی مانده های $\{z_{1,t}, \dots, z_{p,t}\}$ تابع مفصل T برازش داده شده و پارامترهای آن برآورد می شوند.

۳- به تعداد M گروه بردار تصادفی $[z_{1,T+1}, \dots, z_{p,T+1}]$ از تابع مفصل مرحله ۲ تولید می شود. و از مدل ۲۶ مقادیر $[r_{1,T+1}, \dots, r_{p,T+1}]$ ساخته می شوند.

۴- به ازای $m = 1, \dots, M$ مقادیر $\sum_{i=1}^p \lambda_i r_{i,T+1}^{(m)}$ محاسبه شده و چندک q ام این مقادیر به عنوان برآورد Var در نظر گرفته می شود.

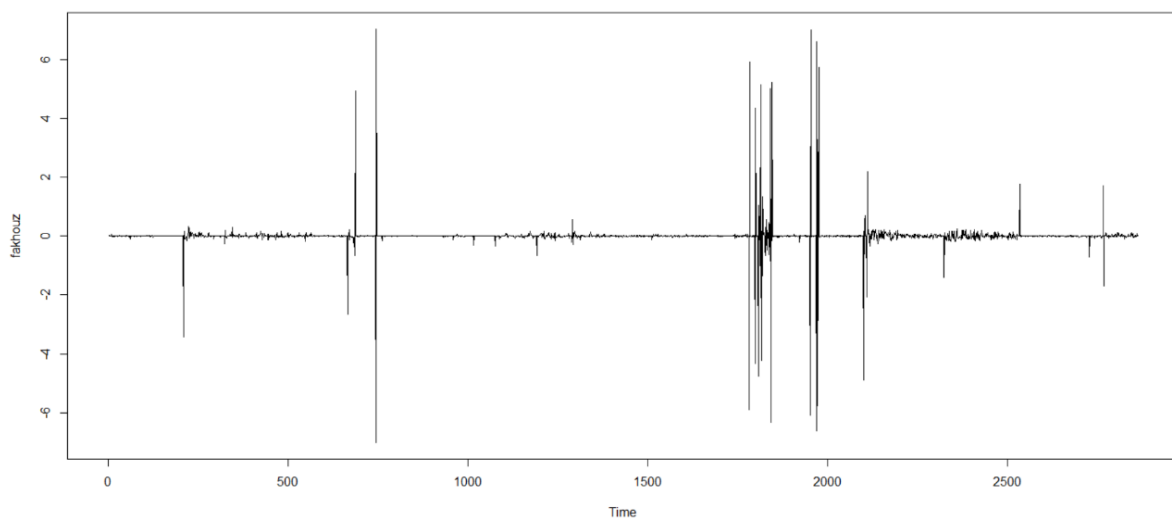
۴- برآورد نرخ ارزش در معرض خطر سبد سهام فلزات شرکت های فولاد، فملی و فخور

در این بخش، نرخ ارزش در معرض خطر یک سبد شامل سهام شرکت های فخور، فملی و فولاد را برآورد می کنیم. مقادیر لگاریتم بازده روزانه در بازه زمانی ۱۳۹۰/۰۱/۰۱ الی ۱۴۰۱/۲۹/۱۲ مستخرج از وب سایت رسمی شرکت مدیریت فناوری بورس تهران را محاسبه کرده ایم. جدول ۳ آمار توصیفی داده ها را نشان می دهد.

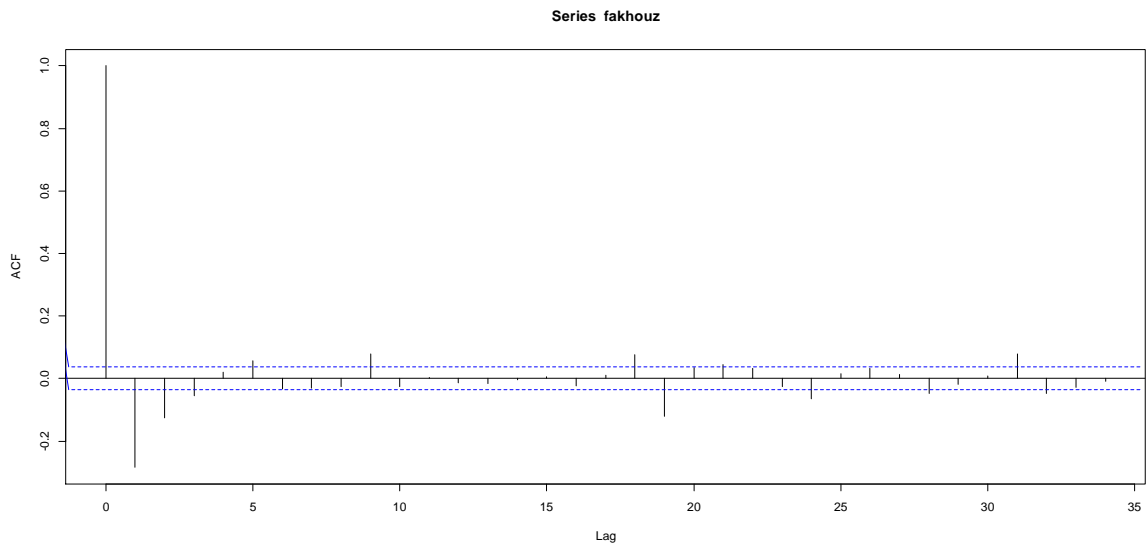
جدول ۳: آمار توصیفی لگاریتم بازده سهام

نام سهام	میانگین	انحراف معیار	ضریب چولگی	ضریب کشیدگی
فخور	-۰,۰۰۰۰۱۴	۰,۵۰	۰,۱۰	۱۳۲,۱۴
فملی	-۰,۰۰۰۰۹۷	۰,۳۸	-۱,۵۸	۲۷۱,۸۱
فولاد	۰,۰۰۰۰۲۲	۰,۳۹	-۱,۶۴	۱۷۰,۱۷

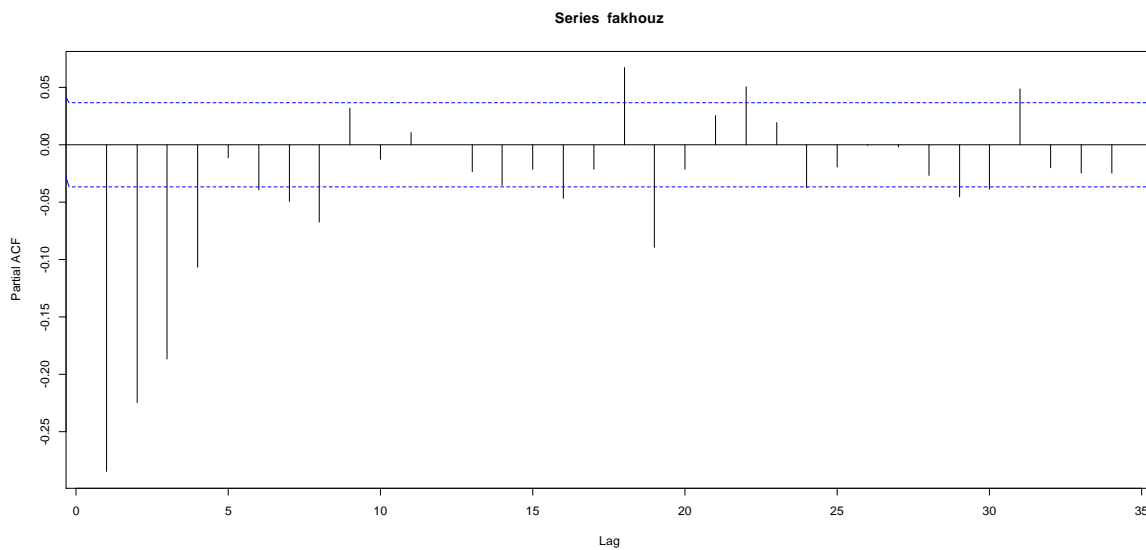
با توجه به جدول ۳ متوجه می شویم که چولگی لگاریتم بازده روزانه سهام فملی و فولاد کمتر از صفر است و مقدار کشیدگی هر سه سهم طور قابل توجهی بالاتر از توزیع نرمال استاندارد است. این نتایج نشان می دهد که سهام فخور، فملی و فولاد دارای توزیع نرمال استاندارد نیستند. نمودارهای ۱، ۲ و ۳ به ترتیب، نمودارهای سری زمانی، خود همبستگی و خود همبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فخور هستند. نمودارهای ۴، ۵ و ۶ به ترتیب، نمودارهای سری زمانی، خود همبستگی و خود همبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فملی هستند. نمودارهای ۷، ۸ و ۹ به ترتیب، نمودارهای سری زمانی، خود همبستگی و خود همبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فولاد هستند.



شکل ۱: سری زمانی لگاریتم بازده سهام شرکت فخور

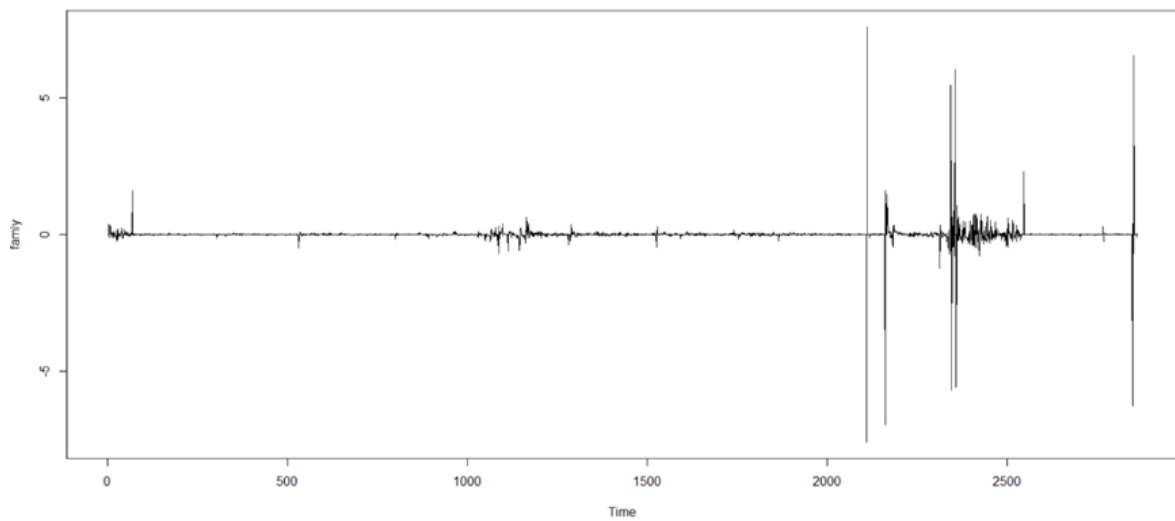


شکل ۲: نمودار خودهمبستگی لگاریتم بازده سهام شرکت فخوز

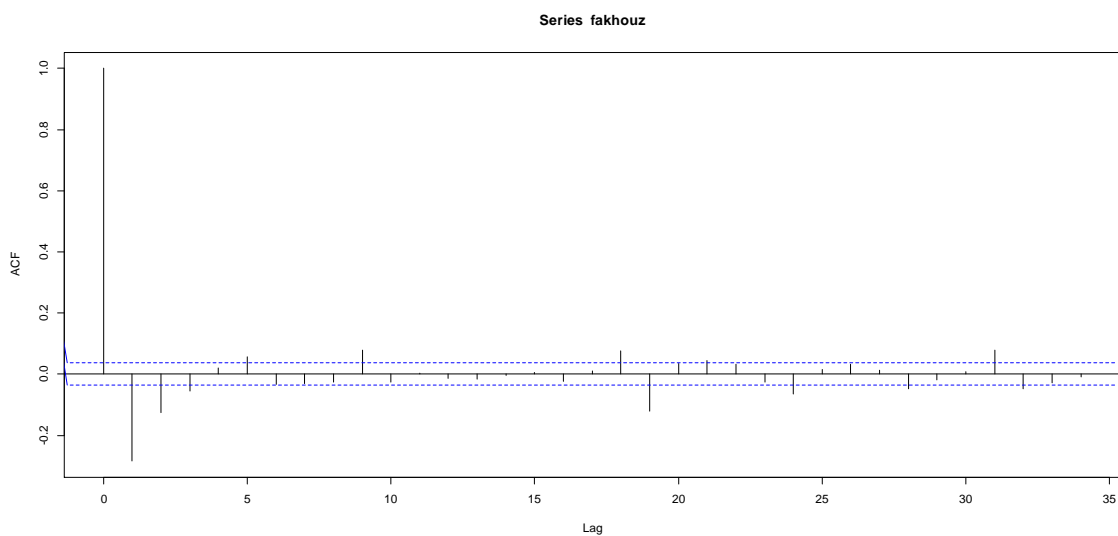


شکل ۳: نمودار خودهمبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فخوز

با استفاده از نمودارهای مربوط به سری های زمانی لگاریتم بازده هر یک از سهام برای مدل سازی این سری های زمانی، مدل های $ARIMA$ به کار برده شد و بررسی باقیمانده ها نشان داد که سهام شرکت های فخوز، فملی و فولاد به ترتیب از مدل $ARIMA(5, 0, 0)$ ، $ARIMA(3, 0, 2)$ و $ARIMA(1, 0, 4)$ ، پس از تبدیل نرمال، پیروی می کنند. بنابراین توزیع حاشیه ای های سری های تبدیل شده توزیع نرمال استاندارد هستند. جدول ۴ نتایج آزمون نیکویی برازش را باقیمانده های سری های زمانی مذکور نشان می دهد. توابع مفصل تی، نرمال، کلاپتون، گامبل، فرانک و جو را به باقیمانده ها برازش دادیم. جدول ۵ برآورد پارامترها و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی را نشان می دهد. این نتایج نشان می دهند که تابع مفصل تی برازش بهتری نسبت به بقیه دارد.



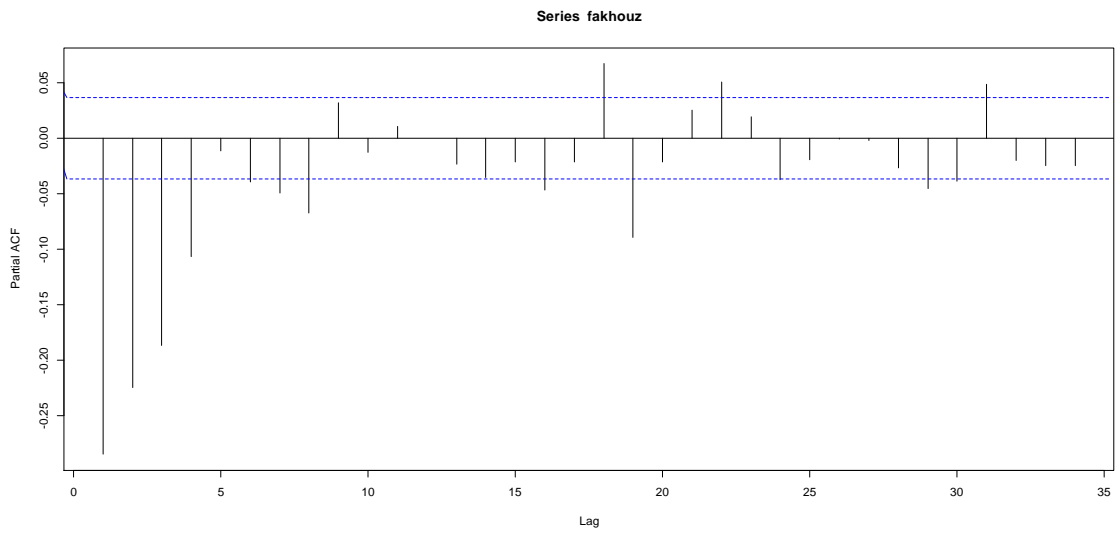
شکل ۴: سری زمانی لگاریتم بازده سهام شرکت فملی



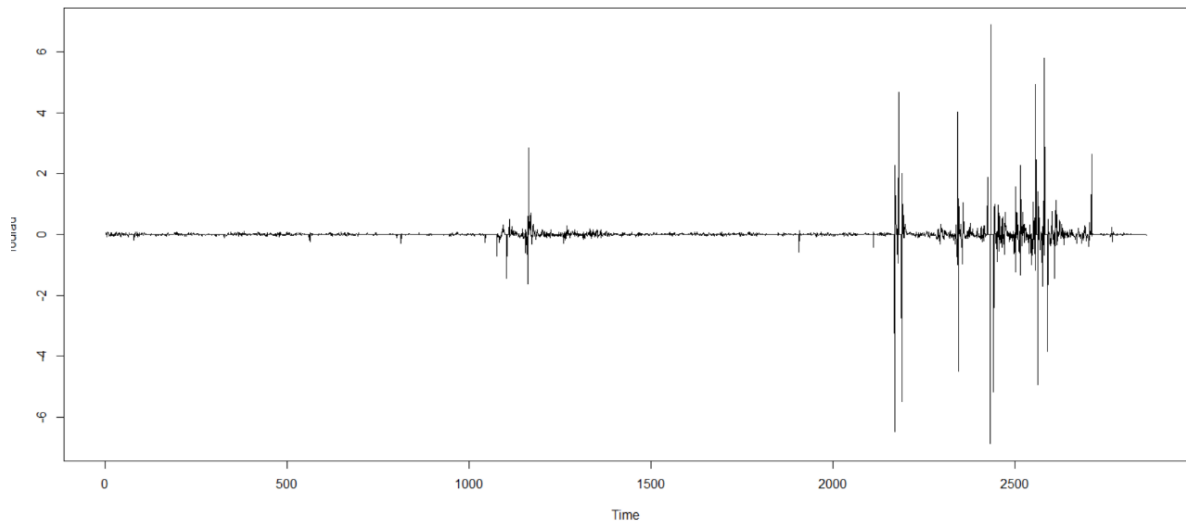
شکل ۵: نمودار خودهمبستگی لگاریتم بازده سهام شرکت فملی

اکنون می توانیم نرخ ارزش در معرض خطر سبدسهم را در سطوح اطمینان مختلف و با در نظر گرفتن ضرایب مختلف برای ترکیب خطی بازده سهام با استفاده از الگوریتم بخش قبل برآورد کنیم. جدول ۶ نتایج برآورد را به ازای $q = 0.01, 0.05, 0.1, 0.15$ و نسبت سهام متفاوت نشان می دهد.

با توجه به نتایج جدول ۶ می توان نتیجه گرفت که اگر صد در صد سهام فقط یک شرکت خریداری شود نرخ ارزش در معرض خطر به شرح زیر است:



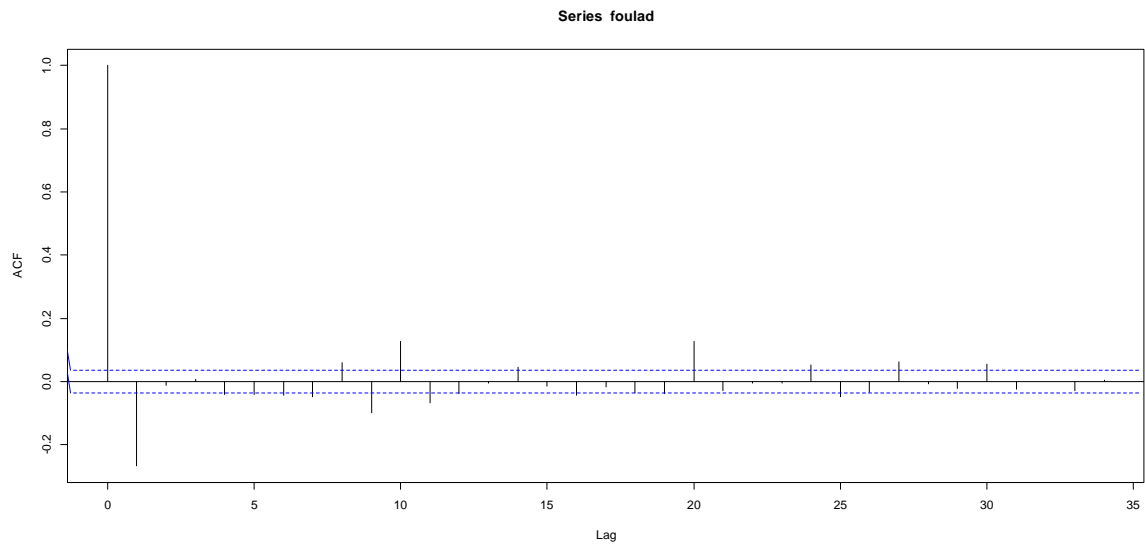
شکل ۶: نمودار خودهمبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فملی



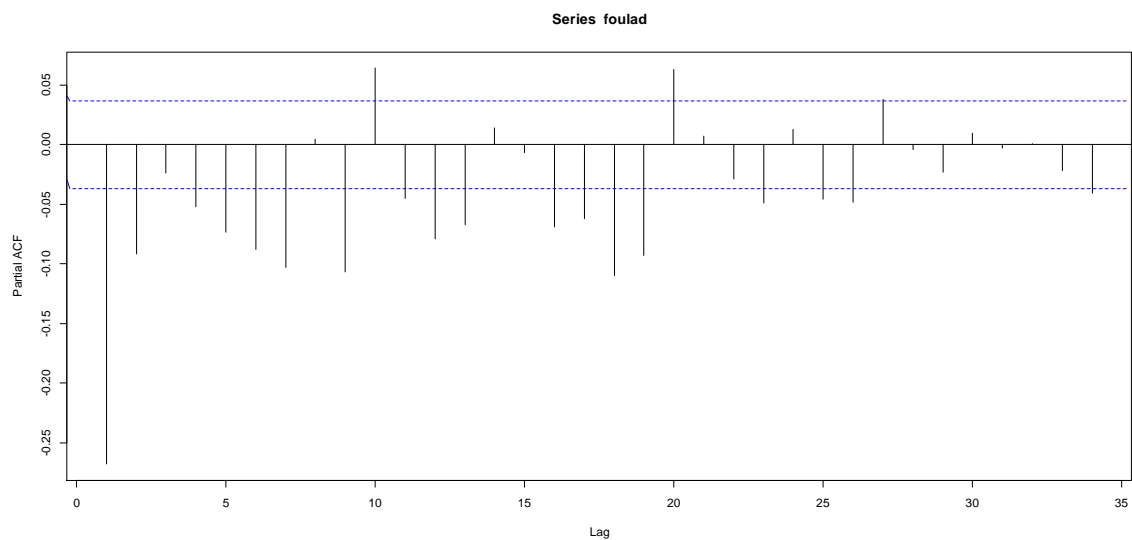
شکل ۷: سری زمانی لگاریتم بازده سهام شرکت فولاد

جدول ۴: نتایج آزمون نیکویی برازش باقیمانده های مدل

نام سهام	مقدار آماره آزمون شاپیرو ویلک	مقدار احتمال
فخوز	۰,۹۹۹۷۱	۰,۹۷۰۴
فملی	۰,۹۹۵۷۷	۰,۹۱۷۹
فولاد	۰,۹۹۹۷۸	۰,۹۸۷



شکل ۸: نمودار خودهمبستگی لگاریتم بازده سهام شرکت فولاد



شکل ۹: نمودار خودهمبستگی جزئی لگاریتم بازده سهام شرکت فولاد

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Foulad) &\leq VaR_{0.01}(Femli) \leq VaR_{0.01}(Fakhouz), \\ VaR_{0.05}(Foulad) &\leq VaR_{0.05}(Femli) \leq VaR_{0.05}(Fakhouz), \\ VaR_{0.1}(Foulad) &\leq VaR_{0.1}(Fakhouz) \leq VaR_{0.1}(Femli), \\ VaR_{0.15}(Foulad) &\leq VaR_{0.15}(Fakhouz) \leq VaR_{0.15}(Femli) \end{aligned}$$

همانگونه که ملاحظه می شود سهام شرکت فولاد در تمام سطوح در مقایسه با سهام دو شرکت دیگر احتمال بیشتری برای تجربه زیان های قابل توجه دارد. هم چنین سرمایه گذارانی که کل دارایی های خود را به طور مساوی بین سهام شرکت فملی و شرکت فخور تقسیم می کنند، نسبت به سرمایه گذارانی که تمام دارایی های خود را بدون توجه به سطح اطمینان، در سهم شرکت فولاد سرمایه گذاری می کنند، ریسک زیان شدید کمتری

جدول ۵: نتایج آزمون نیکویی برازش توابع مفصل

تابع مفصل	برآورد پارامترها	لگاریتم درست‌نمایی
تی	$\rho_1 = 0.39, \rho_2 = 0.47, \rho_3 = 0.52$	۸۰۲.۴
نرمال	$\rho_1 = 0.32, \rho_2 = 0.38, \rho_3 = 0.45$	۵۷۳.۳
گامبل	$\theta = 1.37$	۶۱۶.۵
کلایتون	$\theta = 0.50$	۴۴۰.۷
فرانک	$\theta = 2.97$	۶۸۹.۴
جو	$\theta = 1.48$	۴۷۲.۲

جدول ۶: برآورد ارزش در معرض خطر در سطوح مختلف و با نسبت سهام متفاوت

نسبت سهام				فولاد، فملی و فخورز
$q = 0.15$	$q = 0.1$	$q = 0.05$	$q = 0.01$	
-۰.۶۴	-۰.۷۹	-۱.۰۷	-۱.۲۹	۰.۲۵, ۰.۲۵, ۰.۵۰
-۰.۵۶	-۰.۷۳	-۰.۹۷	-۱.۱۶	۰.۲۵, ۰.۵, ۰.۲۵
-۰.۴۹	-۰.۶۵	-۰.۹۲	-۱.۱۳	۰.۵۰, ۰.۲۵, ۰.۲۵
-۰.۷۰	-۰.۸۷	-۱.۰۴	-۱.۱۸	۰.۰۰, ۰.۰۰, ۱.۰۰
-۰.۶۵	-۰.۸۱	-۱.۹۵	-۱.۳۱	۰.۰۰, ۱.۰۰, ۰.۰۰
-۱.۰۴	-۱.۲۳	-۱.۵۴	-۱.۷۹	۱.۰۰, ۰.۰۰, ۰.۰۰
-۰.۵۴	-۰.۶۹	-۰.۹۲	-۱.۱۱	۰.۰۰, ۰.۰۰, ۱.۰۰
-۰.۸۳	-۱.۰۰	-۱.۲۵	-۱.۴۵	۰.۲۵, ۰.۷۵, ۰.۰۰
-۰.۸۵	-۱.۰۴	-۱.۳۳	-۱.۵۶	۰.۲۵, ۰.۰۰, ۰.۷۵
-۰.۴۶	-۰.۶۳	-۰.۸۷	-۱.۰۷	۰.۵۰, ۰.۵۰, ۰.۰۰
-۰.۶۱	-۰.۷۴	-۱.۰۲	-۱.۲۵	۰.۵۰, ۰.۰۰, ۰.۵۰
-۰.۷۳	-۰.۹۱	-۱.۱۷	-۱.۳۸	۰.۰۰, ۰.۵۰, ۰.۵۰

دارند. سرمایه‌گذاران زمانی که سبد سهام شاخص آن‌ها به شدت در دارایی‌های پرریسک متمرکز است، با ریسک بالاتری برای زیان‌های قابل توجه مواجه می‌شوند. این نتیجه اندازه‌گیری با نظریه تنوع ریسک سبد سهام مطابقت دارد.

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش نشان داده شد که هنگام مدل‌سازی وابستگی چند سری زمانی با استفاده از تابع مفصل، ابتدا لازم است با استفاده از مدل ARIMA و در صورت لزوم مدل GARCH، باقی مانده‌های هر سری به صورت داده‌های مستقل و هم‌توزیع استخراج شوند. یکی از گزینه‌های مناسب برای باقیمانده‌های با توزیع چوله، توزیع $g-h$ توکی است. بنابراین توزیع‌های حاشیه‌ای باقیمانده‌ها (در صورت برازش مناسب) انتخاب می‌شود. سپس به تبدیلات احتمالی باقی مانده‌ها بر اساس توزیع‌های حاشیه‌ای، تابع مفصل برازش می‌شود. در صورت مناسب تشخیص داده شدن تابع مفصل تی، این تابع مفصل انعطاف خوبی برای انعکاس انواع وابستگی‌ها (مثبت و منفی) را داراست.

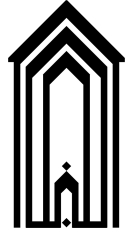
برای برآورد ارزش در معرض خطر سبد سهام شامل چند سهم، داده‌های هر سهم به صورت یک سری زمانی مستقل مدل‌سازی می‌شوند و به باقی مانده‌های سری‌های موجود تابع مفصل برازش داده می‌شود تا پارامترهای آن تابع مفصل برآورد شوند. در نهایت با استفاده از الگوریتم ذکر شده در بخش ۳ می‌توان ارزش در معرض خطر را به روش عددی برآورد کرد.

در ادامه کار این پژوهش لازم است در مواردی که توزیع‌های حاشیه‌ای کاملاً شناخته شده نیستند و یا تابع مفصل مناسب داده‌ها، پیچیدگی‌های بیشتری دارد، راهکارهای عملی و محاسباتی ارائه شود.

مراجع

- [۱] Qi-an Chen, D. Wang, and M. Pan. *Multivariate time-varying G-H copula GARCH model and its application in the financial market risk management*. Mathematical Problems in Engineering, vol. ۵, pp. ۱-۹, ۲۰۱۵.
- [۲] Ch. Jin, R. Chen, D. Cheng, S. Mo, and K. Yang. *The dependncy measures of commercial bank risks: Using an optimal copula selection method based on non-parametric model*, Finance Research Letters, vol. ۳۷, ۲۰۲۰.

- [۳] E. Jundeau and M. Rockinger. *The Copula-GARCH model of conditional dependencies: an international stock market application*, Journal of International Money and Finance, vol. ۲۵, no. ۵, pp. ۸۲۷-۸۵۳, ۲۰۰۶.
- [۴] K. Kuester, S. Mittnik, and M.S. Paolela. *Value-at-risk prediction: a comparison of alternative strategies*, Journal of Financial Econometrics, vol. ۴, no. ۱, pp. ۵۳-۸۹, ۲۰۰۶.
- [۵] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, ۲۰۰۶.
- [۶] W. Surr, S. Rachev, F. J. Fabozzi, and S. S.Kalev. *A new approach to modeling co-movement of international equity market: evidence of unconditional copula based simulation of tail dependence*, Empirical Economics, vol. ۳۶, no. ۱, pp. ۲۰۱-۲۲۹, ۲۰۰۹.
- [۷] Sklar, A. (۱۹۵۹). (Fonctions de répartition à dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, ۸, ۲۲۹-۲۳۱.
- [۸] H. Zhu and Z. Pan. *A study of portfolios VaR method based on g-h distribution*, Chinese Journal of Management Science, vol. ۱۳, no. ۴, pp. ۷-۱۲, ۲۰۰۵.
- [۹] Zhang, L. and Singh, V. P. (۲۰۱۹). (Copulas and their applications in water resources engineering, Cambridge University Press.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-157، صص. ۱۲۹-۱۳۲

یکدستی روی لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته با محدودیت روی بعد

میرصادق سیدصادقی*، آ

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده	اطلاعات مقاله
فرض کنید A یک حلقه جابجایی و نوتری و d یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این مقاله، برخی ویژه گیهای i -امین d -لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته را مورد مطالعه قرار می دهیم و با فرض یکدست بودن مدول، قضیه ای را در خصوص صفر شدن آن بیان کرده و اثبات می نماییم.	واژه های کلیدی: کلیدواژه یکدستی کلیدواژه با تولید متناهی کلیدواژه لوکال کوهمولوژی 2020 MSC: 13D45 13D07 14B15

۱. مقدمه

در سراسر این مقاله، A یک حلقه جابجایی و نوتری و d عدد صحیح نامنفی می باشد. فرض کنید

$$\Sigma = \{ \mathfrak{a} \trianglelefteq A \mid \dim(A/\mathfrak{a}) \leq d \},$$

که Σ یک سیستم ایده الی است. برای A -مدول M ، زیرمدول d -تاب، $L_d(M)$ از M را به شکل

$$L_d(M) = \{ x \in M \mid \exists I \in \Sigma; Ix = 0 \}$$

معرفی می کنیم. به وضوح $L_d(-)$ یک فانکتور همورد خطی دقیق چپ از کاتگوری A -مدولها است. برای $i \in \mathbb{N}$ ، $H_d^i(-)$ به عنوان i -

$$H_d^i(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(A/\mathfrak{a}, M)$$

بانیکا و همکاران در [۱]، روی $H_d^i(-)$ مطالعاتی را روی آن انجام دادند. همچنین ناصر زمانی، محمدحسن بیژن زاده و میرصادق سیدصادقی

در [۶] و [۷] مطالعات تکمیلی در خصوص $H_d^i(M)$ انجام دادند و با تعریف d -لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته

$$L_d(M, N) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(M/\mathfrak{a}M, N)$$

$$H_d^i(M, N) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(N/\mathfrak{a}M, N)$$

$$T_d(M, N) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(M, N)$$

*سخنران

پست الکترونیک: m_sayedsadeghi@pnu.ac.ir (میرصادق سیدصادقی)

روی مدول های M و N ، قضایایی را در خصوص آنها بیان کرده و اثبات نمودند. در این مقاله برخی ویژه گیهای i -امین d -لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته و نیز $T_d(M, N)$ را بیان کرده و مورد مطالعه قرار می دهیم و با فرض یکدست بودن مدول، قضیه ای را در خصوص صفر شدگی آن اثبات می نمائیم.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول باشند. در این صورت

۱. اگر $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0$ و $T_d(T_d(M, N)) \cong T_d(\text{Hom}_A(M, N))$ و برای هر $i > 1$

$$H_d^i(T_d(M, N)) \cong H_d^i(\text{Hom}_A(M, N))$$

۲. اگر M یک A -مدول یکدست باشد آنگاه $T_d(M, N) \cong T_d(T_d(M, N))$ و

$$L_d(T_d(M, N)) \cong H_d^i(T_d(M, N)) = 0.$$

اثبات. ۱. از آنجا که $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0$ پس بنا به [۶]، دنباله

$$0 \rightarrow \frac{\text{Hom}_A(M, N)}{L_d(M, N)} \rightarrow T_d(M, N) \rightarrow H_d^1(M, N) \rightarrow 0$$

دقیق است. بنابراین دنباله دقیق طولانی

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow T_d\left(\frac{\text{Hom}_A(M, N)}{L_d(M, N)}\right) \rightarrow T_d(T_d(M, N)) \\ &\rightarrow T_d(H_d^1(M, N)) \rightarrow \mathcal{R}\left(T_d\left(\frac{\text{Hom}_A(M, N)}{L_d(M, N)}\right)\right) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

موجود است. از آنجا که $L_d(\text{Hom}_A(M, N)) \cong L_d(M, N)$ پس

$$T_d\left(\frac{\text{Hom}_A(M, N)}{L_d(M, N)}\right) \cong T_d(\text{Hom}_A(M, N)).$$

همچنین چون $H_d^1(M, N) = L_d(H_d^1(M, N)) = H_d^1(M, N)$ پس $T_d(H_d^1(M, N)) = 0$ و لذا

$$T_d\left(\frac{\text{Hom}_A(M, N)}{L_d(M, N)}\right) \cong T_d(T_d(M, N)).$$

بنابراین $T_d(\text{Hom}_A(M, N)) \cong T_d(T_d(M, N))$.

۱. از آنجا که M یکدست است پس برای هر ایده آل \mathfrak{a} ، $\mathfrak{a}M \cong \mathfrak{a} \otimes_A M$. حال داریم:

$$\begin{aligned} T_d(M, N) &= \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(\mathfrak{a}M, N) \\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(\mathfrak{a} \otimes_A M, N) \\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} (\mathfrak{a}, \text{Hom}_A(M, N)) \\ &\cong T_d(\text{Hom}_A(M, N)) \\ &\cong T_d(T_d(\text{Hom}_A(M, N))) \\ &\cong T_d(T_d(M, N)). \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت دوم از دنباله دقیق

$$0 \rightarrow L_d(T_d(M, N)) \rightarrow T_d(M, N) \rightarrow T_d(T_d(M, N)) \rightarrow H_d^1(T_d(M, N)) \rightarrow 0$$

□

و $T_d(T_d(M, N)) \cong T_d(M, N)$ استفاده می کنیم.

قضیه ۲.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول دلخواه باشند. در این صورت

$$(\mathcal{R}^i(T_d(M, -)))_{i \geq 0} \cong (\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(\mathfrak{a}M, -))_{i \geq 0}.$$

اثبات. فرض کنیم $T(-) = T_d(M, -)$ و $T^i(-) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(\mathfrak{a}M, -)$. از آنجا که فانکتور $\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma}$ یک فانکتور دقیق است بنابراین $T^i(-)$ فانکتورهایی از دنباله‌های دقیق پیوسته هستند. چون T و T° هم‌ارزی طبیعی هستند و برای هر A -مدول انژکتیو E و هر $i \geq 0$ ، $T^i(E) = 0$. بنابراین حکم از قضیه استاندارد همولوژی برقرار است. \square

قضیه ۳.۱. فرض کنیم M یک A -مدول باشد. اگر $T_d(M, -)$ یک فانکتور دقیق باشد، آنگاه برای هر $i \geq 2$ و هر A -مدول N ، $H_d^i(M, N) \cong \text{Ext}_A^i(M, N)$.

اثبات. از آنجا که $T_d(M, -)$ فانکتور دقیق است پس برای هر $i \geq 1$ ، $\mathcal{R}^i(T_d(M, -)) = 0$. پس بنا به قضیه ۲.۱، برای هر $i \geq 1$ ، $\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(\mathfrak{a}M, -) = 0$. فرض کنیم \mathfrak{a} و \mathfrak{b} دو عضو دلخواه از Σ چنان باشند که $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. از نمودار جابجایی با سطرهای دقیق

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{a}M & \rightarrow & M & \rightarrow & M/\mathfrak{a}M & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{b}M & \rightarrow & M & \rightarrow & M/\mathfrak{b}M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ext}_A^i(\mathfrak{b}M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(M/\mathfrak{b}M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(\mathfrak{b}M, N) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Ext}_A^i(\mathfrak{a}M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(M/\mathfrak{a}M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(M, N) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{i+1}(\mathfrak{a}M, N) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

با سطرهای دقیق بدست می‌آیند. اکنون با اثر دادن $\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma}$ در نمودار بالا دنباله دقیق

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, N)) \rightarrow H_d^{i+1}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(M, N) \rightarrow \mathcal{R}^{i+1}(T_d(M, N))$$

بدست می‌آید. بنابراین برای هر $i \geq 2$ ، $H_d^i(M, N) \cong \text{Ext}_A^i(M, N)$. \square

نتیجه ۴.۱. فرض کنیم M یک A -مدول پروژکتیو و N یک A -مدول دلخواه باشد. اگر $T_d(M, -)$ یک فانکتور دقیق باشد، آنگاه برای هر $H_d^i(M, N) = 0$ ، $i \geq 2$.

اثبات. بنا به قضیه ۳.۱، برای هر $i \geq 2$ داریم:

$$H_d^i(M, N) \cong \text{Ext}_A^i(M, N).$$

از طرفی چون M پروژکتیو است پس برای هر $i \geq 1$

$$\text{Ext}_A^i(M, N) = 0.$$

بنابراین حکم برقرار است. \square

نتیجه ۵.۱. فرض کنیم M یک A -مدول دلخواه و N یک A -مدول انژکتیو باشد. اگر $T_d(M, -)$ یک فانکتور دقیق باشد، آنگاه برای هر $H_d^i(M, N) = 0$ ، $i \geq 2$.

اثبات. از آنجایی که N انژکتیو است پس برای هر $i \geq 1$

$$\text{Ext}_A^i(M, N) = 0.$$

اکنون حکم مشابه نتیجه ۴.۱ برقرار است. \square

مراجع

- [1] C. Banica and M. Soia, *Singular sets of a module on local cohomology*, Boll. Un. Mat. Ital. B 16 (1976), 923-934.
- [2] M. H. Bijan-zadeh, *On the singular sets of a modules*, Comm. In Algebra 21 (1993), 4629-4639.
- [3] N. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local Cohomology- An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [5] J. Rotman, *Introduction to homological algebra*, Academic Press, 1979.
- [6] N. Zamani, M. H. Bijan-zadeh and M. S. Sayedsadeghi, *cohomology with supports of dimension $\leq d$* , Journal of Algebra and Its Applications, 15 (2016), 1650042(1)-1650051(10).
- [7] N. Zamani, M. H. Bijan-zadeh and M. S. Sayedsadeghi, *d -Transform Functor and Some Finiteness and Isomorphism Results*. Vie. J. Math. 41 (2013), 179-186.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-164، صص. ۱۳۳-۱۳۵

نتایجی از d -لوکال کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته روی همریختی مدولی

میرصادق سیدصادقی*، آ

آگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده	اطلاعات مقاله
فرض کنید A حلقه جابجایی و نوتری و d یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این مقاله، با ایجاد برخی شرایط روی A -همریختی مدولی $f: N \rightarrow N'$ نشان می دهیم که برای A -مدول M ، $T_d(M, N) \cong T_d(M, N')$ و برخی نتایج را پیرامون آن بیان کرده و اثبات می نمایم.	واژه های کلیدی: کلیدواژه d -تابی کلیدواژه با تولید متناهی کلیدواژه لوکال کوهمولوژی
	2020 MSC: 13D45 13D07 14B15

۱. مقدمه

در سراسر این مقاله، A یک حلقه جابجایی و نوتری و d عدد صحیح نامنفی می باشد. فرض کنید

$$\Sigma = \{a \triangleleft A \mid \dim(A/a) \leq d\},$$

که Σ یک سیستم ایده الی است. برای A -مدول M ، زیرمدول d -تاب، $L_d(M)$ از M را به شکل

$$L_d(M) = \{x \in M \mid \exists I \in \Sigma; Ix = 0\}$$

معرفی می کنیم. به وضوح برای A -مدول M ، $L_d(M) = \lim_{a \in \Sigma} \text{Hom}_A(A/a, M)$ و نیز برای $i \in \mathbb{N}$ ، i -امین فانکتور مشتق شده راست $L_d(-)$ با $H_d^i(-)$ نشان می دهیم و به راحتی می توان دید $H_d^i(M) = \lim_{a \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(A/a, M)$ که بانیکا و همکاران در [۱]، پیرامون آنمطالعاتی را انجام داده اند. همچنین ناصر زمانی، محمدحسن بیژن زاده و میرصادق سیدصادقی در [۶] و [۷] مطالعات تکمیلی در خصوص $H_d^i(M)$ انجام دادند و با تعریف d -لوکال کوهمولوژی تعمیم یافته

$$L_d(M, N) = \lim_{a \in \Sigma} \text{Hom}_A(M/aM, N)$$

$$H_d^i(M, N) = \lim_{a \in \Sigma} \text{Ext}_A^i(N/aM, N)$$

*سخنران

پست الکترونیک: m_sayedsadeghi@pnu.ac.ir (میرصادق سیدصادقی)

روی مدول های M و N ، قضایایی را در خصوص آنها بیان کرده و برخی ویژه گیهای آنها را مورد بررسی قرار دادند. همچنین در [۸] تعریف ۲.۱ فانکتورهای $T_d(-)$ و $T_d(-, N)$ را برای R -مدول های M و N به شکل

$$T_d(M) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in \Sigma}} \text{Hom}_A(\alpha, M)$$

و

$$T_d(M, N) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in \Sigma}} \text{Hom}_A(\alpha M, N)$$

تعریف کردند و ویژه گیهایی از $T_d(M, N)$ را در [۸] قضیه ۲.۱۵ بیان نمودند.

در این مقاله، با ایجاد برخی شرایط روی A -همریختی مدولی $f: N \rightarrow N'$ نشان می دهیم که برای A -مدول M ، $T_d(M, N) \cong T_d(M, N')$ و برخی نتایج را پیرامون آن بیان کرده و اثبات می نمائیم.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم $f: N \rightarrow N'$ یک A -همریختی چنان باشد که $\text{Ker}(f)$ و $\text{Coker}(f)$ هر دو L_d -تابی باشند. در این صورت برای هر A -مدول با تولید متناهی M و $i \geq 0$

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, N)) \cong \mathcal{R}^i(T_d(M, N')).$$

اثبات. از دنباله های دقیق و کوتاه

$$\begin{aligned} \circ &\rightarrow \text{Ker}f \rightarrow N \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow \circ \\ \circ &\rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow N' \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow \circ \end{aligned}$$

دنباله های دقیق

$$\begin{aligned} T_d(M, \text{Ker}(f)) &\rightarrow T_d(M, N) \rightarrow T_d(M, \text{Im}(f)) \rightarrow \mathcal{R}^1(T_d(M, \text{Ker}(f))) \rightarrow \dots \\ T_d(M, \text{Im}(f)) &\rightarrow T_d(M, N') \rightarrow T_d(M, \text{Coker}(f)) \rightarrow \mathcal{R}^1(T_d(M, \text{Im}(f))) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

بدست می آیند. از آنجا که $\text{Ker}(f)$ و $\text{Coker}(f)$ هر دو L_d -تابی هستند پس بنا به [۸] نتیجه ۱۴.۲، برای هر $i \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i(T_d(M, \text{Ker}(f))) &= \circ \\ \mathcal{R}^i(T_d(M, \text{Coker}(f))) &= \circ \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, N)) \cong \mathcal{R}^i(T_d(M, \text{Im}(f)))$$

و

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, \text{Im}(f))) \cong \mathcal{R}^i(T_d(M, N')).$$

بنابراین

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, N)) \cong \mathcal{R}^i(T_d(M, N')).$$

□

نتیجه ۲.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول دلخواه باشند. اگر M یک A -مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

$$T_d(\text{Hom}_A(M, N)) \cong T_d(M, N).$$

نتیجه ۳.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول دلخواه باشند. اگر M یک A -مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

$$T_d(M, N/L_d(N)) \cong T_d(M, T_d(N)).$$

قضیه ۴.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول دلخواه باشند. اگر M یک A -مدول با تولید متناهی و J^* یک تحلیل انژکتیو از N باشد، آنگاه برای هر $i \geq 0$

$$\mathcal{R}^i(T_d(M, N)) \cong H^i(\text{Hom}_A(M, T_d(J^*))).$$

اثبات. از [۸، قضیه ۱۵.۲] و نتیجه ۲.۱ داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^i(T_d(M, N)) &= H^i(T_d(M, J^*)) \\ &\cong H^i(T_d(\text{Hom}_A(M, J^*))) \\ &\cong H^i(\text{Hom}_A(M, T_d(J^*))). \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۱. فرض کنیم M و N دو A -مدول یک A -مدول با تولید متناهی و i عدد صحیح مثبت باشند. در این صورت $H_d^i(M, N)$ با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{i-1}(T_d(M, N))$ با تولید متناهی باشد.

اثبات. از آنجا که M و N با تولید متناهی هستند پس $\text{Ext}_A^i(M, N)$ برای هر $i \geq 0$ با تولید متناهی است. اکنون حکم با استفاده از [۸، قضیه ۹.۲] بدست می آید.

□

مراجع

- [1] C. Banica and M. Soia, *Singular sets of a module on local cohomology*, Boll. Un. Mat. Ital. B 16 (1976), 923-934.
- [2] M. H. Bijan-zadeh, *On the singular sets of a modules*, Comm. In Algebra 21 (1993), 4629-4639.
- [3] N. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local Cohomology- An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [5] J. Rotman, *Introduction to homological algebra*, Academic Press, 1979.
- [6] N. Zamani, M. H. Bijan-zadeh and M. S. Sayedsadeghi, *cohomology with supports of dimension $\leq d$* , Journal of Algebra and Its Applications, 15 (2016), 1650042(1)-1650051(10).
- [7] N. Zamani, M. H. Bijan-zadeh and M. S. Sayedsadeghi, *d -Transform Functor and Some Finiteness and Isomorphism Results*. Vie. J. Math. 41 (2013), 179-186.
- [8] N. Zamani, M. S. Sayedsadeghi, M. H. Bijan-zadeh and Kh. Ahmadi-Amoli, *On Functors $D(-)$ and $D(M, -)$* . Scientific Journal of Pure and Applied Sciences 3(7) (2014), 622-628.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-229، صص. ۱۳۶-۱۳۷

ریخت‌های یکدست گرنشتاین فانتوم

فاطمه مارامائی*، آ

آدبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان گنبدکاووس

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: ریخت فانتوم مدول یکدست گرنشتاین ریخت یکدست گرنشتاین فانتوم	همریختی از R -مدول‌های چپ $f: M \rightarrow N$ را فانتوم گویند، اگر برای هر R -مدول راست X ریخت القایی $Tor_1^R(X, f): Tor_1^R(X, M) \rightarrow Tor_1^R(X, N)$ از گروه‌های آبدی برابر صفر باشد. هدف این مقاله، معرفی و مطالعه نسخه ریختاری مدول‌های یکدست گرنشتاین می‌باشد.
2020 MSC: 13H10 13D02 13D07 16G30	

۱. مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه و $f: A \rightarrow B$ یک R -همریختی از مدول‌های چپ باشد. f را یک ریخت فانتوم گویند اگر برای هر R -مدول راست M نگاشت القایی

$$Tor_1^R(M, f): Tor_1^R(M, A) \rightarrow Tor_1^R(M, B)$$

صفر باشد. R -مدول چپ X را یکدست گویند، اگر برای R -مدول راست N داشته باشیم $Tor_1^R(N, X) = 0$. بنابراین ریخت‌های فانتوم نسخه ریختاری از مدول‌های یکدست می‌باشد. مفهوم ریخت‌های فانتوم اولین بار در توپولوژی توسط گیبون^۱ [۴] معرفی و مطالعه شد. نیمین^۲ [۵] این مفهوم را برای رسته‌های مثلثی تعریف کرد. نظریه ریخت‌های فانتوم در سال ۲۰۰۲ توسط بنسون^۳ [۱] برای رسته پایدار از یک حلقه گروه متناهی تعمیم داده شد. سپس این مفهوم توسط هرزوغ^۴ [۳] روی رسته مدول‌ها معرفی و مطالعه شد. R -مدول چپ M را یکدست گرنشتاین گویند، اگر همبافت دقیق از R -مدول‌های یکدست

$$F_\bullet: \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F_{-1} \rightarrow F_{-2} \rightarrow \dots$$

*سخنران
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (فاطمه مارامائی)

¹Gibbon

²Neeman

³Benson

⁴Herzog

موجود باشد به طوری که $M = \ker(F_{-1} \rightarrow F_{-2})$ و برای هر R -مدول تزریقی راست I ، همبافت $I \otimes_R \mathbf{F}_*$ دقیق است. یادآوری می‌شود مفهوم مدول‌های یکدست گرنشتاین اولین بار توسط ایناکس^۵ و همکاران [۲] جهت تکمیل مشابهت جبر همولوژی گرنشتاین با جبر همولوژی کلاسیک معرفی و مطالعه شده است.

مدول‌های یکدست گرنشتاین، تعمیم مدول یکدست بوده و ریخت‌های فانوم، نسخه ریختاری از مدول‌های یکدست می‌باشد. به طور طبیعی این سؤال پیش می‌آید که نسخه ریختاری مدول‌های یکدست گرنشتاین به چه صورت تعریف می‌شود. هدف این مقاله پاسخ به این سؤال می‌باشد. به عبارت دیگر، ما مفهوم ریخت‌های یکدست گرنشتاین فانوم را معرفی و مطالعه می‌کنیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۰۲. R -همریختی $f: M \rightarrow N$ را فانوم گوئیم، اگر برای R -مدول راست X ، ریخت القایی

$$\text{Tor}_1^R(X, f) : \text{Tor}_1^R(X, M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(X, N)$$

برابر صفر باشد.

تعریف ۲.۰۲. ریخت $f: M \rightarrow N$ از R -مدول‌های چپ را ریخت یکدست گرنشتاین فانوم گوئیم، اگر برای هر R -مدول تزریقی راست I ، $\text{Tor}_1^R(I, f) = 0$.

گزاره ۳.۰۲. رده ریخت‌های یکدست گرنشتاین فانوم در رسته $\text{Mor} - R$ نسبت به حد مستقیم بسته است.

گزاره ۴.۰۲. رده ریخت‌های یکدست گرنشتاین فانوم نسبت به تصویرهای برورریختی محض بسته می‌باشد.

قضیه ۵.۰۲. فرض کنید $\varphi: M \rightarrow A$ یک همریختی از R -مدول‌های چپ باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادل می‌باشند.

(۱) φ یک ریخت \mathcal{GF} -فانوم می‌باشد.

(۲) اگر $f: P \rightarrow A$ یک پیش پوشش تصویری از X باشد، آنگاه در نمودار عقب‌بر

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \circ \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ \circ & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & P & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

تابعگون $E \otimes_R -$ برای هر R -مدول راست تزریقی E ، سطر بالا را دقیق نگه می‌دارد. (۳) برای هر دنباله دقیق و کوتاه $\circ \rightarrow Z' \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow \circ$ نمودار عقب‌بر

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \circ \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ \circ & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

تابعگون $E \otimes_R -$ برای هر R -مدول راست تزریقی E ، سطر بالا را دقیق نگه می‌دارد.

مراجع

- [1] D. Benson and Ph. G. Gnacadja. Phantom maps and modular representation theory I. *Fund. Math.*, 161:37–91, 1999.
- [2] E. Enochs and J.R. Garcia Rozas. Flat covers of complexes. *J. Algebra.*, 210:86–102, 1998.
- [3] I. Herzog. The phantom cover of a module. *Adv. Math.*, 215:220–249, 2007.
- [4] C. A. McGibbon. Phantom maps. in *Handbook of Algebraic Topology, Elsevier Amsterdam*, pages 1209–1257, 1995.
- [5] A. Neeman. The brown representability theorem and phantomless triangulated categories. *J. Algebra*, 151:118–155, 1992.

⁵Enochs



مدول‌های شبه دوگان روی گروه حلقه‌ها

آمنه یاپنگ غراوی*، آ

آدبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان گنبدکاووس

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: کلیدواژه ۱ کلیدواژه ۲ کلیدواژه ۳	فرض کنید R یک حلقه نوتری و جابجایی بوده و G یک گروه متناهی باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر R دارای مدول شبه دوگان باشد، آنگاه گروه حلقه RG نیز دارای مدول شبه دوگان می‌باشد.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و نوتری باشد. R -مدول با مولد متناهی w را شبه دوگان گویند، اگر برای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_R^i(w, w) = 0$ و $\text{Hom}_R(w, w) \cong R$. مفهوم مدول‌های شبه دوگان روی حلقه‌های جابجایی و نوتری اولین بار توسط فاکسی [۳]، گلد [۴] و واسکنسل [۶] به‌طور مستقل و تحت نام‌های متفاوت معرفی شده است. با توجه به تعریف R یک R -مدول شبه دوگان می‌باشد. لذا این مدول‌ها تعمیم مدول‌های آزاد از پایه یک می‌باشند. مدول‌های شبه دوگان مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفت و برای حلقه‌های دیگر نیز تعمیم داده شده است. به‌عنوان مثال، وایت [۷] این مفهوم را روی حلقه‌های جابجایی تعریف کرده و هم‌چنین، هلم و وایت [۵] مفهوم مدول‌های شبه دوگان را روی حلقه‌های جابجایی و شرکت‌پذیر تعریف کرده‌اند. به‌علاوه، آرایا و همکاران [۱]، این مفهوم را برای حلقه‌های نوتری که لزوماً جابجایی نمی‌باشد، تعریف کرده‌اند. دانشمندان به کمک مدول شبه دوگان w ، مدول‌های w -تصویری گرنشتاین را معرفی کرده‌اند که تعمیم مدول‌های تصویری گرنشتاین می‌باشد که توسط ایناکس و جندا [۲] معرفی و مطالعه شده است. یادآوری می‌شود که R -مدول M را w -تصویری گرنشتاین گویند اگر برای هر $i > 0$ و هر R -مدول تصویری P ، $\text{Ext}_R^i(M, w \otimes_R P) = 0$ و هم‌چنین، همبافت دقیق از R -مدول‌های $\dots \rightarrow w \otimes_R P_{-1} \rightarrow w \otimes_R P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ موجود باشد که در آن P_i ها تصویری بوده و تابعگون $\text{Hom}_R(-, w \otimes_R Q)$ ، که در آن Q یک R -مدول تصویری است، همبافت \mathbf{X}_\bullet را دقیق نگه دارد. بنابراین، اگر $w = R$ ، آنگاه مدول w -تصویری گرنشتاین، همان مدول تصویری گرنشتاین می‌باشد. لذا پیدا کردن مدول‌های شبه دوگان اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. با توجه به این مطالب، در این مقاله ما نشان می‌دهیم که اگر حلقه جابجایی R دارای مدول شبه دوگان باشد، آنگاه برای هر گروه متناهی G ، گروه حلقه RG نیز دارای شبه دوگان می‌باشد. در طول این مقاله R همواره حلقه جابجایی و نوتری می‌باشد.

*سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (آمنه یاپنگ غراوی)

۲. نتایج اصلی

گزاره ۱.۰.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت حلقه نوتری می باشد.

گزاره ۲.۰.۲. فرض کنید W یک R -مدول بوده و G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $RG \otimes_R WW$ یک RG -دومدول می باشد.

قضیه ۳.۰.۲. فرض کنید W یک R -مدول شبه دوگان بوده و G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $RG \otimes_R W$ یک RG -دومدول شبه دوگان می باشد.

اثبات. چون W یک R -مدول است، بنا بر گزاره ۲.۰.۲، $RG \otimes_R W$ یک RG -دومدول می باشد. چون RG یک R -مدول یکدست باوفا می باشد، برای هر $i \geq 0$ ، یکرختی زیر را داریم:

$$RG \otimes_R \text{Ext}_R^i(W, W) \cong \text{Ext}_{RG}^i(RG \otimes_R W, RG \otimes_R W)$$

چون W یک R -مدول شبه دوگان می باشد، برای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_R^i(W, W) = 0$ و لذا برای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_R^i(RG \otimes_R W, RG \otimes_R W) = 0$. به علاوه چون $\text{Hom}_R(W, W) \cong R$ ، یکرختی زیر به دست می آید.

$$RG \cong RG \otimes_R R \cong RG \otimes_R \text{Hom}_R(W, W) \cong \text{Hom}_{RG}(RG \otimes_R W, RG \otimes_R W)$$

لذا حکم حاصل می شود. \square

نتیجه ۴.۰.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی و G' زیرگروه متناهی G باشد. اگر W یک RG' -مدول شبه دوگان باشد، آنگاه $RG \otimes_{RG'} W$ یک RG -دومدول شبه دوگان است.

قضیه ۵.۰.۲. فرض کنید M یک R -مدول W -تصویری گرنشتاین باشد. در این صورت $RG \otimes_R M$ یک RG -مدول، $RG \otimes_R W$ -تصویری گرنشتاین می باشد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم M یک R -مدول W -تصویری گرنشتاین باشد. نشان می دهیم $RG \otimes_R M$ یک $RG \otimes_R N$ -تصویری گرنشتاین می باشد. بنا به فرض برای هر $i > 0$ داریم $\text{Ext}_R^i(M, W) = 0$. چون RG یک R -مدول یکدست باوفا می باشد. خواهیم داشت

$$RG \otimes_R \text{Ext}_R^i(M, W) \cong \text{Ext}_{RG}^i(RG \otimes_R M, RG \otimes_R W).$$

در نتیجه برای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_{RG}^i(RG \otimes_R M, RG \otimes_R W) = 0$. از طرفی، بنا به فرض رشته دقیق از R -مدول های

$$M \rightarrow W \otimes_R P_0 \rightarrow W \otimes_R P_1 \rightarrow \dots \quad (1)$$

موجود است که در آن P_i ها تصویری بوده و تابعگون $\text{Hom}_R(-, W \otimes_R Q)$ ، برای هر R -مدول تصویری Q ، رشته (۱) را دقیق نگه می دارد. چون RG یک R -مدول آزاد است، رشته

$$\mathbb{X}_\bullet : 0 \rightarrow RG \otimes_R M \rightarrow RG \otimes_R W \otimes_R P_0 \rightarrow RG \otimes_R W \otimes_R P_1 \rightarrow \dots$$

حال به آسانی می توان دید که برای هر RG -مدول تصویری Q ، تابعگون $\text{Hom}_{RG}(\mathbb{X}_\bullet, (RG \otimes_R W) \otimes_{RG} Q)$ دقیق می باشد. بنابراین \square

مراجع

- [1] T. Araya, R. Takahashi, and Y. Yoshino. Homological invariants associated to semidualizing bimodules. *J. Math. Kyoto. Univ.*, 45(2):287–306, 2005.
- [2] E. Enochs and O. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220:611–633, 1995.
- [3] H. Foxby. Gorenstein modules and related modules. *Math. Scand.*, 31:267–284, 1972.
- [4] S. Golod. g -dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Mat. Inet. Steklov.*, 165:62–66, 1984. Algebraic geometry and its applications.
- [5] H. Holm and D. White. Foxby equivalences over associative rings. *J. Math. Kyoto. Univ.*, 47:781–808, 2007.
- [6] W. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*. North-Holland Publishing Co. Amesterdam, 1974.
- [7] D. White. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module. *J. Comm. Algebra*, 2:111–137, 2010.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-238، صص. ۱۴۰-۱۴۱

بعد کوهمولوژی گرنشتاین گروه‌ها

رمضانعلی ابراهیمیان، آ

آدبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان مینودشت

چکیده	اطلاعات مقاله
فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و G یک گروه باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم بعد کوهمولوژی گرنشتاین، بسیاری از خاصیت‌های بعد کوهمولوژی G روی حلقه جابجایی K را دارا است.	واژه‌های کلیدی: بعد کوهمولوژی G بعد کوهمولوژی گرنشتاین G .
	2020 MSC: 13C10 20J05 18G20

۱. مقدمه

فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و G یک گروه باشد. یکی از بعدهای مهم نسبت داده شده به گروه G ، بعد کوهمولوژی گرنشتاین G می‌باشد که خاصیت‌های شناخته شده بعد کوهمولوژی از گروه‌ها در جبر همولوژی گرنشتاین را اثبات می‌کنیم [۴-۱] که عبارتند از:

الف) وابستگی بعد کوهمولوژی گرنشتاین یک گروه مشخص، روی ضرایب حلقه K .
ب) رفتار بعد کوهمولوژی گرنشتاین نسبت به زیرگروه‌ها.

تعریف ۱.۱. همبافت دقیق از R -مدول‌های تصویری

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \cdots$$

را تحلیل تصویری کامل می‌گوییم، هرگاه برای هر R -مدول تصویری Q ، همبافت

$$\text{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, Q) : \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{-1}, Q) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, Q) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \text{Hom}_R(P_{n-1}, Q) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n, Q) \longrightarrow \cdots$$

دقیق باشد.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این صورت M را تصویری گرنشتاین می‌گوییم، هرگاه تحلیل تصویری کامل مانند

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \cdots$$

موجود باشد به طوری که $M \cong \text{im}(P_0 \rightarrow P_{-1})$.

۲. نتایج اصلی

گزاره ۱.۰.۲. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت برای هر حلقه‌ی جابجایی K ، نامساوی $\text{Gcd}_K G \leq \text{Gcd}_Z G$ برقرار است.

گزاره ۲.۰.۲. برای گروه دلخواه G ، $\text{Hom}_{KG}(K, KG) \neq 0$ اگر و تنها اگر G متناهی باشد.

نتیجه ۳.۰.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی از بعد جهانی ضعیف متناهی و G یک گروه از بعد کوهمولوژیکی گرنشتاین متناهی روی K باشد. در این صورت یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود دارد که روی K شکافته شده بوده، A یک K -مدول تصویری می‌باشد و $\text{pd}_K A = \text{Gcd}_K G$.

گزاره ۴.۰.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی و G یک گروه باشد به طوری که یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود داشته باشد که به عنوان K -مدول شکافته شده بوده، A یک K -مدول تصویری می‌باشد به طوری که $\text{pd}_K A < \infty$. در این صورت برای هر KG -مدول M که به عنوان K -مدول تصویری باشد، نامساوی $\text{Gpd}_{KG} M \leq \text{pd}_K A$ برقرار است.

قضیه ۵.۰.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی از بعد جهانی ضعیف متناهی باشد. در این صورت برای هر گروه G و هر زیر گروه H از G داریم $\text{Gcd}_K H \leq \text{Gcd}_K G$.

اثبات. برای $\text{Gcd}_K G = \infty$ حکم بدیهی است. لذا فرض می‌کنیم که $\text{Gcd}_K G = n < \infty$. در این صورت بنا به نتیجه ۳.۰.۲، یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود دارد که به عنوان K -مدول شکافته شده بوده و A یک K -مدول تصویری است و $\text{pd}_K A = n$. چون i یک KH -همریختی بوده که به عنوان K -مدول شکافته شده است و $\text{pd}_{KH} A \leq \text{pd}_K A = n$ ، بنا به گزاره ۴.۰.۲ داریم

$$\text{Gcd}_K H = \text{Gpd}_{KH} K \leq \text{pd}_{KH} A \leq n$$

□

و اثبات کامل می‌گردد.

قضیه ۶.۰.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی، G یک گروه، H زیر گروه G و M یک KH -مدول باشد. در این صورت

(الف) اگر M تصویری گرنشتاین باشد، آنگاه KG -مدول القایی $KG \otimes_{KH} M$ نیز تصویری گرنشتاین است.
(ب) $\text{Gpd}_{KG}(KG \otimes_{KH} M) \leq \text{Gpd}_{KH} M$.

نتیجه ۷.۰.۲. فرض کنید R یک حلقه و

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

یک رشته دقیق از R -مدول‌ها باشد. در این صورت

$$\text{Gpd}_R M \leq \max\{i + \text{Gpd}_R M_i; i = 0, 1, \dots, n\}.$$

مراجع

- [1] J. Asadollahi, A. Bahlekeh, and Sh. Salarian. On the hierarchy of cohomological dimension of groups. *J. Pure and Appl. Algebra*, 213: 1795–1803, 2009.
- [2] F. Dembegiotti and O. Talelli. An integral homological characterization of finite groups. *J. Algebra*, 319:267–271, 2008.
- [3] I. Emmanouil. On the finiteness of Gorenstein homological dimensions. *J. Algebra*, 372:376–396, 2012.
- [4] T. V. Gedrich and K. W. Gruenberg. Complete cohomological functors on groups. *Topology Appl.*, 25:203–223, 1987.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-239، صص. ۱۴۲-۱۴۴

مدول‌های با بعد تصویری گرنشتاین متناهی گروه‌ها

رمضانعلی ابراهیمیان^۱

ادبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان مینودشت

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: بعد تصویری گرنشتاین متناهی G بعد تصویری گرنشتاین متناهی KG	فرض کنیم K یک حلقه جابجایی از بعد جهانی متناهی ضعیف و G یک گروه باشد. هدف این مقاله، مطالعه مدول‌های با بعد تصویری گرنشتاین متناهی است. به‌ویژه نشان می‌دهیم که برای هر حلقه جابجایی K از بعد جهانی متناهی و گروه دلخواه G ، هر KG -مدول، بعد تصویری گرنشتاین متناهی دارد.
2020 MSC: 13C10 20J05 18G20	

۱. مقدمه

مفهوم بعد گرنشتاین، که تعمیم بعد تصویری می‌باشد، توسط ایناکس^۱ و چندا^۲ [۴] برای هر مدول (نه لزوماً متناهی مولد) تعریف شد و آن‌ها این پایا را بعد تصویری گرنشتاین نامیده‌اند. ثابت شده است که حلقه‌ی موضعی R گرنشتاین است اگر و تنها اگر بعد تصویری گرنشتاین هر مدول (متناهی مولد) متناهی باشد. ایناکس و چندا به‌طور دوگانه مفهوم بعد تزریقی گرنشتاین را تعریف کرده‌اند. هم‌چنین هلم^۳ [۵] این مفاهیم را برای مدول‌ها روی هر حلقه‌ی دلخواه تعریف و مطالعه کرده است. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی روی این بعد توسط بسیاری از دانشمندان صورت گرفته و نتایج بسیار زیادی بدست آمده است. به دلیل اهمیت زیاد بعد تصویری گرنشتاین اسداللهی، بهلکه و سالاریان [۱] برای اولین بار این مفاهیم را برای مدول‌ها روی حلقه گروه ZG مطالعه کرده‌اند که در آن G یک گروه دلخواه می‌باشد. آن‌ها نشان داده‌اند که این پایا در رسته ZG -مدول‌ها بسیار خوش‌رفتار می‌باشد. فرض کنیم G یک گروه و K یک حلقه جابجایی از بعد جهانی متناهی ضعیف باشد. در این صورت بعد تصویری گرنشتاین K ، به‌عنوان KG -مدول متناهی است و یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود دارد که به‌عنوان K -مدول شکافته شده است که در آن A ، K -مدول تصویری است و $\text{pd}_{KG} A < \infty$ [۲، ۳، ۵، ۶].

تعریف ۱.۱. فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این صورت M را تصویری گرنشتاین می‌گوییم، هرگاه تحلیل تصویری کامل مانند

$$P_{\bullet}: \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \dots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \text{im}(P_0 \rightarrow P_{-1})$.

¹Enochs²Jenda³Holm

تعریف ۲.۱. R -مدول راست N را یکدست می‌گوییم، هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق کوتاه از R -مدول‌ها مانند $\circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$ رشته‌ی

$$\circ \rightarrow N \otimes_R A \rightarrow N \otimes_R B \rightarrow N \otimes_R C \rightarrow \circ$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبدلی باشد.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت بعد یکدست M که با $\text{fd}_R M$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{fd}_R M = \inf \{ n \geq 0 \mid \text{باشد } \circ \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow \circ \}$$

اگر M دارای هیچ تحلیل یکدست از طول متناهی نباشد، بعد یکدست M ، $+\infty$ تعریف می‌شود. بنا به قرارداد اگر $M = 0$ ، آنگاه

$$\text{fd}_R M = -\infty.$$

تعریف ۴.۱. فرض کنیم M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت بعد تصویری گرنشتاین M که با $\text{Gpd}_R M$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{Gpd}_R M = \inf \{ n \geq 0 \mid \text{باشد } \circ \rightarrow G_n \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow \circ \}$$

اگر M دارای هیچ تحلیل تصویری گرنشتاین از طول متناهی نباشد، بعد تصویری گرنشتاین M ، $+\infty$ تعریف می‌شود. بنا به قرارداد اگر $M = 0$ ، آنگاه

$$\text{Gfd}_R M = -\infty.$$

تعریف ۵.۱. بعد جهانی ضعیف حلقه R را با wgl. dim نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{wgl. dim}(R) = \sup \{ \text{fd}_R M \mid M \text{ یک } R\text{-مدول است} \}.$$

۲. نتایج اصلی

گزاره ۱.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی از بعد جهانی ضعیف متناهی باشد. در این صورت:

(الف) هر همبافت دقیق از K -مدول‌های تصویری، انقباض پذیر است.

(ب) اگر G یک گروه باشد، آنگاه هر KG -مدول تصویری گرنشتاین، K -مدول تصویری است.

گزاره ۲.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی و G یک گروه باشد به طوری که یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود داشته باشد که به عنوان K -مدول شکافته شده بوده، A یک K -مدول تصویری می‌باشد به طوری که $\text{pd}_{KG} A < \infty$. در این صورت برای هر KG -مدول M که به عنوان K -مدول تصویری باشد، نامساوی $\text{Gpd}_{KG} M \leq \text{pd}_{KG} A$ برقرار است.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید K یک حلقه‌ی جابجایی و G یک گروه باشد به طوری که یک یکرختی از KG -مدول‌ها مانند $i: K \rightarrow A$ وجود داشته باشد که به عنوان K -مدول شکافته شده بوده، A یک K -مدول تصویری و $\text{pd}_{KG} A < \infty$. در این صورت برای هر KG -مدول M ، نامساوی

$$\text{Gpd}_{KG} M \leq \text{pd}_{KG} A + \text{pd}_K M$$

برقرار است.

اثبات. چون برای $\text{pd}_K M = \infty$ نامساوی بالا بدیهی است، کافی است حکم را برای حالت $\text{pd}_K M = m < \infty$ ثابت کنیم. روش اثبات از طریق استقرای روی m است. برای $m = 0$ حکم بنا به گزاره ۲.۲ حاصل می‌شود. فرض کنیم M یک KG -مدول با $\text{pd}_K M = m > 0$ باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\circ \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow \circ$ یک رشته‌ی دقیق کوتاه از KG -مدول‌ها باشد که در آن P تصویری است. در این صورت KG -مدول P به عنوان K -مدول تصویری است. لذا خواهیم داشت $\text{pd}_K K = m - 1$. از فرض استقرای نیز داریم $\text{Gpd}_{KG} K \leq \text{pd}_{KG} A + m - 1$. لذا

$$\text{Gpd}_{KG} M \leq \text{Gpd}_{KG} K + 1 \leq \text{pd}_{KG} A + m.$$

□

قضیه ۴.۲. برای هر حلقه‌ی جابجایی K از بعد جهانی متناهی و گروه دلخواه G ، شرایط زیر معادلند:

(الف) $\text{Gcd}_K G < \infty$.

ب) یک تکریختی از KG -مدول‌ها مانند $A : K \rightarrow A$ وجود دارد که به‌عنوان KG -مدول شکافته شده و در آن A ، KG -مدول تصویری است و $\text{pd}_{KG} A < \infty$.

ج) هر KG -مدول، بعد تصویری گرنشتاین متناهی دارد.

د) $\text{silp } KG = \text{spli } KG < \infty$.

نتیجه ۵.۲. برای هر حلقه‌ی جابجایی K و هر گروه G ، نامساوی‌های زیر برقرار است.

الف) $\text{spli } KG \leq \text{Gcd}_K G + \text{gl. dim } K$

ب) $\text{silp } KG \leq \text{Gcd}_K G + \text{gl. dim } K$

مراجع

- [1] J. Asadollahi, A. Bahlekeh, and Sh. Salarian. On the hierarchy of cohomological dimension of groups. *J. Pure and Appl. Algebra*, 213: 1795–1803, 2009.
- [2] L. W. Christensen, A. Franklind, and H. Holm. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions—a functorial description with applications. *J. Algebra*, 302:231–279, 2006.
- [3] I. Emmanouil. On the finiteness of Gorenstein homological dimensions. *J. Algebra*, 372:376–396, 2012.
- [4] E. Enochs and O. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220:611–633, 1995.
- [5] H. Holm. Gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 189:167–193, 2004.
- [6] O. Talelli. Periodicity in group cohomology and complete resolutions. *Bull. London Math. Soc.*, 37:547–554, 2005.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-240، صص ۱۴۵-۱۴۷

بعد تصویری مدول‌های یکدست متناهی

رمضانعلی ابراهیمیان،^آ

^آدبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان مینودشت

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: بعد تصویری مدول‌ها بعد تصویری مدول‌های یکدست متناهی 2020 MSC: 13C10 20J05 18G20	فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و G یک گروه باشد. در این مقاله، نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی، همه مدول‌های یکدست، بعد تصویری متناهی دارند.

۱. مقدمه

فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و G یک گروه باشد. در این صورت رابطه این مدول‌های یکدست و تصویری در جبر همولوژی طبقه‌بندی شده است. متناهی بودن بعد تصویری مدول‌های یکدست با هر دو مجموعه نظری به‌عنوان ویژگی‌های هندسی حلقه R مرتبط است [۱-۳].

تعریف ۱.۱. R -مدول P را تصویری می‌گوییم هرگاه به ازای هر رشته‌ی دقیق $\circ \rightarrow A \xrightarrow{g} B \rightarrow \circ$ از R -مدول‌ها و هم‌ریختی $f: P \rightarrow B$ ، R -هم‌ریختی $h: P \rightarrow A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow \circ \end{array}$$

جابجایی باشد، یعنی $gh = f$.

تعریف ۲.۱. R -مدول E را تزریقی می‌گوییم، هرگاه به ازای هر رشته‌ی دقیق $\circ \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow \circ$ از R -مدول‌ها و هم‌ریختی $g: A \rightarrow E$ ، R -هم‌ریختی $h: B \rightarrow E$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار

$$\begin{array}{ccc} \circ & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} B \\ & & \downarrow g \quad \swarrow h \\ & & E \end{array}$$

جابجایی باشد، یعنی $hf = g$.

تعریف ۳.۱. R -مدول راست N را یکدست می‌گوییم، هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق کوتاه از R -مدول‌ها مانند $\circ \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \circ$ رشته‌ی

$$\circ \rightarrow N \otimes_R A \rightarrow N \otimes_R B \rightarrow N \otimes_R C \rightarrow \circ$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبدلی باشد.

تعریف ۴.۱. منظور از همبافت \mathbf{C}_\bullet از R -مدول‌ها، یک رشته به صورت

$$\mathbf{C}_\bullet : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

از R -مدول‌ها و R -همریختی‌ها می‌باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $d_n d_{n+1} = 0$ ، n -امین مدول همولوژی از همبافت \mathbf{C}_\bullet را با $H_n(\mathbf{C}_\bullet)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) = \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n+1}}.$$

تعریف ۵.۱. رشته‌ی

$$\circ \rightarrow \mathbf{C}'_\bullet \rightarrow \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{C}''_\bullet \rightarrow \circ$$

از همبافت‌ها را یک رشته‌ی دقیق کوتاه می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ رشته‌ی

$$\circ \rightarrow C'_n \rightarrow C_n \rightarrow C''_n \rightarrow \circ$$

یک رشته‌ی دقیق کوتاه از R -مدول‌ها باشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم M یک R -مدول باشد. منظور از یک تحلیل یکدست برای مدول M عبارت است از رشته‌ای دقیق از R -مدول‌ها و R -همریختی‌ها مانند

$$\mathbf{F} : \cdots \rightarrow F_\gamma \rightarrow F_\gamma \rightarrow F_\circ \rightarrow M \rightarrow \circ$$

که در آن F_i ها R -مدول‌های یکدست می‌باشند. هم‌چنین

$$\mathbf{F}_M : \cdots \rightarrow F_\gamma \rightarrow F_\gamma \rightarrow F_\circ \rightarrow \circ$$

را تحلیل یکدست محذوف مدول M می‌گوییم.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم M یک R -مدول ناصفر باشد. در این صورت:

(۱) بعد تصویری M که با $\text{pd}_R M$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{pd}_R M = \inf \{n \geq 0 \mid \text{باشد } \circ \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_\circ \rightarrow M \rightarrow \circ \text{ دارای تحلیل تصویری مانند}\}$$

اگر M دارای هیچ تحلیل تصویری از طول متناهی نباشد، بعد تصویری M ، $+\infty$ تعریف می‌شود.

(۲) بعد تزریقی M که با $\text{id}_R M$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{id}_R M = \inf \{n \geq 0 \mid \text{باشد } \circ \rightarrow M \rightarrow E^\circ \rightarrow \cdots \rightarrow E^n \rightarrow \circ \text{ دارای تحلیل تزریقی مانند}\}$$

اگر M دارای هیچ تحلیل تزریقی از طول متناهی نباشد، بعد تزریقی M ، $+\infty$ تعریف می‌شود.

(۳) بعد یکدست M که با $\text{fd}_R M$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\text{fd}_R M = \inf \{n \geq 0 \mid \text{باشد } \circ \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_\circ \rightarrow M \rightarrow \circ \text{ دارای تحلیل یکدست مانند}\}$$

اگر M دارای هیچ تحلیل یکدست از طول متناهی نباشد، بعد یکدست M ، $+\infty$ تعریف می‌شود.

بنا به قرارداد اگر $M = 0$ ، $\text{pd}_R M = \text{id}_R M = \text{fd}_R M = -\infty$.

$$\text{pd}_R M = \text{id}_R M = \text{fd}_R M = -\infty.$$

تعریف ۸.۱. اگر R یک حلقه باشد، آنگاه حلقه‌ی متضاد آن یعنی R° حلقه‌ای است که عناصر آن، همان عنصر R و جمع آن، همان جمع R است. ولی برای هر $x, y \in R^\circ$ ضرب را به صورت $x \cdot y = yx$ تعریف می‌کنیم. به‌ویژه اگر R حلقه‌ی جابجایی باشد، آنگاه چون $xy = yx$ ، $R = R^\circ$.

تذکر ۹.۱. فرض کنیم G یک گروه و $(KG)^\circ$ حلقه متضاد KG باشد. در این صورت نگاشت $\varphi : KG \rightarrow (KG)^\circ$ با ضابطه $g \mapsto g^{-1}$ یک یکرختی از حلقه‌ها می‌باشد.

۲. نتایج اصلی

گزاره ۱.۰.۲. فرض کنید R یک حلقه و \mathbf{F}_\bullet همبافت دقیق از مدول‌های یکدست باشد. برای هر n قرار دهید $K_n = \text{im}(F_n \rightarrow F_{n-1})$. هم‌چنین فرض کنید که یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) برای هر n ، همبافت از گروه‌های آبلی $\mathbf{F}_\bullet \otimes_R DK_n$ دقیق است.
 ب) $\text{sfl}_R R^\circ < \infty$ و مدول K_n برای برخی از n ، یکدست است.

در این صورت مدول‌های K_n برای هر n یکدست هستند.

نتیجه ۲.۰.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد به طوری که $\text{sfl}_R R^\circ < \infty$. فرض کنید \mathbf{P}_\bullet همبافت دقیق از مدول‌های تصویری باشد. برای هر n قرار دهید $K_n = \text{im}(P_n \rightarrow P_{n-1})$. اگر مدول K_n برای بعضی از n ها یکدست باشد، آنگاه همبافت \mathbf{P}_\bullet انقباض پذیر است.

قضیه ۳.۰.۲. $\overline{P}(R) = \overline{F}(R)$ اگر و تنها اگر مدول‌های یکدست دارای بعد تصویری متناهی باشند.

اثبات. \Leftarrow بدیهی است.

\Rightarrow فرض کنیم $M \in \overline{F}(R)$. در این صورت رشته‌ی دقیق

$$\circ \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow \circ$$

وجود دارد که برای هر $0 \leq i \leq n$ ، F_i ها یکدست هستند. چون برای هر $0 \leq i \leq n$ بعد تصویری F_i متناهی است، بعد تصویری M نیز متناهی است و این یعنی $M \in \overline{P}(R)$. در نتیجه $\overline{F}(R) \subseteq \overline{P}(R)$. هم‌چنین واضح است که $\overline{P}(R) \subseteq \overline{F}(R)$ و حکم حاصل می‌شود. \square

قضیه ۴.۰.۲. فرض کنید R یک حلقه، $\text{sfl}_R R^\circ < \infty$ و M یک مدول دارای تحلیل تصویری کامل ضعیف باشد. در این صورت $M \in \overline{P}(R)$ اگر و تنها اگر $M \in \overline{F}(R)$.

اثبات. چون همواره $\overline{P}(R) \subseteq \overline{F}(R)$ ، کافی است نشان دهیم که متناهی بودن $\text{fd}_R M$ ایجاب می‌کند که $\text{pd}_R M$ نیز متناهی می‌باشد. چون $\text{fd}_R M \leq t$ ، با در نظر گرفتن رشته‌ی

$$\circ \rightarrow \Omega^t M \rightarrow P_{t-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow \circ$$

که در آن P_i ها تصویری می‌باشند، داریم $\Omega^t M$ یک R -مدول یکدست است. به‌ویژه برای هر $i \geq t$ یک $\Omega^i M$ یک R -مدول یکدست می‌باشد. فرض کنیم $(\mathbf{F}_\bullet, \mathbf{P}_\bullet, n)$ یک تحلیل کامل ضعیف M باشد. بنابراین برای اندیس به اندازه کافی بزرگ، i -امین مرابطه‌های همبافت دقیق \mathbf{F}_\bullet یکدست می‌باشند. لذا بنا به نتیجه ۲.۰.۲، همه‌ی مرابطه‌های \mathbf{F}_\bullet تصویری هستند. در نتیجه برای i به اندازه کافی بزرگ، $\Omega^i M$ یک R -مدول تصویری می‌باشد و این یعنی $\text{pd}_M < \infty$ و حکم اثبات است. \square

نتیجه ۵.۰.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند.

الف) $\text{gl. dim } R < \infty$.

ب) $\text{spli } R < \infty$ و $\text{wgl. dim } R < \infty$.

نتیجه ۶.۰.۲. اگر R یک حلقه‌ی جابجایی و $\text{spli } R < \infty$ آنگاه $\overline{P}(R) = \overline{F}(R)$.

مراجع

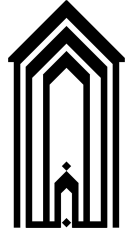
- [1] L. W. Christensen, A. Frankild, and H. Holm. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions—a functorial description with applications. *J. Algebra*, 302:231–279, 2006.
- [2] P. J. Hilton and U. Stambach. *A Course in Homological Algebra*, volume 4. Graduate Texts in Mathematics, New York, second edition, Springer 1997.
- [3] A. Neeman. The homotopy category of flat modules and Grothendieck duality. *Invent. Math.*, 174:255–308, 2008.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-244، صص ۱۴۸-۱۵۲

رسته پایدار رسته‌های فربنیوس

قادر کتوک^۱

آدبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان گنبدکاووس

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: رسته فربنیوس رسته پایدار رسته مثلثی	فرض کنید \mathcal{A} یک رسته فربنیوس و $\underline{\mathcal{A}}$ رسته‌ی پایدار آن باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که $\underline{\mathcal{A}}$ یک رسته‌ی مثلثی می‌باشد.
2020 MSC: 13H10 13D02 13D07 16G30	

۱. مقدمه

مفهوم رسته‌های مثلثی اولین بار توسط وردیر در سال ۱۹۶۳ در رساله دکتری خود معرفی شد. هدف وردیر از معرفی این مفهوم ساده‌سازی ساختار موجود در رسته‌ی مشتق شده از یک رسته‌ی آبلی بوده است.

فرض کنید \mathcal{A} یک رسته‌ی جمعی و $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ یک تابعگون خود هم‌ارزی باشد. فرض کنید Δ یک رده از دنباله‌ها به صورت $A \xrightarrow{u}$ باشد که آن را مثلث دقیق می‌گوییم. در این صورت سه‌تایی (\mathcal{A}, T, Δ) را یک رسته‌ی مثلثی می‌گویند اگر در اصول موضوعه $TR1, TR2, TR3, TR4$ معرفی شده در [۱] صدق کند. مفهوم رسته‌های دقیق توسط کوئیلن^۱ [۲] به منظور تعمیم خاصیت‌های دنباله‌های دقیق و کوتاه در رسته‌ی آبلی برای رسته‌هایی که لزوماً ریخت‌ها دارای هسته و هم‌هسته نمی‌باشند، معرفی شده است.

فرض کنیم \mathcal{A} یک رسته‌ی فربنیوس باشد. رسته‌ی پایدار $\underline{\mathcal{A}}$ را با $\underline{\mathcal{A}}$ نمایش می‌دهیم. چون \mathcal{A} رسته‌ی فربنیوس است، برای شیء دلخواه A در $\underline{\mathcal{A}}$ دنباله دقیق $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow \Omega^{-1}A \rightarrow 0$ موجود است که در آن P شیء تصویری (تزیقی) می‌باشد. همچنین اگر $f: A \rightarrow B$ یک ریخت در $\underline{\mathcal{A}}$ باشد، آنگاه ریخت یکتا $\Omega^{-1}f$ موجود می‌باشد. در حقیقت $\Omega^{-1}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ یک تابعگون خود هم‌ارزی می‌باشد. اینک فرض کنیم $f: A \rightarrow B$ یک ریخت در \mathcal{A} باشد، با در نظر گرفتن نمودار جلوبر

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \Omega^{-1}A \\ \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\ B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \Omega^{-1}A \end{array}$$

پست الکترونیک: katoukhader@gmail.com (قادر کتوک)

¹Quillen

دنباله $\Omega^{-1}A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow \Omega^{-1}A$ را بدست می آوریم که آن را یک مثلث استاندارد گویند. فرض کنیم Δ رده مثلث های دقیق باشد. نشان می دهیم $(\mathcal{A}, \Omega^{-1}, \Delta)$ یک رسته ی مثلثی می باشد.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنیم \mathcal{E} یک رسته ی دقیق باشد. گوئیم \mathcal{E} رسته ی فربنیوس است اگر شرایط زیر برقرار باشد.

- (۱) \mathcal{E} به اندازه کافی اشیاء تصویری داشته باشد.
- (۲) \mathcal{E} به اندازه کافی اشیاء تزریقی داشته باشد.
- (۳) اشیاء تصویری و تزریقی \mathcal{E} بر هم منطبق باشد.

مثال ۲.۲. رسته ی مدول های تصویری گرنشتاین یک رسته ی فربنیوس است.

ملاحظه ۳.۲. فرض کنیم $f : A \rightarrow B$ یک ریخت در \mathcal{A} باشد. چون \mathcal{A} رسته ی فربنیوس است، دنباله دقیق $A \rightarrow I \rightarrow A'$ موجود است که در آن I شیء تزریقی است. نمودار جلوبر زیر را در نظر می گیریم.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & A' \\ \downarrow f & & \downarrow p & & \parallel \\ B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h'} & A' \end{array}$$

لذا سطر پایین نیز یک دنباله دقیق است. با توجه به نمودار جابجایی زیر

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & I & \xrightarrow{\pi} & A' \\ \parallel & & \downarrow p & & \downarrow v \\ A & \longrightarrow & I(A) & \longrightarrow & TA \end{array}$$

$v : A' \rightarrow TA$ یکریخت می باشد و در نتیجه مثلث $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} TA$ را بدست می آوریم که در آن $h = vh'$. هر مثلث ساخته شده به این صورت را یک مثلث استاندارد می گوئیم. یک مثلث در \mathcal{A} را یک مثلث دقیق می گوئیم اگر با یک مثلث استاندارد یکریخت باشد، رده مثلث های دقیق را با Δ نمایش می دهیم.

قضیه ۴.۲. با نمادهای بالا (\mathcal{A}, T, Δ) یک رسته ی پیش مثلثی است.

قضیه ۵.۲. رسته ی پیش مثلثی (\mathcal{A}, T, Δ) یک رسته ی مثلثی است.

اثبات. برای اثبات حکم باید درستی (TR۴) را بررسی کنیم. فرض کنیم $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ یک ترکیب از ریخت ها باشد، بنابر (TR۲) مثلث های دقیق زیر را داریم

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D \xrightarrow{f''} TA$$

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} E \xrightarrow{g''} TB$$

$$A \xrightarrow{h=g \circ f} C \xrightarrow{h'} F \xrightarrow{h''} TA$$

می توان فرض کرد که این مثلث ها استاندارد می باشند. لذا با به کارگیری لم قبل نمودارهای جلوبر زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u(A)} & I(A) & \xrightarrow{\pi(A)} & TA, \\ \downarrow f & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ B & \xrightarrow{f'} & D & \xrightarrow{f''} & TA \end{array} \quad (۱)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u(A)} & I(A) & \xrightarrow{\pi(A)} & TA \\
 \downarrow h=gf & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 C & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & TA
 \end{array} \tag{۲}$$

که نظیر مثلث‌های اولی و سومی می‌باشند. هم‌چنین نظیر مثلث دومی، نمودار جلوبر زیر را داریم.

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{u(D)f'} & I(D) & \xrightarrow{\pi} & B' \\
 \downarrow g & & \downarrow \beta & & \parallel \\
 C & \xrightarrow{g'} & E & \xrightarrow{g''} & B' \xrightarrow{v} TA
 \end{array}$$

توجه شود که چون f' و $u(D)$ تکریختی پذیرفتنی است، $u(D)f'$ تکریختی پذیرفتنی است. چون (۱) نمودار جلوبر بوده و

$$(h'g)f = h'(gf) = h'h = \gamma u(A),$$

ریخت منحصر به فرد $J' : D \rightarrow F$ موجود است به طوری که نمودار تکمیل شده‌ی زیر جایجایی می‌باشد.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u(A)} & I(A) \\
 \downarrow f & & \downarrow \alpha \\
 B & \xrightarrow{f'} & D \\
 & \searrow h'g & \nearrow j \\
 & & F
 \end{array}$$

یعنی $zf' = h'g$ و $z\alpha = u(A)$ به طور مشابه تساوی‌های زیر را داریم.

$$g'h = g'(gf) = \beta u(D)f'f = \beta u(D)\alpha u(A)$$

حال چون نمودار (۲) جلوبر است، ریخت منحصر به فرد $j' : F \rightarrow E$ موجود است به طوری که $j'h' = g'$ و $j'\gamma = \beta u(D)\alpha$. چون

$$(j'j - \beta u(D))\alpha = j'\gamma - \beta u(D)\alpha = \beta u(D)\alpha - \beta u(D)\alpha = 0,$$

$$(j'j - \beta u(D))f' = j'h'g - \beta u(D)f' = g'g - g'g = 0.$$

استدلال مشابه آنچه که در TR۲ به کار رفت، ایجاب می‌کند که $j'j = \beta u(D)$. بنابراین نمودار جلوبر زیر را خواهیم داشت.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{u(A)} & I(A) & & \\
 \downarrow f & & \downarrow \alpha & & \\
 B & \xrightarrow{f'} & D & \xrightarrow{u(D)} & I(D) \\
 \downarrow g & & \downarrow j & & \downarrow \beta \\
 C & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{j'} & E
 \end{array}$$

چون مربع بالا از سمت چپ، نمودار جلوبر می‌باشد و $j\alpha = \gamma$ ، نتیجه می‌گیریم که نمودار

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u(A)} & I(A) \\
 \downarrow gh & & \downarrow j\alpha \\
 C & \xrightarrow{h'} & F
 \end{array}$$

جلوبر است. بنابراین نمودار

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f'} & D \\ \downarrow g & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{h'} & F \end{array}$$

نیز جلوبر است. به روش مشابه چون $j'h' = g'$ نتیجه می‌گیریم که مربع

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u(D)f'} & I(D) \\ \downarrow g & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{j'g'} & E \end{array}$$

نیز یک نمودار جلوبر است و از آنجا خواهیم داشت که مربع سمت راست نیز جلوبر می‌باشد. لذا با در نظر گرفتن نمودار جلوبر زیر

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{u(D)} & I(D) & \longrightarrow & TD \\ \downarrow j & & \downarrow \beta & & \parallel \\ F & \xrightarrow{j'} & E & \longrightarrow & TD \end{array}$$

مثلث استاندارد $D \xrightarrow{j} F \xrightarrow{j'} E \xrightarrow{j''} TD$ را به دست می‌آوریم. چون $\underline{v} : B' \rightarrow TB$ یکریختی است، ریخت $\underline{\mu} : TB \rightarrow B'$ موجود است به طوری که $\underline{\mu}\underline{v} = \text{id}_{B'}$ و $\underline{v}\underline{\mu} = \text{id}_{TB}$ بنابراین نمودارهای زیر را خواهیم داشت

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{u(A)} I(A) \xrightarrow{\pi(A)} TA, & B \xrightarrow{u(B)} I(B) \xrightarrow{\pi(B)} TB \\ \downarrow f & \downarrow u(D)\alpha & \downarrow \varphi \\ B \xrightarrow{u(D)f'} I(D) \xrightarrow{\pi} B' & \downarrow \mu' & \downarrow \mu \\ \parallel & \downarrow v' & \downarrow v \\ B \xrightarrow{u(B)} I(B) \xrightarrow{\pi(B)} TB & \downarrow \psi & \downarrow \psi \end{array}$$

که در آن $T(f) = v\varphi$ و $T(f') = \psi\mu$ نمودار بالا، نمودار زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & D & \xrightarrow{f''} & TA \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow j & & \parallel \\ A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{h'} & F & \xrightarrow{h''} & TA \\ & & \downarrow g' & & \downarrow j' & & \downarrow T(f) \\ & & E & \xrightarrow{vg''} & E & \xrightarrow{vg''} & TB \\ & & \downarrow vg'' & & \downarrow j'' & & \\ & & TB & \longrightarrow & TD & & \end{array}$$

برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که نمودار بالا جایجایی است. مربع سمت چپ از بالا، بنا بر فرض جایجایی است. از طرفی همانطور که در ساختن j دیدیم تساوی‌های $ja = \gamma$ و $zf' = h'g$ برقرار است و این یعنی مربع وسط از بالا جایجایی است و از طرفی چون

$$(h''j - f'')\alpha = h''\gamma - \pi(A) = 0$$

$$(h''j - f'')f' = h''h'g - f''f' = \circ - \circ = \circ$$

نمودار (۱) جلوبر است، مشابه آنچه که در بالا دیدیم $h''j = f''$ و این یعنی مربع سمت راست از بالا جابجایی است. به علاوه، همان طور که در بالا بیان شد $j'h' = g'$ و این یعنی مربع سمت چپ از وسط جابجایی است. اینک تساوی های زیر را در نظر می گیریم.

$$(T(f)h'' - \nu g''j')\gamma = \nu\phi h''\gamma - \nu g''j'\gamma = \nu(\phi\pi(A) - g''\beta u(A)\alpha) = \nu(\pi u(D)\alpha - \pi u(D)\alpha) = \circ$$

$$(T(f)h'' - \nu g''j')h' = T(f)h''h' - \nu g''g' = \circ - \circ = \circ$$

و چون (۲) جلوبر است، نتیجه می گیریم $T(f)h'' = \nu g''j'$ و این یعنی مربع سمت راست از وسط جابجایی است. نمودار بالا در \mathcal{A} جابجایی است. سرانجام تساوی های زیر را در نظر می گیریم.

$$(\psi g'' - j'')\beta = \psi g''\beta - j''\beta = \psi\pi - \pi(D) = \circ$$

$$(\psi g'' - j'')g' = \psi g''g' - j''g' = \circ - j''j'h' = \circ - \circ = \circ$$

نمودار

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{u(D)f'} & I(D) & \xrightarrow{\pi} & B' \\ \downarrow g & & \downarrow \beta & & \parallel \\ C & \xrightarrow{g'} & E & \xrightarrow{g''} & B' \xrightarrow{\nu} TB \end{array}$$

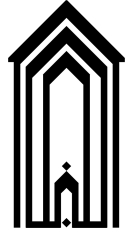
جابجایی است. داریم $\psi g'' = j''$. بنابراین تساوی های زیر را داریم

$$T(f')\nu g'' - j'' = \psi \mu \nu g'' - j'' = \psi g'' - j'' = \circ$$

و این یعنی مربع پایین نیز در \mathcal{A} جابجایی می باشد. بنابراین (\mathcal{A}, T, Δ) یک رشته ی مثلثی می باشد. لذا حکم تمام است. \square

مراجع

- [1] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge., 1988.
- [2] D. Quillen. Higher algebraic K-theory. i, in: Algebraic K-theory, i: Higher K-theories, proceedings of the confrence, battelle memorial institute, seattle, washington., *Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1973. MR 0338129 (49#2895).*, 341:85-147, 1979.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL-245، صص. ۱۵۳-۱۵۴

ریخت‌های فانتم از بعد بالا نسبت به یک زیرتابعگون از Ext

نوگل صفرزاده*، آ

آموزگار، آموزش و پرورش شهرستان گنبدکاووس

چکیده	اطلاعات مقاله
فرض کنیم R یک حلقه و n یک عدد طبیعی باشد. هدف این مقاله، مطالعه‌ی ریخت‌های n -فانتم و Tor_n -بروریختی‌ها می‌باشد. همچنین مفهوم ریخت‌های n -Ext-فانتم و Ext^n -تکریختی بررسی می‌شود. به‌علاوه رده‌بندی از این ریخت‌ها براساس دنباله‌های دقیق در رسته ریخت‌ها ارائه می‌شوند. نشان داده می‌شود که ریخت f از R -مدول‌ها، n -فانتم (به‌ترتیب، n -Ext-فانتم) است اگر و تنها اگر عقب‌بر (به‌ترتیب، جلوبر) هر همریختی پوشا (به‌ترتیب، یک به یک) در طول f ، یک ریخت Tor_n -بروریختی (به‌ترتیب، Ext^n -تکریختی) باشند. سرانجام حلقه‌های بدون n -فانتم مطالعه می‌شود.	واژه‌های کلیدی: ریخت n -فانتم n -Ext-فانتم Tor_n -بروریختی Ext^n -تکریختی پیش پوشش 2020 MSC: 13H10 13D02 13D07 16G30

۱. مقدمه

فرض کنید R یک حلقه و n یک عدد طبیعی باشد. ریخت $f : M \rightarrow N$ از R -مدول‌های چپ را n -فانتم گویند، اگر برای هر R -مدول راست (با نمایش متناهی) X ، ریخت القایی $\text{Tor}_n^R(X, M) \rightarrow \text{Tor}_n^R(X, N)$ از گروه‌های آبدی برابر صفر باشد. به‌طور دوگان، f را یک ریخت n -Ext-فانتم گویند، اگر برای R -مدول چپ با نمایش متناهی Y ، ریخت القایی $\text{Ext}_R^n(Y, M) \rightarrow \text{Ext}_R^n(Y, N)$ برابر صفر باشد. اگر $n = 1$ ، آنگاه ۱-فانتم (به‌ترتیب، ۱-Ext-فانتم) را فانتم (به‌ترتیب، Ext-فانتم) گویند.

مفهوم ریخت‌های فانتم برای اولین بار در توپولوژی [۷] برای مطالعه نگاشت‌ها بین CW -همبافت‌ها به کار رفته است. این مفهوم توسط نیمن^۱ [۸] برای رسته‌های متلی تعمیم داده شده است. همچنین بنسون^۲ و همکاران [۲] این مفهوم را برای مطالعه رسته پایدار از یک گروه متناهی به کار برده‌اند. نظریه ریخت‌های فانتم روی رسته مدول‌ها توسط هرزوک^۳ [۶] معرفی و مطالعه شده است. فرض کنید \mathcal{J} یک رده از همریختی‌ها از R -مدول‌های چپ باشد. \mathcal{J} را یک ایده‌آل از رسته R -مدول‌های چپ گویند، اگر برای هر دو R -مدول چپ M و N ، $\mathcal{J}(M, N)$ زیرگروه $\text{Hom}_R(M, N)$ بوده و برای هر سه همریختی قابل ترکیب f, g, h ، با شرط $g \in \mathcal{J}$ ، $h \in \mathcal{J}$ ، داشته باشیم $fgh \in \mathcal{J}$. به آسانی می‌توان دید که رده همه ریخت‌های n -فانتم (همچنین، n -Ext-فانتم) ایده‌آلی از رسته R -مدول‌ها می‌باشند.

*سخنران

پست الکترونیک: nwgl5frzadh@gmail.com (نوگل صفرزاده)¹Neeman²Benson³Herzog

نظریه تقریب ایده‌آل، اولین بار توسط فو^۴ و همکاران [۵] معرفی و مطالعه شده است. این نظریه در حقیقت تعمیم نظریه کلاسیک پوشش‌ها و پوش‌ها می‌باشد که توسط ایناکس^۵ [۳] و اسلاندر^۶ -اسمالو^۷ [۱] معرفی شده است، که در آن ریخت‌ها به جای اشیاء به کار می‌روند. رسته ریخت‌ها از مدول‌ها در نظریه تقریب ایده‌آل بسیار مهم می‌باشند. یادآوری می‌شود که اشیاء در رسته ریخت‌ها از مدول‌ها که با $\text{Mor}(R)$ نمایش داده می‌شود، R -همریختی‌ها بوده و یک ریخت بین دو R -همریختی $f : M_1 \rightarrow M_2$ و $g : N_1 \rightarrow N_2$ ، در حقیقت یک زوج از R -همریختی‌های $(M_1 \xrightarrow{a} N_1, M_2 \xrightarrow{s} N_2)$ می‌باشد به طوری که $sf = gd$. لذا با توجه به تعریف ریخت‌های n -فانتوم، نتیجه می‌شود که ریخت‌ها نسخه ریختاری از مدول‌های از بعد یکدست متناهی می‌باشند. فرض کنید \mathcal{F} یک زیر تابعگون جمعی از Ext باشد. ریخت $\varphi : X \rightarrow A$ از R -مدول‌های چپ را \mathcal{F} -فانتوم گویند، اگر برای هر R -مدول چپ B و هر دنباله دقیق و کوتاه از R -مدول‌های چپ مانند $\circ \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow A \rightarrow \circ$ ، نمودار عقب‌بر \mathcal{E} در طول φ به $\mathcal{F}(X, B)$ تعلق داشته باشد. مفهوم ریخت‌های \mathcal{F} -فانتوم اولین بار توسط فو و هرزوغ [۴] معرفی و مطالعه شده است. با توجه به تعریف، ریخت‌های فانتوم در حقیقت ریخت‌های Ext -فانتوم می‌باشند که در آن Ext رده همه دنباله‌های دقیق و کوتاه محض از R -مدول‌ها می‌باشد. لذا به طور طبیعی این سوال پیش می‌آید که آیا یک زیر تابعگون مانند \mathcal{F} از Ext موجود است که در آن ریخت‌های n -فانتوم دقیقاً ریخت‌های \mathcal{F} -فانتوم باشند. در این مقاله به این سوال پاسخ مثبت داده می‌شود.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. (۱) R -همریختی $f : M \rightarrow N$ ، یک ریخت n -فانتوم است، اگر و تنها اگر f یک ریخت، Δ^n -فانتوم باشد.

(۲) R -همریختی $g : X \rightarrow Y$ ، یک ریخت $(n\text{-Ext})$ -فانتوم است اگر و تنها اگر g یک ریخت ∇^n -فانتوم باشد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت عبارات‌های زیر معادل می‌باشند.

(۱) R یک حلقه بدون n -فانتوم چپ است.

(۲) ایده‌آل ϕ_n از ریخت‌های n -فانتوم، خودتوان است.

(۳) برای هر $\gamma \in \phi_n$ و هر $(n-1)$ -هم‌تاب R -مدول چپ M داریم، $\text{Ext}^1(\gamma, M) = \circ$.

(۴) برای هر R -مدول چپ M ، پوشش ϕ_n -پوشش M ، یک $\mathcal{F}l_{n-1}$ -پوشش از M می‌باشد.

(۵) اگر g یک Tor_n -بروریختی و $f, g \in \langle \lambda_A : \lambda_A \in \phi_n \rangle$ ، آنگاه $f, g \in \langle \lambda_A : \lambda_A \in \phi_n \rangle$.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه منسجم چپ باشد. در این صورت عبارات زیر معادل می‌باشند.

(۱) R یک حلقه بدون n - Ext فانتوم چپ است.

(۲) برای هر $\gamma \in \psi_n$ و برای هر R -مدول $(n-1)$ - FP -تصویری M ، $\text{Ext}_R^1(\gamma, M) = \circ$.

(۳) برای هر R -مدول چپ N ، پوشش ψ_n -پوشش N یک $\mathcal{F}J_{n-1}$ -پیش پوش از N می‌باشد.

(۴) اگر f یک Ext^n -تکریریختی بوده و $f, g \in \langle \lambda_A : \lambda_A \in \psi_n \rangle$ ، آنگاه $f, g \in \langle \lambda_A : \lambda_A \in \psi_n \rangle$.

مراجع

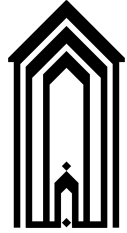
- [1] M. Auslander and S. Smalo. Preprojective modules over artin algebras. *J. Algebra*, 66:61–122, 1980.
- [2] D. Benson and Ph.G. Gnacadja. Phantom maps and modular representation theory I. *Fund. Math.*, 161:37–91, 1999.
- [3] E.E. Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. *Israel J. Math.*, 39:189–209, 1981.
- [4] X.H. Fu and I. Herzog. Powers of the phantom ideal. *Proc. London Math. Soc.*, 112:714–752, 2016.
- [5] X.H. Fu, P.A. Guil Asensio, I. Herzog, and B. Torrecillas. Ideal approximation theory. *Adv. Math.*, 244:750–790, 2013.
- [6] I. Herzog. The phantom cover of a module. *Adv. Math.*, 215:220–249, 2007.
- [7] C.A. McGibbon. Phantom maps. In: *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, pages 1209–1257, 1995.
- [8] A. Neeman. The brown representability theorem and phantomless triangulated categories. *J. Algebra*, 151:118–155, 1992.

⁴Fu

⁵Enochs

⁶Auslander

⁷Smalo



گروه‌ها با گراف ناجابجایی متقارن

حسن خسروی*^۱، داود قره‌باشی^۲^۱استادیار، دانشگاه گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس
^۲دانش‌آموخته ریاضی محض، دانشگاه گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس

چکیده

در این مقاله گروه‌های ۲ مولد متناهی غیرآبلی G را مشخص می‌کنیم که گراف ناجابجایی $Aut(G)$ متقارن هستند. در حقیقت خواهیم دید یک گروه ۲-مولده متناهی G ، $Aut(G)$ متقارن است اگر و فقط اگر $G \cong Q_8$ یا $G \cong Q_4$ باشد. p یک عدد اول باشد، $n > 0$ و $p^n > 2$ که $\langle x, y | x^{p^n} = y^{p^n} = [x, y]^p = [x, y, y] = [x, y, x] = 1 \rangle$

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
گراف ناجابجایی
گروه خودریختی
گراف متقارن

2020 MSC:

13H10
13D02
13D07
16G30

۱. مقدمه

مسئله ۳۱ از [۲] مطرح شده در مسائل قدیمی اصلی پیتراکامرون^۱:
سؤال: کدام گروه متناهی این خاصیت را دارد که گروه خودریختی آن به صورت انتقالی روی مجموعه دو تایی‌های مرتب شده از عناصر ناجابجایی عمل کند؟
هر گروه آبلی به طور بدیهی خصوصیت مطرح شده در سؤال بالا را دارد. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد که خصوصیت مطرح شده در سؤال بالا را برآورده کند، این خصوصیت به این معنی است که گراف ناجابجایی Γ_G ، $Aut(G)$ متقارن است، که در آن $Aut(G)$ گروه خودریختی G است. Γ_G گرافی است که مجموعه رأس‌های آن $G - Z(G)$ است ($Z(G)$ مرکز G) و مجموعه یال‌ها مجموعه‌ای از تمام دو تایی‌های ناجابجایی از عناصر G هستند (به [۱] یا [۲] نگاه کنید). یادآوری می‌کنیم که گراف Γ ، K متقارن نامیده می‌شود، که K زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ است، اگر K به طور انتقالی روی مجموعه‌ی زوج‌های مرتب از رئوس مجاور از Γ عمل کند.
طبق نتیجه‌ای از پابلو اسپیگا [۳] گروه G صادق در مسئله بالا یک p -گروه از کلاس فراتینی ۲ است که در آن p یک عدد اول می‌باشد. در این مقاله به مطالعه گروه‌های صادق در سؤال بالا خواهیم پرداخت و نتیجه اسپیگا اشاره شده در بالا بهبود داده می‌شود. در حقیقت خواهیم دید که اگر G گروهی باشد که گراف ناجابجایی آن $Aut(G)$ متقارن باشد، آنگاه G پوچ توان از کلاس ۲ و $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی مقدماتی است. هم‌چنین خواهیم دید که هر دو زیرگروه دو مولده غیرآبلی از G یکرخت بوده و دارای همان خاصیت G خواهند بود و به علاوه یک مشخصه‌سازی از این گروه‌ها ارائه خواهد شد که طبق آن G یا یک گروه هشت تایی (Q_8) است یا با گروه $\langle x, y | x^{p^n} = y^{p^n} = [x, y]^p = [x, y, y] = [x, y, x] = 1 \rangle$ یکرخت است که $n > 0$ و $p^n > 2$.

*سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (حسن خسروی)، second.author@gmail.com (داود قره‌باشی)

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. عنصر x از G را نامولد گوئیم اگر برای هر مجموعه X ، $G = \langle X, x \rangle$ ، آنگاه $G = \langle X \rangle$.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه فراتینی G را با $\phi(G)$ یا $\text{Frat}(G)$ نمایش داده و آن را اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال از G تعریف می‌کنیم. واضح است (قرارداد می‌کنیم) که اگر G دارای زیرگروه ماکسیمال نباشد، آنگاه $\phi(G) = G$.

قضیه ۳.۲. در هر گروه G ، $\phi(G)$ شامل تمام نامولدها از G است.

لم ۴.۲. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد که این ویژگی را دارد که گروه خودریختی G به صورت انتقالی روی مجموعه زوج‌های مرتب از عناصر ناجابجایی عمل می‌کند. در این صورت:

$$(1) \quad \text{Aut}(G) \text{ به صورت انتقالی روی } G - Z(G) \text{ عمل می‌کند.}$$

$$(2) \quad \text{به ازای هر } x, y \in G - Z(G) \text{ داریم } o(x) = o(y) \text{ یا } |x| = |y|.$$

$$(3) \quad \text{به ازای هر } x, y \in G - Z(G) \text{ داریم } C_G(x) \cong C_G(y).$$

(۴) هر دو زیرگروه ۲-ولد غیرآبلی G یک ریخت هستند و هر زیرگروه ۲-مولد غیرآبلی H از G دارای خاصیت یکسانی با G است، یعنی گروه خودریختی H به صورت انتقالی روی مجموعه زوج‌های مرتب عناصر ناجابجایی H عمل می‌کند.

(۵) به ازای برخی P اول، G یک P -گروه است.

$$(6) \quad \phi(G) \leq Z(G) \quad \phi(G) \text{ زیرگروه فراتینی } G \text{ است) به ویژه } G \text{ پوچ توان از رده } 2 \text{ است و } G - Z(G) \text{ آبلی مقدماتی است.}$$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه ۲ مولده بوده و متناهی باشد که گراف ناجابجایی از G ، $\text{Aut}(G)$ متقارن است. در این صورت اگر G از نمای q و A یک گروه آبلی متناهی دلخواه از نمای شمارنده q باشد که با q برابر نیست وقتی $Q_8 \cong G$ ، آنگاه گراف ناجابجایی از $G \times A$ متقارن است.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم G یک ۲-گروه غیرآبلی متناهی باشد که شامل زیرگروهی یکریخت با Q_8 است. در این صورت گراف ناجابجایی از G ، $\text{Aut}(G)$ متقارن است اگر و فقط اگر $G \cong Q_8 \times E$ که در آن E یک ۲-گروه آبلی مقدماتی است.

مراجع

- [1] A. Abdollahi, A. Akbari, and H.R. Maimani. Non-commuting graph of a group. *J. Algebra*, 298:468–492, 2006.
- [2] A.R. Moghaddamfar, W. Shi, W. Zhou, and A.R. Zokayi. On the noncommuting graph associated with a finite group. *Siberian Math. J.*, 46(2):328–332, 2005.
- [3] Peter Cameron's Home page. Old problems. <http://www.maths.qmul.ac.uk/pjc/oldprob.html>.

بررسی گروه‌های $(n + \frac{1}{p})$ -انگلحسن خسروی^{*}، رقیه کریمیان کریمی^بآستادیار، دانشگاه گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس،
دانش آموخته کارشناسی ارشد ریاضی محض، دانشگاه گنبدکاووس

چکیده	اطلاعات مقاله
فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. گروه G را $(n + \frac{1}{p})$ -انگل گوئیم اگر در قانون $[x, n y, x] = 1$ صدق کند. وارسته گروه‌های $(n + \frac{1}{p})$ -انگل بین وارسته‌های گروه‌های n -انگل و گروه‌های $(n+1)$ -انگل قرار دارند. در این مقاله ما این گروه‌ها را مطالعه می‌کنیم. به خصوص خواهیم دید که همه $\{2, 3\}$ -گروه‌های $(\frac{1}{p} + 4)$ -انگل موزعاً پوچ توان هستند. به علاوه اگر G ، گروه $(\frac{1}{p} + 4)$ -انگل باشد که $p \geq 5$ ، اول است، آنگاه G^p موزعاً پوچ توان است.	واژه‌های کلیدی: گروه پوچ توان گروه n -انگل وارسته گروه‌ها 2020 MSC: 20E34 20E25

۱. مقدمه

فرض کنید G یک گروه باشد و $g, h \in G$. جابجاگر زوج (g, h) با $[g, h]$ نشان داده می‌شود و به صورت $g^{-1}h^{-1}gh$ تعریف می‌گردد. به طور بازگشتی $[g, n h]$ را تعریف می‌کنیم که n یک عدد صحیح مثبت است به طوری که برای هر $n \geq 1$ $[g, n h] = [g, h]$ و $[g, n+1 h] = [g, n h]$. $S \subseteq G$ یک مجموعه انگل از G است، اگر برای هر $g, h \in S$ عدد صحیح مثبت $k = k(g, h)$ وجود دارد به طوری که $[g, k h] = 1$. اگر k توسط برخی عدد صحیح مثبت n از بالا کران دار باشد، گوئیم S یک زیرمجموعه n -انگل است و علاوه بر این اگر $G = S$ ، آنگاه G را یک گروه n -انگل گوئیم. یادآوری می‌کنیم عنصر $a \in G$ n -انگل چپ است اگر برای هر $x \in G$ $[x, n a] = 1$. هم چنین، n -انگل است اگر برای هر $x \in G$ $[a, n x] = 1$. زیرمجموعه عناصر n -انگل چپ را با $L_n(G)$ و عناصر n -انگل راست را با $R_n(G)$ نشان می‌دهیم.

اگر G یک گروه باشد، آنگاه عبارت‌های $R_n(G) = G$ و $G = L_n(G)$ معادلند؛ واضح است که هر گروه با این خاصیت یک گروه انگل است. بنابراین هر عنصر از یک گروه n -انگل همزمان یک عنصر n -انگل راست و چپ است.

در نیم قرن اخیر، فعالیت‌های وسیعی در زمینه عناصر و گروه‌های انگل صورت گرفته است. سرچشمه نظریه انگل را می‌توان در ابتدای قرن بیستم و در مقالات برنساید جستجو کرد. در واقع، این موضوع با مسائل برنساید پیوند نزدیکی دارد. مبداء شناخته شده این نظریه، مقاله‌ای از برنساید است که در سال ۱۹۰۱ ارائه شد و در آن مسائلی که به مسائل برنساید معرف گردید، برای اولین بار مطرح شد [۱]. واضح است که هر گروه پوچ توان یک گروه انگل است. با این حال می‌توان مثال‌هایی یافت که نشان دهد در حالت کلی، گروه‌های انگل ممکن است پوچ توان نباشند. در سال ۱۹۴۲، لوی ثابت کرد ([۲] صفحه ۲۷۳ مراجعه شود) که یک گروه G ، 2 -انگل است اگر و فقط اگر بستار نرمال x^G از یک

^{*}سخنران

عنصر دلخواه آبلی باشد. به علاوه هر گروه ۲-انگل پوچ توان از رده حداکثر ۳ است. لوی این نتایج را در تلاش برای یافتن پاسخ دو سؤال زیر بدست آورده است:

۱. آیا هر دو گروه n -انگل بی تاب، پوچ توان است؟

۲. آیا هر گروه n -انگل، موضعاً پوچ توان است؟

پاسخ به این دو سؤال برای گروه‌های ۳-انگل ساده نبود. اما هاینکن در سال ۱۹۶۱، تحت شرایطی به هر دو سؤال پاسخ مثبت داد. او ثابت کرد که هر گروه ۳-انگل G ، در صورت نداشتن عنصر مرتبه ۲ یا ۵، پوچ توان از رده حداکثر ۴ است. به علاوه ۲-گروه‌ها، ۵-گروه‌ها و ۵-گروه‌های ۳-انگلی موجودند که پوچ توان نیستند.

در سال ۱۹۶۰ هاینکن (به [۲] صفحه ۲۷۰ مراجعه شود) برای عناصر انگل ثابت کرد: در هر گروه G معکوس یک عنصر انگل راست، عنصر انگل چپ است و معکوس یک عنصر n -انگل راست، یک عنصر $(n+1)$ -انگل چپ است. بنابراین $\bar{L}_n(G) \subseteq \bar{R}_n(G)^{-1} \subseteq L(G)$ و $R(G)^{-1} \subseteq \bar{R}_n(G)$. حال گروه G را $(n+\frac{1}{p})$ -انگل گوئیم اگر برای هر x و y در اتحاد $[x, n y, x] = 1$ صدق کند. واضح است که هر گروه $(n+\frac{1}{p})$ -انگل یک گروه n -انگل است و خواهیم دید این وارسته از گروه‌ها در وارسته و گروه‌های $(n+1)$ -انگل قرار دارند. در این مقاله در نظر داریم عناصر و گروه‌های $(n+\frac{1}{p})$ -انگل را مطالعه کنیم و به مطالعه مجموعه ۳-انگل $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ خواهیم پرداخت و خواهیم دید که $R = \langle a, b \rangle$ پوچ توان از کلاس حداکثر ۴ است. هم‌چنین گروه‌های $(4+\frac{1}{p})$ -انگل را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. خواهیم دید $\{2, 3\}$ -گروه‌های $(4+\frac{1}{p})$ -انگل موضعاً پوچ توان هستند.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنیم G یک گروه و n یک عدد صحیح باشد. در این صورت:

(۱) گوئیم $a \in G$ یک عنصر $(n+\frac{1}{p})$ -انگل چپ است اگر برای هر $x \in G$ $[x, n a, x] = 1$.

(۲) گوئیم $a \in G$ یک عنصر $(n+\frac{1}{p})$ -انگل راست است اگر برای هر $x \in G$ $[a, n x, a] = 1$.

(۳) گوئیم G یک $(n+\frac{1}{p})$ -انگل گروه است اگر در قانون $[x, n y, x] = 1$ صدق کند.

قضیه ۲.۰.۲. فرض کنید $R = \langle a, b \rangle$ بزرگترین گروه دو مولده صادق در روابط

$$e_r(a, b) = e_r(b, a) = e_r(a^{-1}, b^{-1}) = e_r(b^{-1}, a^{-1}) = 1$$

باشد. در این صورت R پوچ توان از کلاس حداکثر ۴ است.

گزاره ۳.۰.۲. فرض کنید G یک ۲-گروه، $(4+\frac{1}{p})$ -انگل باشد. در این صورت G موضعاً پوچ توان است.

گزاره ۴.۰.۲. فرض کنید G یک ۳-گروه، $(4+\frac{1}{p})$ -انگل باشد. در این صورت G موضعاً پوچ توان است.

قضیه ۵.۰.۲. فرض کنیم G یک $\{2, 3\}$ -گروه، $(4+\frac{1}{p})$ -انگل باشد. در این صورت G موضعاً پوچ توان است.

قضیه ۶.۰.۲. فرض کنیم G یک p -گروه $(4+\frac{1}{p})$ -انگل باشد و $p \geq 5$. در این صورت G^p موضعاً پوچ توان است.

مراجع

- [1] L.C. Kappe. Right and left Engel elements in metabelian groups. *Comm. Algebra.*, 9(12):1295–1306, 1981.
 [2] D.J.S. Robinson. *A course in the Theory of Groups*. Springer-Verlag, New York, 1996.



زیرمجموعه‌های غیرپوچ‌توان در گروه‌های سوزوکی

حسن خسروی*، آ، مارال تکه زاده ب

آستادیار، دانشگاه گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس،
دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشگاه گنبدکاووس، شهرستان گنبدکاووس

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: کلیدواژه ۱ کلیدواژه ۲ کلیدواژه ۳	فرض کنیم G یک گروه و \mathcal{N} کلاس تمام گروه‌های پوچ‌توان باشد. زیرمجموعه‌ی A از گروه G را غیرپوچ‌توان گوئیم اگر برای هر دو عنصر متمایز a و b از A ، $(a, b) \notin \mathcal{N}$. اگر برای هر زیرمجموعه‌ی غیرپوچ‌توان B از G ، $ A \geq B $ ، آنگاه A را یک زیرمجموعه‌ی غیرپوچ‌توان ماکسیمال از G گفته و عدد اصلی آن را (اگر موجود باشد) با $w(\mathcal{N}_G)$ نمایش داده می‌شود. در این پایان‌نامه ما $w(\mathcal{N}_{n(q)})$ و $w(\mathcal{N}_{PGL(2,q)})$ را مطالعه خواهیم کرد که $Suz(q)$ گروه ساده سوزوکی روی میدان با q عنصر و $PGL(2, q)$ گروه خطی عمومی تصویری از درجه ۲ روی میدان با q عنصر است.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

فرض کنیم G یک گروه باشد. به روش‌های زیادی می‌توان به گروه G یک گراف نظیر کرد (به‌عنوان مثال منابع [۱-۳] را ببینید). در این مقاله از نماد \mathcal{N}_G برای نمایش گراف غیرپوچ‌توان نظیر گروه G استفاده می‌کنیم. گراف غیرپوچ‌توان نظیر G ، گرافی است که رئوس آن G و دو رأس از این گراف مجاور هستند، اگر زیرگروه تولید شده توسط آن‌ها غیرپوچ‌توان باشد. یادآوری می‌کنیم که گروه G به‌طور ضعیف پوچ‌توان گفته می‌شود، اگر هر زیرگروه ۲-مولده از آن پوچ‌توان باشد. پس اگر G به‌طور ضعیف پوچ‌توان باشد، آنگاه \mathcal{N}_G شامل هیچ یالی نخواهد بود. پس در مطالعه گراف غیرپوچ‌توان ما باید به دنبال مطالعه گروه‌هایی باشیم که پوچ‌توان ضعیف نیستند. یک زیرمجموعه C از گراف Γ که زیرگراف القایی از آن زیرگراف کامل است را یک خوشه گوئیم. اندازه بزرگترین خوشه (اگر موجود باشد) از یک گراف Γ را عدد خوشه‌ای Γ گفته و آن را با $w(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه A از گروه G را غیرپوچ‌توان گوئیم اگر هیچ جفت از عناصر متمایز A تشکیل زیرگروه پوچ‌توان ندهد. واضح است که اگر A یک زیرمجموعه‌ی غیرپوچ‌توان از G باشد، آنگاه زیرگراف القایی A در گراف غیرپوچ‌توان \mathcal{N}_G یک خوشه در \mathcal{N}_G است و اگر A یک زیرمجموعه‌ی غیرپوچ‌توان ماکسیمال از G (اگر موجود باشد) باشد، آنگاه $w(\mathcal{N}_G) = |A|$. یکی از مسائل مرتبط با این گراف، سؤال اردوش می‌باشد که در سال ۱۹۷۵ مطرح شده است. در حقیقت او این سؤال را مطرح کرد که اگر \mathcal{A}_G گراف ناجابجایی نظیر گروه G باشد، گرافی که رئوس آن $G - Z(G)$ و دو رأس مجاورند اگر جابجا نشوند، اگر \mathcal{A}_G دارای هیچ زیرگراف کامل نامتناهی نباشد، آیا کرانی برای عدد خوشه‌ای \mathcal{A}_G وجود دارد؟ یک سال بعد نیومن نشان داد که گروه‌های غیرآبلی که گراف آن‌ها در مسئله اردوش صدق کند، مرکز-به‌واسطه-متناهی هستند و با استفاده از شاخص مرکز در گروه کرانی برای عدد خوشه‌ای گراف ناجابجایی آن‌ها ارائه کرد.

*سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (حسن خسروی)، second.author@gmail.com (مارال تکه زاده)

اخیراً عبدالحی و زرین [۲] تأثیر $w(\mathcal{N}_G)$ را در ساختار گروه G مطالعه کردند. هم‌چنین آزاد [۴] کرانی پایینی برای $w(\mathcal{N}_{GL}(n, q))$ ارائه کرد و $w(\mathcal{N}_{PSL}(r, q))$ را بدست آورد. به‌علاوه زرین [۵] اثبات کوتاه‌تری برای $w(\mathcal{N}_{PSL}(r, q))$ ارائه کرد.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک گروهی باشد که پوچ‌توان ضعیف نیست. در این صورت داریم

$$(۱) \quad w(\mathcal{N}_G) + ۱ \leq |\text{nilp}(G)|$$

(۲) اگر هر پوچ‌توان‌ساز از G یک زیرگروه پوچ‌توان از G باشد (یا G یک n -گروه باشد)، آنگاه $w(\mathcal{N}_G) + ۱ = |\text{nilp}(G)|$.

لم ۲.۲. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه پوچ‌توانی از G باشد که برای هر $x \in H \setminus \{۱\}$ $C_G(x) \leq H$. در این صورت $\text{nil}_G(x) = H$ برای هر $x \in H \setminus \{۱\}$.

قضیه ۳.۲. قرار دهیم $q = 2^{m+1}$, $r = 2^m$ و $G = \text{Suz}(q)$. در این صورت

(a) دارای زیرگروه‌های دوری u_1 و u_2 از مرتبه $q + 2r + ۱$ و $q - 2r + ۱$ و u_1 و u_2 زیرگروه‌های هال از G هستند.
 (b) اگر $u = u_i$, $i \neq ۱$, $C_G(u) = u_i$. هم‌چنین $[N_G(u_i) = u_i] = ۴$ و $\langle u_i, t_i \rangle = N_G(u_i)$ که $u^t = u^q$ برای هر $u = u_i$. به‌ویژه $N_G(u_i)$ گروه فرد بیونی با هسته u_i است.
 (c) مزدوج‌های f, h و u_1 و u_2 یک افزاز از G هستند.

قضیه ۴.۲. اگر $g \in \text{Suz}(q) = G$, $g \neq ۱$ ، آنگاه $C_G(g)$ پوچ‌توان است.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $G = \text{Suz}(q)$ ($q = 2^{m+1}$, $m > ۰$). در این صورت

$$w(\mathcal{N}_G) = (q^r + ۱) + \frac{q^r(q^r + ۱)}{۲} + \frac{q^r(q^r + ۱)(q - ۱)}{۴(q + 2r + ۱)} + \frac{q^r(q^r + ۱)(q - ۱)}{۴(q - 2r + ۱)}$$

$$\text{که } r = \sqrt{\frac{q}{۲}}$$

لم ۶.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت

$$(۱) \quad w(\mathcal{N}_H) \leq w(\mathcal{N}_G), \quad G \text{ از } H \text{ از}$$

$$(۲) \quad w(\mathcal{N}_{\frac{G}{M}}) \leq w(\mathcal{N}_G), \quad G \text{ از } \frac{G}{M} \text{ از}$$

$$(۳) \quad w(\mathcal{N}_{\frac{G}{K}}) = w(\mathcal{N}_G) \quad \text{وقتی } K \text{ یک زیرگروه نرمال از } G \text{ مشمول در } Z^*(G) \text{ باشد.}$$

قضیه ۷.۲. فرض کنید G یک گروه نیم‌ساده غیرآبلی باشد. در این صورت $w(\mathcal{N}_G) \leq ۷۲$ اگر و فقط اگر $PGL(۲, ۷)$ یا S_5 و $PSL(۲, ۷)$. $G \cong A_5$.

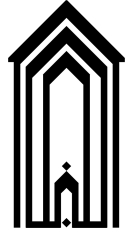
نتیجه ۸.۲. فرض کنیم G یک گروه ساده متناهی غیرآبلی باشد. در این صورت

$$(۱) \quad G \cong A_5 \Leftrightarrow w(\mathcal{N}_G) = ۲۱$$

$$(۲) \quad G \cong PSL(۲, ۷) \Leftrightarrow w(\mathcal{N}_G) = ۵۷$$

مراجع

- [1] A. Abdollahi. Engel graph associated with a group. *J. Algebra.*, 318:680–691, 2007.
- [2] A. Abdollahi and M. Zarrin. Non-nilpotent graph of a group. *Comm. Algebra.*, 38:4390–4403, 2010.
- [3] A. Abdollahi, A. Akbari, and H. R. Maimani. Non-commuting graph of a group. *J. Algebra*, 298:468–492, 2006.
- [4] A. Azad. On nonnilpotent subsets in general liner groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 83:369–375, 2011.
- [5] M. Zarrin. Ensuring a group is weakly nilpotent. *Comm. Algebra*, 40:4739–4752, 2012.



بررسی و تحلیل کاربرد هندسه فراکتال در معماری

سارا کرنگیش*^۱، عبدالحفیظ عزیزی^ب

^ادانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گرایش بهینه سازی، دانشگاه پیام نور مشهد.
^بدانشجوی دکتری شیمی کاربردی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: نظریه آشفتگی فراکتال هندسه فراکتال موزه گوگنهایم بیلباو مکعب آب	در گذشته، ریاضیات بیشتر به مجموعه‌ها و توابعی مربوط میشد که بتوان روشهای حساب کلاسیک را در آنها به کار برد. فراکتالها شکلهایی هستند که بر خلاف شکل‌های هندسی اقلیدسی به هیچ وجه منظم نیستند و میزان بی نظمی آنها، در همه مقیاسها یکسان است. با مطرح شدن مباحثی نوین همچون نظریه آشفتگی، هندسه نااقلیدسی، نظریه پیچیدگی و فیزیک غیر خطی در عصر حاضر، معماری معاصر نیز متحول شده و بحثی به نام معماری فراکتال مطرح شده است. در این مقاله ابتدا مفهوم فراکتال و نظریه آشفتگی و هندسه فراکتال را بیان می‌کنیم و در ادامه به بررسی کاربرد هندسه فراکتال در معماری می‌پردازیم. در پایان مقاله کاربرد فراکتال در معماری بناهایی مانند مکعب آب و موزه گوگنهایم بیلباو را همراه با تشریح اشکال آنها بررسی می‌کنیم.
MSC: 2020 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

در نیم قرن اخیر هنرمند با بهره گیری از علوم جدید، مانند ریاضیات، هندسه، تکنولوژی و کامپیوتر دست به خلق پیچیده ترین و خلاقانه ترین فرمهای هنری زده است. فراکتال شاخه جدیدی از علوم ریاضی و کامپیوتر محسوب میشود که قابل بررسی است. این هندسه سالهاست که توسط معماران و ریاضیدانان متعدد مورد بحث و بررسی قرار گرفته و به کارگیری آن در معماری و هندسه مصنوع مورد شک و تردید، نقض یا دفاع واقع شده است. در هنر دورانهای مختلف ساختارها و فرمها و حتی نقاشیهای مختلفی را در فراکتال میتوان مشاهده کرد. در این میان، فراکتال^۱ نیز علمی است نوین در شاخه هندسه نااقلیدسی و ریاضیات جدید. ریاضیات قدیم توانایی مقابل علم فراکتال فضایی فکری انسان را در عصر پاسخگویی به نیازهای جدید علم امروز و پیچیدگی های طبیعت را ندارد. علم فراکتال دیدگاه نوینی در هندسه ساختارهای طبیعت است که توسط ریاضیدان فرانسوی بنوآ مندلبرو، به عنوان هندسه واقعی از طبیعت کشف و مطرح شد. مندلبرو در این نظریه عنوان کرد جهان هستی، ابعادی فراکتالی دارد و ساختارهای طبیعی دارای خصوصیات فراکتال هستند. هندسه فراکتال پارادایم نوینی است که مهمترین پتانسیل آن خلق ساختارهای مبتنی بر فرم است که در این راستا رابطه‌ای مستقیم بین معماری و فراکتال می‌تواند مورد توجه قرار گیرد در حالی که معماران و اندیشمندان نظریه‌هایی را در بیان فراکتالها و الگوهای آن عنوان کرده‌اند، لیکن تبیین جامع از اصالت هندسه طبیعت و تدوین قوانین آن در معماری با نگرش بر ساختار و خصوصیات فراکتال مدنظر این پژوهش قرار گرفته است. هدف اصلی این تحقیق عبارت است از کشف و ارائه ایده ساختار در معماری با بررسی ساختار هندسی و فراکتال و توصیف چگونگی ترکیب بندی عناصر در آفرینش فضاهای معماری با مطالعه در کارکردهای فراکتال می‌باشد.

*سخنران

پست الکترونیک: Sara.karangish73@gmail.com (سارا کرنگیش)، second.author@gmail.com (عبدالحفیظ عزیزی)

^۱Fractal

۲. نتایج اصلی

۱. ۲. نظریه آشفتگی

نظریه آشفتگی یا Turbulence در لغت به معنای در هم ریختگی، بی‌نظمی، آشوب و آشفتگی است و مترادف آن در مکانیک Chaos تلاطم می‌باشد. این واژه به معنی فقدان هرگونه ساختار یا نظم است آشفتگی، دنیایی است که در آن نظم و بی‌نظمی تا ابد در هم آمیخته اند. مجموعه مندلیرو، پیچیده ترین شکلی است که تابع یکی از ساده ترین قوانین است. قوانین آشفتگی در حد بی نهایت از یک فرمول ساده ریاضی به دست می‌آید.

۲. ۲. مفهوم فراکتال

عبارت فراکتال را بنویس مندلیروت برای اولین بار در سال ۱۳۵۳ خورشیدی ابداع نمود. قطعاً، برای این عبارت تعریف ریاضی وجود دارد تا ایده هندسی آن را تشریح کند. همچنین، کاربردی تصویری از این مفهوم، به منظور توصیف پدیده‌هایی که به این ایده ریاضی نزدیک‌ترند وجود دارد. سادتر بگوییم، مجموعه‌های شناخته شده هندسه کلاسیک می‌باشند؛ هر قدر آن را بزرگ کنید، باز هم با بی‌نظمی‌های کوچکتر و کوچکتری مواجه خواهید شد. فراکتال شاخه‌ای از هندسه است که پدیده‌ها و اجسام پیچیده و نامنظم را مورد مطالعه قرار می‌دهد و معتقد است که اجسام و پدیده‌های طبیعی از بُعدهای صحیح، منظم و گسسته پیروی نمیکنند بلکه دارای بُعدهای اعشاری، نامنظم و پیوسته میباشند. گل کلم شکل ۱، شکل کوه‌ها، ابرها، دانه برف و باران، شکل ریشه، تنه و برگ درختان و بالاخره شکل سرخس‌ها، سیاهرگ و شش و همه اینها نمونه‌هایی از اشکال فراکتالی اند.



شکل ۱: نوعی گل کلم، نمونه بارزی از فراکتال

۳. ۲. هندسه فراکتال

۱. هندسه فراکتال دارای ساختارهایی با ظرفیت بالا است، درحالی که ظرفیت اشکال اقلیدسی بسیار محدود و حاوی اطلاعات تکراری است.
۲. هندسه فراکتال حرکت اشکال در فضا را ثبت میکند و ناهمواری دنیا و انرژی و تغییرات دینامیک آن را نشان می‌دهد.
۳. هندسه فراکتال بیان ریاضی از معماری طبیعت است.
۴. مکانیزم ساختارهای فراکتالی بی‌نظمی است. در حقیقت فراکتال تصویر ریاضی از بی‌نظمی است.

فراکتال در معماری

همه ما می دانیم که ریاضیات بخصوص هندسه، یک پایه مهم و الهام بخش برای معماری است. مطالعه هندسه به طراح کمک می کند که درک بهتری از جریان جزئیات در پیرامون ما و جهان طبیعی دست یابد. ولی در معماری همیشه نیاز بشر را هندسه اقلیدسی تأمین نمی کند و بایستی از هندسه دیگری به نام هندسه ناقلیدسی فراکتال، استفاده کرد که شاخه ایست از خلاقیت و جذابیت که زندگی و شور خود را می تواند به فضای معماری ببخشد.

خصوصیت فراکتالی یک ترکیب معماری در تسلسل جالب جزئیات است. این تسلسل برای حفظ جذابیت معماری لازم است. انسان ها در روزگار قدیم که در طبیعت می زیستند و مانند انسان دوره مدرن با طبیعت بیگانه نبودند، معماریشان با نظم طبیعت بود. آنها به این دلیل که در طبیعت رشد می یافتند، ضمیر ناخودآگاهشان نیز با نظم طبیعت یعنی با نظم فراکتال رشد می یافت و در نتیجه مصنوعاتش نیز دارای نظم فراکتال بود. معماری فراکتال مدرن که در معماری معاصر وجود دارد.

به دنبال بیگانگی انسان معاصر با طبیعت و دور شدن ساخته هایش از تشابه با ساختارهای طبیعت، معماران معاصر به دنبال نشان دادن ساختار فراکتال طبیعت در آثارشان هستند و به طور آگاهانه دست به طراحی فراکتال با استفاده از هندسه فراکتال می زنند.

۴.۲. معماری فراکتال

با توجه به تعریف فراکتال، نمونه های بسیاری در معماری وجود دارد که با الهام گرفتن از فراکتال های طبیعی و اشکال خود متشابه و استفاده از تناسب و تکرار در مقیاس خرد و کلان شکل گرفته اند. یکی از ساختمان های جالب توجه در معماری فراکتال، طرح فرانک گهری برای موزه گوگنهایم در شهر بیلباو و مکتب آب از دیگر ساختمان های مشهور معماری فراکتال است که اخیراً در پکن ساخته شده است. در ادامه تعدادی از این ساختمان ها تشریح می شوند. با توجه به تعریف فراکتال، نمونه های بسیاری در معماری وجود دارد که با الهام گرفتن از فراکتال های طبیعی و اشکال خود متشابه و استفاده از تناسب و تکرار در مقیاس خرد و کلان شکل گرفته اند. یکی از ساختمان های جالب توجه در معماری فراکتال، طرح فرانک گهری برای موزه گوگنهایم در شهر بیلباو و مکتب آب از دیگر ساختمان های مشهور معماری فراکتال است که اخیراً در پکن ساخته شده است. در ادامه تعدادی از این ساختمان ها تشریح می شوند.

موزه گوگنهایم بیلباو

از معروف ترین موزه های جهان و یکی از ساختمان های جالب توجه است که در شهر بیلباو واقع موزه گوگنهایم بیلباو بندر بیلباو، بزرگ ترین شهر منطقه ی جدایی طلب باسک در شمال اسپانیا است. معماری موزه گوگنهایم، بهترین نمونه از معماری سیال و سه بعدی گهری می باشد. شکل اصلی بنا شبیه کشتی و ماهی بوده و پلان ساختمان نیز به صورت گلی در حال باز و شکوفا شدن است. احجام سه بعدی منحنی شکل که با ورق های فلزی تیتانیوم پوشیده شده، همچون گلبرگ های یک گل، از مرکز ساختمان به سمت محیط خارج آن گسترش یافته اند و نور خورشید را ماهی می شود.



شکل ۲: نمایی از شهر بیلباو و موزه (عکس سمت راست) و تصویر هوایی از موزه و پلان موزه به صورت گلی در حال شکفتن (عکس سمت چپ)

مدل ها در نهایت به ساخت ماکت های کامل می انجامد نکته بسیار جالب در روند طراحی گهری در استفاده از فن آوری رایانه است. بر خلاف سایر معماران که از نرم افزارهایی برای کارهای خود استفاده می کنند، گهری از نرم افزار کاتیا (3ds Max و CAD معمول دو بعدی و سه بعدی مانند) که یک نرم افزار مربوط به طراحی جامدات است استفاده می شود.

مکتب آب، نامی است که برای پروژه "استادیوم ورزش های آبی المپیک پکن" به خاطر نمایی حبابی و شفاف آن، در بازی های المپیک سال ۲۰۰۸ انتخاب شده و یکی از ۳۷ تاسیساتی است که مسابقات المپیک تابستانی پکن در آن برگزار میشود. این سالن در کنار استادیوم ملی پکن موسوم به «آشیانه پرنده» و در شهر پکن چین واقع شده است.

پروژه به شکل یک مکتب ساده و شفاف بوده و سازه آن بیشتر شبیه به اجتماع مولکول های آب حقیقت آرایش پیچیده ای از اجزای حباب مانند می باشد که بصورت یک مکتب بزرگ و حجیم، شکل داده شده است. این همان مصداق بارزی از ماهیت "قطعه، قطعه شونگی" است که یکی از مشخصه های اصلی فرم هندسی فراکتال می باشد.



شکل ۳: تصویر ماهواره‌ای از موزه شبیه ماهی و کشتی (عکس سمت راست) و نمای موزه، انعکاس نور و جلوه شبیه فلس ماهی (عکس سمت چپ)



شکل ۴: تصویر هوایی از مکعب آب و آشیانه پرنده (تصویر سمت راست)، مکعب آب و رستوران خارج آن (تصویر وسط) و جلوه مکعب آب و رستوران دید در شی (تصویر سمت چپ)

۳. نتیجه گیری

در پایان باید عنوان نمود که بر طبق علوم جدید، جهان امروز نه تنها نظامی مشخص نداشته، بلکه ترکیبی از نظم و بی نظمی است. معماری جهان نو همانند خود این جهان، جهانی خلاق، خود تنظیم، خود تغییر، غیرقابل پیش بینی و به روز شدن است. معماری غیر خطی، سیال، نرم و انحنادار که امروزه توسعه و رشد می یابد، متأثر از دیدگاه های علوم جدید امروز است که جهان را با موج و اجزاء ذرات و متفاوت از گذشته می شناسد.

شناخت مفاهیم علوم جدید و زیر بناهای فکری معماری شکل گرفته بر اساس آن، باعث عدم تقلید شکلی، کشف مفاهیم جدید و ارتقاء هنر معماری در کشورمان می شود. این موضوع بایستی همواره مد نظر معماران ارجمند قرار گرفته و طرح های خود را با پدیده های جدید در علم و فلسفه در هر زمان وفق داده و با ارائه طرح های به روز خود، همچون گذشته زمینه حضور فعال معماری کشورمان در عرصه بین المللی را ایجاد کرده باشند.

مراجع

- [۱] ادگار، جردالدا، اندازه، توپولوژی و هندسه فراکتال‌ها، تهران، دانشگاه آزاد شهرری.
- [۲] بویل، کارل، هندسه فراکتال در معماری و طراحی، مترجم محمد علی اشرف گنجونی، حسین فالج، چاپ دوم، کرمان، دانشگاه شهید باهنر.
- [۳] خاکی، غلامرضا، روش تحقیق با رویکردی به پایاننامه نویسی. تهران، انتشارات بازتاب.
- [۴] زارعی، محمدابراهیم، آشنایی با معماری جهان، چاپ نهم، تهران، فن آوران، ۱۳۸۹.
- [۵] سالینگاروس، نیکوس آ، فراکتال در معماری جدید، مترجم نسیم چیت سازان و ایرانمنش، فصلنامه مبانی نظری، هنر و معماری خانه.
- [۶] سایت فرهنگستان زبان و ادب فارسی <http://www.persianacademy.ir>
- [۷] سپهر، مسعود، شرحی بر نشانها. تهران، انتشارات هرمس.
- [۸] سرورزاده، کوروش، اشتیاقی، علیرضا، تئوری شبکه ای و شهر فرا
- [۹] کوهل، ایزابیل، ۵۰ معمار که باید آنها را بشناسیم، ترجمه مهسا چاوشی، چاپ اول، تهران، مقدس، ۱۳۸۸.
- [۱۰] قبادیان، وحید، مبانی و مفاهیم در معماری معاصر غرب، چاپ نهم، تهران، دفتر پژوهش های فرهنگی، ۱۳۸۷.
- [۱۱] مجله فرآیند معماری، ورزشگاه ها و سازه های فضایی، شماره چهار، مرداد و شهریور ۱۳۸۶.
- [12] <http://www.binscorner.com/pages/a/amazing-fractal-art-pictures.html>
- [13] <http://www.water-cube.com/en>
- [14] <http://en.wikipedia.org>
- [15] <http://fa.wikipedia.org>



میدان های برداری ژاکوبی گونه

مرتضی شریفی نجار*،^آ^آدانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله به معرفی نوع خاصی از میدان های برداری تحت عنوان میدان های برداری "ژاکوبی گونه" می پردازیم. پس از بیان خواص و ویژگی های مربوطه، ارتباطاتی که بین این نوع میدان ها با میدان های برداری کیلینگ می تواند وجود داشته باشد و شرایطی که باعث معادل شدن مفهوم این دو میدان می شود را مورد تحلیل و بررسی قرار می دهیم. این گزاره که "هر میدان برداری کیلینگ، یک میدان برداری ژاکوبی گونه است، ولی برعکس لزوما برقرار نیست" این پرسش را بوجود می آورد که تحت چه شرایطی عکس این گزاره برقرار است؟ که در اینجا علاوه بر پاسخ به این سوال، یک شرط لازم و کافی برای معادل بودن این دو خاصیت میدان های برداری (کیلینگ بودن و ژاکوبی گونه بودن) را ارائه خواهیم کرد.	واژه های کلیدی: میدان های برداری ژاکوبی میدان های برداری ژاکوبی گونه میدان های برداری کیلینگ میدان های کانفرمال فضاهای اقلیدسی 2020 MSC: 53C20 53B21

۱. مقدمه

در این مقاله به کمک ایده هایی از [؟] و [؟] بعد از بیان خواصی از میدان های برداری کیلینگ، به معرفی میدان های ژاکوبی گونه می پردازیم و ارتباط میان این میدان ها را با میدان های برداری ژاکوبی و به ویژه میدان های برداری کیلینگ مورد بررسی قرار داده و سپس به دو پرسش مهم پیرامون این دو دسته از میدان های برداری (یعنی کیلینگ ها و ژاکوبی گونه ها) پاسخ می دهیم؛ یکی اینکه که تحت چه شرایطی بر روی منیفلدهای ریمانی، یک میدان برداری کیلینگ، می تواند ژاکوبی گونه هم باشد؛ و پرسش دیگر، اینکه تحت چه شرایطی روی یک منیفلد ریمانی می توانیم میدان ژاکوبی گونه بسازیم که در این راستا نشان خواهیم داد که با داشتن شرایطی، اگر یک منیفلد ریمانی کامل باشد، در این صورت روی آن می توان یک میدان ژاکوبی گونه که یک میدان برداری کانفرمال گرادیان نابدی همی نیز می باشد، تعریف کرد. لازم به ذکر است که در سراسر بحث، تمامی منیفلدها، هموار و همبند فرض شده اند، مگر اینکه خلافش تصریح گردد.

تعریف ۱.۱. منیفلد ریمانی (M, g) را در نظر بگیرید. گوئیم $X \in \chi(X)$ یک میدان برداری کیلینگ است، هرگاه مشتق لی g در امتداد X صفر شود، یعنی $\mathcal{L}_X(g) = 0$ که در آن فضای تمام میدان های برداری روی M و \mathcal{L}_X عملگر مشتق لی در امتداد میدان برداری X می باشد. [؟]

گزاره ۲.۱. اگر X یک میدان برداری کیلینگ روی منیفلد ریمانی همبند M باشد و نقطه $q \in M$ موجود باشد به قسمی که $X(q) = 0$ و برای هر عضو $Y(q) \in T_p M$ داشته باشیم $\nabla_Y^{X(q)} = 0$ آنگاه $X = 0$.

□

اثبات. [؟]

*سخنران

پست الکترونیک: sharifinajjar@gmail.com (مرتضی شریفی نجار)

گزاره ۳.۱. اگر (M, g) یک منیفلد ریمانی و $X \in \chi(M)$ و $p \in M$ و $U \subset M$ یک همسایگی p و $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$ گروه موضعی تک-پارامتری وابسته به میدان برداری X باشد، آنگاه موارد زیر معادلند:

الف: اگر X یک میدان برداری C^∞ روی M و $f : M \rightarrow N$ یک ایزومتري و Y یک میدان برداری روی N با ضابطه $Y(f(p)) = df_p(X(p))$ باشد، که $p \in M$ آنگاه میدان Y کیلینگ است، اگر و تنها اگر X کیلینگ باشد.

ب: X کیلینگ است، اگر و تنها اگر برای هر $Y, Z \in \chi(M)$ داشته باشیم:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$$

اثبات. [۹]

لم ۴.۱. فرض کنید X یک میدان برداری کیلینگ روی منیفلد ریمانی (M, g) با التصاق لوی-چویتای ∇ باشد، شرط لازم و کافی برای اینکه X روی M با طول ثابت باشد این است که هر خم انتگرال میدان برداری X یک ژئودزی روی (M, g) باشد.

اثبات. [۹]

تعریف ۵.۱. میدان برداری J در طول خم ژئودزیک γ را یک میدان برداری ژاکوبی نامیم، هرگاه در معادله زیر (معادله ژاکوبی) صدق کند:

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(J(t), \gamma'(t)) \gamma'(t) = 0$$

که در آن D همان مشتق کواریانت وابسته به التصاق لوی-چویتای ∇ و R تانسور انحناى ریمان روی M و $\gamma'(t)$ میدان برداری مماس و t پارامتر ژئودزیک است.

در مرجع [۹] ثابت می‌شود هر میدان برداری کیلینگ در هر منیفلد ریمانی در راستای هر ژئودزی، ژاکوبی است.

تعریف ۶.۱. میدان برداری η روی منیفلد ریمانی M را ژاکوبی گونه (Jacobi - Type) می‌نامیم، هرگاه برای هر $X \in \chi(M)$ در معادله زیر صدق کند:

$$\nabla_X \nabla_X \eta - \nabla_{\nabla_X X} \eta + R(\eta, X)X = 0$$

مثال ۷.۱. در فضای اقلیدسی (\mathbb{R}^n, g) با متر کانونیک g ، $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ براحتی می‌توان بررسی کرد که میدان برداری $\psi = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

روی \mathbb{R}^n (که آنرا میدان برداری موقعیت می‌نامند [۹]) ژاکوبی گونه است و مهمتر از همه اینکه چون در اینجا $(\mathcal{L}_\psi g)(X, Y) = 2g(X, Y)$ بنابراین ψ کیلینگ نیست. [۹]

ملاحظه ۸.۱. در مرجع [۹] با اثبات اینکه که هر میدان ژاکوبی گونه، در راستای هر ژئودزیک در M یک میدان ژاکوبی است، نشان داده شده که هر میدان برداری کیلینگ نیز یک میدان برداری ژاکوبی گونه می‌باشد. همچنین در [۹] نشان داده شده که اگر منیفلد ریمانی، فشرده باشد، آنگاه هر میدان ژاکوبی گونه در آن کیلینگ نیز می‌باشد. حال سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که اگر شرط فشردهگی را حذف کنیم، تحت چه شرایطی یک میدان ژاکوبی گونه، روی یک منیفلد ریمانی غیرفشرده کیلینگ خواهد بود؟ در اینجا قصد داریم که به این سوال پاسخ دهیم:

لم ۹.۱. اگر η یک میدان برداری ژاکوبی گونه روی منیفلد ریمانی M باشد، آنگاه معادله زیر برقرار است:

$$\nabla_X \nabla_Y \eta + R(\nabla, X)Y = 0$$

اثبات. [۹]

برای میدان برداری ژاکوبی گونه η روی منیفلد ریمانی (M, g) فرض کنید ω یک فرمی دوگان مرتبط با η باشد و B یک میدان تانسوری از نوع $(1, 1)$ و φ یک میدان تانسوری پادمتقارن از نوع $(1, 1)$ باشد که به ازای هر $X, Y \in \chi(M)$ توسط روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$(\mathcal{L}_\eta g)(X, Y) = 2g(BX, Y)$$

$$d\omega(X, Y) = 2g(\varphi X, Y)$$

حال با به کارگیری فرمول کازول خواهیم داشت:

$$\nabla_X \eta = BX + \varphi X \quad (۱)$$

لذا از ترکیب تساوی اخیر با لم (۹.۱) داریم:

$$(\nabla_X B)Y + (\nabla_X \varphi)Y + R(\eta, X)Y = 0 \quad (۲)$$

که برای میدان تانسوری A از نوع $(۱, ۱)$:

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X (AY) - A \nabla_X Y$$

اگر تابع h را روی M بصورت $h = TrB$ تعریف کنیم، آنگاه برای یک قاب موضعی متعامد $\{e_1, \dots, e_n\}$ روی M با انتخاب $Y = e_i$ در معادله (۲) و با ضرب داخلی در e_i بدست خواهیم آورد:

$$\sum_{i=1}^n g((\nabla_X B)e_i, e_i) = 0$$

بنابراین معادله فوق ایجاب می‌کند که $Xh = 0$ برای هر $X \in \chi(M)$. لذا h تابعی ثابت است، بنابراین به نتیجه زیر دست خواهیم یافت:

نتیجه ۱۰.۱. اگر η یک میدان برداری ژاکوبی گونه روی یک منیفلد ریمانی (M, g) و B یک عملگر متقارن وابسته به η تعریف شده بصورت $(L_\eta g)(X, Y) = 2g(BX, Y)$ باشد، آنگاه $Tr(B)$ ثابت است.

اکنون در راستای پاسخ به پرسش مطرح شده در ملاحظه (۸.۱) وضعیت میدان‌های ژاکوبی را روی منیفلدهای ریمانی غیر فشرده بررسی می‌کنیم: فرض کنید η یک میدان برداری کیلینگ روی منیفلد ریمانی n بعدی (M, g) باشد، در اینصورت بنابر معادله (۱) نتیجه می‌شود $B = 0$ لذا داریم که $\varphi\eta = \nabla\eta$ بنابراین بدست می‌آید که:

$$div(\varphi\eta) = -\|\varphi\|^2 - g(\eta, \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \varphi)e_i)$$

که در آن div عملگر دیورژانس است.

از تساوی فوق و از قضیه ۲ در مرجع [۹] ثابت می‌شود که:

$$div(\varphi\eta) = Ric(\eta, \eta) - \|\varphi\|^2$$

علاوه بر این اگر یک تابع هموار f را بصورت $f = \frac{1}{\rho} \|\eta\|^2$ تعریف کنیم، خواهیم داشت که $\nabla f = -\varphi\eta$ و لذا برای یک میدان برداری کیلینگ η لاپلاسیان Δf بصورت زیر خواهد بود:

$$\Delta f = \|\varphi\|^2 - Ric(\eta, \eta)$$

از [۹] قضیه زیر ثابت می‌شود که بنابراین قضیه خواص ویژه ای از تابع $f = \frac{1}{\rho} \|\eta\|^2$ آشکار می‌گردد:

قضیه ۱۱.۱. فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی n بعدی و η میدان برداری ژاکوبی گونه روی آن باشد، در اینصورت η کیلینگ است، اگر و تنها اگر تابع $f = \frac{1}{\rho} \|\eta\|^2$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\Delta f \leq \|\varphi\|^2 - Ric(\nabla, \nabla)$$

□

اثبات. [۹]

بنابر قضیه اخیر، برای تابع $f = \frac{1}{\rho} \|\eta\|^2$ روی یک منیفلد ریمانی M و میدان برداری ژاکوبی گونه η که در معادله

$$\Delta f = \|\varphi\|^2 - Ric(\eta, \eta)$$

صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که η کیلینگ است.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۰۲. عملگر هسین A_f از یک تابع f یک عملگر متقارن بصورت زیر است:

$$A_f X = \nabla_X \nabla f$$

که در آن $X \in \chi(M)$ و این عملگر را با نماد $Hess(f)$ نمایش می‌دهیم و به ازای هر $X, Y \in \chi(M)$ داریم:

$$Hess(f)(X, Y) = g(A_f X, Y)$$

ملاحظه ۲.۰۲. در مقاله [۹] ثابت شده که روی هر منیفلد ریمانی کامل، می‌توان یک میدان برداری ژاکوبی گونه که میدان کانفرمال گرادیان نابدیگی نیز می‌باشد تعریف کرد، اگر و تنها اگر با فضای اقلیدسی n بعدی ایزومتریک باشد. (لازم به ذکر است، میدان کانفرمال گرادیان یعنی یک میدان کانفرمال که گرادیان تابعی هموار باشد.)

قضیه ۳.۰۲. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی کامل باشد، اگر تابع هموار f از M بتوی \mathbb{R} با شرط $Hess(f) = cg$ برای ثابت ناصفری چون c موجود باشد، آنگاه M با فضای اقلیدسی n بعدی ایزومتریک است.

□

اثبات. [۹]

حال به ارائه نتیجه اصلی مقاله می‌پردازیم:

نتیجه ۴.۰۲. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی کامل باشد، در اینصورت روی آن می‌توان یک میدان ژاکوبی گونه که یک میدان برداری کانفرمال گرادیان نابدیگی نیز می‌باشد، تعریف کرد، اگر و تنها اگر M با یک فضای اقلیدسی ایزومتریک باشد.

اثبات. یک طرف واضح است: اگر M با یک فضای اقلیدسی n بعدی ایزومتریک باشد، آنگاه میدان برداری موقعیت ψ که در مثال (۷.۱) ارائه شد، یک میدان برداری ژاکوبی گونه است که بنابر مباحث مقدماتی منیفلدهای ریمانی، این یک میدان برداری کانفرمال گرادیان نابدیگی نیز می‌باشد. [۹]

برعکس: فرض کنیم روی منیفلد ریمانی M بتوان یک میدان برداری ژاکوبی گونه η تعریف کرد که یک میدان برداری کانفرمال گرادیان نابدیگی نیز باشد، چون η بسته است، داریم $\varphi = 0$ و $B = \rho I$ (که در آن ρ همان نگاشت همواری است که در شرط کانفرمال بودن X یعنی $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ ظاهر می‌شود). علاوه بر این ψ اگر یک میدان برداری کانفرمال گرادیان باشد، تابع هموار حقیقی f از M بتوی \mathbb{R} موجود است که در معادله $\nabla f = \eta$ صدق می‌کند و در نتیجه بنابر معادله (۱) نتیجه می‌شود که برای هر $X \in \chi(M)$ داریم:

$$\nabla_X \nabla f = \rho X$$

که در آن وجود ثابت ناصفر ρ از این خاصیت که η یک میدان برداری کانفرمال نابدیگی است، تضمین می‌شود. معادله فوق باعث می‌شود که $Hess(f) = \rho g$ با ثابت ناصفر ρ . حال بنابر قضیه (۳.۲) نتیجه می‌شود که M با یک فضای اقلیدسی ایزومتریک خواهد بود

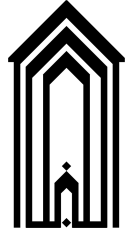
□

سپاس‌گزاری

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از اساتید ارجمندم، آقایان دکتر ناصر بروجردیان، دکتر مرتضی میرمحمدرضایی و دکتر بهزاد نجفی نهایت مراتب قدردانی و تشکر را بجا آورم، چرا که بفرموده معصوم (ع) هرکس که کلمه‌ای به من بیاموزد، مرا بنده خویش قرار داده است.

مراجع

- [1] Berestovskii, V; Nikoronov, Y. Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds. Siberian Math. J., 2008, 49, 395-407.
- [2] Bidabad, B. Geometry of Manifolds II. Amirkabir University of technology pub. 2015.
- [3] Chen, B. Y.; Deshmukh, S. On Jacobi-type vector fields on Riemannian manifolds. Mathematics, MDPI, 2019, 7(12), 1-11.
- [4] Deshmukh, S. Jacobi-type vector fields on Ricci soliton. Bull. Math. Soc. 2012, 55, 41-50.
- [5] Deshmukh, S.; Al-Solamy, F. Conformal Gradient vector fields on a compact Riemannian manifold. Colloq. Math. 2008, 112, 157-161.
- [6] O'Neill, B. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press: London, UK, 1983.
- [7] Tanno, S.; Weber, W. Closed conformal vector fields. J. Diff. Geom. 1969.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، GT-210، صص. ۱۶۹-۱۷۳

پایایی نگاشت‌های f - هارمونیک روی منیفلدهای فینسلریسید مهدی کاظمی تربقان*^۱، امیر شهنواز^۲گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: هندسه ریمانی منیفلد فینسلری نگاشت هارمونیک	در این مقاله به بررسی نگاشت‌های f - هارمونیک روی منیفلدهای فینسلری می‌پردازیم. در این راستا ابتدا مفهوم تابع f - انرژی و چگالی انرژی روی نگاشت‌های هموار که دامنه آن‌ها منیفلدهای فینسلری هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با محاسبه فرمول تغییراتی اول تابع f - انرژی، نگاشت‌های f - هارمونیک را به عنوان نقاط بحرانی این تابع انرژی معرفی می‌نماییم. سپس با محاسبه فرمول تغییراتی دوم تابع f - انرژی، پایایی نگاشت‌های f - هارمونیک را از کره n - بعدی به یک منیفلد فینسلری دلخواه بررسی می‌کنیم.
2020 MSC: 53C43 58E20	

۱. مقدمه

متر فینسلری تعمیمی از متر ریمانی است که علاوه بر مکان به جهت نیز وابسته است. از این رو مدل مناسبی برای تحلیل بسیاری از پدیده‌های فیزیکی می‌باشد. جان اف بی ریمان اولین ریاضیدانی بود که به بررسی این مترها روی منیفلدهای ریمانی پرداخت. اما با توجه به این‌که وی به کارهای گاوس علاقه مند بود لذا برای توسعه کارهای گاوس پژوهش‌های خود را در این زمینه ناتمام گذاشت و متر دیگری را تحت عنوان مترهای ریمانی معرفی نمود که به گسترش اندیشه‌های گاوس کمک شایانی نمود. مترهای فینسلری برای اولین بار توسط پل فینسلر در سال ۱۹۱۸ به صورت مدون ارائه گردیدند. پس از آن هندسه فینسلری توسط چرن، راندرز، بروالد و کارتان گسترش چشمگیری پیدا کرد و با مشخص شدن کاربردهای آن در نظریه‌های مهم فیزیک نظیر نظریه نسبیت انیشتین، نظریه گرانش و نظریه الاستیک بیش از پیش مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت. در سال‌های اخیر پروفیسور حسن اکبر زاده با چاپ کتابی تحت عنوان «التصاق‌های فینسلری به صورت سرتاسری»^۱ نقش به‌سزایی در رشد و توسعه هندسه فینسلری در پژوهش‌های کاربردی داشته است و امروزه مرجع بسیاری از مقالات در این حوزه تحقیقاتی است. لازم به توجه است که ایشان رساله دکتری خود را در حوزه هندسه فینسلری زیر نظر لیشنروویشنز^۲ از شاگردان مطرح کارتان در سال ۱۹۶۶ در پاریس به اتمام رساندند، [۵].

نگاشت‌های هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به یک منیفلد ریمانی برای اولین بار توسط ژیا اوهان مو^۳ در سال ۲۰۰۰ در کنفرانس هندسه فینسلری ارائه گردید. در این کنفرانس پروفیسور چرن^۴ که از هندسه دانان برجسته دنیا در آن زمان بودند، ضمن استقبال از این حوزه پژوهشی جدید در زمینه هندسه فینسلری، قضیه وجودی این نگاشت‌ها در هر کلاس هموتوبی را که پیش از این توسط ایس و سمپسون برای نگاشت

*سخنران

پست الکترونیک: m.kazemi@ub.ac.ir (سید مهدی کاظمی تربقان)، amir.shahnavaaz@pgs.usb.ac.ir (امیر شهنواز)

¹Initiation to global Finslerian geometry²Lichnerowicz³Xiaohuan Mo⁴Shiing-Shen Chern

های هارمونیک روی منیفلدهای ریمانی اثبات شده بود را به عنوان یک مساله باز مطرح نمودند. در سال ۲۰۰۵ مو به همراه یانگ^۵ در مقاله خود تحت عنوان "وجود نگاشتهای هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به یک منیفلد ریمانی"^۶ این مساله باز را اثبات نمودند. آنها نشان دادند که هر نگاشت از یک منیفلد فینسلری فشرده به یک منیفلد ریمانی فشرده با انحنای برشی نامثبت با یک نگاشت هارمونیک هموتوپ است، [۳]. پروفیسوری بینگ شن^۷ و زهانگ یان^۸ در سال ۲۰۰۲ به بررسی نگاشتهای هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری، به عنوان توسیعی از نگاشتهای هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به یک منیفلد ریمانی، پرداختند، [۱]. آنها ابتدا مفاهیم چگالی انرژی و تابع انرژی نگاشتهای ناتبگون بین منیفلدهای فینسلری را معرفی کرده و نگاشتهای هارمونیک بین دو منیفلد فینسلری را نقاط بحرانی تابع انرژی در نظر گرفتند.

⁵Yunyan Yung

⁶The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds

⁷Yi-bing Shen

⁸Zhang Yan

سپس با محاسبه فرمول تغییراتی اول، نشان دادند که مفهوم نگاشت هارمونیک بین دو منیفلد ریمانی به عنوان حالت خاصی از منیفلدهای فینسلری با تعریف ارائه شده از نگاشت‌های هارمونیک بین دو منیفلد ریمانی که توسط الیس و سمپسون در سال ۱۹۶۴ ارائه شده بود [۲]، کاملاً مطابقت دارد. همچنین آن‌ها با محاسبه فرمول تغییراتی دوم، مفهوم پایایی نگاشت‌های هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری را معرفی و قضایایی را در این زمینه اثبات نمودند. مساله حائز اهمیت در بررسی این نگاشت‌ها آن است که برخلاف حالت ریمانی، هارمونیک بودن نگاشت‌های ناتبهگون بین منیفلدهای فینسلری به معنی صفر شدن میدان تنش آن‌ها نیست. لذا محققان بعداً مفهوم جدیدی تحت عنوان نگاشت‌های هارمونیک قوی معرفی کردند که نگاشت‌هایی ناتبهگون بین منیفلدهای فینسلری هستند که میدان تنش آن‌ها صفر است. خم‌های ژئودزیک روی منیفلدهای فینسلری از مثال‌های معروف نگاشت‌های هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری می‌باشند. نگاشت‌های f - هارمونیک به عنوان توسیعی از نگاشت‌های هارمونیک، برای اولین بار توسط لیشنرویشز در سال ۱۹۷۰ معرفی شده‌اند. این نگاشت‌ها را می‌توان جواب‌های پایایی برای دستگاه معادلات اسپین هایزنبرگ ناهمگن^{۱۰} در نظر گرفت. اخیراً مطالعه بر روی این نگاشت‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است، [۴]. در این مقاله توسیع این نگاشت‌ها روی منیفلدهای فینسلری را بررسی می‌کنیم و پایایی این نگاشت‌ها روی کره‌های استاندارد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱. معرفی نگاشت‌های هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری

در این بخش به بیان مفاهیمی در زمینه نگاشت‌های هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری پرداخته و سپس به مقایسه این نگاشت‌ها با نگاشت‌های هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به یک منیفلد ریمانی که در قسمت قبل به آنها اشاره شده است می‌پردازیم. در نهایت مثالی از این نوع نگاشت‌ها ارائه می‌گردد.

فرض کنید (M^m, F) و (\tilde{M}^n, \tilde{F}) منیفلدهای فینسلری دلخواه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : (M^m, F) \rightarrow (\tilde{M}^n, \tilde{F})$ را ناتبهگون^{۱۱} گویند هرگاه نگاشت مماس $d\phi = \phi_*$ ناتبهگون باشد، یعنی $\ker d\phi = \emptyset$. نمادگذاری: کمیت‌های فینسلری روی فضای (M^m, F) را با همان نمادهایی که در قسمت قبل به آنها اشاره شده است نشان می‌دهیم و کمیت‌های روی (\tilde{M}^n, \tilde{F}) را نیز با همان نمادها به همراه نشانه تیلدا تولیدا مشخص می‌کنیم. به عنوان نمونه g و \tilde{g} به ترتیب نشان‌دهنده تانسورهای اساسی مرتبط با ساختارهای فینسلری F و \tilde{F} هستند. همچنین حروف یونانی $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ را به عنوان اندیس‌های کمیت‌های فینسلری مرتبط با \tilde{F} استفاده می‌کنیم که متعلق به مجموعه $\{1, \dots, n\}$ خواهند بود.

فرض کنید $\phi : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ نگاشتی ناتبهگون بین منیفلدهای فینسلری (M, F) و (\tilde{M}, \tilde{F}) باشد در این صورت تابع $e(\phi) : SM \rightarrow \mathbb{R}$ را چگالی انرژی نگاشت ϕ می‌نامند که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e(\phi)(x, y) = \frac{1}{\gamma} g^{ij}(x, y) \phi_i^\alpha \phi_j^\beta \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (1)$$

که در آن $\phi_i^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}$ ، $\phi_j^\beta = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}$ ، $\tilde{y} = d\phi(y) = \{\tilde{y}^\alpha\} = \{y^j \phi_j^\alpha\}$ و $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ تانسور اساسی روی (\tilde{M}, \tilde{F}) است، [۳].

تعریف ۱.۱. فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری فشرده و (\tilde{M}, \tilde{F}) منیفلد فینسلری دلخواه باشد، نگاشت $\phi : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ را هارمونیک گویند، هرگاه ϕ نقطه بحرانی تابع انرژی

$$E(\phi) = \frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} e(\phi) dV_{SM}, \quad (2)$$

باشد.

با توجه به مراجع [۵، ۴، ۱]، می‌توان تابع انرژی برای نگاشت‌های هموار بین منیفلدهای فینسلری را در فرمی بسیار ساده‌تر ارائه نمود. در گزاره زیر به این مسأله می‌پردازیم.

گزاره ۲.۱. هرگاه $\phi : (M^m, F) \rightarrow (\tilde{M}^n, \tilde{F})$ نگاشتی ناتبهگون بین منیفلدهای فینسلری باشد آنگاه داریم

$$E(\phi) = \frac{m}{\gamma c_{m-1}} \int_{SM} \frac{\tilde{F}^\gamma}{F^\gamma} dV_{SM}. \quad (3)$$

⁹Strongly harmonic maps

¹⁰Inhomogeneous Heisenberg Spin System

¹¹Non-degenerate

اثبات. با توجه به روابط (۱) و (۲) تابع انرژی نگاشت ϕ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} e(\phi) dV_{SM} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_{m-1}}} \int_{SM} \{g^{ij} \tilde{g}_{\alpha\beta} \phi_i^\alpha \phi_j^\beta\} dV_{SM}, \end{aligned} \quad (۴)$$

با توجه $[\tilde{F}^\gamma]_{y^i y^j} = \sqrt{2} \tilde{g}_{\alpha\beta} \phi_i^\alpha \phi_j^\beta$ و استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{c_{m-1}}} \int_{SM} \{g^{ij} [\tilde{F}^\gamma]_{y^i y^j}\} dV_{SM} \\ &= \frac{m}{\sqrt{c_{m-1}}} \int_{SM} \frac{\tilde{F}^\gamma}{F^\gamma} dV_{SM}, \end{aligned}$$

□

و بدین ترتیب حکم اثبات می‌شود.

۲. نگاشت‌های f - هارمونیک از یک منیفلد فینسلری به منیفلد ریمانی

در این بخش نگاشت‌های f - هارمونیک را به عنوان توسیعی از نگاشت‌های هارمونیک، ژئودزیک و توابع هارمونیک مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این نگاشت‌ها در پژوهش‌های مرتبط با فیزیک، رباتیک و پردازش تصویر مورد توجه محققین هستند. همان‌طور که پیش از این گفته شد، نگاشت‌های f - هارمونیک بین منیفلدهای ریمانی برای اولین بار توسط لیسنروویچ در سال ۱۹۷۰ مورد بررسی قرار گرفت، [۴]. حال به بیان مفهوم نگاشت‌های f - هارمونیک بین دو منیفلد فینسلری می‌پردازیم. فرض کنید $\varphi : (M, F) \rightarrow (N, \tilde{F})$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای فینسلری (M, F) به (N, \tilde{F}) و تابع $f : M \rightarrow (0, \infty)$ هموار باشد. در این صورت نگاشت φ را f - هارمونیک گویند در صورتی که نقطه بحرانی تابع f - انرژی

$$E_f(\varphi) = \frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} f e(\varphi) dV_{SM}, \quad (۵)$$

باشد که در آن $e(\varphi)$ چگالی انرژی نگاشت φ ، c_{m-1} حجم کره $m-1$ بعدی و dV_{SM} فرم حجمی روی SM است. در سالهای اخیر مطالعه زیادی بر روی این نگاشت‌ها در حالت ریمانی انجام شده است. به عنوان مثال کورس^{۱۲} در رساله دکتری خود نگاشت‌های f - هارمونیک از رویه‌های دو بعدی به منیفلدهای ریمانی دلخواه را مورد بررسی قرار داده است، [۶]. ییلین او^{۱۳} در [۷] به بررسی همومورفیسم‌های f - هارمونیک بین منیفلدهای ریمانی پرداخته است. این نگاشت‌ها در فیزیک نیز دارای نقشی اساسی هستند. در فیزیک، نگاشت‌های f - هارمونیک را می‌توان به عنوان جواب‌های پایایی از دستگاه اسپین هایزنبرگ ناهمگن^{۱۴} در نظر گرفت، [۸]. همچنین با استفاده از این نگاشت‌ها می‌توان نتایج ارزشمندی را در زمینه منیفلدهای وزن‌دار و سالیتون‌های ریچی بدست آورد، [۵]. شایان ذکر است که مفهوم نگاشت‌های f - هارمونیک که در این جا به آن می‌پردازیم با مفهوم نگاشت‌های \mathcal{F} - هارمونیک که توسط جیاتینگ لی [۲] در سال ۲۰۱۰ معرفی شده است، متفاوت است. فرض کنید $\varphi : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای فینسلری (M, F) و (\tilde{M}, \tilde{F}) باشد و $\mathcal{F} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ تابعی C^4 باشد به طوری که \mathcal{F} در بازه $(0, \infty)$ مثبت است. در این صورت نگاشت φ را \mathcal{F} - هارمونیک گویند در صورتی که نقطه بحرانی تابع \mathcal{F} - انرژی

$$E_{\mathcal{F}}(\varphi) = \frac{1}{c_{m-1}} \int_{SM} \mathcal{F}(e(\varphi)) dV_{SM}, \quad (۶)$$

باشد. در اینجا $e(\varphi)$ چگالی انرژی نگاشت φ و dV_{SM} فرم حجمی روی SM است. نگاشت‌های \mathcal{F} - هارمونیک بین منیفلدهای فینسلری تعمیمی از نگاشت‌های هارمونیک، هارمونیک نمایی و p - هارمونیک است که در سالهای اخیر بسیار مورد توجه محققان بوده‌اند. با مقایسه معادلات اویلر - لاگرانژ مرتبط با تابع \mathcal{F} - انرژی که لی در [۷] به آن پرداخته است با معادلات اویلر - لاگرانژ مرتبط با تابع f - انرژی، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که هر نگاشت ناتبهگون \mathcal{F} - هارمونیک $\varphi : (M, F) \rightarrow (N, h)$ از منیفلد فینسلری (M, F) به منیفلد ریمانی (N, h) یک نگاشت f - هارمونیک است که $f := \mathcal{F}'(e(\varphi))$ است. با توجه به مفاهیم بالا نتایج زیر به عنوان نتایج اصالی این مقاله به صورت زیر بدست می‌آید

¹²Neil Course

¹³Yilin Ou

¹⁴Inhomogeneous Heisenberg Spin System

قضیه ۱.۲. فرض کنید $f : \mathbb{S}^m \rightarrow [0, \infty)$ تابعی هموار باشد که $|grad f|$ ثابت است. در اینصورت هر نگاشت f - هارمونیک $(M, F) : \mathbb{S}^m \rightarrow (M, F)$ از کره n - بعدی به منیفلد فینسلری دلخواه (M^m, F) که انحنای لندزبرگی آن صفر است و $m > 2$ است، پایا می باشد. گزاره ۲.۲. هر نگاشت کانفرمال f - هارمونیک از یک کره n - بعدی به منیفلد فینسلری دلخواه که $\Delta f = 0$ است؛ نگاشتی متجانس است.

مراجع

- [1] Taha, E.H., 2020. On the geometry of harmonic Finsler manifolds. Results Math, 75
- [2] Xia, Q., 2022. Local and global gradient estimates for Finsler p -harmonic functions. Communications in Analysis and Geometry, 30(2), pp.451-500.
- [3] Xia, Q., 2020. Geometric and functional inequalities on Finsler manifolds. The Journal of Geometric Analysis, 30(3), pp.3099-3148.
- [4] Chen, Q., Jost, J. and Qiu, H., 2020. On VT-harmonic maps. Annals of Global Analysis and Geometry, 57, pp.71-94.
- [5] Ohta, S.I., 2021. Comparison Finsler geometry. Cham: Springer.
- [6] Cheng, X. and Feng, Y., 2023. Some inequalities and gradient estimates for harmonic functions on Finsler measure spaces. arXiv preprint arXiv:2306.12260.
- [7] Zhai, X., Huang, C. and Ren, G., 2020. Extended harmonic mapping connects the equations in classical, statistical, fluid, quantum physics and general relativity. Scientific reports, 10(1), p.18281.
- [8] Dibble, J., 2021. Energy-minimizing maps from manifolds with nonnegative Ricci curvature. Communications in Contemporary Mathematics, 23(03), p.1950083.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، GT-292، صص ۱۷۴-۱۷۷

خاصیت نقاط تقاطع وترهایی که با شعاع دایره زاویه 30° می سازند

غلامرضا سلطانی ابری*،^آ، راضیه فرخ‌راد رستمی^ب

^آ گلستان، گنبدکاووس، پژوهشگر آزاد در حوزه هندسه مسطحه
^ب گلستان، گنبدکاووس، دانشگاه گنبدکاووس، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: نقاط تقاطع وتر شعاع	بزرگترین وتری که با شعاع دایره زاویه 30° می سازد وتر زاویه 180° و قطر دایره است و کوچکترین وتری که در نقطه تلاقی شعاع با دایره با آن شعاع زاویه 30° می سازد وتر زاویه 120° است. ما در این مقاله اثبات می کنیم نقاط تقاطع وترهایی که به موازات این دو وتر ترسیم و با شعاع دایره زاویه 30° می سازند آن وتر را به دو قسمت نامساوی تقسیم می کنند بطوری که محیط دایره شامل سه وتر برابر با قسمت کوچک و سه وتر برابر با قسمت بزرگتر است.
51M04	2020 MSC:

۱. مقدمه

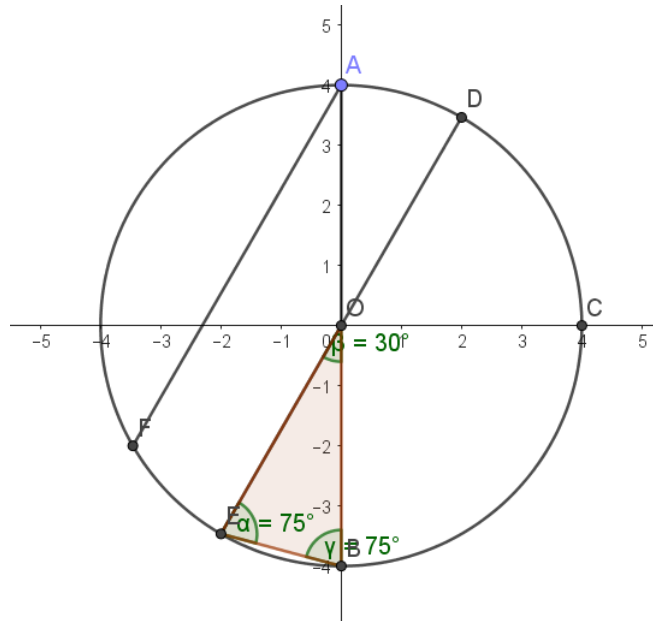
وترهای به‌طور گسترده‌ای در مراحل ابتدایی مثلثات مورد استفاده بودند. در نخستین جدول مثلثاتی شناخته‌شده که هیپارخوس آن را گردآوری کرده، مقادیر تابع وتر برای هر 5° و 7° درجه مشخص شده‌است. در قرن دوم میلادی بطلمیوس اسکندرانی جدول جامع‌تری از مقادیر تابع وتر در کتاب خود در نجوم ارائه کرد. در جدول بطلمیوس، مقدار وتر هر زاویه‌ای در بازه $\frac{1}{4}$ درجه تا 180° درجه با فواصل یک و نیم درجه‌ای آمده‌است. بطلمیوس به جای دایره واحد از دایره‌ای به قطر 120° استفاده کرده و دقت مقادیر تابع وتر هم تا رقم دوم مبنای 60° (ثانیه) بعد از اعشار است.

با توجه به اهمیت و نقش زاویه در هنر و معماری بویژه معماری سنتی مقاله و کتاب‌های متعددی در خصوص روش‌های دستیابی به زاویه‌هایی مثل زاویه 18° درجه توسط مهندسان و معماران قدیم نوشته شده است. همینطور با داشتن زاویه‌های قابل تثلیث به راحتی می‌توان بعضی از چندضلعی‌های منتظم مثل 120° ضلعی و 60° ضلعی و 40° ضلعی و ... منتظم را ترسیم کرد. در این خصوص روش ترسیم پنج ضلعی منتظم محاط در دایره توسط ریاضی دانی به نام هربرت ریچموند بیان شده که منجر به دستیابی به زاویه مرکزی 72° درجه شده است.

تحقیقاتی در زمینه ویژگی‌های نقاط تقاطع وترهایی که با شعاع دایره زاویه 30° درجه می سازند توسط غ. سلطانی ابری و همکارانش انجام شده است که منجر به تهیه و پذیرش مقالاتی در مهمترین کنفرانس‌های ریاضی ایران گردیده است. [۱-۷]

در این مقاله نیز خاصیت دیگری از نقاط تقاطع وترهایی که با شعاع دایره زاویه 30° می سازند را اثبات نموده و نشان می‌دهیم این نقاط تقاطع، طوری آن وترها را به دو قسمت نامساوی تقسیم می کنند که محیط دایره شامل 3 وتر مساوی با قسمت کوچک و 3 وتر مساوی با قسمت بزرگتر آن وتر می شود.

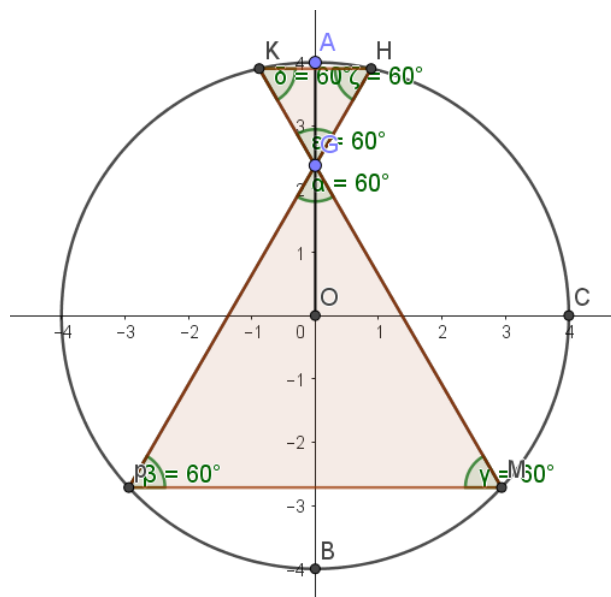
* سخنران
پست الکترونیک: gholamrezasoltaniabri@yahoo.com (غلامرضا سلطانی ابری)، farokhzad@gku.ac.ir_r (راضیه فرخ‌راد رستمی)



شکل ۱: تقاطع وتر و شعاع

۲. نتایج اصلی

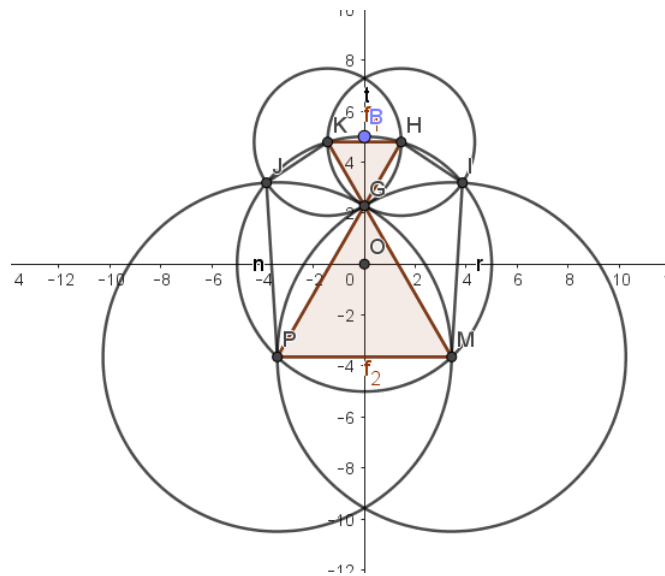
در شکل ۱ بزرگترین وترى که با شعاع OA زاویه 30° می سازد وتر زاویه 18° یا قطر DE است و کوچکترین وترى که در نقطه A با شعاع OA زاویه 30° می سازد وتر زاویه 12° یعنی وتر AF است که محیط دایره شامل سه وتر 12° می شود و قطر DE به دو قسمت مساوی یعنی دو شعاع OD و OE تقسیم شده و محیط دایره شامل شش وتر مساوی یعنی سه وتر برابر با شعاع OD و سه وتر برابر با شعاع OE است. به غیر از این دو حالت سایر وترهایی که با شعاع OA زاویه 30° می سازند نقطه تقاطع، آن وترها را به دو قسمت نامساوی تقسیم می کند.



شکل ۲: تقاطع وتر و شعاع

حال با توجه به شکل ۲، دو وتر HP و KM را که در نقطه G با شعاع OA زاویه 30° درجه می سازند و قرینه هم هستند در نظر می گیریم. در این حالت $GH = GK$ و $GP = GM$ و زاویه $K\hat{G}H = P\hat{G}M = 60^\circ$ درجه است. بنابراین اگر وترهای KH و PM را رسم کنیم مثلث های $\triangle KGH$ و $\triangle PGM$ که متساوی الساقین هستند و زاویه راس آنها 60° است متساوی الاضلاع نیز بوده و زاویه های قاعده آنها 60° می شود. در این حالت کمان های KP و HM مقابل به زاویه های محاطی $K\hat{H}P = K\hat{H}M = 60^\circ$ بوده و زاویه مرکزی آنها 120° می شود. بنابراین مجموع زاویه های مرکزی کمان های KH و PM نیز باید 120° باشند، تا مجموع آنها 360° بشود؛ یعنی زاویه های $H\hat{O}M + K\hat{O}P + (K\hat{O}H + P\hat{O}M) = 360^\circ$.

خاصیت مهم دیگر از دایره ها با توجه به شکل ۲ می توان ثابت کرد که برای هر دو وتر دلخواه HP و KM که همدیگر را در نقطه ای مانند G قطع می کنند به طوریکه اضلاع مثلث بزرگتر برابر شعاع دایره باشند زاویه مرکزی مقابل به اضلاع KG و HG به کمک عمود منصف شعاع موازی با KG و HG قابل تثلیث می باشد.



شکل ۳: خاصیت تقاطع وتر و شعاع

با توجه به شکل ۳ و موارد مطروحه و استدلال به عمل آمده می توان نتیجه گرفت که وتر زاویه های بین 120° تا 180° را می توان طوری به دو قسمت نامساوی تقسیم کرد که محیط آن دایره شامل سه وتر برابر با قسمت کوچک و سه وتر برابر با قسمت بزرگتر آن وتر می شود.

سپاسگزاری

- ۱- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور استاد بزرگوار جناب پروفسور امید علی شهنی کرمزاده
- ۲- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور ریاست محترم شاخه ریاضی فرهنگستان علوم ایران استاد بزرگوار جناب پروفسور مگردیچ تومانیان
- ۳- گرامی می دارم یاد و خاطره استاد بزرگوار جناب شادروان پروفسور سید علی رضا اشرفی را به عنوان حامی و مشوق اینجانب در ادامه تحقیقات ریاضی

مراجع

- [۱] غلامرضا سلطانی ابری. روشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق ۱۷ ضلعی منتظم. در پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه کاشان، جلد ۲، صفحات ۳۹۰۷-۳۹۱۰، کاشان، ایران، شهریور ۱۳۹۹.

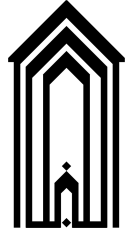
- [۲] غلامرضا سلطانی ابری. روشی برای اثبات قضیه مورلی به کمک دایره های متناظر و متقارن. در پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه کرمان، جلد ۲، کرمان، ایران، شهریور ۱۴۰۰.
- [۳] غلامرضا سلطانی ابری. خاصیت نقاط تقاطع بعضی از وترها با شعاع دایره. در سومین همایش ملی ریاضی و آمار، دانشگاه گنبد کاووس، جلد ۲، صفحات ۷-۹، گنبدکاووس، ایران، اسفند ۱۴۰۰.
- [۴] غلامرضا سلطانی ابری. قضیه مورلی و سه مثلث متساوی الاضلاع دیگر. در پنجاه و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه علم و فناوری مازندران، جلد ۲، بهشهر، ایران، شهریور ۱۴۰۱.
- [۵] غلامرضا سلطانی ابری. روشی برای ترسیم دقیق 2040° ضلعی منتظم و به تبع آن 17° ضلعی منتظم و چند ضلعی های مضرب $3 \times 17^\circ$ و $5 \times 17^\circ$. در دوازدهمین سمینار هندسه و توپولوژی، دانشگاه تبریز، جلد ۲، تبریز، ایران، مرداد ۱۴۰۲.
- [۶] غلامرضا سلطانی ابری و راضیه فرخزاد رستمی. روشی برای ترسیم زاویه های 36° و 72° . در چهل و نهمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه علم و صنعت، جلد ۲، تهران، ایران، شهریور ۱۳۹۷.
- [۷] غلامرضا سلطانی ابری و محمد فزونی. روشی برای تثلیث یک زاویه با استفاده از دو دایره. در چهل و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه بوعلی سینای همدان، جلد ۲، همدان، ایران، شهریور ۱۳۹۶.



دانشگاه گنبدکائوس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، DE-154، صص. ۱۷۸-۱۸۳

مروری بر مدل سازی ریاضی سرطان

فاطمه ناصری راد*، آ

آکارشناس ارشد آمار ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور مرکز تهران شرق

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: مدل سازی ریاضی کنترل بهینه معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی مدل سازی فازی معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی فازی سلول‌های بنیادی سرطانی پارادوکس رشد تومور	بعد از بیماری های قلبی-عروقی که به عنوان نخستین عامل مرگ و میر در دنیا شناخته شده‌اند، از سرطان به عنوان دومین عامل پیشناز مرگ یاد می‌شود. استفاده از مدل‌سازی ریاضی به درک بهتر روند پدیده‌های بیولوژیکی پیچیده مانند سرطان کمک کرده و افق‌های جدیدی را پیش روی جامعه پزشکی قرار می‌دهد. به همین دلیل استفاده از مدل‌های ریاضی برای نشان دادن دینامیک سلول‌های سیستم ایمنی و سلول‌های توموری در سال‌های اخیر به طور چشم‌گیری افزایش یافته است. در این پژوهش، با بیان مقدمات ریاضی و مفاهیم پزشکی مورد نیاز، مروری بر مدل سازی ریاضی سرطان شده است.
2020 MSC:	
34B16	
34B40	
65M70	

۱. مقدمه

امروزه بیش از ۲۰۰ نوع سرطان با منشأ، علائم، درمان‌های مختلف و بروز در رده‌های سنی متفاوت، شناسایی شده است. ضمن این که هنوز علت اصلی بروز این بیماری مشخص نیست، اما عوامل متعددی مانند سن، جنس، ژنتیک، مصرف الکل، سیگار، مصرف غذاهای فراوری شده، کم تحرکی، استرس، رژیم غذایی، آلودگی هوا و ... در بروز سرطان مؤثر هستند. اهمیت موضوع به عنوان یک معضل جهانی دانشمندان ریاضی را بر آن داشت تا در کنار متخصصان علوم پزشکی در خصوص این بیماری مطالعه و تحقیق کنند. استفاده از مدل سازی ریاضی با در نظر گرفتن بیماری به صورت یک سیستم دینامیکی یعنی پدیده‌ای که با زمان تغییر می‌کند، به شکل یک دستگاه شامل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات انتگرال، به فهم بهتر دینامیک بیماری کمک کرده و می‌تواند در دستیابی سریع تر به اهداف درمان‌های بهینه شامل کنترل بیماری، بررسی تأثیر دارو، کاهش مقاومت دارویی و ... مؤثر باشد [۴]. این مقاله به بررسی چند مدل سازی ریاضی سرطان از دیدگاه های مختلف می پردازد.

روش AVK : اساس روش AVK که در سال ۲۰۰۷، توسط دکتر علی وحیدیان کامیاد و همکاران برای کنترل بهینه‌ی مسائل غیرخطی با پارامترهای نادقیق مطرح شد، این است که با استفاده از یک تابع تعریف شده به نام خطا، مساله کنترل را به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی معادل تبدیل می‌کند که جواب آن بهترین جواب تقریبی مساله اصلی در فضای L_p است. همچنین خطای این تقریب قابل محاسبه و کنترل است.

*سخنران

پست الکترونیک: f.naserirad@gmail.com (فاطمه ناصری راد)

مفاهیم فازی: برای نشان دادن مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \{(\chi, \tilde{A}(\chi)) | \chi \in X\}$$

اصل گسترش: اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی است. این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیرفازی به گونه‌ای که به صورت کمیت‌های فازی درآیند. از این اصل می‌توان برای تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی استفاده کرد.

سرطان: بقراط دانشمند یونانی، شاید اولین کسی است که در حدود ۵۰۰ سال قبل از میلاد مسیح کلمه‌ی کارسینوما را برای سرطان به کار برده و راجع به آن تحقیقاتی نموده است. بعدها جالینوس در قرن دوم میلادی، ابوبکر البخاری در قرن چهارم هجری، بوعلی سینا در قرن دهم و... در مورد سرطان بیانیه‌هایی داشته‌اند. تا قرن هجدهم آنچه راجع به این بیماری گفته شده است نظریات ساده‌ای بیش نبوده، اما از اواسط این قرن مطالعات جدی تری شروع گردید.

بدن انسان از میلیاردها سلول ساخته شده که با یکدیگر گروه بندی شده و بافت‌ها و اندام‌های مختلف را می‌سازند. سلول، واحد اساسی و ساختمانی حیات است که همانند کیسه‌ای حاوی پروتئین‌ها، اسیدهای چرب، کربوهیدرات‌ها و ماده حیات به نام *DNA* است. قابلیت رشد، تکثیر و همانندسازی از ویژگی‌های سلول‌های زنده است. ساختار ژنتیکی هر سلول سرعت رشد، تقسیم و زمان مرگ آن را تعیین می‌کند. در حالت طبیعی، جایگزینی سلول‌های فرسوده با سلول‌های جوان از یک برنامه منظم تبعیت کرده و فرایند رشد و تجدید سلولی به طور ثابت در بدن اتفاق می‌افتد. گاهی اوقات این روند طبیعی از کنترل خارج شده و سلول‌های فرسوده از بین نمی‌روند و توده‌ای را تشکیل می‌دهند. دکتر دونالد هندرسون^۱ استاد دانشگاه جان هاپکینز^۲، سرطان را این گونه تعریف می‌کند: سرطان عبارتست از ناهماهنگی میان رشد و مرگ سلول‌ها که نتیجه آن انباشته شدن تعداد بیش از حد سلول هاست که منجر به تسخیر، تخریب و فاسد شدن بافت‌های سالم می‌شود.

از اجتماع این سلول‌های سرطانی و تخریب سلول‌های بافت‌های سالم، توده‌ای به نام تومور ایجاد می‌شود که می‌تواند خوش خیم یا بدخیم باشد. تومورهای خوش خیم تومورهایی هستند که معمولاً محدود به قسمت کوچکی از بدن هستند و اغلب به آهستگی رشد می‌کنند، حتی ممکن است پس از مدتی رشدشان قطع شود. این تومورها به بافت‌های دیگر حمله نمی‌کنند، اما به بافت‌های مجاور فشار وارد می‌آورند. از نظر شکل ظاهری شبیه دست مشت شده یا یک نارنگی هستند و معمولاً با برداشتن کامل تومور با عمل جراحی، دیگر عود نمی‌کنند و بیمار کاملاً بهبود می‌یابد.

ایمونولوژی: هر عاملی که در بدن به عنوان عامل بیگانه شناسایی شود و سیستم ایمنی بدن را تحریک و به واکنش وادار نماید، آنتی ژن نامیده می‌شود. هزاران نوع آنتی ژن وجود دارد که قدرت آن‌ها در تحریک سیستم ایمنی به عوامل مختلفی از جمله جنس، وزن ملکولی، ساختمان فضایی و تعداد جایگاه‌های آنتی ژنتیکی آن‌ها مربوط می‌شود. سیستم ایمنی شبکه پیچیده‌ای از اجزای سلولی و ملکولی است که عملکرد اصلی آن تشخیص بافت‌ها و سلول‌های خودی از آنتی ژن‌ها و دفاع از بدن در مقابل آن هاست و به همین منظور در سراسر بدن حضور دارند. پاسخ جامع و هماهنگ سیستم ایمنی در مقابل آنتی ژن‌ها، پاسخ ایمنی نامیده می‌شود که قادر به محافظت از فرد در مقابل عوامل بیگانه می‌باشد و طبعاً منجر به عدم ابتلا، بهبودی و مصونیت بدن در مقابل تهاجم بعدی می‌شود. سیستم ایمنی از لحاظ عملکرد به دو صورت سیستم ایمنی ذاتی (طبیعی) و سیستم ایمنی تطبیقی (اکتسابی) تقسیم می‌شوند [۶].

همانطور که نمودار شماتیک در شکل ۲ نشان می‌دهد اگر اتصال یک سلول ایمنی به یک سلول توموری با نرخ k_1 انجام شود، سه حالت ممکن اتفاق بیافتد:

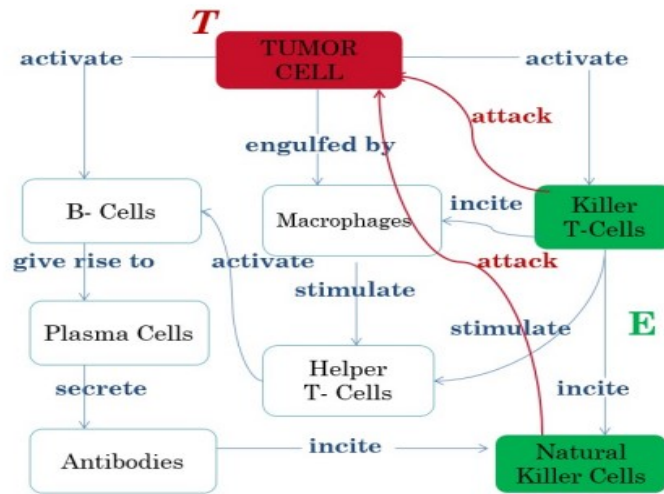
- هر دو سلول بدون هیچ گونه تغییری از واکنش خارج شوند که این جدایی با نرخ k_1 اتفاق می‌افتد.
- در اثر این ترکیب سلول توموری از بین رفته و سلول ایمنی بدون هیچ تغییری از واکنش خارج شود که این حالت با نرخ k_2 نشان داده شده است.
- بعد از انجام واکنش سلول ایمنی غیرفعال شده و سلول توموری بدون هیچ تغییری اتصال را ترک کند که میزان این حالت با k_2 نشان داده شده است. پارامترهای k_1, k_2, k_3 ثابت‌های مثبت هستند (۶۰).

۲. انواع مدل‌های ریاضی رشد تومور

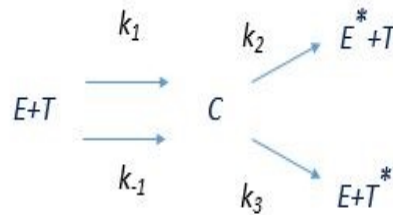
محاسبه یا تخمین تعداد سلول‌های توموری به دلیل تغییرات پیوسته سلول‌ها بر حسب زمان، بسیار دشوار است. سلول‌های توموری ممکن است در حال رشد و تکثیر یا در حالت استراحت و غیرفعال باشند یا بمیرند. از این رو توصیف تعداد سلول‌های توموری به صورت یک تابع بر حسب

^۱Donald Henderson

^۲Johns Hopkins University



شکل ۱: تعامل سلول توموری و سلول ایمنی



شکل ۲: برخورد سلول توموری و سلول ایمنی

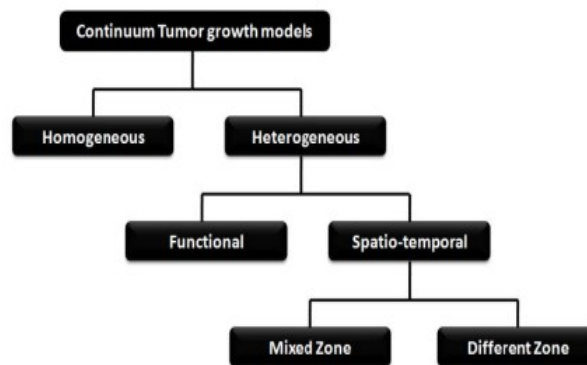
زمان بسیار چالش برانگیز است. به همین دلیل مدل‌های ریاضی متفاوتی جهت بررسی نحوه رشد تومورهای سرطانی از دیدگاه‌های مختلف نوشته شده که هر یک دارای مزایا و معایب خاص خود است [۸].

به طور کلی مدل‌های ریاضی را می‌توان به دو دسته مدل‌های گسسته، که در آن‌ها تعداد یا چگالی سلول‌ها در نقاط متساوی الفاصله برحسب زمان در نظر گرفته می‌شود و مدل‌های پیوسته، که در آن‌ها تغییرات تعداد یا چگالی سلول‌ها به طور پیوسته برحسب زمان بررسی می‌شود، تقسیم کرد. در مدل‌های پیوسته، تومور به صورت مجموعه‌ای از سلول‌ها در نظر گرفته شده که تغییرات چگالی یا حجم آن مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد و معادلات برای انواع مختلف سلول‌ها یا سلول‌ها در ناحیه‌های متفاوت تومور نوشته می‌شوند، بنابراین تک تک سلول‌ها به طور جداگانه قابل ردیابی و پیگیری نیستند. مزیت اصلی مدل‌های پیوسته که معمولاً با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی یا معادلات انتگرال-دیفرانسیل توصیف می‌شوند، این است که پارامترهای کمتری دارند و آن‌ها را می‌توان با توجه به نتایج مطالعات بالینی تخمین زد [۹].

مدل‌های پیوسته رشد تومور را می‌توان به دو صورت همگن و ناهمگن تقسیم کرد (شکل ۳).

در مدل‌های همگن که ابتدایی‌ترین مدل‌ها هستند با فرض یکسان بودن همه سلول‌های توموری و نادیده گرفتن تأثیر مکان، دینامیک رشد تومور به صورت یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شود. همه این مدل‌ها تجربی هستند و از برازش داده‌های نتایج حاصل از مطالعات انجام شده در شرایط کنترل شده آزمایشگاهی بدست آمده‌اند و نمی‌توانند مکانیسم حاکم بر سلول‌های توموری را نشان دهند [۵].

مدل‌های ناهمگن بر اساس این فرض بنا شده‌اند که انواع مختلفی از سلول‌ها در تومور وجود دارند. با توجه به تنوع سلول‌های موجود و برحسب میزان توجه به مکان آن‌ها در مدل، می‌توان مدل‌های ناهمگن را به دو دسته کلی مدل‌های تابعی و مدل‌های مکانی-زمانی تقسیم کرد. در مدل‌های تابعی فرض بر این است که انواع مختلف سلول‌ها بر اساس سینتیک سلولی در ناحیه‌های مختلف قرار گرفته‌اند. لازم به ذکر است که سینتیک سلولی، تحول یک سلول از یک مرحله به مرحله دیگر و بسته به شرایط محیطی است. اما مدل‌های مکانی-زمانی تغییرات انواع



شکل ۳: دسته‌بندی مدل‌های رشد تومور

مختلف سلول‌ها را با در نظر گرفتن مکان و زمان و میزان دسترسی به مواد غذایی بررسی می‌کنند [۲].

۳. مدل‌های دینامیکی سلول‌های ایمنی و سلول‌های توموری

از اوایل دهه ۱۹۹۰ مدل‌های ریاضی متعددی با توصیف جنبه‌های متفاوتی از سرطان مانند دینامیک‌های رشد تومور، آنژیوژنیز^۳ (رگ زایی یا شکل‌گیری مویرگ‌های جدید)، تعامل سلول‌های سیستم ایمنی و سلول‌های توموری، دینامیک‌های درمان سرطان، پروتکل‌های تجویز دارو و در نظر گرفتن هدف‌های مختلف مانند مینیمم کردن تعداد سلول‌های توموری، کاهش عوارض ناشی از بیماری و درمان تحمیل شده بر بیمار و افزایش سطح کیفیت زندگی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند [۱]. در این مقاله به اختصار سه مدل ریاضی که به خوبی تعامل بین سیستم ایمنی و سلول‌های توموری را بیان می‌کنند و در واقع پایه و اساس مدل‌های دیگر هستند را مرور می‌کنیم.

۱.۳. مدل لوتکا-ولترا^۴

ایده‌ی استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی در ریاضیات زیستی به حدود سال‌های ۱۹۲۰ برمی‌گردد که لوتکا و ولترا یک مدل ریاضی ساده را برای بیان تئوری دینامیک جمعیت معرفی کردند. داستان از این قرار است که فرض کنید جمعیت شکارچی‌ها $y(t)$ و جمعیت شکارها $x(t)$ در یک جنگل باشد. همچنین فرض کنید جمعیت شکار و شکارچی‌ها همگن و به اندازه کافی بزرگ باشند، بنابراین می‌توان آن‌ها را به صورت توابعی پیوسته برحسب زمان در نظر گرفت [۳]. اگر

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$$

تغییرات جمعیت در طول یک دوره زمانی مشخص Δt باشند، بدون کم شدن از کلیت قرار می‌دهیم $\Delta t = 1$ به طور مثال دوره زمانی یک روز باشد. با جانشین کردن $\Delta x(t), \Delta y(t)$ با مشتقات آن‌ها، معادلات لوتکا-ولترا که یک زوج معادله دیفرانسیل غیرخطی هستند، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

که در آن α, β, c, d اعدادی مثبت هستند.

در معادله شکار (معادله اول) با فرض این که ذخیره غذایی شکارها محدودیتی ندارد، رشدنمایی شکارها را با عامل خطی αx نشان می‌دهیم. همچنین با فرض این که کاهش شکارها فقط توسط شکارچی‌ها است و میزان شکار شدن آن‌ها بستگی به میزان برخورد آن‌ها دارد از عامل منفی، $-\beta xy$ ، برای نشان دهنده میزان کاهش تعداد شکارها استفاده می‌کنیم.

³Angiogenesis

⁴Lotka-Volterra Model

در معادله دوم (شکارچی‌ها) عامل $cxly$ نشان دهنده رشد شکارچی‌ها و متناسب با تعداد شکارها و شکارچی‌ها است و عامل خطی منفی، $-dy$ متناظر با مرگ طبیعی شکارچی‌ها یا مهاجرت آنهاست. معادلات لوتکا-ولترا در عین سادگی رفتار کیفی و کمی همه جواب‌های تحلیلی و عددی را مشخص می‌کنند. نقاط

$$A = (0, 0), \quad B = \left(\frac{d}{c}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

نقاط تعادل سیستم هستند که با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین و با توجه به مثبت بودن پارامترها، هر دو نقطه، نقطه زینی (saddle point) هستند.

۲.۳. مدل کازنتسو^۵

در سال ۱۹۹۴، کازنتسو و همکارانش از ایده معادلات لوتکا-ولترا برای مدل سازی سرطان استفاده کردند که در آن $E(t)$ نشان دهنده سلول‌های سیستم ایمنی (شکارچی) و $T(t)$ سلول‌های توموری (شکار) است. این معادلات که شبیه معادلات لوتکا-ولترا هستند به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{dT}{dt} = aT\left(1 - \frac{T}{b}\right) - nET$$

$$\frac{dE}{dt} = s + p\frac{ET}{g+T} - mET - dE$$

که در آن s, p, m, n, d, a, n, b پارامترهای مثبت هستند. رشد تومور در مراحل ابتدایی تا زمانی که به اندازه‌ای بزرگ شود که قابل شناسایی باشد، به صورت نمایی است. در این حالت حجم آن تقریباً 1cm^3 است و حدود 10^8 سلول دارد. اما از این مرحله به بعد مدل رشد لجستیک با نتایج به دست آمده از آزمایشات تطابق بیشتری دارد. به همین دلیل کازنتسو و همکارانش در این مدل، به جای رشد نمایی شکار در معادله لوتکا-ولترا، از رشد لجستیک، $aT\left(1 - \frac{T}{b}\right)$ که به واقعیت نزدیکتر است برای نشان دادن میزان رشد سلول‌های توموری استفاده کرده‌اند که در آن a ماکزیمم نرخ رشد و b میزان اشباع نهایی سلول‌های توموری است. عامل $-nET$ ، نیز نشان دهنده کاهش تعداد سلول‌های توموری در اثر برخورد با سلول‌های ایمنی است. در معادله دوم که مربوط به سلول‌های ایمنی است، S میزان تکثیر نرمال و dE میزان آپوپتوز یا مرگ طبیعی سلول‌های ایمنی است. همچنین mET میزان مرگ سلول‌های ایمنی به دلیل برخورد با سلول‌های توموری را نشان می‌دهد و جمله $p\frac{ET}{g+T}$ بیانگر میزان افزایش تعداد سلول‌های ایمنی در پاسخ به حضور سلول‌های توموری و مشهور به رشد Michaelis-Menten است.

مدل کازنتسو ویژگی‌های مهمی از رشد تومور مانند وابستگی چگالی را به خوبی نشان می‌دهد. وابستگی چگالی بیانگر این مطلب است که اگر چگالی جمعیت پایین یا بالا باشد، دینامیک جمعیت، چگالی را به سمت بزرگترین نقطه تعادل سیستم که همان اشباع نهایی است، هدایت می‌کند. در معادله رشد سلول‌های توموری، عامل $\left(1 - \frac{T}{b}\right)$ نشان دهنده وابستگی چگالی است که با افزایش جمعیت T ، کاهش پیدا می‌کند. همچنین نتایج حاصل از این مدل نوسانات طولانی مدت رشد سلول‌های سرطانی را نشان می‌دهد که با نتایج بالینی مشاهده عود سرطان در آزمایشات مربوط به سرطان خون کاملاً تطابق دارد. یکی دیگر از ویژگی‌های مدل کازنتسو این است که می‌تواند سطح بحرانی سلول‌های ایمنی در بدن را پیش‌بینی کند. اگر تعداد سلول‌های سیستم ایمنی از سطح بحرانی کمتر شود، دیگر رشد سلول‌های توموری با پاسخ سلول‌های ایمنی قابل کنترل نیست. به همین دلیل از این مدل در روش ایمنی درمانی استفاده می‌شود. بسته به رابطه بین ضرایب تعداد نقاط تعادل سیستم از ۰ نقطه تعادل تا ۳ نقطه تعادل متغیر خواهد بود [۷].

۳.۳. مدل کریشنر-پانتا^۶

در سال ۱۹۹۸، کریشنر و پانتا با مطرح کردن یک معادله سوم شامل میزان تغییرات سائیتوکاین‌های مؤثر که در بررسی ارتباطات درون سلولی و سیستم ایمنی به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، مدل کازنتسو را تعمیم دادند. در این مدل سلول‌های توموری به صورت یک متغیر پیوسته، از نظر تعداد به اندازه کافی زیاد و به طور کلی همگن در نظر گرفته شده که غلظت آن‌ها را با $T(t)$ نشان می‌دهیم. غلظت سلول‌های ایمنی یا سلول‌های مؤثر که به دلیل وجود سلول‌های توموری تحریک شده‌اند و آماده پاسخ دهی به آنتی‌ژن (سلول‌های توموری) و از نظر تعداد به اندازه کافی زیاد هستند با $E(t)$ و $C(t)$ نیز غلظت ملکول‌های مؤثر یا همان سائیتوکاین‌ها را نشان می‌دهد. معادلاتی که تعامل بین این سه نوع

⁵Kuznetsov

⁶Kirschner - Panetta Model

متغیر را توصیف می‌کنند به عنوان مدل KP به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= cT - \mu_1 E + \frac{p_1 EC}{g_1 + C} + s_1 \\ \frac{dT}{dt} &= r_1 T(1 - bT) - \frac{aET}{g_2 + T} \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{p_2 ET}{g_3 + T} + s_2 - \mu_2 C\end{aligned}$$

که در آن s, p, m, n, d, a, n, b پارامترهای مثبت هستند. معادله اول میزان تغییرات سلول‌های سیستم ایمنی، E را توصیف می‌کند: عامل cT نشان دهنده افزایش سلول‌های سیستم ایمنی بر اثر تحریک به دلیل وجود سلول‌های توموری است که در آن پارامتر c به عنوان آنتی ژن‌سپتیه یا شاخص آنتی ژنیک تومور شناخته می‌شود که یکی از مهمترین ویژگی‌های سلول‌های توموری و نشان دهنده‌ی میزان تفاوت ساختار و بیگانگی آنها با سلول‌های خودی بدن است. جمله‌ی دوم میزان مرگ طبیعی یا آپوپتوز سلول‌های سیستم ایمنی، عامل $\frac{p_1 EC}{g_1 + C}$ میزان میزان افزایش تکثیر سلول‌های ایمنی به دلیل وجود سایتوکاین^۷ اینترلوکین^۸، S_1 رشد نرمال سلول‌های سیستم ایمنی را نشان می‌دهد. در معادله دوم تغییراتی که در سلول‌های توموری برحسب زمان اتفاق می‌افتد توصیف می‌شود: عامل $r_1 T(1 - bT)$ رشد لجستیک سلول‌های توموری و جمله‌ی $\frac{p_2 ET}{g_3 + T}$ میزان سایکوتین تولیدشده توسط سلول‌های ایمنی و عامل آخر زوال سایتوکاین برحسب نیمه عمر را نشان می‌دهد. آنالیز کیفی مدل KP که از مدل کازنتسو سخت‌تر و پیچیده‌تر است نتایج جالبی را هم از نظر پزشکی و هم از دیدگاه ریاضی نشان می‌دهد [۹].

مراجع

- [1] Arciero, J., Jackson, T., Kirschner, D. A mathematical model of tumor-immune evasion and siRNA treatment, *Discrete Continuous Dynamical Syst.*, 4 (2004), 39-58.
- [2] Byrne, H., Drasdo, D. (2009). Individual-based and continuum models of growing cell populations: a comparison. *Journal of mathematical biology*, 58, 657-687.
- [3] Ganguly, R., Puri, I. K. (2007). Mathematical model for chemotherapeutic drug efficacy in arresting tumour growth based on the cancer stem cell hypothesis. *Cell proliferation*, 40(3), 338-354.
- [4] Maddalena, L. (2014). Analysis of an integro-differential system modeling tumor growth. *Applied Mathematics and Computation*, 245, 152-157.
- [5] Rivaz, A., Azizian, M., Kamyad, A. V., Zadeh, S. Z. (2018). A full fuzzy generalized mathematical model of tumor growth and its analysis. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 35(6), 6453-6460.
- [6] Ward, J. P., King, J. R. (1997). Mathematical modelling of avascular-tumour growth. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, 14(1), 39-69.
- [7] Weekes, S. L., Barker, B., Bober, S., Cisneros, K., Cline, J., Thompson, A., ... Enderling, H. (2014). A multicompartment mathematical model of cancer stem cell-driven tumor growth dynamics. *Bulletin of mathematical biology*, 76, 1762-1782.
- [8] Weinan, E., Engquist, B., Li, X., Ren, W., Vanden-Eijnden, E. (2007). Heterogeneous multiscale methods: a review. *Communications in computational physics*, 2(3), 367-450.
- [9] Zeinali, M., Shahmorad, S., Mirnia, K. (2013). Fuzzy integro-differential equations: Discrete solution and error estimation. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 10(1), 107-122.

⁷Cytokine

⁸Interleukin



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، DE-261، صص. ۱۸۴-۱۹۲

انواع جواب های سالیتمونی جدید برای معادله کوندواسخائوس

مصطفی اسلامی*، سمیرا حیدری آ

آگروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

چکیده	اطلاعات مقاله
معادله کوندو-اسخائوس حالت خاصی از معادله غیرخطی شرودینگر هست. این معادله، یک معادله مهم در فیزیک کوانتوم است که مدل سازی پالسهای نوری را توصیف می کند. هدف اصلی این مطالعه، بدست آوردن مجموعه ای متنوع از جواب های موج برای این معادله است. برای این کار از روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته که یک روش قدرتمند است استفاده خواهیم کرد. این روش به ویژه در مسائل با انتقال انرژی یا تغییرات شدید در سیستم های کوانتومی مفید است و ممکن است به توصیف دقیقتری از حالت های پایه و انحراف های انرژی کمک کند. با توجه به پیچیدگی محاسباتی بالا، نیاز اصلی برای به کارگیری روش پیشنهادی، استفاده از یک نرم افزار محاسباتی کارآمد مانند Mathematica Wolfram است.	واژه های کلیدی: روش تابع نمایی گویا تعمیم یافته MGERFM معادله کوندو-اسخائوس 2020 MSC: 34B16 34B40 65M70

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده های جالب فیزیکی، می توانند با معادلات دیفرانسیل غیرخطی مدل سازی شوند [۱۷]. در بررسی این معادلات در چند دهه های اخیر، روش های بسیار مؤثری برای به دست آوردن جواب های دقیق آنها ارائه شده است، مانند روش پراکنندگی معکوس [۱۹]، روش سینوس-کسینوس [۲۰]، روش تجزیه آدومین [۱۳]، روش تابع نمایی [۱۸]، روش دوخطی هیروتا [۱۴]، روش اغتشاش هموتوبی [۱۶] روش تابع \tanh [۱۲].

چندی پیش، قنبری و همکاران روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته (GERFM) را برای به دست آوردن جواب های دقیق معادله شرودینگر غیرخطی پیشنهاد کردند [۸]. و بعد از آن به طور سیستماتیک توسط ایشان و افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفت [۱-۷، ۹-۱۱] در این تحقیق روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته (MGERFM) که در سال ۲۰۲۳ توسط قنبری و همکاران برای معادله غیرخطی شرودینگر بکار برده شد [۶]، برای حل معادله کوندو-اسخائوس که در پدیده های فیزیکی کاربرد دارد مورد تحقیق و پژوهش قرار خواهد گرفت.

۲. شرح مختصری از روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته (MGERFM)

در این بخش، الگوریتم روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته (MGERFM) برای حل معادله کوندو-اسخائوس مورد بحث قرار گرفته است. مراحل اصلی این الگوریتم به شرح زیر است.

- مرحله اول: در این مقاله، معادله کوندو-اسخائوس را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱۵]:

$$iu_t + u_x x - 2\sigma |u|^2 u + \delta^2 |u|^4 u + 2i\delta u(|u|^2)_x = 0, \sigma < 0, \quad (1)$$

*سخنران

پست الکترونیک: mostafa.eslami@umz.ac.ir (مصطفی اسلامی)، samira_heidari178@yahoo.com (سمیرا حیدری)

- **مرحله دوم:** برای یافتن جواب‌های موج سیار برای معادله (۱)، ما تبدیل موج زیر را معرفی می‌کنیم:

$$u(x, t) = u(\zeta)e^{i\theta}, \quad \theta = \alpha x + \beta t, \quad \xi = ik(x - \gamma at), \quad (2)$$

که در آن عدد موج سالیتون β به عنوان بسامد سالیتون است. بنابراین، معادله (۱) با استفاده از تبدیلات (۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$-(\beta + \alpha^2)u - k^2 u'' - \gamma \sigma u^3 + \delta^2 u^5 - \gamma \delta k u^2 u' = 0, \quad (3)$$

در معادله (۳) با استفاده اصل قانون عدد تعادل بین مشتق مرتبه بالاتر یعنی u'' و عبارت غیرخطی u^5 خواهیم داشت $m_0 + 2 = 5m_0$ که $m_0 = \frac{1}{2}$ به دست می‌آوریم. لذا از فرم $u(\xi) = v(\zeta)^{\frac{1}{2}}$ استفاده کرده و معادله (۳) را به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$-\lambda \sigma v v(\zeta)^3 + \gamma \delta^2 v v(\zeta)^4 - \lambda k \delta v v^2 v'(\zeta) + k v v'(\zeta)^2 - \gamma v v(\zeta)(\gamma(\alpha^2 + \beta) + k v v''(\zeta)) = 0. \quad (4)$$

که در این صورت $m_0 = 1$ بدست می‌آید.

- **مرحله سوم:** فرض کنیم که جواب معادله (۴) را می‌توانیم در سری متناهی زیر بیان کنیم:

$$v(\zeta) = k_0 + \sum_{l=1}^{m_0} k_l \left(\frac{\theta'(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)^l + \sum_{l=1}^{m_0} h_l \left(\frac{\theta'(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)^{-l}, \quad (5)$$

که در آن m_0 یک عدد صحیح مثبت است که در اینجا برابر ۱ می‌باشد و k_l, h_l ثابت‌هایی هستند که بعداً مشخص می‌شوند. به طوری که $\theta(\zeta)$ به صورت زیر است:

$$\theta(\zeta) = \frac{p_1 \exp(q_1 \zeta) + p_2 \exp(q_2 \zeta)}{p_3 \exp(q_3 \zeta) + p_4 \exp(q_4 \zeta)}, \quad (6)$$

که در آن $p_i, q_i, (1 \leq i \leq 4)$ و همینطور $k_0, k_1, h_1, (1 \leq i \leq 4)$ مجهولاتی می‌باشند که باید مشخص شوند.

- **مرحله چهارم:**

با جایگذاری معادله (۵) در معادله (۴) یک معادله چند جمله‌ای $F(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0$ بر حسب $Q_l = \exp(q_l \zeta)$ برای $l = 1, 2, 3, 4$ بدست خواهد آمد.

- **مرحله پنجم:** با برابر صفر قرار دادن تمام ضرایب $\left(\frac{\theta'(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)^l$ برای $l = 1, 2, 3, 4$ ما یک دستگاه جبری غیرخطی از ثابت‌های مجهول به دست آوریم و صریحاً آن‌ها را پیدا کنیم، و جواب‌های موج سیار را برای معادله (۱) به دست می‌آوریم.

در اینجا، با بکارگیری روش شرح داده شده، نتایج جدید زیر برای معادله (۱) معرفی خواهند شد.

خانواده ۱:

با در نظر گرفتن $[p_1 p_2 p_3 p_4] = [1, 2, 0, -1]$ و $[q_1 q_2 q_3 q_4] = [2, 1, -2, 0]$ در معادله (۶) داریم:

$$\theta(\zeta) = -e^\zeta (2 + e^\zeta), \quad (7)$$

خواهیم داشت:

$$v(\zeta) = -\frac{(-5 + \sqrt{17})\sigma}{2(2 + e^\zeta)\delta^2}, \quad (8)$$

این نتایج همراه با معادله‌ی (۶) منجر به ساختار زیر می شود:

$$k = \frac{19\sigma - 11\sqrt{7}\sigma}{32\delta - 10\sqrt{7}\delta},$$

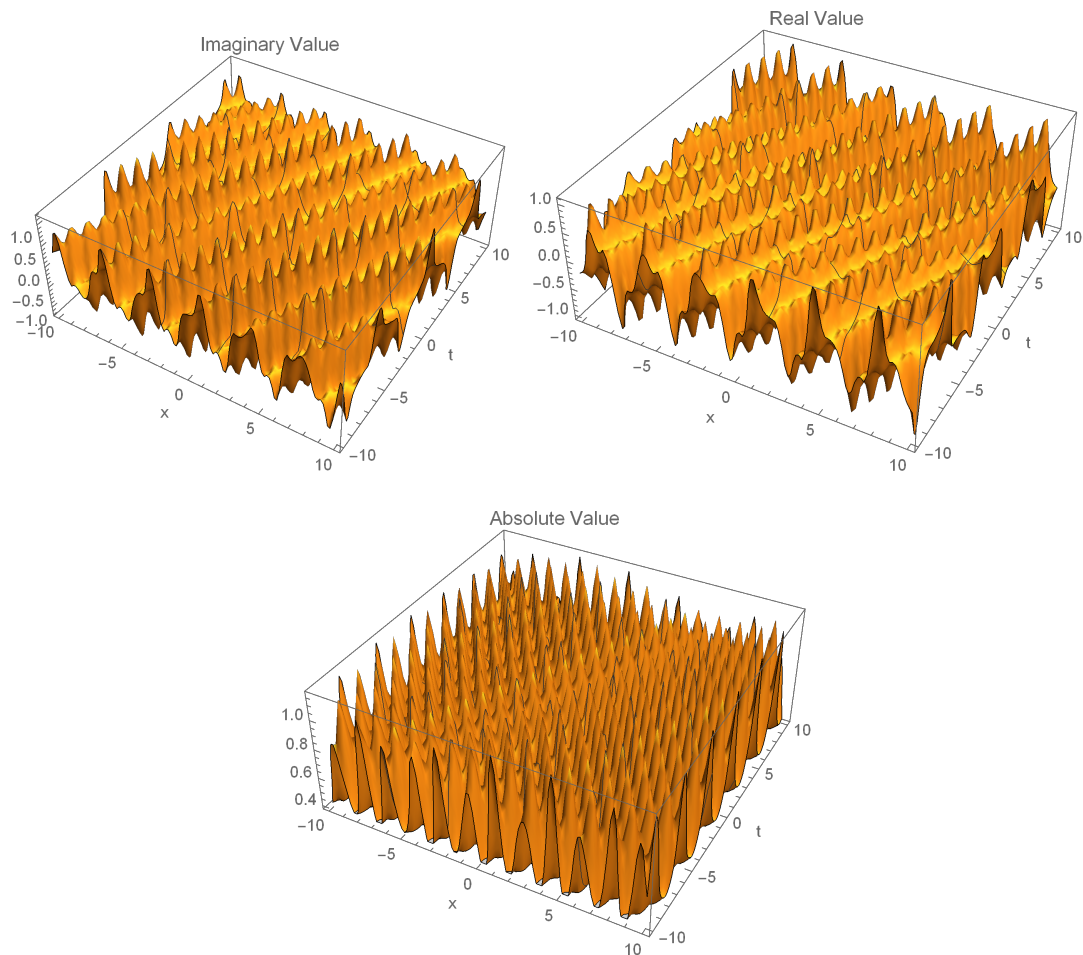
$$\beta = \frac{8(3275 - 1231\sqrt{7})\alpha^2\delta^2 + (4483 - 1649\sqrt{7})\sigma^2}{8(-3275 + 1231\sqrt{7})\delta^2},$$

$$h_1 = 0, \kappa_0 = -\frac{(-5 + \sqrt{7})\sigma}{2\delta^2}, \kappa_1 = \frac{(-5 + \sqrt{7})\sigma}{4\delta^2}, \quad (9)$$

بنابراین، یک راه حل سالیتون برای معادله‌ی (۱) به دست می آید.

$$u_1(\zeta) = \frac{(-5 + \sqrt{7})e^{i(x\alpha - t\alpha^2 - \frac{(4+\sqrt{7})t\sigma^2}{8\delta^2})}}{2(2 + e^{-\frac{i(1+\sqrt{7})(x-2t\alpha)\sigma}{2\delta}})}\sigma, \quad (10)$$

رفتار دینامیکی معادله‌ی (۱۰) در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده‌ی ۱

خانواده ۲:

با در نظر گرفتن $[p_1 p_2 p_3 p_4] = [0, 2, 1, 1]$ و $[q_1 q_2 q_3 q_4] = [1, -1, -1, 1]$ در معادله (۶) داریم:

$$\theta(\zeta) = 1 - \tanh(\zeta), \quad (11)$$

خواهیم داشت:

$$v(\zeta) = -\kappa_1 (1 + \tanh(\zeta)) \quad (12)$$

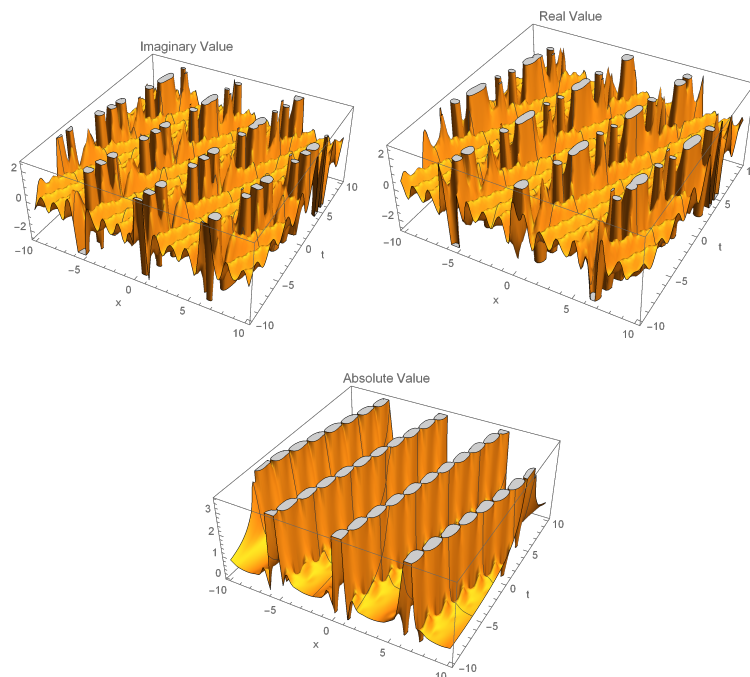
این نتایج همراه با معادله (۶) منجر به ساختار زیر می شود:

$$\begin{aligned} k &= -\delta\kappa_1 - \sqrt{(\kappa_1(\delta^\gamma\kappa_1 - \sigma))}, \\ \beta &= -\alpha^\gamma + \kappa_1(-2\delta^\gamma\kappa_1 - 2\delta\sqrt{(\kappa_1(\delta^\gamma\kappa_1 - \sigma))} + \sigma), h_1 = 0, \kappa_0 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین، یک راه حل سالیتون برای معادله (۱) به دست می آید.

$$u_1(\zeta) = ie^{i(x\alpha - t\alpha^\gamma + t\kappa_1(-2\delta(\delta\kappa_1 + \sqrt{(\kappa_1(\delta^\gamma\kappa_1 - \sigma))}) + \sigma))} \kappa_1 (i + \tan((x - 2t\alpha)(\delta\kappa_1 + \sqrt{(\kappa_1(\delta^\gamma\kappa_1 - \sigma))}))), \quad (14)$$

رفتار دینامیکی معادله (۱۴) در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده ۲

خانواده ۳:

با در نظر گرفتن $[p_1 p_2 p_3 p_4] = [1, -2, 1, 0]$ و $[q_1 q_2 q_3 q_4] = [0, 2, -1, 1]$ در معادله (۶) داریم:

$$\theta(\zeta) = e^\zeta - 2e^{3\zeta}, \quad (15)$$

خواهیم داشت:

$$v(\zeta) = \frac{2(-58 + 13\sqrt{19})\sigma}{17\delta^2(-8 + 13\cosh(2\zeta) + 11\sinh(2\zeta))}, \quad (16)$$

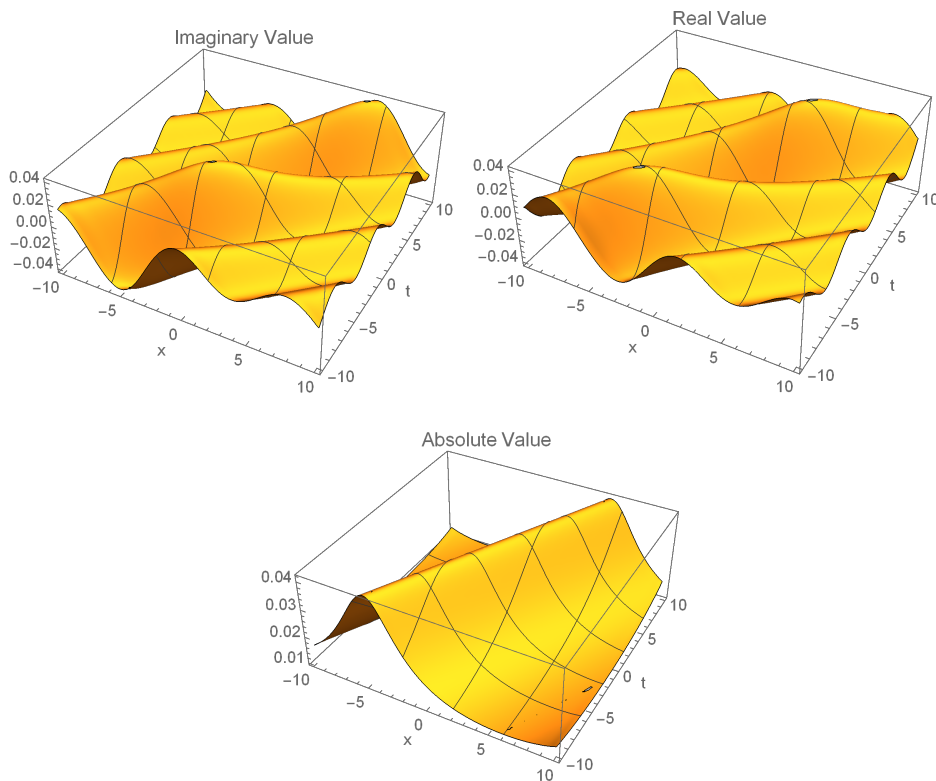
این نتایج همراه با معادله‌ی (۶) منجر به ساختار زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{(1185736805 - 272026682\sqrt{19})\sigma}{34(-86437841 + 19830200\sqrt{19})\delta^2}, \\
 \beta &= \frac{-1156(-1713449368150585091 + 39309224404907853\sqrt{19})\alpha^2\delta^2 + (322433439127774079028 - 13971304061907395113\sqrt{19})\sigma^2}{1156(86437841 - 19830200\sqrt{19})^2(-58 + 13\sqrt{19})\delta^2}, \\
 h_1 &= \frac{3(-58 + 13\sqrt{19})\sigma}{68\delta^2}, \kappa_0 = \frac{(58 - 13\sqrt{19})\sigma}{17\delta^2}, \kappa_1 = \frac{(-58 + 13\sqrt{19})\sigma}{68\delta^2},
 \end{aligned} \tag{17}$$

بنابراین، یک راه حل سالیتون برای معادله‌ی (۱) به عنوان به دست می‌آید.

$$u_r(\zeta) = \frac{2(-58 + 13\sqrt{19})e^{i(x\alpha - t\alpha^2 + \frac{(-10 + 2\sqrt{19})t\sigma^2}{1156\delta^2})} \sigma}{17\delta^2(-8 + 13\cos(\frac{(-5 + 2\sqrt{19})(x - 2t\alpha)\sigma}{17\delta}) + 11\sin(\frac{(-5 + 2\sqrt{19})(x - 2t\alpha)\sigma}{17\delta}))}, \tag{18}$$

رفتار دینامیکی معادله‌ی (۱۸) در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده‌ی ۳

خانواده‌ی ۴:

با در نظر گرفتن $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [-1, i, 1, -i]$ و $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [i, i, 0, 1]$ در معادله‌ی (۶) داریم:

$$\theta(\zeta) = -\frac{(1+i)e^{i\zeta}}{i+e^\zeta}, \tag{19}$$

خواهیم داشت:

$$v(\zeta) = \frac{i((1+2i) + 2e^\zeta)h_1}{-2 - (2-4i)e^\zeta + (2+2i)e^{2\zeta}}, \tag{20}$$

این نتایج همراه با معادله‌ی (۶) منجر به ساختار زیر می‌شود:

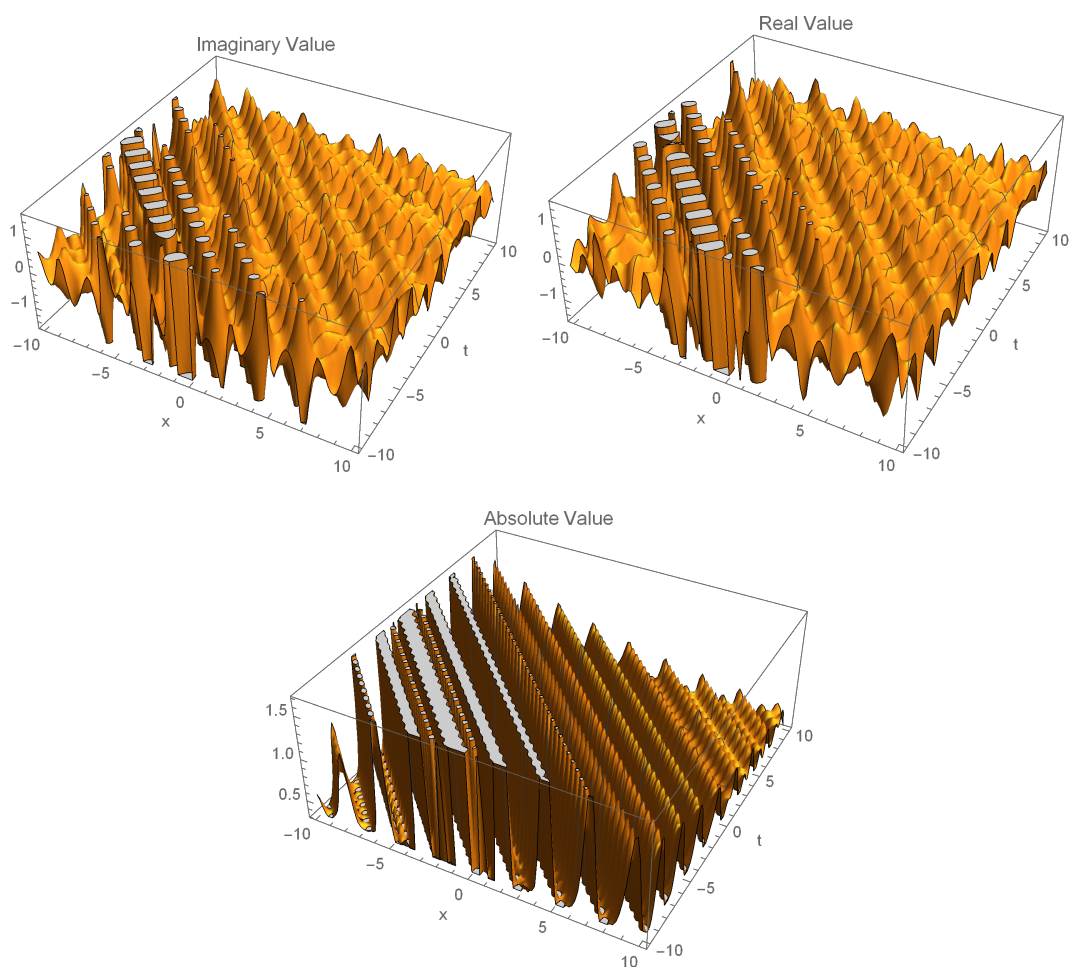
$$k = \frac{1}{\delta^2}(-609h_1\delta - \sqrt{h_1\sqrt{(349873h_1\delta^2 + 74360\sigma)}}, \kappa_0 = h_1, \kappa_1 = \frac{h_1}{\gamma},$$

$$\beta = -\alpha^2 + \frac{h_1(91171h_1\delta^2 + 8788\sigma + 155\sqrt{h_1\sqrt{(349873h_1\delta^2 + 74360\sigma)}})}{5408}, \quad (21)$$

بنابراین، یک راه حل سالیتون برای معادله‌ی (۱) به دست می‌آید.

$$u_1(\zeta) = \frac{ie^{i(x\alpha - t\alpha^2 + \frac{h_1(91171h_1\delta^2 + 8788\sigma + 155\sqrt{h_1\sqrt{(349873h_1\delta^2 + 74360\sigma)}})}{5408})}}{-(\gamma - (\gamma - \gamma i)e^{-\frac{1}{\delta^2}i(x-2t\alpha)(609h_1\delta + \sqrt{h_1\sqrt{(349873h_1\delta^2 + 74360\sigma)}})} + (\gamma + \gamma i)e^{-\frac{1}{\delta^2}i(x-2t\alpha)(609h_1\delta + \sqrt{h_1\sqrt{(349873h_1\delta^2 + 74360\sigma)}})})} h_1, \quad (22)$$

رفتار دینامیکی معادله‌ی (۲۲) در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده‌ی ۴

خانواده‌ی ۵:

با در نظر گرفتن $[p_1 p_2 p_3 p_4] = [1 + i, -1, 1, 0]$ و $[q_1 q_2 q_3 q_4] = [1, -1 + i, -1, 1]$ در معادله‌ی (۶) داریم:

$$\theta(\zeta) = -e^{i\zeta} + (1 + i)e^{\zeta}, \quad (23)$$

خواهیم داشت:

$$v(\xi) = -\frac{(3+i)e^{2i\xi}k_1 - (1-3i)e^{(2+i)\xi}k_1}{e^{2i\xi} - (3-i)e^{(2+i)\xi} + 4e^{2\xi}}, \quad (24)$$

این نتایج همراه با معادله‌ی (6) منجر به ساختار زیر می‌شود:

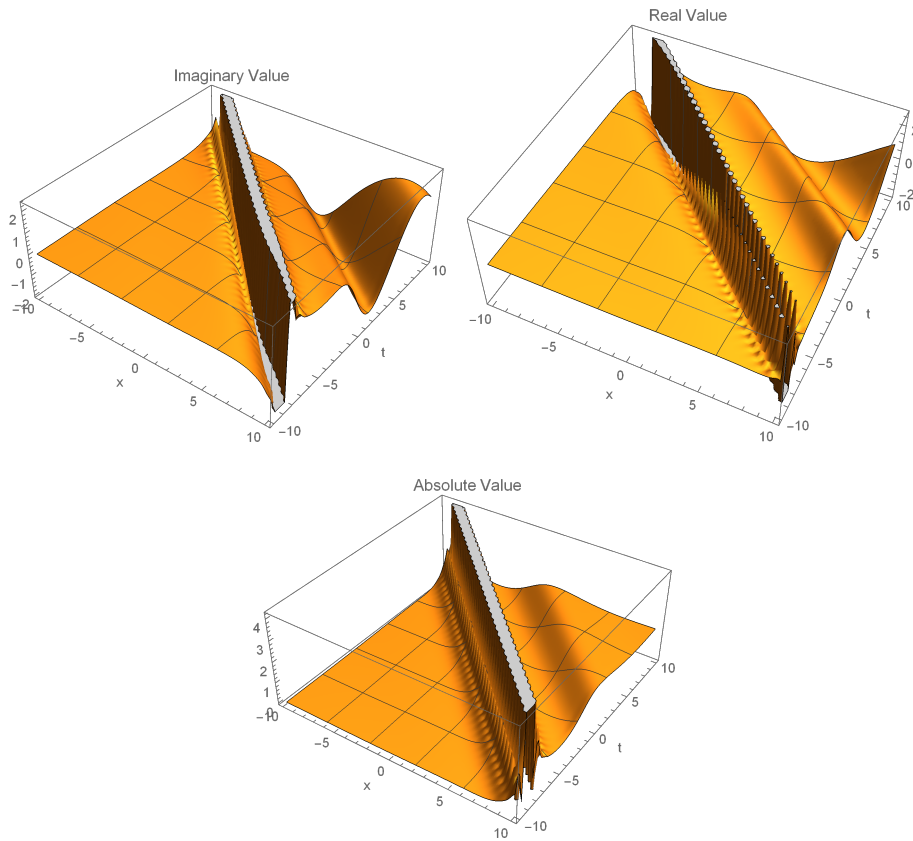
$$k = \frac{1}{1.01}(119\delta k_1 - \sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))}), h_1 = 2k_1, k_0 = -3k_1$$

$$\beta = -\alpha^2 + \frac{5k_1(-35373\delta^2 k_1 + 265\delta\sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))}) + 6060\sigma}{20402}, \quad (25)$$

بنابراین، یک راه حل سالیئون برای معادله‌ی (1) به دست می‌آید.

$$u_2(\zeta) = \frac{(1-3i)e^{\frac{i(x\alpha - t\alpha^2 + (5k_1(-35373\delta^2 k_1 + 265\delta\sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))}) + 6060\sigma))}{20402}}}{1 + e^{(-\frac{\gamma}{1.01} - \frac{\gamma i}{1.01})(x-2t\alpha)(-119\delta k_1 + \sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))})}} (-i + e^{(-\frac{1}{1.01} - \frac{\gamma i}{1.01})(x-2t\alpha)(-119\delta k_1 + \sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))})})k_1}{(4 - (3-i)e^{(\frac{1}{1.01} + \frac{\gamma i}{1.01})(x-2t\alpha)(-119\delta k_1 + \sqrt{(k_1(1.0525\delta^2 k_1 - 9292\sigma))})})k_1)}, \quad (26)$$

رفتار دینامیکی معادله‌ی (26) در شکل 5 نشان داده شده است.



شکل 5: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده‌ی 5

خانواده‌ی 6:

با در نظر گرفتن $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [-1 + i, 2i, 0, -i]$ و $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [1, -1, -i, 1]$ در معادله‌ی (6) داریم:

$$\theta(\zeta) = (-1 - i) - 2e^{-2\zeta}, \quad (27)$$

خواهیم داشت:

$$v(\zeta) = -\frac{(\frac{1}{\gamma} + \frac{i}{\gamma})(1 \cdot i + e^{\gamma\zeta})h_1}{(1-i) + e^{\gamma\zeta}}, \quad (28)$$

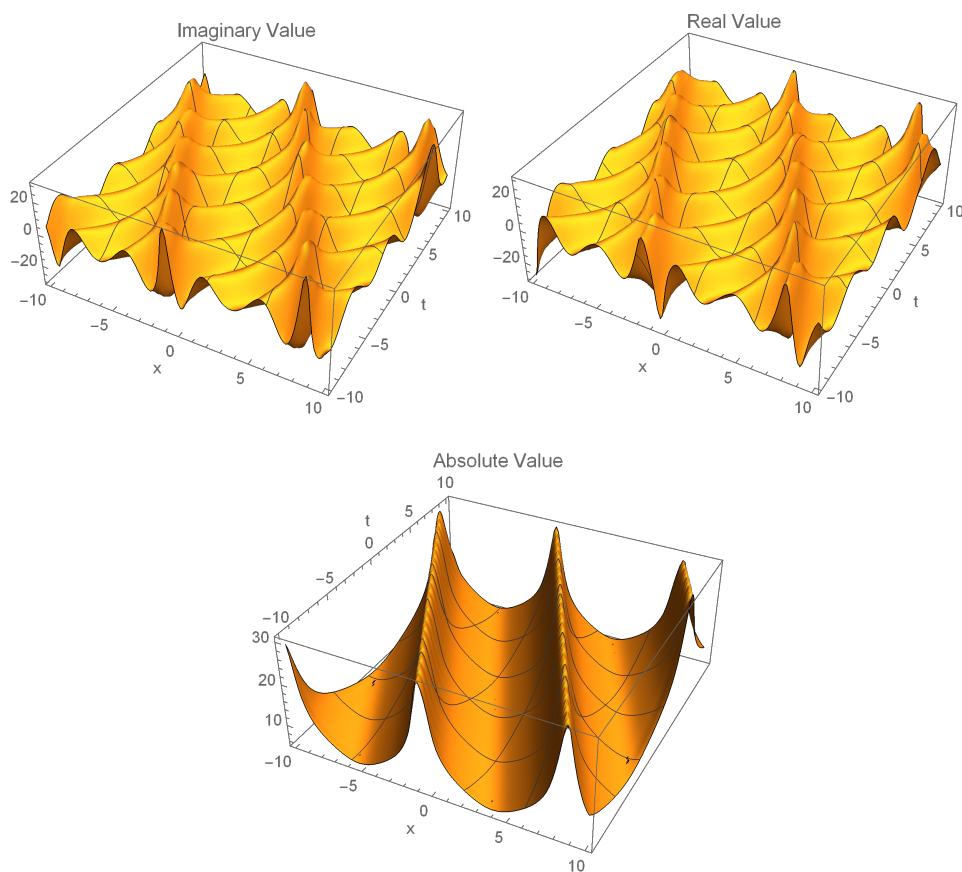
این نتایج همراه با معادله‌ی (۶) منجر به ساختار زیر می‌شود:

$$k = \delta h_1 \delta - \frac{9\sigma}{\gamma\delta}, \beta = -\alpha^\gamma + \delta \circ h_1 \delta^\gamma - \gamma \circ h_1 \sigma + \frac{\lambda \sigma^\gamma}{\gamma\delta^\gamma}, \kappa_0 = h_1, \kappa_1 = -h_1, \quad (29)$$

بنابراین، یک راه حل سالیتون برای معادله‌ی (۱) به دست می‌آید.

$$u_\gamma(\xi) = \frac{(\frac{1}{\gamma} + \frac{i}{\gamma})e^{i(x\alpha + t(-\alpha^\gamma + \delta \circ h_1 \delta^\gamma - \gamma \circ h_1 \sigma + \frac{\lambda \sigma^\gamma}{\gamma\delta^\gamma}))}(1 \cdot i + e^{\gamma i(x - \gamma t\alpha)(\delta h_1 \delta - \frac{9\sigma}{\gamma\delta})})h_1}{(1-i) + e^{\gamma i(x - \gamma t\alpha)(\delta h_1 \delta - \frac{9\sigma}{\gamma\delta})}}, \quad (30)$$

رفتار دینامیکی معادله‌ی (۳۰) در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶: نمودار گرافیکی مربوط به خانواده‌ی ۶

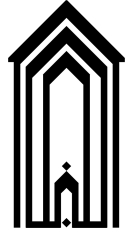
۳. نتیجه‌گیری

در دهه‌های اخیر، در زمینه‌ی برخی از معادلات دیفرانسیل پیشرفته‌هایی شگرف صورت گرفته است. ما نیز در این مطالعه، به دنبال جواب‌های دقیق معادله‌ی کوندو-اسخائوس بودیم. برای اینکار از روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته استفاده کرده و ۶ حالت مختلف را در نظر گرفتیم. و جواب‌هایی

مانند سالیتون روشن، سالیتون تاریک و انواع دیگر از آنها را برای این معادله پیدا کردیم. یکی از مزایای اصلی این روش، بکار بردن ساختارهای ساده‌ای است که از ابتدای روش تعیین می‌شوند. نتایج مهم شامل انعطاف بیشتر در انتخاب توابع گویا، دقت بالا در جواب، و قابلیت اعمال در شرایط مختلف فیزیکی است. با استفاده از نرم افزارهای متمتیکا (این کار باعث اطمینان بیشتر در نتایج است) می‌توان به سهولت نتایج را تجزیه و تحلیل کرده و به نتایج معنی‌داری در زمینه‌های فیزیک نوری رسید. در سال‌های گذشته، روش تابع گویا نمایی تعمیم یافته یک روش قدرتمند برای بررسی جواب‌های تحلیلی دقیق برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بوده که در این کار ما برای معادله‌ی کوندو-اسخانوس استفاده کردیم.

مراجع

- [1] Karmina K Ali, R Yilmazer, H Bulut, Tolga Aktürk, and MS Osman. Abundant exact solutions to the strain wave equation in micro-structured solids. *Modern Physics Letters B*, 35(26):2150439, 2021.
- [2] Noufe H Aljahdaly, Amjad F Alyoubi, and Aly R Seadawy. Solitary wave solutions of the ionic currents along microtubule dynamical equations via analytical mathematical method. *Open Physics*, 19(1):494–503, 2021.
- [3] Yan Cao, Foroud Parvaneh, Sagr Alamri, Ali A Rajhi, and Ali E Anqi. Some exact wave solutions to a variety of the schrödinger equation with two nonlinearity laws and conformable derivative. *Results in Physics*, 31:104929, 2021.
- [4] Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY and Uğur BAYRAKCI. A study on the solutions of (1+ 1)-dimensional mikhailov-novikov-wang equation. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 3(2):101–110, 2022.
- [5] Behzad Ghanbari. Abundant soliton solutions for the hirota-maccari equation via the generalized exponential rational function method. *Modern Physics Letters B*, 33(09):1950106, 2019.
- [6] Behzad Ghanbari and Dumitru Baleanu. Applications of two novel techniques in finding optical soliton solutions of modified nonlinear schrödinger equations. *Results in Physics*, 44:106171, 2023.
- [7] Behzad Ghanbari and JF Gómez-Aguilar. The generalized exponential rational function method for radhakrishnan-kundu-lakshmanan equation with β -conformable time derivative. *Revista mexicana de física*, 65(5):503–518, 2019.
- [8] Behzad Ghanbari and Mustafa Inc. A new generalized exponential rational function method to find exact special solutions for the resonance nonlinear schrödinger equation. *The European Physical Journal Plus*, 133(4):142, 2018.
- [9] Behzad Ghanbari and Chun-Ku Kuo. A variety of solitary wave solutions to the (2+ 1)-dimensional bidirectional sk and variable-coefficient sk equations. *Results in Physics*, 18:103266, 2020.
- [10] Behzad Ghanbari and Kottakkaran Sooppy Nisar. Determining new soliton solutions for a generalized nonlinear evolution equation using an effective analytical method. *Alexandria Engineering Journal*, 59(5):3171–3179, 2020.
- [11] B Günay, Chun-Ku Kuo, and Wen-Xiu Ma. An application of the exponential rational function method to exact solutions to the drinfeld-sokolov system. *Results in Physics*, 29:104733, 2021.
- [12] A Houwe, M Inc, SY Doka, B Acay, and LVC Hoan. The discrete tanh method for solving the nonlinear differential-difference equations. *International Journal of Modern Physics B*, 34(19):2050177, 2020.
- [13] Mukesh Kumar and Umesh. Recent development of adomian decomposition method for ordinary and partial differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8(2):81, 2022.
- [14] Xing Lü and Si-Jia Chen. Interaction solutions to nonlinear partial differential equations via hirota bilinear forms: one-lump-multi-stripe and one-lump-multi-soliton types. *Nonlinear Dynamics*, 103:947–977, 2021.
- [15] Jalil Manafian and Mehrdad Lakestani. Abundant soliton solutions for the kundueckhaus equation via $\tan(\phi(\xi))$ -expansion method. *Optik*, 127(14):5543–5551, 2016.
- [16] Mubashir Qayyum and Imbsat Oscar. Least square homotopy perturbation method for ordinary differential equations. *Journal of Mathematics*, 2021:1–16, 2021.
- [17] Yuan Shen, Bo Tian, Tian-Yu Zhou, and Xiao-Tian Gao. Nonlinear differential-difference hierarchy relevant to the ablowitz-ladik equation: Lax pair, conservation laws, n-fold darboux transformation and explicit exact solutions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 164:112460, 2022.
- [18] Yi Tian and Jun Liu. A modified exp-function method for fractional partial differential equations. *Thermal Science*, 25(2 Part B):1237–1241, 2021.
- [19] Nikolay K Vitanov, Zlatinka I Dimitrova, and Kaloyan N Vitanov. Simple equations method (sesm): Algorithm, connection with hirota method, inverse scattering transform method, and several other methods. *Entropy*, 23(1):10, 2020.
- [20] Betül Sultan Yıldız, Nantiwat Pholdee, Sujin Bureerat, Ali Rıza Yıldız, and Sadiq M Sait. Sine-cosine optimization algorithm for the conceptual design of automobile components. *Materials Testing*, 62(7):744–748, 2020.



یک روش گرادیان مزدوج کارآمد با خاصیت همگرایی قوی برای بهینه‌سازی ناهموار

عاطفه بای^{*}، زهره اکبری^بآ دانشجوی ارشد دانشگاه مازندران
استادیار دانشگاه مازندران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: روش گرادیان مزدوج بهینه‌سازی ناهموار همگرایی سراسری بازسازی تصویر	در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار با استفاده از تابع منظم‌ساز مورآ - یاشیدا ارائه می‌گردد. روش‌های جستجوی خطی که توسط روش پیشنهادی معرفی شده‌اند، شرط کاهش کافی را برآورده می‌کنند و مهمتر از آن منجر به ایجاد یک ناحیه اعتماد مناسب می‌شوند. این روش به طور کلی تحت فرضیات استاندارد همگرا می‌باشد. توانایی و کارایی این رویکرد، برای حل برخی مسائل مهندسی دنیای واقعی از حوزه پردازش تصویر مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج، عملکرد بهتر این روش را نشان می‌دهد.
2020 MSC: 90C06 90C26 65Y20	

۱. مقدمه

مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min\{f(x) | x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (1)$$

که در آن تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است. بسته به نوع تابع هدف f ، مسئله (۱) به دو گروه بهینه‌سازی هموار و بهینه‌سازی ناهموار تقسیم می‌شود. یک مسئله چالش برانگیز در رابطه با مسئله (۱) زمانی است که تابع هدف، ناهموار و در مقیاس بزرگ باشد، مانند مسائل کنترل بهینه، پردازش تصویر و مسائل یادگیری ماشین. پردازش تصویر یک حوزه فعال تحقیقاتی است و کاربردهای زیادی در عکاسی، پزشکی، ستاره‌شناسی، صنعت و غیره دارد. روش‌های زیادی برای حل مسئله بهینه‌سازی ناهموار ارائه شده است، که می‌توان از روش زیرگرادیان [۲۱]، روش‌های دسته‌ای [۱۰]، الگوریتم‌هایی بر اساس روش‌های هموار [۱۹] و روش‌های مشتق آزاد [۳] به عنوان روش‌های مطرح برای حل مسئله بهینه‌سازی ناهموار نام برد. روش گرادیان مزدوج برای حل مسئله بهینه‌سازی ناهموار نیز پیشنهاد شده است [۷].

بازسازی یک تصویر واقعی از یک نسخه تار و آسیب‌دیده^۱ را می‌توان یکی از مهم‌ترین اهداف مسئله بهینه‌سازی ناهموار برشمرد. رایج‌ترین مدل مورد استفاده برای تصاویر آسیب‌دیده به دلیل مات شدن و نویز، مدل خطی زیر است:

$$y = Ax + \eta, \quad x \in \mathbb{R}^{mn},$$

^{*} سخنران

پست الکترونیک: atefebay28@gmail.com (عاطفه بای)، z.akbari@umz.ac.ir (زهره اکبری)

^۱Damaged

که در آن x یک بردار ستونی است که تصویر اصلی را نشان می‌دهد (x یک بردار از ستون‌های ماتریس تصویر X به ابعاد $m \times n$). مسئله بالا برای بازسازی تصویر اصلی x از y آسیب‌دیده به وسیله یک ماتریس مات A و یک بردار نویز η استفاده می‌شود. ماتریس A را می‌توان با یک تابع پخش نقطه^۲ (PSF) خاص به دست آورد. معمولاً یک PSF متناظر با هر نوع تاری وجود دارد [۱۱]. این مسئله می‌تواند به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر در نظر گرفته شود:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \frac{1}{\gamma} \|Ax - y\|_{\gamma}^{\gamma} + v\phi(x),$$

که در آن v یک پارامتر منظم‌ساز و ϕ یک عبارت منظم‌ساز است. برای مثال انتخاب $\phi(x) = \|x\|_1$ و $\phi(x) = \|x\|_2$ به ترتیب منجر به یک مسئله ناهموار یا هموار می‌شود. همانطور که می‌دانیم، بازسازی تصویر یک مسئله معکوس در مقیاس بزرگ است که بسیار بدوضع^۳ بوده و حل آن دشوار می‌باشد. بنابراین، طراحی روش‌های جدید برای حل این مسئله همچنان به عنوان یک موضوع تحقیقاتی مطرح است. در این مقاله، به حل مسئله بهینه‌سازی (۱) می‌پردازیم، که در آن f یک تابع محدب ناهموار است.

در دهه‌های اخیر، روش‌های گرادیان مزدوج به دلیل ویژگی‌های همگرایی موضعی و سراسری قوی و همچنین نیازمندی حافظه کم برای حل مسائل مقیاس بزرگ به طور گسترده‌ای توسط محققان به کار گرفته شده‌اند. تکرارهای گرادیان مزدوج معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad (2)$$

که در آن $\alpha_k > 0$ طول گام است و جهت جستجو d_k به صورت بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad (d_0 = -g_k), \quad (3)$$

که در آن $g_k = \nabla f(x_k)$ و β_k به عنوان پارامتر گرادیان مزدوج شناخته می‌شود. در واقع، انتخاب‌های مختلف β_k منجر به الگوریتم‌های گرادیان مزدوج مختلف با عملکرد متفاوت می‌شود. برخی از انتخاب‌های کلاسیک معروف β_k را همانطور که در زیر نشان داده شده است می‌توان در هستینز و استیفیل^۴ [۱۲] (HS)، فلچر و ریوز^۵ [۹] (FR)، پولاک و ریبیره و پولیاک^۶ [۲۰] (PRP)، فلچر^۷ [۸] (CD)، لیو و استوری^۸ [۱۷] (LS)، و دای و یوان^۹ [۶] (DY)، یافت:

$$\begin{aligned} \beta_k^{HS} &= \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}, & \beta_k^{FR} &= \frac{\|g_{k+1}\|_{\gamma}}{\|g_k\|_{\gamma}}, & \beta_k^{PRP} &= \frac{g_{k+1}^T y_k}{\|g_k\|_{\gamma}}, \\ \beta_k^{CD} &= \frac{\|g_{k+1}\|_{\gamma}}{-d_k^T y_k}, & \beta_k^{LS} &= \frac{g_{k+1}^T y_k}{-d_k^T y_k}, & \beta_k^{DY} &= \frac{\|g_{k+1}\|_{\gamma}}{d_k^T y_k}, \end{aligned}$$

که در آن $y_k := g_{k+1} - g_k$ و $\| \cdot \|$ نشان دهنده نرم اقلیدسی است. آندری [۱]، 40 نوع مختلف از این پارامترها، و بنابراین، 40 نوع متفاوت از الگوریتم‌های گرادیان مزدوج را معرفی کرد. مقالات زیادی وجود دارد که به انواع مختلفی از این روش‌ها پرداخته و آنها را به صورت عددی مورد مقایسه قرار داده است [۲، ۱۵]. اگرچه این روش‌ها در اصل برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار توسعه یافته‌اند، برخی از محققان اخیراً از آنها برای حل مسائل بهینه‌سازی محدب ناهموار استفاده کرده‌اند. برخی از روش‌های شناخته شده موجود برای حل مسائل بهینه‌سازی محدب ناهموار روش‌های زیرگرادیان و دسته‌ای^{۱۰} هستند [۱۶]. در اینجا برای حل مسئله، تابع هدف با استفاده از تکنیک منظم‌ساز موراً-یاشیدا^{۱۱} به تابع هموار تبدیل می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x), \quad (4)$$

که در آن تابع $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ منظم‌ساز موراً-یاشیدا f است که توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$F(x) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \{f(z) + \frac{1}{\gamma\lambda} \|z - x\|_{\gamma}\}, \quad (5)$$

²Point Spread Function

³Ill-conditioned

⁴Hestenes and Stiefel

⁵Fletcher and Reeves

⁶Polak and Ribiere and Polyak

⁷Fletcher

⁸Liu and Storey

⁹Day and Yuan

¹⁰Subgradient and bundle method

¹¹Moreau-Yosida

که در آن λ یک پارامتر مثبت است. مجموعه مینیمم‌کننده‌های (۱) با مجموعه مینیمم‌کننده‌های (۴) منطبق است. خوشبختانه، حتی زمانی که تابع f مشتق‌پذیر نباشد، F یک تابع محدب مشتق‌پذیر است. روش‌های تکراری مختلفی برای حل مسئله (۴) وجود دارد [۲۲-۲۴]. ویژگی‌های خوب روش‌های گرادیان مزدوج برای مسائل هموار، باعث تشویق به اصلاح این روش‌ها برای مسائل ناهموار می‌شود. ویژگی‌های اصلی روش ارائه‌شده در این مقاله عبارتند از:

- تمام جهات جستجو شرط کاهش کافی را برآورده می‌کنند.
 - تمام جهات جستجو در یک ناحیه اعتماد قرار دارند و نتایج همگرایی مناسبی را به وجود می‌آورند.
 - روش پیشنهادی تحت فرضیات خاص دارای همگرایی سراسری بوده و نتایج عددی عملکرد بهتری نسبت به برخی از روش‌های استاندارد موجود را نشان می‌دهند.
- سازماندهی مقاله به شرح زیر است: پس از یک یادآوری مختصر در بخش ۲، روش جدید را در بخش ۳ معرفی می‌کنیم. سپس، همگرایی آن را در بخش ۴ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت در بخش ۵، کاربرد الگوریتم را در مسئله بازسازی تصویر نشان می‌دهیم.

۲. یادآوری مختصر

در ادامه، به بیان ویژگی‌های اصلی منظم‌ساز مورآ-باشیدا (۵) می‌پردازیم. می‌دانیم وقتی f محدب است، سمت راست عبارت (۵) خوش‌تعریف است و زمانی که محدب اکید است، یک مینیمم‌کننده یکتا دارد که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$p(x) = \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} \{f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2\}. \quad (6)$$

بنابراین، F را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$F(x) = f(p(x)) + \frac{1}{2\lambda} \|p(x) - x\|^2,$$

گرادیان آن نیز به صورت زیر است:

$$g(x) = \frac{x - p(x)}{\lambda}$$

$F(x)$ و $g(x)$ ویژگی‌های قابل توجهی دارند که برای مطالعه بیشتر می‌توان به مرجع [۱۴] مراجعه کرد. در ادامه برخی از آن‌ها بدون اثبات آورده شده‌است.

قضیه ۱۰۲. تابع F در (۵) مقدار متناهی دارد، محدب است و در همه جا مشتق‌پذیر است و گرادیان آن $g(x) = \frac{x - p(x)}{\lambda}$ است. علاوه بر این، به ازای تمام $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} (g(x_1) - g(x_2))^T (x_1 - x_2).$$

در نتیجه، g پیوسته لیپ‌شیتز سراسری با مقدار ثابت $\frac{1}{\lambda}$ است، یعنی

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x_1 - x_2\|.$$

در نهایت، عبارات زیر معادل هستند:

(i) x^* مینیمم‌کننده f است.

(ii) x^* مینیمم‌کننده F است.

(iii) $g(x^*) = 0$

(iiii) $x^* = p(x^*)$

اثبات. اثبات در [۱۳].

□

طبق قضیه رادماخر^{۱۲}، $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تقریباً در همه جا مشتق پذیر است و مجموعه زیر نا تهی و فشرده است

$$\partial_B g(x) = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} | V = \lim_{x_i \rightarrow x} \nabla g(x_i), x_i \in D_g\}$$

که در آن $\{g\}$ در x مشتق پذیر است $D_g = \{x \in \mathbb{R}^n | \dots\}$. توجه داشته باشیم که هر $V \in \partial_B g(x)$ یک ماتریس نیمه مثبت متقارن است، زیرا g گرادیان یک تابع محدب F است [۲۵]. برای محاسبه $F(x)$ و $g(x)$ باید $p(x)$ در (۶) را تقریب بزنیم. برخی از روش های کارآمد برای محاسبه $p(x)$ وجود دارد [۴، ۵]. به منظور ارائه یک الگوریتم گرادیان مزدوج کارا، فاطمی یک مسئله بهینه سازی را با ترکیب سه شرط زیر معرفی کرد [۷]:

$$\begin{aligned} d_{k+1}^T y_k &= 0, \\ d_i^T g_k &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \\ d_k^T g_k &\leq \eta \|g_k\|^2, \quad \text{یک ثابت مثبت است } \eta, \end{aligned}$$

که مرتبط با نظریه گرادیان مزدوج خطی هستند. مسئله به صورت زیر است

$$\min_{\beta_k} [g_{k+1}^T d_{k+1} + M((g_{k+1}^T s_k)^2 (d_{k+1}^T y_k)^2)],$$

که در آن $s_k := x_{k+1} - x_k$ است و M پارامتر جریمه است. با حل این مسئله و استفاده از شرط $B_{k+1} s_k = y_k$ یک β_k جدید به شرح زیر پیشنهاد می شود:

$$\beta_k = \frac{-1}{2M(1+t^2)} \frac{g_{k+1}^T d_k}{(y_k^T d_k)^2} + \frac{y_k^T g_{k+1}}{y_k^T d_k} - \frac{t}{1+t^2} \frac{s_k^T g_{k+1}}{y_k^T d_k}, \quad (7)$$

که در آن $t > 0$ تقریبی مناسب از طول گام α_k است. نشان داده شده که روش به دست آمده برای توابع معمولی همگرایی سراسری دارد و کارآمد است.

۳. نتایج اولیه

ویژگی های خوب روش ارائه شده در [۷] ما را مجاب می کند تا روش را اصلاح کنیم و آن را برای حل مسائل ناهموار بکار ببریم. با در نظر گرفتن $g_k = \nabla F(x_k)$ ، تعریف می کنیم:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k^N d_k \quad (d_0 = -g_0), \quad (8)$$

که

$$\beta_k^N = (y_k - \frac{1}{2M(1+t^2)} \frac{d_k}{T_k} - \frac{t}{1+t^2} s_k)^T \frac{g_{k+1}}{T_k}, \quad (9)$$

و

$$T_k = \max\{\gamma \|d_k\| \|y_k\|, \|d_k\| \|s_k\|, |d_k^T y_k|, \frac{d_k^T g_{k+1}}{2M((1+t^2)y_k - t s_k)^T g_{k+1}}\} \geq 0 \quad (10)$$

برای هر ثابت مثبت γ . تساوی (۹) نسخه اصلاح شده از (۷) است که برای مسائل ناهموار مناسب است و می خواهیم آن را به صورت زیر نشان دهیم.

لم ۱.۳. تکرارهای گرادیان مزدوج را بر اساس (۲) و (۸) با طول گام $\alpha_k > 0$ و β_k در (۹) در نظر بگیرید. سپس، برای یک اسکالر مثبت ثابت $0 < c < 1$ و انتخاب

$$M = \frac{2c}{((1+t^2)\|y_k\|)^2}, \quad (11)$$

در (۹) داریم

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -(1-c) \|g_{k+1}\|^2.$$

¹²Rademacher

به راحتی می توان فهمید که جاگذاری (۱۱) در (۹) و (۱۰) عبارت زیر را نتیجه می دهد:

$$\beta_k^N = \left(y_k - \frac{\|y_k\|^2 d_k}{\gamma c} \frac{d_k}{T_k} - \frac{t}{1+t} s_k \right)^T \frac{g_{k+1}}{T_k}, \quad (12)$$

که در آن

$$T_k = \max \left\{ \gamma \|d_k\| \cdot \|y_k\|, \|d_k\| \cdot \|s_k\|, |d_k^T y_k|, \frac{(1+t)\|y_k\|^2 d_k g_{k+1}}{\gamma c((1+t)y_k - t s_k)^T g_{k+1}} \right\}. \quad (13)$$

لم ۲.۳. برای جهت جستجو d_k که توسط (۸) و (۱۲) معرفی شده است، داریم

$$\|d_k\| \leq \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma c \gamma^2} \right) \|g_k\|.$$

۴. همگرایی سراسری

اکنون می خواهیم مطالب بخش های قبلی را برای معرفی الگوریتم گرادیان مزدوج جدید خلاصه کنیم.

الگوریتم ۱. الگوریتم گرادیان مزدوج جدید (NCG^{۱۳})

گام ۱: یک نقطه شروع $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و یک مقدار مناسب برای پارامترهای مثبت $\delta, \lambda, \gamma, \sigma < 1, c < 1, \epsilon < 1$ و انتخاب کنید و $g_0 = \nabla f(x_0)$ را محاسبه کنید و قرار دهید $d_0 = -g_0$ و $k = 0$.

گام ۲: اگر $\|g_k\| < \epsilon$ ، متوقف شوید. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

گام ۳: طول گام α_k را با استفاده از جستجوی خطی آرمیژو زیر محاسبه کنید:

$$F(x_k + \alpha_k d_k) - F(x_k) \leq \sigma \alpha_k g_k^T d_k$$

که در آن $\alpha_k = \delta \times 2^{-i_k}$ و $i_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

گام ۴: محاسبه کنید: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$, $y_k = g_{k+1} - g_k$ و $s_k = x_{k+1} - x_k$.

گام ۵: پارامتر گرادیان مزدوج β_k^N را با استفاده از (۱۲) و (۱۳) محاسبه کنید.

گام ۶: جهت جستجو $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k^N d_k$.

گام ۷: قرار دهید $k := k + 1$ و به گام ۲ بروید.

کار اصلی مقاله، بررسی خاصیت همگرایی سراسری الگوریتم NCG است. فرضیات لازم برای اثبات همگرایی الگوریتم به صورت زیر است.

(i) مجموعه تراز $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) < F(x_0)\}$ کراندار است.

(ii) تابع F از پایین کراندار است.

(iii) دنباله $\{V_i\}$ کراندار است، یعنی یک مقدار ثابت L وجود دارد که برای هر i

$$\|V_i\| \leq L,$$

که در آن $V_i \in \partial_B g(x_i)$.

لم ۱.۴. با وجود فرضیات (i)، (ii) و (iii) برای دنباله $\{x_k\}$ و $\{\alpha_k\}$ تولید شده توسط الگوریتم NCG، برای k به اندازه کافی بزرگ، ثابت $\alpha_0 > 0$ وجود دارد، به طوری که

$$\alpha_k \geq \alpha_0.$$

حال نتیجه اصلی مقاله به صورت زیر بیان می شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنید که شرایط در لم (۱.۴) برقرار است. سپس داریم

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

علاوه بر این، هر نقطه حدی x_k یک جواب بهینه برای (۱) است.

۵. کاربرد الگوریتم در بازسازی تصویر

در این بخش، کارایی الگوریتم برای حل یک مسئله پرکاربرد دنیای واقعی نشان داده می‌شود و برنامه‌ای از بخش پردازش تصویر، یعنی رفع تاری تصویر بررسی می‌شود. الگوریتم NCG با الگوریتم ۴.۲ و الگوریتم ۳.۱ به ترتیب در [۲۴] و [۲۳] مقایسه می‌شود. در تصویر (۱)، تصاویر 256×256 ، لنا، مغز، مردعکاس و مگان با استفاده از ماتریس‌های تاپلیتاز شده‌اند. تصاویر (۱ج) و (۱آ) با حرکت خطی یک دوربین ۱۵ پیکسلی و تصاویر (۱ز) و (۱و) توسط حرکت خطی یک دوربین ۲۰ پیکسلی تار شده‌اند. سپس با استفاده از عبارت منظم‌ساز ناهموار $\phi(x) = \|x\|_1$ ، تصاویر بازسازی شده است. با توجه به [۲۶] بهترین مقدار پارامتر منظم‌ساز حدود ۰/۰۰۱ است و الگوریتم پس از ۵۰ تکرار متوقف می‌شود.

از جدول (۱) و شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) مشاهده می‌شود که همه الگوریتم‌ها می‌توانند مسئله بازسازی تصویر را با موفقیت حل کنند. اما می‌توانیم زمان CPU کمتری برای الگوریتم NCG در مقایسه با دو الگوریتم دیگر ببینیم. در نتیجه، این روش با انتخاب مناسب پارامترها برای حل مسائل دنیای واقعی نیز مؤثر است.

جدول ۱: مقایسه زمان CPU

مگان	مردعکاس	مغز	لنا	
۶۴۱،۴۳۰	۶۵۱،۰۹۵	۷۶۶،۲۳۳	۶۵۸،۹۸۵	الگوریتم NCG
۷۴۷،۷۶۳	۷۲۳،۲۳۲	۶۸۸،۶۴۸	۸۳۵،۲۲۶	الگوریتم ۴.۲ [۲۴]
۲۸۵۴،۷۵۱	۱۸۱۴،۴۷۶	۱۵۲۶،۴۵۶	۳۷۹۲،۸۰۱	الگوریتم ۳.۱ [۲۳]

۶. نتیجه‌گیری

در بسیاری از حوزه‌ها مانند پردازش تصویر و تصاویر پزشکی، روش‌های ریاضی جدید که مرحله پردازش را تسهیل و سرعت می‌بخشند، بسیار مورد توجه قرار می‌گیرند. در این مقاله یک روش گرادینان مزدوج کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار با استفاده از تابع منظم‌ساز موراً - یاشیدا ارائه گردید. این رویکرد خاصیت کاهش کافی را تضمین می‌کند و با فرضیات استاندارد دارای همگرایی سراسری است. در بخش نهایی، این روش برای حل مسئله تاری‌زدایی تصاویر به کار گرفته شد و نتایج گزارش شده نشان داد که از نظر مقایسه زمان CPU کارآمد است.

سپاس‌گزاری

از استاد راهنمای خود خانم دکتر زهره اکبری به خاطر راهنمایی‌های ارزنده تشکر ویژه دارم.

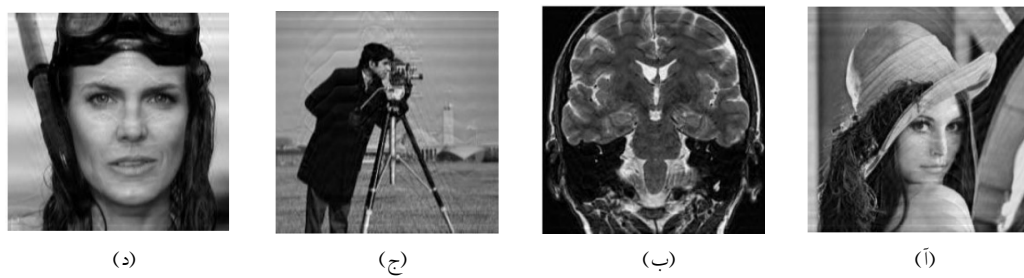
مراجع

- [1] Andrei, N. (2008). Conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization. A survey on their definition. Tech, rep, ICI Technical Report.
- [2] Andrei, N. (2013). A numerical study on efficiency and robustness of some conjugate gradient algorithms for large-scale unconstrained optimization. Stud. Inform. Control, 22, 259-284.
- [3] Bagirov, A. M., (2003). Continuous subdifferential approximations and their applications. Journal of Mathematical Sciences, 115, 2567-2609.
- [4] Conn, A.R., Gould, N.I., & Toint, P.L. (2000). Trust Region Methods, SIAM, Philadelphia.
- [5] Correa, R., & Lemarechal, C. (1993). Convergence of some algorithms for convex minimization, Math.Program, 62, 261-275
- [6] Dai, Y.H., & Yuan, Y. (1999). A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. SIAM J, Optim, 10, 177-182.
- [7] Fatemi, M. (2016). A new efficient conjugate gradient method for unconstrained optimization, J.Comput. Appl. Math, 300, 207-216.
- [8] Fletcher, R. (2013). Practical Methods of Optimization. John Wiley & Sons.
- [9] Fletcher, R., & Reeves, C.M. (1964). Function minimization by conjugate gradients, Comput. J, 7, 149-154.
- [10] Frangioni, A. (2002). Generalized bundle methods. SIAM J. on Optimization, 13, 117-156.
- [11] Hansen, P.C., & Nagy, J.G. (2006). D.P. O'leary, Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering, SIAM, Philadelphia.
- [12] Hestenes, M.R., & Stiefel, E. (1952) Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. NBS Washington, DC.
- [13] Hiriart-Urruty, J.B., & Lemarechal, C. (1993). Acceleration of the Cutting-Plane Algorithm: Primal Forms of Bundle Methods, Springer.
- [14] Hiriart-Urruty, J.B., & Lemarechal, C. (2013). Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals, Springer science & business media.
- [15] Jiang, X., & Jian, J. (2019). Improved Fletcher-Reeves and Dai-Yuan conjugate gradient methods with the strong Wolfe line search, J. Comput. Appl. Math, 348, 525-534.
- [16] Karmitsa, N., Bagirov, A., & Makela, M.M. (2012). Comparing different nonsmooth minimization methods and software. Optim, Methods Softw, 27, 131-153.
- [17] Liu, Y., & Storey, C. (1991). Efficient generalized conjugate gradient algorithms, part 1: Theory, J.Optim, Theory Appl, 69 , 129-137.

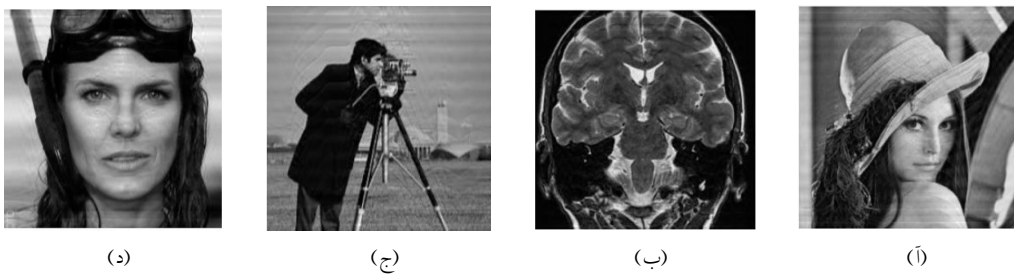
-
- [18] Luksan, L., & Vlcek, J. (2000). Test problems for nonsmooth unconstrained and linearly constrained optimization, *Technicka zprava*.
 - [19] Polak, E., Royset, J. O. (2003). Algorithms for finite and semi-infinite min-max problems using adaptive smoothing technique. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 119, 421-457.
 - [20] Polyak, B.T. (1969). The conjugate gradient method in extremal problems. *Comput. Math, Math, Phys*, 9, 94-112.
 - [21] Shor, N. Z. (1985). *Minimization methods for non-differentiable functions*. Berlin, Springer.
 - [22] Woldu, T.G., Zhang, H., & Fissuh, Y.H. (2020). A modified nonlinear conjugate gradient algorithm for large-scale nonsmooth convex optimization, *J. Optim. Theory Appl.* 185, 1-16.
 - [23] Yuan, G., Li, T., & Hu, W. (2019). A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization problems and image restoration, *J. Inequal. Appl.*, 1, 247-258.
 - [24] Yuan, G., Meng, Z., & Li, Y. (2016). A modified Hestenes and Stiefel conjugate gradient algorithm for large-scale nonsmooth minimizations and nonlinear equations, *J. Optim. Theory Appl.* 168, 129-152.
 - [25] Yuan, G., Wei, Z., & Li, G. (2014). A modified Polak-Ribiere-Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs, *J. Comput. Appl. Math.*, 255, 86-96.
 - [26] Yuzhen, L.U. (2017). Out-of-focus blur: Image deblurring, arXiv:1710.00620.



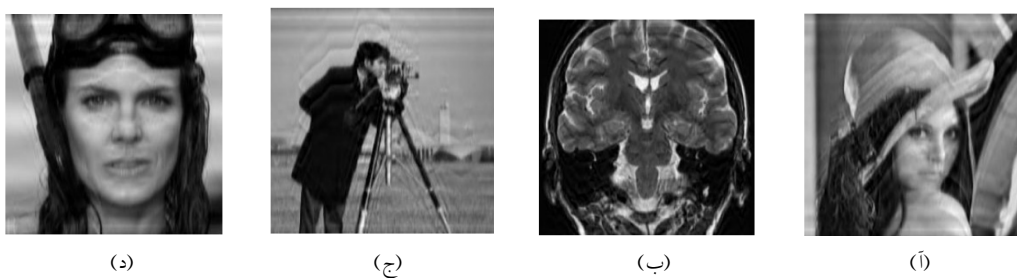
شکل ۱: تصاویر اصلی و نویزدار



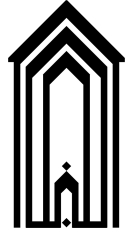
شکل ۲: تاری زدایی با الگوریتم NCG



شکل ۳: تاری زدایی با الگوریتم ۴.۲



شکل ۴: تاری زدایی با الگوریتم ۳.۱



یک روش نقطه درونی بهبود یافته برای مساله کمترین مربعات نامنفی

ماریه پورمحمدی*^۱، مازیار صلاحی^بmariyeh.pourmohammadi@gmail.com^۱salahi.maziar@gmail.com^ب

چکیده

روش های نقطه درونی ابزار قدرتمندی برای حل مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ هستند. این روش ها یک رویکرد انعطاف پذیر و کارآمد برای مقابله با چالش های بهینه سازی پیچیده، به ویژه در زمینه مسائل بدحالت گسسته، ارائه می دهند. در این مقاله به بررسی مسئله کمترین مربعات نامنفی می پردازیم. ابتدا یک الگوریتم بر مبنای روش نیوتن تعمیم یافته برای حل آن ارائه می دهیم، سپس با استفاده از روش های نقطه درونی الگوریتم دیگری را که در فرآیند حل از روش تکراری LSQR بهره می برد معرفی خواهیم کرد. در پایان نیز کارایی الگوریتم های ارائه شده، دستور Lsqnonneg متلب و نرم افزار LSTRS روی چندین مثال بدحالت تشریح شده است.

اطلاعات مقاله

واژه های کلیدی: روش های نقطه درونی، بهینه سازی پیچیده، مسئله کمترین مربعات نامنفی، مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ، الگوریتم بر مبنای روش نیوتن تعمیم یافته.

2020 MSC:

34B16

34B40

65M70

۱. مقدمه

روش های نقطه درونی به عنوان یک جزء مهم در حل مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ به شمار می آیند. این مسائل اغلب چالش های قابل توجهی را به دلیل طبیعت پیچیده آن ها و وجود محدودیت های چندگانه ارائه می دهند [۳]. تکنیک های بهینه سازی سنتی ممکن است در مقایسه موثر با چنین سناریوهایی دچار مشکل شوند. با این حال، روش های نقطه درونی یک رویکرد منحصر به فرد ارائه می دهند که امکان حل کارآمد این مسائل پیچیده را فراهم می کند و آن ها را یک روش ارزشمند در زمینه بهینه سازی و حل مسائل می کند [۹]. روش های نقطه درونی با جستجوی راه حل ها در داخل منطقه ممکن عمل می کنند. این رویکرد با روش های سنتی که بر تمرکز بر یافتن راه حل ها در مرز منطقه ممکن تمرکز دارند متفاوت است [۸]. این روش ها می توانند به طور موثر از محدودیت ها عبور کرده و امکان مقابله با مسائل بدحالت گسسته با دقت و کارایی بالا را فراهم کنند. چندگانگی روش های نقطه درونی امکان استفاده از آن ها در طیف گسترده ای از حوزه ها را فراهم می کند. از مهندسی و لجستیک تا مالی و تحلیل داده، این روش ها به عنوان ابزاری موثر در حل مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ در حوزه های مختلف اثبات شده اند [۳]. توانایی آن ها در مدیریت محدودیت های پیچیده و متغیرهای گسسته، آن ها را گزینه ای ایده آلی برای بهینه سازی راه حل ها در صحنه های مختلف می کند [۸]. یکی از مزایای کلیدی روش های نقطه درونی، توانایی آن ها در مسیریابی به طور کارآمد در فضاهای بعد بالا است در حالی که با محدودیت های پیچیده هماهنگ می شوند. این ویژگی آن ها را بویژه برای حل مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ مناسب می کند، جایی که روش های سنتی ممکن است دچار مشکل شوند و نتوانند در مدت زمان معقول راه حل های قابل اجرا ارائه دهند [۸]. علاوه بر این، روش های نقطه درونی اغلب ویژگی های پایداری همگرایی را نشان می دهند که وضعیت آن ها را به عنوان یک رویکرد ترجیحی برای مدیریت چالش های بهینه سازی پیچیده تقویت می کند [۳]. تأثیر روش های نقطه درونی بر مسائل بدحالت گسسته مقید با ابعاد بزرگ، عمیق

^{*}سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (ماریه پورمحمدی)، second.author@gmail.com (مازیار صلاحی)

است. با ارائه روش‌های سیستماتیک و کارآمد برای مقابله با این مسائل پیچیده، روش‌های نقطه درونی به سازمان‌ها و پژوهشگران امکان می‌دهند تا راه‌حل‌هایی که قبلاً غیرقابل دستیابی تلقی می‌شدند را بررسی و بهینه‌سازی کنند. این روش‌ها تأثیرات گسترده‌ای در صنایع مختلف دارند و باعث ارائه راه‌حل‌های جدید برای مقابله با مسائل بهینه‌سازی چالش‌برانگیز می‌شوند [۹].

۲. مسئله کمترین مربعات با قیود نامنفی (NNLS)

در بسیاری از مواقع نیازمند حل مسئله کمترین مربعات با قیود نامنفی روی متغیرها هستیم که از جمله آنها می‌توان به مسئله بازسازی تصاویر اشاره کرد [۶]. در ادامه به بررسی مسئله کمترین مربعات با قیود نامنفی می‌پردازیم:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \quad (1)$$

$$s.t. \quad x \geq 0.$$

در ادامه با استفاده از روش جریمه ای نیوتن تعمیم یافته [۷]، الگوریتمی برای حل مسئله (۱) ارائه می‌دهیم.

۱.۲. روش جریمه ای نیوتن تعمیم یافته

با استفاده از روش جریمه ای، مسئله مقید (۱) را به مسئله نامقید زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + M \|(-x)_+\|_2^2,$$

که M ثابت مثبت است و پارامتر جریمه نامیده می‌شود و $x_+ = \max(x, 0)$. تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2 + M \|(-x)_+\|_2^2$$

که گرادیان آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b) - 2M(-x)_+.$$

اما چون تابع f یک تابع یکبار دیفرانسیل پذیر است، هسیان تعمیم یافته آن را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$\nabla^2 f(x) = 2A^T A + 2MD,$$

که D یک ماتریس قطری به صورت زیر است:

$$D_{ii} = \begin{cases} 1 & \xi_i < 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$. واضح است که برای $M > 0$ داده شده هسیان تعمیم یافته، نیمه معین مثبت است و ممکن است وارون پذیر نباشد. بنابراین برای رفع این مشکل به جای $\nabla^2 f(x)$ ماتریس $(\nabla^2 f(x) + \delta I)$ را در نظر بگیریم که δ یک پارامتر مثبت کوچک است. اکنون جهت نیوتن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d = -(\nabla^2 f(x) + \delta I)^{-1} \nabla f(x),$$

که به وضوح یک جهت کاهشی است.

حال با توجه به توضیحات ارائه شده، الگوریتم زیر را برای حل مسئله (۱) بیان می‌کنیم.

الگوریتم جریمه ای نیوتن تعمیم یافته (GNP)

ورودی: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، متقارن، $b \in \mathbb{R}^n$ ، tol .
خروجی: $x \geq 0$.

۱. x را بگیر و قرار بده $M = 1e + \lambda$ و $k = 0$.
۲. تا وقتی که $\|\nabla f(x_k)\| > tol$ است اعمال زیر را انجام بده.
 - (آ) $\nabla f(x_k)$ و $\nabla^2 f(x_k)$ را حساب کن.
 - (ب) $d_k \leftarrow -(\nabla^2 f(x_k) + \delta I)^{-1} \nabla f(x_k)$
 - (ج) $x_{k+1} \leftarrow x_k + d_k$ و $\nabla f(x_{k+1})$ را حساب کن.
۳. x_k جواب تقریبی مسئله است.

نکته. لازم به ذکر است که $A^T A$ بایستی یکبار در ابتدای الگوریتم محاسبه و هر بار که نیاز به محاسبه گرادیان و هسیان تعمیم یافته است از آن استفاده شود.

۲.۲. روش نقطه درونی بهبود یافته

با توجه به موفقیت روش های نقطه درونی در حل مسائل برنامه ریزی خطی و غیرخطی با ابعاد بزرگ در مقایسه با روشهای دیگر، یک روش نقطه درونی خاص برای حل مسئله (۱) ارائه می شود [۴]. این روش برای تعیین جواب تقریبی مسئله (۱) الگوریتم تکراری LSQR را بکار می برد. روش LSQR یک روش تکراری و کارآمد است، که برای حل دستگاه معادلات و مسئله کمترین مربعات با ماتریس ضرایب با ابعاد بزرگ و تنگ مناسب است. این روش براساس روش دوقطری سازی منسوب به کاهان (Kahan) و گلوب (Golub) طراحی شده است [۹]. فرض بر این است که نرم خطای موجود در داده ها معلوم است، لذا با توجه به این فرض می توان شرط اصل اختلاف principle discrepancy

$$\|Ax - b\| \leq \varepsilon \eta$$

را به عنوان شرط توقف الگوریتم به کاربرد، ε نرم خطای موجود در بردار b و η یک ثابت که همواره $\eta > 1$ در نظر گرفته می شود. بنابراین حل مسئله (۱) معادل برقراری شرایط زیر است:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &\leq \varepsilon \eta, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{۲}$$

تابع مانعی اصلاح شده مسئله (۱) را با حذف قیدهای نامنفی بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$f_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma} \|Ax - b\|^2 + \frac{\varphi(x)}{\gamma} \|x\|^2 - \gamma \sum_{i=1}^n \log \xi_i$$

که در آن $x = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T > 0$ ، γ پارامتر مانعی و $\varphi(\gamma)$ یک تابع صعودی مثبت برحسب γ ($\gamma > 0$)، $\varphi(0) = 0$ است. برای تعیین جواب تقریبی مسئله مقید (۱)، دنباله ای از مسائل مینیمم سازی نامقید بصورت

$$\min_x f_\gamma(x) \tag{۳}$$

را به ازای مقادیر مثبت نزولی پارامتر مانعی $\gamma = \gamma_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) حل می کنیم. گرادیان و هسیان تابع $f_\gamma(x)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \nabla f_\gamma(x) &= (A^T A + \varphi(\gamma)I)x - A^T b - \gamma X^{-1}c, \\ \nabla^2 f_\gamma(x) &= A^T A + \varphi(\gamma)I - \gamma X^{-2}, \\ X &= \text{diag}[x] \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ c &= [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

که I یک ماتریس همانی است. با محاسبه هسیان تابع $f_\gamma(x)$ در می یابیم که هسیان همواره به ازای هر $\gamma > 0$ معین مثبت است، بنابراین تابع $f_\gamma(x)$ اکیدا محدب است و در نتیجه مسئله (۳) دارای جواب یکتا خواهد بود. مسئله (۳) را به ازای مقادیر مثبت γ ، توسط روش ناحیه اعتماد

حل می کنیم. برای این منظور مسئله درجه دوم یا زیر مسئله ناحیه اعتماد را معرفی می کنیم که در آن تابع هدف تخمین درجه دومی از تابع مانعی لگاریتمی است. بسط تیلور مرتبه دوم تابع $f_\gamma(x)$ حول نقطه x به صورت زیر است:

$$q_\gamma(x+h) = f_\gamma(x) + h^T \nabla f_\gamma(x) + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f_\gamma(x) h.$$

سپس جواب تقریبی مسئله

$$\min_h q_\gamma(x+h) \quad (۴)$$

را تعیین می کنیم. در ادامه روش حل (۴) را بیان می کنیم. با قرار دادن $z = x + h$ داریم:

$$q_\gamma(z) = f_\gamma(x) + (z-x)^T \nabla f_\gamma(x) + \frac{1}{2} (z-x)^T \nabla^2 f_\gamma(x) (z-x)$$

که گرادیان و هسیان تابع $q_\gamma(z)$ نیز به صورت زیر است:

$$\nabla q_\gamma(z) = (A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-2})z - A^T b - 2\gamma X^{-1}c,$$

$$\nabla^2 q_\gamma(z) = A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-2}.$$

شرایط کافی مرتبه دوم نامقید برای اینکه نقطه شدنی z یک جواب مسئله (۴) باشد به صورت زیر است:

$$(A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-2})z = A^T b + 2\gamma X^{-1}c \quad (\text{الف})$$

(ب) $A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-2}$ معین مثبت باشد.

در ادامه نشان می دهیم شرط (الف) معادل دستگاه معادلات نرمال یک مسئله کمترین مربعات تغییر یافته است.

۲.۱.۲. جواب مدل مرتبه دوم

به ازای $\gamma > 0$ ماتریس معین مثبت قطری D_γ و بردار g_γ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D_\gamma = (\varphi(\gamma)I + \gamma X^{-2})^{-1}, \quad g_\gamma = 2\gamma(\varphi(\gamma)X^{-1} + \gamma I)^{-1}c,$$

واضح است که

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} D_\gamma = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} g_\gamma = 0$$

قرار می دهیم:

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A \\ D_\gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+m) \times m}, \quad \check{b} = \begin{bmatrix} b \\ g_\gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+m},$$

حال مسئله کمترین مربعات زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^m} \|\check{A}z - \check{b}\|^2 \quad (۵)$$

معادله نرمال مسئله (۵) به صورت زیر است:

$$\check{A}^T \check{A}z = \check{A}^T \check{b},$$

یا

$$[A^T \quad D_\gamma] \begin{bmatrix} A \\ D_\gamma \end{bmatrix} z = [A^T \quad D_\gamma] \begin{bmatrix} b \\ g_\gamma \end{bmatrix},$$

یا

$$(A^T A + D_\gamma^\gamma)z = A^T b + D_\gamma g_\gamma. \quad (۶)$$

حال با جایگذاری D_γ و g_γ در معادله (۷) داریم:

$$\begin{aligned} (A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-\gamma})z &= A^T b + \gamma \gamma c (\varphi(\gamma)I + \gamma X^{-\gamma})^{-\frac{1}{\gamma}} (\varphi(\gamma)X^\gamma + \gamma I)^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= A^T b + \gamma \gamma X^{-\gamma} c, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(A^T A + \varphi(\gamma)I + \gamma X^{-\gamma})z = A^T b + \gamma \gamma X^{-\gamma} c. \quad (۷)$$

معادله (۷) معادله نرمال مسئله (۵) است که همان شرط (الف) است. بنابراین کافی است برای یافتن z شدنی که شرایط کافی مسئله (۴) را برقرار کند. مسئله (۵) را حل کنیم. برای محاسبه جواب تقریبی مسئله (۵) روش LSQR را بکار می‌بریم. روش بطور تحلیلی هم ارز با روش استاندارد گرادیان مزدوج (CGLS) است که برای حل معادلات نرمال مسئله کمترین مربعات بکار برده می‌شود. اما دارای خواص مطلوب تری نسبت به روش CGLS است. مقایسه الگوریتم LSQR با چند روش CGLS نشان می‌دهد که روش LSQR زمانیکه ماتریس ضرایب A یک ماتریس بدحالت است روشی قابل اعتمادتر است [۵].

براساس این روش، یک دنباله x_k از جوابهای تقریبی تولید می‌شود به طوری که نرم مانده $\|r_k\|_\gamma$ ، $(r_k = b - Ax_k)$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد. با به کارگیری k تکرار از الگوریتم دو قطری سازی برای ماتریس \check{A} با بردار شروع \check{b} ، دنباله ای از بردارهای واحد u_k و v_k و اسکالرهای α_k و β_k حاصل می‌شوند که به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \beta_1 u_1 &= \check{b}, \\ \alpha_1 v_1 &= \check{A}^T u_1, \\ \beta_{k+1} u_{k+1} &= \check{A} v_k - \alpha_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \alpha_{k+1} v_{k+1} &= \check{A}^T u_{k+1} - \beta_{k+1} v_k, \end{aligned} \quad (۸)$$

و ضرایب $\alpha_k, \beta_k > 0$ طوری محاسبه می‌شوند $\|u_k\| = \|v_k\| = 1$ باشد. همچنین $\|\check{b}\| = \beta_k = \|e_k$ و k امین ستون ماتریس همانی است و ماتریس های $U_k = (u_1, \dots, u_k)$ و $V_k = (v_1, \dots, v_k)$ ماتریس های متعامد هستند. روابط (۸) را در شکل ماتریسی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \check{b} &= \beta_1 U_{k+1} e_1, \\ \check{A} V_k &= U_{k+1} B_k, \\ \check{A}^T U_{k+1} &= V_k B_{k+1}^T + \alpha_{k+1} v_{k+1} e_{k+1}^T, \end{aligned}$$

که $B_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ ماتریس دو قطری پایینی به شکل زیر است:

$$B_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_k & \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{k-1} & \alpha_k e_k \\ 0 & \beta_{k+1} \end{bmatrix}.$$

هدف یافتن به جواب تقریبی z_k است بطوری که

$$z_k \in K_k, \quad K_k = K_k(\check{A}^T \check{A}, \check{A}^T \check{b}) = \text{span} \{ \check{A}^T \check{b}, (\check{A}^T \check{A}) \check{A}^T \check{b}, \dots, (\check{A}^T \check{A})^{k-1} \check{A}^T \check{b} \}.$$

از طرفی می‌دانیم

$$K_k = \text{span}(V_k)$$

است، یعنی ستون های ماتریس متعامد V_k تشکیل یک پایه متعامد برای زیرفضای تولید شده توسط ماتریس $\check{A}^T \check{A}$ و بردار $\check{A}^T \check{b}$ می دهد و z_k نرم مانده r_k را در زیرفضای کرلیف $K_k(\check{A}^T \check{A}, \check{A}^T \check{b})$ مینیمم می سازد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} z_k &= V_k y_k, \quad y_k \in \mathbb{R}^{k_k}, \\ \|\check{b} - \check{A}z_k\| &= \min_{z \in K_k(\check{A}^T \check{A}, \check{A}^T \check{b})} \|\check{b} - \check{A}z\|, \\ &= \min_{y_k} \|U_{k+1} \beta_{k+1} e_1 - U_{k+1} B_k y_k\|, \end{aligned} \quad (9)$$

$$r_k = U_{k+1} t_{k+1}, \quad t_{k+1} = \beta_{k+1} e_1 - B_k y_k.$$

حال y_k را طوری می یابیم که شرایط (۹) برقرار شود. شرایط (۹) اساس الگوریتم LSQR را تشکیل می دهد. روش استاندارد QR برای حل مسئله (۹) از نظر محاسباتی سودمند است [۲]. با استفاده از تجزیه QR ماتریس دو قطری B_k را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می کنیم که این تبدیل توسط حاصل ضربی از دوران های گیبوز $G_{k+1} \dots G_{k+2} \dots G_{k+1}$ انجام می شود [۱]. دوران G_{k+1} تنها روی سطرهای $k+1$ و k ماتریس عمل می کند تا درایه های زیر قطری سطر k حذف شوند، در حقیقت این دوران ها برای حذف درایه های زیر قطری ماتریس B_k یعنی $\beta_{k+1}, \dots, \beta_{k+1}$ طراحی شده اند:

$$Q [B_k \quad \beta_{k+1} e_1] = \begin{bmatrix} R_k & f_k \\ \circ & \bar{\phi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \theta_1 & \circ & \dots & \circ & \phi_1 \\ \circ & \rho_2 & \theta_2 & \dots & \circ & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \rho_{k-1} & \theta_k & \phi_{k-1} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \rho_k & \phi_k \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \bar{\phi}_{k+1} \end{bmatrix}$$

k امین دوران گیبوز که برای صفر کردن اسکالر β_{k+1} در ماتریس B_k طراحی شده است به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} c_k & s_k \\ s_k & -c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho}_k & \circ & \bar{\phi}_k \\ \beta_{k+1} & \alpha_{k+1} & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_k & \theta_{k+1} & \phi_k \\ \circ & \bar{\rho}_{k+1} & \bar{\phi}_{k+1} \end{bmatrix}$$

و مقادیر اولیه نیز $\bar{\phi}_1 = \beta_1$ و $\bar{\rho}_1 = \alpha_1$ است.

اکنون به آسانی می توان بردارهای y_k و t_{k+1} را به صورت زیر تعیین کرد:

$$R_k y_k = f_k, \quad t_{k+1} = Q^T \begin{bmatrix} \circ \\ \bar{\phi}_{k+1} \end{bmatrix} = \bar{\phi}_{k+1} Q^T e_{k+1},$$

$$r_k = U_{k+1} t_{k+1} = U_{k+1} \bar{\phi}_{k+1} Q^T e_{k+1} \Rightarrow \|r_k\| = \bar{\phi}_{k+1}.$$

در روابط بالا y_k معمولا دارای درایه های مشترکی، با y_{k-1} نمی باشد و $[R_k f_k]$ با افزودن یک سطر و ستون جدید به $[R_{k-1} f_{k-1}]$ ساخته می شود. حال بنابراین چه بیان شد می توان با در نظر گرفتن $k-1$ امین مولفه از f_k و تعریف

$$W_k = [w_1, w_2, \dots, w_k] = V_k R_k^{-1} D_k, \quad D_k = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)$$

یک رابطه بازگشتی برای z_k به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} z_k &= V_k y_k = V_k R_k^{-1} f_k = V_k R_k^{-1} D_k D_k^{-1} f_k \\ &= W_k D_k^{-1} f_k = [W_{k-1} \quad w_k] \begin{bmatrix} D_{k-1}^{-1} \\ \rho_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-1} \\ \phi_k \end{bmatrix} \\ &= W_{k-1} D_{k-1}^{-1} f_{k-1} + w_k \rho_k^{-1} \phi_k \\ &= z_{k-1} + w_k \rho_k^{-1} \phi_k. \end{aligned}$$

همچنین با حل دستگاه $W_{k+1}^T D_{k+1}^{-1} R_{k+1}^T = V_{k+1}^T$ با روش چانشینی پیشرو می توان w_k را از رابطه بازگشتی زیر محاسبه کرد:

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\theta_{k+1}}{\rho_k} w_k, \quad w_1 = v_1.$$

الگوریتم (LSQR)

ورودی: $x_0 = 0, w_1 = v_1, \alpha_1 v_1 = A^T u_1, \beta_1 u_1 = b, \bar{\phi}_1 = \beta_1, \bar{\rho}_1 = \alpha_1$

۱. به ازای $k = 1, 2, \dots$ گام های ۲ تا ۴ را انجام دهید.
۲. دو قطری سازی:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} u_{k+1} &= Av_k - \alpha_k u_k \quad (\text{آ}) \\ \alpha_{k+1} v_{k+1} &= A^T u_{k+1} - \beta_{k+1} v_k \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

۳. تشکیل دوران های گونز:

$$\begin{aligned} \rho_k &= (\bar{\rho}_k^2 + \beta_{k+1}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{آ}) \\ c_k &= \frac{\bar{\rho}_k}{\rho_k} \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

$$s_k = \frac{\beta_{k+1}}{\rho_k} \quad (\text{ج})$$

$$\theta_{k+1} = s_k \alpha_{k+1} \quad (\text{د})$$

$$\bar{\rho}_{k+1} = -c_k \alpha_{k+1} \quad (\text{ه})$$

$$\phi_k = c_k \bar{\phi}_k \quad (\text{و})$$

$$\bar{\phi}_{k+1} = s_k \bar{\phi}_k \quad (\text{ز})$$

۴. w و z را بهنگام کنید:

$$z_k = z_{k-1} + \left(\frac{\phi_k}{\rho_k}\right) w_k \quad (\text{آ})$$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \left(\frac{\theta_{k+1}}{\rho_k}\right) w_k \quad (\text{ب})$$

با ارائه روش LSQR، اکنون روش نقطه درونی براساس الگوریتم LSQR را برای حل مسئله (۱) بیان می کنیم.

ابتدا یک جواب تقریبی برای مسئله (۱) بدون در نظر گرفتن قید نامنفی بدست می آوریم. برای این منظور الگوریتم LSQR را با تکرار اولیه $x_0 = 0$ برای مسئله (۱) بدون قید نامنفی به کار می بریم و اولین تکرار x_1 که نامعادله $\|Ax - b\| \leq \varepsilon \eta$ را برقرار کند جواب تقریبی است. اما جواب تقریبی که از الگوریتم LSQR حاصل می شود ممکن است دارای درایه های منفی باشد بنابراین همه ی مولفه های منفی را برابر صفر قرار می دهیم و بردار حاصل را $x^{(0)}$ می نامیم. اگر $x^{(0)}$ در شرط (۲) صدق کند آنگاه $x^{(0)}$ تقریبی از جواب دقیق مسئله (۱) است، در غیر اینصورت اعمال زیر را انجام می دهیم.

δ را به عنوان یک ثابت مثبت نسبتا کوچک در نظر می گیریم، سپس مولفه های کوچکتر از δ بردار $x^{(0)}$ را برابر δ قرار می دهیم و بدین ترتیب بردار $x^{(\delta)}$ حاصل می شود. ماتریس وارونپذیر X را از بردار $x^{(\delta)}$ به صورت

$$X = \text{diag}(x^{(\delta)}),$$

تشکیل می دهیم. هدف از تشکیل ماتریس X توسط بردار $x^{(\delta)}$ وجود درایه های کوچک بردار $x^{(\delta)}$ است که در روند تشکیل وارون ماتریس X موجب خطای محاسباتی و همچنین کندی همگرایی الگوریتم می شود. $x^{(\delta)}$ را به عنوان جواب تقریبی تکرار فعلی در نظر می گیریم. برای محاسبه جواب تقریبی جدید، جواب تقریبی مسئله (۵) را با روش LSQR محاسبه می کنیم و قرار می دهیم:

$$h_k = z_k - x_k^{(\delta)},$$

برای اینکه مطمئن شویم در تکرار جدید، جواب تقریبی محاسبه شده تنها شامل مولفه های مثبت است، به کارگیری یک جستجوی خطی ضروری است زیرا هیچ تضمینی وجود ندارد که z_k محاسبه شده توسط الگوریتم LSQR تنها شامل مولفه های مثبت باشد. بنابراین جواب تقریبی تکرار جدید به صورت

$$x_{k+1} = x_k^{(\delta)} + \beta_k h_k,$$

تعیین می شود که ثابت $\beta_k > 0$ به صورت

$$\beta_k = \min \left\{ 1, \min_{e_i^T z_k \leq 0} \frac{e_i^T x_k^{(\delta)}}{|e_i^T h_k|} \right\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

در نظر گرفته می شود تا همواره $x_{k+1} > 0$ باشد. برای تعیین پارامتر مانعی، ابتدا پارامتر مانعی اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\gamma_0 = \sigma \frac{|(x^{(0)})^T w^{(0)}|}{n},$$

که

$$w^{(0)} = A^T b - A^T A x, \quad \sigma = 0.01,$$

و برای بهنگام کردن آن، پارامتر مانعی تکرار قبلی را بر 1.0 تقسیم می کنیم و بدین ترتیب پارامتر مانعی تکرار جدید تعیین می شود:

$$\gamma_{k+1} = \frac{\gamma_k}{1.0}.$$

الگوریتم نقطه درونی بر مبنای الگوریتم LSQR به صورت زیر است.

الگوریتم نقطه درونی (IPLSQR)

ورودی: $A, b, \delta, \varepsilon, \eta$

خروجی: جواب تقریبی $\tilde{x} > 0$.

۱. x_1 را با روش LSQR تعیین کنید.
۲. قرار دهید $x^{(0)} = \max\{x_1, 0\}$.
۳. γ_0 را محاسبه کنید.
۴. تا زمانی که (while) روش همگرا نشده گام های زیر را انجام دهید:
 - (ا) قرار دهید $x_k^{(\delta)} = \max\{x_k^{(0)}, \delta\}$.
 - (ب) مسئله (5) را با روش LSQR حل کنید و z_k را به دست آورید.
 - (ج) قرار دهید $h_k = z_k - x_k^{(\delta)}$.
 - (د) β_k را طوری محاسبه کنید که $\beta_k h_k + x_k^{(\delta)} > 0$ باشد.
 - (ه) قرار دهید $x_{k+1} = x_k^{(\delta)} + \beta_k h_k$.
 - (و) پارامتر مانعی را بهنگام کنید.
۵. پایان (while).
۶. قرار دهید: $\tilde{x} = x_{k+1}$.

شکل ۱: جواب مسئله gravity، $n = 500$.

۳. نتایج عددی

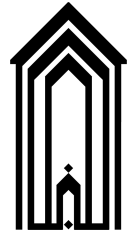
برای سنجش میزان کارایی روش های ارائه شده با یکدیگر و همچنین با دستور Lsqnonneg از جعبه ابزار بهینه سازی متلب، آنها روی تعدادی از مسائل بدحالت پیاده سازی شدند و نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به نتایج این جدول در می یابیم که روش نقطه درونی بر مبنای الگوریتم LSQR نسبت به IPLSTRS که در نرم افزار LSTRS پیاده سازی شده است و همین طور الگوریتم GNP و دستور Lsqnonneg، با افزایش بعد مسئله از نظر خطای نسبی بهتر است اما از نظر زمانی الگوریتم GNP برای مسائل ارائه شده بهتر عمل می کند. همچنین خطای روش GNP قابل رقابت با IPLSQR است. در مجموع سه روش IPLSQR، IPLSTRS و GNP نسبت به دستور Lsqnonneg متلب هم از نظر زمانی و هم از نظر خطای نسبی بهتر می باشند.

جدول ۱: مقایسه الگوریتم های IPLSTRS, IPLSQR و GNP با دستور Lsqnonneg.

مسئله	n	روش	زمان (ثانیه)	نسبی خطای
philips	۵۰۰	IPLSQR	۶.۶۴۲۵۳۱	۰.۰۰۸۶
		IPLSTRS	۹.۲۷۳۹۲۷	۰.۰۲۱۲
		GNP	۰.۰۷۱۰۰۴۹	۰.۰۵۱۷
		Lsqnonneg	۱۱.۷۷۲۷۳۵	۳.۴۴۵۸
philips	۱۰۰۰	IPLSQR	۲۲.۱۳۴۴۳۷	۰.۰۱۸۳
		IPLSTRS	۱۸.۹۵۵۲۷۷	۰.۰۲۲۵
		GNP	۱.۶۲۳۹۶۳	۰.۰۵۱۴
		Lsqnonneg	۱۹۷۵.۵۵۷۵۸۹	۴.۴۰۴۴
gravity	۵۰۰	IPLSQR	۸.۳۲۵۴۴۷	۰.۰۱۰۲
		IPLSTRS	۸.۸۰۳۴۹۷	۰.۰۱۳۴
		GNP	۰.۸۸۰۶۰۰	۰.۰۱۲۲
		Lsqnonneg	۷۵.۴۲۴۷۹۷	۵.۴۶۳۶
gravity	۱۰۰۰	IPLSQR	۳۷.۳۶۰۶۷۸	۰.۰۱۱۱
		IPLSTRS	۱۸.۹۶۷۲۲۶	۰.۰۱۳۳
		GNP	۲.۵۴۶۳۵۷	۰.۰۱۲۸
		Lsqnonneg	۶۹۸.۵۵۷۰۱۴	۸.۴۳۳۰
shaw	۵۰۰	IPLSQR	۸.۳۲۳۸۴۱	۰.۰۱۱۴
		IPLSTRS	۸.۹۵۳۳۳۳	۰.۰۱۴۰
		GNP	۰.۸۷۵۹۳۶	۰.۰۱۳۳
		Lsqnonneg	۱۳۷.۵۲۸۹۹۲	۶.۱۴۶۸
shaw	۱۰۰۰	IPLSQR	۳۷.۳۳۹۲۱۴	۰.۰۱۰۹
		IPLSTRS	۱۸.۹۶۶۴۳۲	۰.۰۱۳۳
		GNP	۲.۵۵۰۵۱۸	۰.۰۱۱۱
		Lsqnonneg	۱۳۸۷.۶۸۳۱۰۵	۷.۷۵۴۸

مراجع

- [1] Biswa Nath Datta. *Numerical linear algebra and applications*. SIAM, 2010.
- [2] Gene H Golub and Charles F Van Loan. *Matrix computations*. JHU press, 2013.
- [3] Ladislav Lukšan, Ctirad Matonoha, and Jan Vlček. Interior point methods for large-scale nonlinear programming. *Optimization Methods and software*, 20(4-5):569–582, 2005.
- [4] Serena Morigi, Lothar Reichel, and Fiorella Sgallari. An interior-point method for large constrained discrete ill-posed problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(5):1288–1297, 2010.
- [5] Christopher C Paige and Michael A Saunders. Lsq: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 8(1):43–71, 1982.
- [6] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] Maziar Salahi and Moslem Ganji. A generalized newton-penalty algorithm for large scale ill-conditioned quadratic problems. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 4(2):3, 2009.
- [8] Tamás Terlaky. *Interior point methods of mathematical programming*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Stephen J Wright. *Numerical optimization*. 2006.



بکارگیری تصمیم‌گیری چندمعیاره در زنجیره تولید صنایع غذایی به منظور شناخت ریسک‌های پرخطر - مطالعه موردی (واحدهای صنایع غذایی لبنی استان گلستان)

محمود حسین پور^ا، محمد امیرخان^ب، جواد رضائیان زیدی^ج، محمدجعفر دوستی دیلمی^د

^ادانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران
^باستادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران
^جدانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت، دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل، ایران
^داستادیار، گروه ریاضی، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران

چکیده

شناسایی ریسک‌های حوزه لبنی یکی از عوامل مؤثر در واحدهای تولیدی صنایع غذایی می‌باشد. این مقاله باهدف شناسایی و ارزیابی ریسک‌های بخش تولید در صنایع لبنی استان گلستان انجام شده است. برای این منظور، ابتدا خبرگان با کمک روش گلوله برفی انتخاب شدند و سپس، با طراحی مدل دلفی فازی ریسک‌های اولیه شناسایی شده‌اند. در ادامه با به‌کارگیری روش اولویت‌تریبی و دیمتل فازی به ترتیب وزن و روابط درونی شاخص‌ها محاسبه شده است. جهت وزن‌دهی و اولویت‌بندی نهایی نیز از ترکیب دو روش اولویت‌تریبی و دیمتل فازی استفاده شده است. تحقیق حاضر از نظر هدف و ماهیت، به ترتیب کاربردی و توصیفی می‌باشد. داده‌های مسئله هم به‌صورت کمی و هم به‌صورت کیفی می‌باشد و برای جمع‌آوری آن‌ها از دو روش کتابخانه‌ای و میدانی استفاده شده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که از میان ریسک‌های بخش تولید لبنی شیوع بیماری کرونا بالاترین اولویت و همچنین ریسک وجود سروصدای زیاد محیط کار پایین‌ترین اولویت را به خود اختصاص دادند.

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
ریسک صنایع غذایی لبنی
روش دلفی فازی
روش ترتیب اولویت‌دار
دیمتل فازی

۱. مقدمه

صنایع غذایی لبنی مجموعه‌ای از چند صنعت است که محصولات متنوعی را تولید می‌کند. در این صنعت خطرات متنوعی این نوع تولید را تهدید می‌کند که به‌منظور کاهش هزینه‌های تولید و افزایش تولید و فروش شناسایی ریسک‌های مختلف در این صنعت الزامی می‌باشد که در پژوهش‌های اخیر به ارزیابی ریسک در صنایع غذایی با رویکرد ترکیبی BWM و FMEA در شرایط فازی پرداخته شده است [۱]. در این تحقیق به شناسایی ریسک‌ها در صنعت غذایی لبنی پرداخته شده است. پژوهش حاضر به دنبال آن است که ریسک‌های صنایع لبنی را با یک رویکرد ترکیبی و در شرایط عدم قطعیت در حوزه صنایع غذایی شناسایی کند. برای این منظور، با در نظر گرفتن یک مطالعه موردی واقعی، ریسک‌های موجود در بخش تولید صنایع غذایی لبنی مورد ارزیابی قرار گرفته است. مراحل انجام کار به این صورت می‌باشد که ابتدا با استفاده از روش‌های میدانی و کتابخانه‌ای ریسک‌ها شناسایی می‌شوند و در ادامه، با به‌کارگیری تکنیک گلوله برفی^۱ (SBS) و دلفی فازی^۲ (F Delphi) ریسک‌های اولیه استخراج می‌شوند. سپس، وزن ریسک‌ها با روش ترکیبی دیمتل فازی^۳ (F DEMATEL) و اولویت‌تریبی^۴ (OPA) محاسبه و اولویت‌بندی شده‌اند.

*سخنران

¹ Snow Ball Sampling

² Fuzzy Delphi

³ Fuzzy DEMATEL

⁴ Ordinal Priority Approach

نوآوری‌های تحقیق حاضر به صورت ذیل خلاصه می‌شود:

- ایجاد یک مدل تلفیقی برای ارزیابی و رتبه‌بندی ریسک‌های غذایی لبنی استان گلستان
- طبقه‌بندی و شناسایی ریسک‌ها در شرایط عدم قطعیت
- بررسی میزان تأثیرپذیری هر یک از ریسک‌های شناسایی شده
- محاسبه وزن نهایی ریسک‌ها با رویکرد ترکیبی در شرایط عدم قطعیت در نظر گرفته می‌شود.
- رتبه‌بندی ریسک‌های شناسایی شده

۱.۱. پیشنهاد تحقیق

صلاح و همکاران^۵ [۲] به اولویت‌بندی ریسک‌ها در صنعت مربوط به ماشین‌پرکننده مایعات لبنی با کمک روش FMEA پرداخته است که ۱۴ نوع ریسک در این ماشین شناسایی شد که سنسورها، شیرهای برقی و سنسور کنترل رنگ ماشین به ترتیب پراهمیت‌ترین ریسک در این صنعت را به خود تخصیص داده است. راموس^۶ و همکاران [۳] به بررسی ارزیابی ریسک میکروبیولوژیکی کمی در محصولات لبنی پرداختند که این بررسی نشان می‌دهد که ارزیابی ریسک ابزاری امیدوارکننده برای تأیید اثربخشی استفاده از فناوری‌های پردازش جدید، بر اساس جستجوی کمترین خطر ممکن مرتبط با غذا است.

روما و همکاران^۷ [۴] با استفاده از یک مدل ریسک توسعه داده‌شده، به شناسایی و ارزیابی ریسک عوامل مرتبط با سلامت حیوانات و ایمنی غذا برای کارخانه‌های خوراک دام مواد غذایی کانادا پرداختند. در این پژوهش، آن‌ها ابتدا ۳۴ نوع ریسک را با استفاده از نظرات خبرگان و بررسی ادبیات علمی شناسایی کردند و سپس این ریسک‌ها را در سه دسته شامل ریسک‌های ذاتی با ۴ شاخص، عوامل ریسک کاهش‌دهنده با ۱۰ شاخص و عوامل ریسک انطباق با ۲۰ شاخص طبقه‌بندی کردند.

۲. مواد و روش‌ها

۱.۲. شناسایی و جمع‌آوری ریسک‌های

در فاز اول این پژوهش به منظور انتخاب خبرگان از روش نمونه‌گیری گلوله برفی استفاده شده است که بر اساس سابقه کاری، تجربه و مدرک تحصیلی خبره اول را انتخاب شده است و خبره اول سایر خبرگان را معرفی کرده است. در این تحقیق روایی محتوای مصاحبه با مشورت خبرگان مورد تأیید قرار گرفت. روایی پرسشنامه‌های تحقیق نیز در قالب روایی محتوا و روایی صورتی سنجش شد. روایی محتوای کلیه پرسشنامه‌های تحقیق به تأیید خبرگان است، از معمول‌ترین آزمون پایایی هماهنگی درونی یعنی محاسبه ضریب آلفای کرونباخ از طریق نرم‌افزار SPSS استفاده شد.

جدول ۱: ضریب آلفای کرونباخ تحقیق

تعداد سؤالات	ضریب آلفای کرونباخ
۶۷	۰٫۹۲۵

با توجه به نتایج جدول (۱) مقدار ضریب آلفای کرونباخ برای ۶۷ متغیرهای شناسایی شده پژوهش، بالای ۰٫۷ می‌باشد، بنابراین پابایی پرسشنامه‌ها مورد تأیید قرار گرفته و می‌توان گفت که از اعتبار کافی برخوردار بوده‌اند و پاسخ‌های داده‌شده ناشی از شانس و تصادف نبوده است.

۲.۲. مشخص نمودن ریسک‌ها با استفاده از تکنیک دلفی فازی (Delphi Fuzzy):

در بخش دوم تحقیق حاضر، جهت گردآوری داده‌ها از مصاحبه و پرسشنامه استفاده شده است و سپس با بهره‌گیری از روش Delphi Fuzzy در میان صاحب‌نظران و خبرگان حوزه صنایع لبنی استان گلستان شاخص‌های مؤثر ارزیابی ریسک زنجیره تأمین صنایع غذایی شناسایی شده است. همچنین، برای تبدیل واژگان عبارات کلامی خبرگان به اعداد فازی، از اعداد فازی مثلثی استفاده شده است. در ادامه، ارزش عدد فازی مثلثی هر معیار که خبرگان به آن نمره داده‌اند، محاسبه می‌شود. برای یافتن نظرات خبرگان، از روش میانگین هندسی که کلیور و یوان^۸ [۵] در سال ۱۹۹۵ پیشنهاد داده‌اند، استفاده می‌شود.

وزن وزنی شاخص‌ها با استفاده از تکنیک OPA

^۵Salah.

^۶Ramos

^۷Rhouma et al

^۸Klir and Yuan

روش OPA توسط عطایی و همکاران [۶] برای اولین بار ارائه گردید که این روش توانای حل مسائل انفرادی و گروهی حتی در شرایطی که داده‌های ورودی ناقص است را دارد. این روش نیاز به داده‌های ورودی بسیار ساده‌ای دارد و بعد از حل مسئله قادر است وزن خبره‌ها و معیارها و همچنین رتبه گزینه‌ها را ارائه دهد. این روش مبتنی برنامهریزی خطی می‌باشد.

- گام ۱) در این مرحله می‌بایست خبره و یا خبره‌ها شناسایی شوند و توسط تحلیلگر رتبه هر خبره مشخص شود. خبره‌ها می‌توانند بر اساس سابقه کار، میزان تجربه و سایر فاکتورها اولویت‌بندی شوند
- گام ۲) در این مرحله می‌بایست معیارها شناسایی شوند سپس معیارها توسط هر خبره می‌بایست اولویت‌بندی شوند.
- گام ۳) در این مرحله می‌بایست گزینه‌ها تعیین شوند و سپس گزینه‌ها در هر معیار توسط هر خبره اولویت‌بندی شوند.
- گام ۴) مدل برنامه‌ریزی خطی زیر می‌بایست تشکیل و حل مدل انجام شود.

$$\text{Max } Z \quad (1)$$

s.t :

$$z \ll i \left(j \left(r \left(W_{ijk}^r - W_{ijk}^{r+1} \right) \right) \right) \forall i, j, k \text{ and } r$$

$$z \ll ijm W_{ijk}^m \forall i, j, k$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m W_{ijk} = 1$$

$$W_{ijk} = 0 \forall i, j, k$$

Where Z: Unrestricted in sign

□ گام ۵) بعد از حل مدل وزن گزینه‌ها، معیارها و خبره‌ها به ترتیب از طریق روابط زیر محاسبه می‌شود :

$$W_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n W_{ijk} \quad \forall k \quad (2)$$

$$W_j = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^m W_{ijk} \quad \forall j \quad (3)$$

$$W_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m W_{ijk} \quad \forall i \quad (4)$$

۳.۲. محاسبه روابط داخلی بین شاخص‌ها با استفاده از روش DEMATEL F

تکنیک DEMATEL F با استفاده از متغیرهای زبانی فازی، تصمیم‌گیری را در شرایط عدم اطمینان محیطی تسهیل می‌کند. گام‌های این تکنیک به شرح زیر است: گام ۱) ایجاد ماتریس روابط مستقیم: در این گام ماتریس اولیه‌ی نظرسنجی، به گونه‌ای که سطرها و ستون‌های این ماتریس را معیارهای مسئله تصمیم‌گیری تشکیل می‌دهند، ایجاد می‌شود. گام ۲) طراحی معیارهای زبانی فازی: متغیرهای کلامی در قالب مجموعه‌های فازی نمایش داده می‌شوند و هر یک از آن‌ها به وسیله تابع عضویت بیان می‌شوند. برای تبدیل متغیرهای کلامی به اعداد فازی از طیف پنج‌تایی لیکرت جدول (۲) استفاده شده است.

جدول ۲: متغیرهای کلامی مورد استفاده [۷]

متغیر زبانی	تأثیر بسیار بالا	تأثیر بالا	تأثیر پایین	تأثیر بسیار پایین	بی‌تأثیر
مقیاس فازی	(۰/۷, ۰/۹, ۱)	(۰/۵, ۰/۷, ۰/۹)	(۰/۳, ۰/۵, ۰/۷)	(۰/۱, ۰/۳, ۰/۵)	(۰, ۰/۱, ۰/۳)

گام ۳) ساخت ماتریس تصمیم‌گیری اولیه ($\bar{0}$): در این گام از هر پاسخ‌دهنده خواسته می‌شود بر اساس جدول (۲)، اثر هر معیار را بر معیار دیگر مشخص کند. $\bar{0}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$ بیانگر نظر پاسخ‌دهنده در ارتباط با اثر معیار i بر معیار j می‌باشد. برای هر پاسخ‌دهنده یک ماتریس $n \times n$ که باید دارای درایه‌های فازی باشند به صورت $\bar{0}^p = [\bar{0}_{ij}^p]$ (رابطه (۵)) تعریف می‌شود. P بیانگر پاسخ‌دهندگان و n بیانگر تعداد عامل‌های مورد مطالعه است [۸].

$$\tilde{o}_{ij} = \frac{1}{p} \times \sum_{p=1}^p \tilde{a}_{ij} \quad (5)$$

برای ساخت ماتریس تصمیم‌گیری اولیه (\tilde{o}) (ماتریس (۶)) از میانگین ساده نظرات تمام افراد استخراج می‌شود، به طوری که $\tilde{o}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$ عدد فازی مثلثی است.

$$\tilde{o} = \begin{bmatrix} \tilde{o}_{11} & \tilde{o}_{12} & \dots & \tilde{o}_{1n} \\ \tilde{o}_{21} & \tilde{o}_{22} & \dots & \tilde{o}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{o}_{m1} & \tilde{o}_{m2} & \dots & \tilde{o}_{mn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

گام ۴) محاسبه ماتریس نرمالایزه شده (\tilde{z}): برای به دست آوردن ماتریس نرمالایزه شده (\tilde{z})، از رابطه ی (۷) استفاده می‌شود [۸].

$$\tilde{z} = K \times \tilde{o} \quad (7)$$

$$K = \min \left[\frac{1}{\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\tilde{o}_{ij}|}, \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\tilde{o}_{ij}|} \right] \quad (8)$$

ماتریس نرمالایزه به دست آمده از رابطه (۸) به صورت رابطه (۹) حاصل می‌شود.

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \dots & \tilde{z}_{1n} \\ \tilde{z}_{21} & \tilde{z}_{22} & \dots & \tilde{z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{z}_{m1} & \tilde{z}_{m2} & \dots & \tilde{z}_{mn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

گام ۵) محاسبه ماتریس حد فازی (\tilde{v}): در این گام ماتریس (\tilde{v}) برای هر حد فازی (l_{ij}'' , m_{ij}'' , u_{ij}'') به وسیله ی رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$l_{ij}'' = \tilde{z}_l \times (I - \tilde{z}_l)^{-1}, m_{ij}'' = \tilde{z}_m \times (I - \tilde{z}_m)^{-1}, u_{ij}'' = \tilde{z}_u \times (I - \tilde{z}_u)^{-1} \quad (10)$$

سپس هر کدام از حدهای پایین، میانه و بالای عدد فازی مثلثی با یکدیگر ترکیب شده و ماتریس \tilde{v} (۱۱) تشکیل می‌شود.

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \dots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \dots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & \dots & \tilde{v}_{mn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

گام ۶) تشکیل ماتریس V : هر \tilde{v}_{ij} از ماتریس \tilde{v} با استفاده از رابطه (۱۲) به عدد قطعی تبدیل می‌شود. در نتیجه ماتریس V ایجاد می‌شود.

$$V = \frac{(l + 4m + u)}{6} \quad (11)$$

گام ۷) محاسبه ی مقادیر $D_i - R_i$ و $D_i + R_i$: به طوری که D_i و R_i به ترتیب جمع هر سطر و ستون ماتریس V می‌باشد [۹].

۳. نتایج و بحث

۱.۳. شناسایی ریسک‌ها با تکنیک *FDelphi*

به منظور تعیین مهم‌ترین ریسک‌ها شناسایی شده از بین ریسک‌ها، با استفاده از تکنیک دلفی فازی و پس از ۲ دوره چرخش، ۹ عامل و ۴۸ شاخص از ریسک‌ها شناسایی شدند. روایی محتوایی این پرسشنامه توسط ۸ نفر از خبرگان این صنعت مورد تحلیل و تحلیل قرار گرفت. عناوین ریسک‌های نهایی شناسایی شده در جدول (۳) خلاصه شده است.

جدول (۳):

جدول ۳: ریسک‌های شناسایی شده در زنجیره تولید صنایع لبنی

افزایش هزینه حمل و نقل	R14	تأمین‌کنندگان (R1)
ناتوانی در برآورد سازی خواسته‌ها	R19	
تأمین به‌موقع مواد اولیه	R111	
افزایش نرخ بهره بانک‌ها و مؤسسات	R113	تولیدکنندگان (R2)
عدم کیفیت تولید	R23	
عدم ارسال به‌موقع	R24	
کمبود نقدینگی	R27	
بالا بودن سطح رقابت	R29	
آزادسازی قیمت حامل‌های انرژی	R210	
اشتباه در برنامه‌ریزی تولید	R211	
رقابت ناسالم	R212	
بالا رفتن قیمت تمام‌شده محصول	R214	
عدم حضور نیروی فنی باتجربه در استان	R216	
توقف تولید	R218	توزیع‌کنندگان (R3)
پیش‌بینی نادرست تقاضا	R32	
برگشت محصول از سوی مشتری	R36	
دریافت مطالبات معوقه	R37	مصرف‌کنندگان (R4)
افزایش قیمت محصول نهایی	R41	
کاهش قدرت خرید اقشار مختلف مردم	R43	
تفاوت‌های فرهنگی	R44	بهداشت و سلامت (R5)
ریسک تنفس ذرات شیمیایی، گرد و خاک و گاز در محیط کار	R52	
ایستادن طولانی مدت	R54	
حمل بیش از ظرفیت بار توسط کارگر	R55	
استفاده از مواد محرک و کافین دار توسط کارگر	R57	
حمل نامناسب بار توسط کارگر	R510	
نشستن طولانی مدت و کار تکراری	R511	بیولوژیکی (R6)
وجود سروصدای زیاد محیط کار	R512	
تب مالت	R61	
شیوع بیماری کرونا	R63	
آبله	R64	سیاسی (R7)
اعتصابات	R72	
روابط بین‌المللی کشور	R73	
وجود لابی‌گری در عرصه تولید	R75	
وجود جنگ و اغتشاشات	R76	
تحریم‌ها	R79	اقتصادی (R8)
کاهش صادرات	R81	
افزایش نرخ تورم	R82	
نوسانات ارز در کشور	R83	
مسائل مالیات روی کسب‌وکار	R85	
وجود رکود اقتصادی	R87	
افزایش واردات	R88	تکنولوژی (R9)
افزایش فقر	R810	
عدم تبلیغات در محصول	R91	
عدم به‌کارگیری بازاریابی الکترونیکی	R92	محیطی (R10)
عدم وجود واحد تحقیق و توسعه	R93	
قانون	R101	
دولت و مقررات	R102	محیطی (R10)
بلاياي طبيعي مانند: سيل، زلزله، آتش‌سوزی	R103	

۲.۳. نتایج OPA

گام اول: رتبه‌بندی خبرگان بر اساس سابقه کار و میزان تحصیلات که در جدول (۴) بیان شده است.

جدول ۴: رتبه خبرگان

DM	DM1	DM2	DM3	DM4	DM5	DM6	DM7	DM8	DM9	DM10
Rank	5	3	2	1	7	9	4	6	8	10

جدول ۵: رتبه معیارها هر خبره

	R14	R19	...	R103
DM1	16	36	...	19
DM2	11	44	...	31
...
DM10	17	38	...	27

گام دوم: رتبه معیارها توسط هر خبره در جدول (۵) آورده شده است:
 گام سوم: حل مدل با کمک نرم افزار MATLAB ۲۰۱۶:
 وزن شاخص های به دست آمده با حل مدل به شرح جدول (۶) می باشد.

جدول ۶: وزن شاخص ها

شاخص	R14	R19	R111	...	R103
وزن	0.0171	0.0062	0.0208	...	0.0105

۳.۳. محاسبه روابط درونی شاخص ها با به کارگیری تکنیک DEMATEL F

در این مرحله با استفاده از روش دیمتل فازی، روابط درونی میان شاخص ها شناسایی و تعیین می شود. سپس، با استفاده از عوامل میانی شاخص ها و به کمک روابط فرایند تحلیل شبکه فازی، وزن عوامل محاسبه می شود. کلیه محاسبات با استفاده از نرم افزار MATLAB ورژن ۲۰۱۷R انجام شده است که نتایج آن در ستون سوم جدول (۷) نمایش داده شده است.

جدول ۷: بردار برتری F DEMATEL

شاخص ها	بردار برتری دیمتل فازی (R+C)
R_{113}	(۱/۰۹, ۲/۰۷, ۴/۱۹)
R_{114}	(۰/۷۷, ۱/۷۹, ۳/۸۹)
R_{102}	(۰/۱۲, ۱/۲۳, ۳/۳۱)
R_{103}	(۰/۲۲, ۱/۲۸, ۳/۳۵)

۴.۳. وزن نهایی شاخص ها با به کارگیری رویکرد ترکیبی OPA و DEMATEL F

ما در این پژوهش از ترکیب روش DEMATEL OPA-Fuzzy استفاده کردیم که نتایج اولویت بندی ریسک ها به ترتیب جدول (۸) می باشد. در این جدول رتبه شاخص های تعیین شده را با روش های مختلف و با ضریب همبستگی پیرسون (r) نشان می دهد. مقادیر r در سطح آخر جدول، رابطه بین نتایج DEMATEL OPA-Fuzzy با سایر روش ها را با سطح معنی داری $\alpha = 0.05$ (سطح اطمینان ۹۵٪) را نشان می دهد. همچنین از آنجایی که سطح معنی داری روش ها کمتر از 0.05 می باشد رابطه معنی داری وجود دارد. این ضریب همبستگی نشان دهنده رابطه قوی می باشد.

با توجه به حل مدل ترکیبی DEMATEL F و OPA مشاهده می شود که در میان ۴۸ شاخص، به ترتیب شاخص های شیوع بیماری کرونا با کد شناسایی ۶۳R، نوسانات ارز در کشور با کد شناسایی ۸۳R، افزایش نرخ تورم با کد شناسایی ۸۲R دارای بالاترین ریسک ها در واحدهای صنعتی لبنی مورد بررسی می باشند.

۴. نتیجه گیری

امروزه با افزایش پیچیدگی و گستردگی، سطح بی اطمینانی و ریسک موجود در تولید نیز افزایش می یابد. این ریسک ها می توانند برای سازمان ها هزینه آور باشند و سبب تأخیر در تحویل محصولات به مشتری و در نتیجه نارضایتی وی شوند. نتایج این تحقیق می تواند به یک عملکرد بهتر و

جدول ۸: وزن نهایی شاخص‌ها با روش ترکیبی

اولویت	دیفازی	ترکیب DEMATEL F & OPA	وزن به دست آمده روش FDEMATEL	وزن به دست آمده روش OPA	شاخص‌ها
15	0.0186	(0.019,0.035,0.072)	(1.09,2.07,4.19)	0.0171	R113
38	0.0057	(0.005,0.011,0.024)	(0.77,1.79,3.89)	0.0062	R14
5	0.0345	(0.046,0.063,0.107)	(2.2,3.03,5.12)	0.0209	R19
.
.
34	0.0068	(0.001,0.014,0.038)	(0.12,1.23,3.31)	0.0115	R102
36	0.0066	(0.002,0.014,0.035)	(0.22,1.28,3.35)	0.0106	R103

صحیح‌تر در کاهش ریسک منجر شود. در تحقیقات آتی، محققین علاقه‌مند به این حوزه می‌توانند موارد زیر را به‌عنوان پژوهش‌های آتی بررسی کنند:

- از سایر تکنیک‌های وزن‌دهی مانند روش برنامه‌ریزی آرمانی خطی فازی، برنامه‌ریزی ترجیحات لگاریتمی فازی و همچنین از روش‌های رتبه‌بندی مانند مرک^۹ استفاده شود.
- پژوهش حاضر بر مبنای روش‌های مجموعه خاکستری و فازی شناسایی شود.
- پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های بعدی اقدامات اصلاحی متناسب با هر عامل نیز در شرایط فازی شهودی مشخص و ارزیابی شود.
- ارائه یک مدل مناسب به‌منظور ارزیابی و انتخاب اقدام‌های پاسخ به ریسک‌ها می‌تواند در پژوهش‌های آینده ارائه گردد.

مراجع

- [1] Rahmatinezhad, F., Zarei Mahmoudabadi, M., & Sayyadi, H. (2023). Risk Assessment in the Food Industry with the Combined Approach of FMEA and BWM in Intuitionistic Fuzzy Conditions (Case Study: Tashal Quchan Dairy Factory). *Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems*, 11(22), 171-185. <https://doi.org/10.22084/ier.2023.5426>
- [2] Salah, B., Alnahhal, M., & Ali, M. (2023). Risk prioritization using a modified FMEA analysis in industry 4.0. *Journal of Engineering Research*.
- [3] Ramos, G. L., Nascimento, J. S., Margalho, L. P., Duarte, M. C. K., Esmerino, E. A., Freitas, M. Q., Cruz, A. G., & Sant'Ana, A. S. (2021). Quantitative microbiological risk assessment in dairy products: Concepts and applications. *Trends in Food Science & Technology*, 111, 610-616.
- [4] Rhouma, M., Lachapelle, V., Comeau, G., Quessy, S., Zanabria, R., Provost, F., Italiano, C., Holley, R., Smillie, J., & Brockhoff, E. (2021). Identification and selection of animal health and food safety-related risk factors to be included in the Canadian Food Inspection Agency's risk assessment model for livestock feed mills. *Food Control*, 121, 107642.
- [5] Klir, G., & Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic* (Vol. 4). Prentice hall New Jersey.
- [6] Ataei, Y., Mahmoudi, A., Feylizadeh, M. R., & Li, D.-F. (2020). Ordinal priority approach (OPA) in multiple attribute decision-making. *Applied Soft Computing*, 86, 105893.
- [7] Ataei, M. (2010). *Fuzzy Multi Criteria Decision Making*. Shahrood University of Technology Publication. In.
- [8] Liou, J. J. H., Yen, L., & Tzeng, G.-H. (2008). Building an effective safety management system for airlines. *Journal of Air Transport Management*, 14(1), 20-26. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2007.10.002>
- [9] Hsu, C.-W., Kuo, T.-C., Chen, S.-H., & Hu, A. H. (2013). Using DEMATEL to develop a carbon management model of supplier selection in green supply chain management. *Journal of Cleaner Production*, 56, 164-172. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2011.09.012>

⁹MEREC



عملیات حسابی روی مجموعه اعداد فازی دوزنقهای فیثاغورثی

نعمت اله تقی نژاد

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: اعداد فازی دوزنقهای فیثاغورثی، عملیات حسابی، بهینه سازی	اخیراً مجموعه های فازی فیثاغورثی به عنوان یک ابزار موثر برای نشان دادن عدم قطعیت در مسائل تصمیمگیری چند معیاره ظهور کرده است. مجموعه فازی فیثاغورثی توسط درجه عضویت و درجه عدم عضویت مشخص میشود که مجموع توان مربع آنها کمتر یا مساوی یک است. در این مطالعه، ابتدا اعداد فازی دوزنقهای فیثاغورثی را معرفی کرده سپس اعمال حسابی روی مجموعه آنها پیشنهاد خواهیم کرد. در پایان با چند مثال این اعمال حسابی رو پیاده سازی و بررسی خواهیم کرد.

مقدمه

اخیراً مجموعه های فازی فیثاغورث یک ابزار موثر برای به تصویر کشیدن عدم قطعیت از مسائل تصمیمگیری چند معیاره ظهور کرده است. مجموعه فازی فیثاغورث توسط درجه عضویت و درجه عدم عضویت مشخص میشود که مجموع توان مربع آنها کمتر یا مساوی یک است. مجموعههای فازی فیثاغورث کلیتر از مجموعههای فازی شهودی است و در بسیاری از شرایط مجموعههای فازی فیثاغورث میتوانند مسائلی را حل کنند که مجموعه فازی شهودی نمیتواند آنها را حل کنند. افزون بر آن "ژانگ" و "زو" در [۱] جزئیات ریاضی توصیف شده برای مجموعه های فازی فیثاغورث را اثبات کردند و مفاهیمی از اعداد فازی فیثاغورث (PFN) را معرفی نمودند. پنگ و یانگ [۲] عمل تقسیم و تفریق را برای اعداد فازی فیثاغورث ارائه نمودند همچنین روش رتبهبندی کمینه و بیشینه اعداد فازی فیثاغورث که منجر به حل مسائل تصمیمگیری گروهی چند معیاره با اعداد فازی فیثاغورث است را گسترش دادند. ویو و ویو [۳] عملگرهای قدرت تجمیع فازی فیثاغورث را در تصمیم گیریهای چند معیاره توسعه دادند.

این مقاله به صورت زیر سازمان دهی میشود. در ادامه این بخش برخی مقدمات لازم را بیان کرده و در بخش دوم به معرفی PFN های دوزنقهای میپردازیم. در بخش سوم عملیات حسابی روی این مجموعه اعداد را تعریف میکنیم و در بخش پایانی از چند مثال عددی برای توضیح تعاریف و محاسبات پیشنهاد شده کمک میگیریم.

مقدمه

در این بخش به بررسی مفاهیم ابتدایی که برای این طرح نیاز هستند میپردازیم. تعریف ۱. (مجموعه فازی فیثاغورثی) فرض کنید X یک مجموعه مرجع و P یک مجموعه فازی فیثاغورثی (PFS) در X باشد که توسط یاگر و عباسوف [۴] بصورت زیر ارائه شده است،

$$P = \{ \langle x, \mu_p(x), \nu_p(x) \rangle \mid x \in X \}$$

که در آن $\mu_p: X \rightarrow [0, 1]$ نشان دهنده درجه عضویت و $\nu_p: X \rightarrow [0, 1]$ نشان دهنده درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ در مجموعه P است که شرط زیر را نیز برقرار میکنند.

$$0 \leq \mu_p(x) + \nu_p(x) \leq 1$$

همچنین برای هر $x \in X$ شاخص $\pi_p(x) = \sqrt{1 - \mu_p(x)^2 + v_p(x)^2}$ درجه تردید عنصر x در P نامیده میشود.
تعریف ۲. عدد فازی ذوزنقهای فیثاغورثی ($TrPFN$) $A = \{(a, b, c, d); t, f\}$ یک $TrPFN$ است که بر روی \mathbb{R} تعریف میشود و μ_A درجه عضویت و v_A درجه عدم عضویت آن بصورت زیر تعریف میشود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)t/(b-a), & a \leq x < b \\ t, & b \leq x \leq c \\ (d-x)t/(d-c), & c < x \leq d \\ 0, & x < a \text{ or } x > d, \end{cases}$$

$$v_A(x) = \begin{cases} [b-x+f(x-a)]/(b-a), & a \leq x < b \\ f, & b \leq x \leq c \\ [x-c+f(d-x)]/(d-c), & c < x \leq d \\ 1, & x < a \text{ or } x > d, \end{cases}$$

و مقادیر t و f به ترتیب بیشینه درجه عضویت μ_A و کمینه درجه عضویت v_A است بطوریکه $t \in [0, 1]$, $f \in [0, 1]$ و $\mu_A(x) + v_A(x) \leq 1$.
 برای هر $x \in X$ با قرار دادن $t = 1$ و $f = 0$ در تعریف ۲، $TrPFN$ بصورت $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ نمایش داده میشود و توابع عضویت و عدم عضویت آن بصورت زیر قابل ارائه است:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a^1)/(a^2-a^1), & a^1 \leq x < a^2 \\ 1, & a^2 \leq x \leq a^3 \\ (a^4-x)/(a^4-a^3), & a^3 < x \leq a^4 \\ 0, & x < a^1 \text{ or } x > a^4, \end{cases}$$

$$v_A(x) = \begin{cases} 0, & a^5 \leq x < a^6 \\ (a^7-x)/(a^7-a^5), & a^6 \leq x \leq a^7 \\ (x-a^8)/(a^8-a^7), & a^7 < x \leq a^8 \\ 1, & x < a^5 \text{ or } x > a^8, \end{cases}$$

که داریم $a^5 \leq a^1 \leq a^2 \leq a^3 \leq a^4 \leq a^8$.

۲. عملیات حسابی روی مجموعه اعداد فازی ذوزنقهای فیثاغورثی

در این بخش عملیات حسابی اصلی روی مجموعه اعداد فازی ذوزنقهای فیثاغورثی را بیان خواهیم کرد.
تعریف ۳. فرض کنید $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ و $B = \{(b^1, b^2, b^3, b^4); (b^5, b^6, b^7, b^8)\}$ دو $TrPFN$ و α یک عدد حقیقی باشد، تعریف میکنیم:

$$A \oplus B = \{(a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4); (a^5 + b^5, a^6 + b^6, a^7 + b^7, a^8 + b^8)\} \quad (1)$$

$$-A = \{(-a^4, -a^3, -a^2, -a^1); (-a^8, -a^7, -a^6, -a^5)\} \quad (2)$$

$$B \ominus A = \{(b^1 - a^4, b^2 - a^3, b^3 - a^2, b^4 - a^1); (b^5 - a^8, b^6 - a^7, b^7 - a^6, b^8 - a^5)\} \quad (3)$$

$$\alpha A = \begin{cases} \{(\alpha a^1, \alpha a^2, \alpha a^3, \alpha a^4); (\alpha a^5, \alpha a^6, \alpha a^7, \alpha a^8)\}, & \alpha \geq 0 \\ \{(\alpha a^4, \alpha a^3, \alpha a^2, \alpha a^1); (\alpha a^8, \alpha a^7, \alpha a^6, \alpha a^5)\}, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (4)$$

تعریف ۴. عدد $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ را نامنفی میخوانیم اگر $a^5 \geq 0$ باشد.

تعریف ۵. عدد $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ را آزاد از علامت میگوییم اگر a^5 یک عدد حقیقی باشد.

تعریف ۶. اگر $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ یک $TrPFN$ $B = \{(x^1, x^2, x^3, x^4); (x^5, x^6, x^7, x^8)\}$ باشد، آنگاه ضرب آنها بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\mu_{A \otimes B} = (\min\{a^1 x^1, a^1 x^4, a^4 x^1\}, \min\{a^2 x^2, a^2 x^3, a^3 x^2\}, \max\{a^3 x^3, a^3 x^2, a^2 x^3\}, \max\{a^4 x^4, a^4 x^1, a^1 x^4\})$$

$$v_{A \otimes B} = (\min \{a^\Delta x^\Delta, a^\Delta x^\Gamma, a^\Gamma x^\Delta\}, \min \{a^\Gamma x^\Gamma, a^\Gamma x^\Delta, a^\Delta x^\Gamma\}, \max \{a^\Delta x^\Delta, a^\Delta x^\Gamma, a^\Gamma x^\Delta\}, \max \{a^\Gamma x^\Gamma, a^\Gamma x^\Delta, a^\Delta x^\Gamma\})$$

۳. مثالهای عددی

مثال ۱. جمع و ضرب اعداد فازی دوزنقهای فیثاغورثی را محاسبه میکنیم.

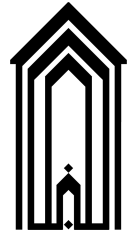
$$\begin{aligned} & \{(3, 5, 7, 9); (1, 5, 7, 10)\} \otimes \{(5, 7, 8, 9); (3, 7, 8, 11)\} \oplus \{(-1, 8, 10, 10); (-2, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(\min \{3 * 5, 3 * 9, 9 * 5\}, \min \{5 * 7, 5 * 8, 7 * 7\}, \max \{7 * 8, 7 * 7, 5 * 8\}, \max \{9 * 9, 9 * 5, 3 * 9\})\}; \\ & \{(\min \{1 * 3, 1 * 11, 10 * 3\}, \min \{5 * 7, 5 * 8, 7 * 7\}, \max \{7 * 8, 7 * 7, 5 * 8\}, \max \{10 * 11, 10 * 3, 1 * 11\})\} \\ & \oplus \{(-1, 8, 10, 10); (3, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(15, 35, 56, 81); (3, 35, 56, 110)\} \oplus \{(-1, 8, 10, 10); (-2, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(15 - 1, 35 - 1, 56 + 8, 81 + 10); (3 - 2, 35 + 8, 56 + 10, 110 + 12)\} \\ & = \{(14, 43, 66, 91); (1, 43, 66, 122)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{(4, 7, 9, 10); (2, 7, 9, 12)\} \otimes \{(-2, -1, 5, 8); (-3, -1, 5, 9)\} \ominus \{(1, 8, 10, 10); (1, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(\min \{4 * (-2), 4 * 8, 10 * (-2)\}, \min \{7 * (-1), 7 * 5, 9 * (-1)\}, \max \{9 * 5, 7 * 5, 9 * (-1)\}, \max \{10 * 8, 10 * (-2), 4 * 8\})\}; \\ & \{(\min \{2 * (-3), 2 * 9, 12 * (-3)\}, \min \{7 * (-1), 7 * 5, 9 * (-1)\}, \max \{9 * 5, 7 * 5, 9 * (-1)\}, \max \{12 * 9, 12 * (-3), 9 * 9\})\} \\ & \ominus \{(1, 8, 10, 10); (1, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(-20, -9, 45, 108); (-36, -9, 45, 108)\} \ominus \{(1, 8, 10, 10); (1, 8, 10, 12)\} \\ & = \{(-20 - 1, -9 - 1, 45 - 8, 108 - 10); (-36 - 12, -9 - 10, 45 - 8, 108 - 12)\} \\ & = \{(-30, -19, 37, 107); (-48, -19, 35, 107)\}. \end{aligned}$$

همانطور که در مثال فوق مشاهده شده محاسبات پیشنهادی برای حالت های مختلف اعداد منفی و غیرمنفی جواب های معتبر و قابل قبولی ارائه میدهد.

مراجع

- [1] X. Zhang and Z. Xu, "Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets," International journal of intelligent systems, vol. 29, no. 12, pp. 1061-1078, 2014.
- [2] X. Peng and H. Yuan, "Fundamental properties of Pythagorean fuzzy aggregation operators," Fundamenta Informaticae, vol. 147, no. 4, pp. 415-446, 2016.
- [3] G. Wei and Y. Wei, "Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the cosine function and their applications," International Journal of Intelligent Systems, vol. 33, no. 3, pp. 634-652, 2018.
- [4] R. R. Yager and A. M. Abbasov, "Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making," International Journal of Intelligent Systems, vol. 28, no. 5, pp. 436-452, 2013.



ارایه یک روش برای حل برنامه ریزی خطی تماماً فازی ذوزنقهای فیثاغورثی با قیود تساوی و متغیرهای نامنفی

نعمت اله تقی نژاد

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: مجموعه فازی فیثاغورثی، برنامه ریزی خطی، اعداد فازی ذوزنقهای فیثاغورثی	در این مطالعه، ابتدا مساله برنامه‌ریزی خطی فازی فیثاغورثی معرفی میشود که تمام متغیرها و پارامترهای آن براساس اعداد فازی ذوزنقهای فیثاغورثی تعریف شده و قیود مساله از نوع تساوی میباشد. ما روشی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی تماماً فازی فیثاغورثی با شرایط ذکر شده ارائه میدهیم. در پایان به کمک یک مثال روش پیشنهادی را شرح داده و مورد بررسی قرار دادیم.

مقدمه

برنامه‌ریزی خطی در محیط فازی یک حوزه بسیار جذاب است که توسط بسیاری از پژوهشگران در سراسر جهان پیگیری میشود. این روش میتواند به طور بسیار موثری در شرایطی که داده‌ها فازی، مبهم یا نامعلوم باشند استفاده شود [۱-۳]. در برنامه‌ریزی خطی فازی، متغیرها و پارامترها به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته میشوند. این روش میتواند در حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده و واقعی مانند مسائل حمل و نقل، تولید، مدیریت زنجیره تأمین و غیره مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال، در حمل و نقل، برنامه‌ریزی خطی فازی میتواند در تعیین مسیرهای بهینه و کاهش مصرف سوخت موثر باشد [۳]. در کل، برنامه‌ریزی خطی فازی یک روش قدرتمند برای حل مسائل بهینه‌سازی در دنیای واقعی است. مجموعه‌های فازی شهودی که توسیعی از مجموعه‌های فازی است، توسط آتاناسو [۴، ۵] معرفی گردید. در این مجموعه از دو تابع عضویت و عدم عضویت بهره میگیریم و اطلاعات بیشتری از این مجموعه در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار میگیرد، در نتیجه تصمیم‌گیری و عملیات ریاضی، دقیق‌تر و کارآمدتری نیز میتوان ارائه نمود. دی و همکارانش [۸] چند عملگر بر روی مجموعه‌های فازی شهودی ارائه نمودند. بهاراتی و سینگ [۱۰] روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چند صفتی در محیط‌های فازی شهودی با ارزش زمانی را مورد مطالعه قرار دادند. کبیراج و همکاران [۱۱] روش دیگری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی پیشنهاد کردند. پرز و مورالز [۱۲] روشی برای مقادیر بهینه منحصر به فرد برنامه‌ریزی خطی فازی کاملاً شهودی از نوع LR با محدودیت‌های نابرابری ارایه کردند.

متأسفانه، مجموعه‌های فازی شهودی در برخورد با موقعیت‌هایی که در آن مجموع درجه عضویت و درجه عدم عضویت یک عنصر از 1 تجاوز می‌کند، شکست می‌خورند. برای غلبه بر این مشکل، مفهوم مجموعه فازی فیثاغورثی معرفی شد، مجموعه‌های فازی فیثاغورثی کلیتر از مجموعه‌های فازی شهودی است و در بسیاری از شرایط مجموعه‌های فازی فیثاغورثی میتوانند مسائلی را حل کنند که مجموعه فازی شهودی نمیتواند آنها را حل کند. افزون بر آن "زانگ" و "زو" در [۱۳] جزئیات ریاضی توصیف شده برای مجموعه‌های فازی فیثاغورثی را اثبات کردند و مفاهیمی از اعداد فازی فیثاغورث (PFN) را معرفی نمودند. پنگ و یانگ [۱۴] عمل تقسیم و تفریق را برای اعداد فازی فیثاغورث ارائه نمودند همچنین روش رتبه‌بندی کمینه و بیشینه اعداد فازی فیثاغورثی که منجر به حل مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره با اعداد فازی فیثاغورثی است را گسترش دادند.

این مقاله به صورت زیر سازمان دهی میشود. در بخش اول و دوم برخی مقدمات لازم را بیان کرده و در بخش سوم روش پیشنهادی برای حل FPFLPP با PFN های ذوزنقه ای توضیح داده میشود. همچنین لیست تمام مخفف ها در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. مخفف ها

مجموعه فازی	Pythagorean fuzzy set	PFS
اعداد فازی	Pythagorean fuzzy number	PFN
ای دوزنقه فازی	Trapezoidal Pythagorean fuzzy number	TrPFN
فیتاغورثی تماماً فازی خطی ریزی برنامه مساله	Fully Pythagorean fuzzy linear programming problem	PFPLPP

تعاریف مورد نیاز و مقدماتی

در این بخش به بررسی مفاهیم ابتدایی که برای این طرح نیاز هستند میپردازیم.
 تعریف ۱. (مجموعه فازی فیتاغورثی) فرض کنید X یک مجموعه مرجع و P یک مجموعه فازی فیتاغورثی (PFS) در X باشد که توسط یاگر و عباسوف [۱۶] بصورت زیر ارائه شده است،

$$P = \{ \langle x, \mu_p(x), \nu_p(x) \rangle \mid x \in X \}$$

که در آن $\mu_p: X \rightarrow [0, 1]$ نشان دهنده درجه عضویت و $\nu_p: X \rightarrow [0, 1]$ نشان دهنده درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ در مجموعه P است که شرط زیر را نیز برقرار میکنند.

$$0 \leq \mu_p(x) + \nu_p(x) \leq 1$$

همچنین برای هر $x \in X$ شاخص $\pi_p(x) = \sqrt{1 - \mu_p(x)^2 - \nu_p(x)^2}$ درجه تردید عنصر x در P نامیده میشود.

تعریف ۲. عدد فازی دوزنقهای فیتاغورثی TrPFN بصورت $A = \{ (a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^2, a^3, a^6) \}$ نمایش داده میشود و توابع عضویت و عدم عضویت آن بصورت زیر قابل ارائه است:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x - a^1) / (a^2 - a^1), & a^1 \leq x < a^2 \\ 1, & a^2 \leq x \leq a^3 \\ (a^4 - x) / (a^4 - a^3), & a^3 < x \leq a^4 \\ 0, & x < a^1 \text{ or } x > a^4, \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} (a^2 - x) / (a^2 - a^5), & a^5 \leq x < a^2 \\ 0, & a^2 \leq x \leq a^3 \\ (x - a^3) / (a^6 - a^3), & a^3 < x \leq a^6 \\ 1, & x < a^5 \text{ or } x > a^6, \end{cases}$$

که داریم $a^5 \leq a^1 \leq a^2 \leq a^3 \leq a^4 \leq a^6$.

۳. عملیات حسابی روی مجموعه اعداد فازی دوزنقهای فیتاغورثی

در این بخش عملیات حسابی اصلی روی مجموعه اعداد فازی دوزنقهای فیتاغورثی را بیان خواهیم کرد.
 تعریف ۳. فرض کنید $A = \{ (a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^2, a^3, a^6) \}$ و $B = \{ (b^1, b^2, b^3, b^4); (b^5, b^2, b^3, b^6) \}$ دو TrPFN و α یک عدد حقیقی باشد، تعریف میکنیم:

$$A \oplus B = \{ (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4); (a^5 + b^5, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^6 + b^6) \} \quad (1)$$

تعریف ۴. عدد $A = \{ (a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^2, a^3, a^6) \}$ را نامنفی میخوانیم اگر $a^5 \geq 0$ باشد.

تعریف ۵. روش رتبه بندی برای $A = \{ (a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^2, a^3, a^6) \}$ که یک عدد TrPFN است، بصورت زیر محاسبه میشود:

$$R(A) = \frac{a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^2 + a^3 + a^6}{8}$$

تعریف ۷. فرض کنید $A = \{ (a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^2, a^3, a^6) \}$ و $B = \{ (b^1, b^2, b^3, b^4); (b^5, b^2, b^3, b^6) \}$ دو TrPFN باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} A < B & \text{ if } R(A) < R(B), \\ A > B & \text{ if } R(A) > R(B), \\ A = B & \text{ if } R(A) = R(B). \end{aligned}$$

تعریف ۸. اگر $A = \{(a^1, a^2, a^3, a^4); (a^5, a^6, a^7, a^8)\}$ یک $TrPFN$ و $B = \{(x^1, x^2, x^3, x^4); (x^5, x^6, x^7, x^8)\}$ یک $TrPFN$ باشد، آنگاه ضرب آنها بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} \mu_{A \otimes B} &= (\min \{a^1 x^1, a^1 x^2, a^1 x^3\}, \min \{a^2 x^2, a^2 x^3, a^2 x^4\}, \max \{a^3 x^3, a^3 x^4, a^3 x^5\}, \\ &\quad \max \{a^4 x^4, a^4 x^5, a^4 x^6\}) \\ \nu_{A \otimes B} &= (\min \{a^5 x^5, a^5 x^6, a^5 x^7\}, \min \{a^6 x^6, a^6 x^7, a^6 x^8\}, \max \{a^7 x^7, a^7 x^8, a^7 x^9\}, \\ &\quad \max \{a^8 x^8, a^8 x^9, a^8 x^{10}\}) \end{aligned}$$

۳. روش پیشنهادی برای حل برنامه ریزی خطی فازی تماماً فیناگوریتی در این بخش به مساله برنامه ریزی خطی فازی تماماً فیناگوریتی با متغیرهای نامنفی و قیود تساوی میپردازیم. صورت کلی مساله $PFPLPP$ را در نظر میگیریم:

$$Max (Min) Z = \sum_{j=1}^n C_j \otimes X_j \text{ subject to } \sum_{j=1}^n A_{ij} \otimes X_j = B_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

که در آن X_j یک $TrPFN$ غیرمنفی و A_{ij} , C_j و B_i نیز $TrPFN$ هستند. روش پیشنهادی برای حل مساله (۱) به شرح زیر است:

مرحله (۱) در مساله (۱) تمام متغیرها و پارامترها از نوع $TrPFN$ هستند. بنابراین آنها را بصورت زیر میتوان نمایش داد:

$$\begin{aligned} C_j &= \{(c^1, c^2, c^3, c^4); (c^5, c^6, c^7, c^8)\}, \\ X_j &= \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \\ A_{ij} &= \{(a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4); (a_{ij}^5, a_{ij}^6, a_{ij}^7, a_{ij}^8)\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \\ B_i &= \{(b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4); (b_i^5, b_i^6, b_i^7, b_i^8)\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

در نتیجه مساله (۱) بصورت زیر قابل ارائه است:

$$Max (Min) Z = \sum_{j=1}^n \{(c^1, c^2, c^3, c^4); (c^5, c^6, c^7, c^8)\} \otimes \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{(a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4); (a_{ij}^5, a_{ij}^6, a_{ij}^7, a_{ij}^8)\} \otimes \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\} \\ = \{(b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4); (b_i^5, b_i^6, b_i^7, b_i^8)\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

که در آن $X_j = \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\}$ از نوع $TrPFN$ غیرمنفی هستند. مرحله (۲) فرض میکنیم

$$\{(a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4); (a_{ij}^5, a_{ij}^6, a_{ij}^7, a_{ij}^8)\} \otimes \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\} = \{(l_{ij}^1, l_{ij}^2, l_{ij}^3, l_{ij}^4); (l_{ij}^5, l_{ij}^6, l_{ij}^7, l_{ij}^8)\}$$

در اینصورت مساله (۱) بصورت زیر میتوان خلاصه شود:

$$Max (Min) Z = \sum_{j=1}^n \{(c^1, c^2, c^3, c^4); (c^5, c^6, c^7, c^8)\} \otimes \{(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4); (x_j^5, x_j^6, x_j^7, x_j^8)\}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \left\{ (l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}); (l_{ij}^{\circ}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\circ}) \right\} = \{ (b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}); (b_i^{\circ}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\circ}) \}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن $X_j = \left\{ (x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}); (x_j^{\circ}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\circ}) \right\}$ از نوع $TrPFN$ غیرمنفی هستند. مرحله ۳) با بکارگیری رتبه بندی ارائه شده در تعریف (۶) مساله (۱) بصورت تبدیل میشود:

$$Max (Min) R(Z) =$$

$$= R \left(\sum_{j=1}^n \left\{ (c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}); (c^{\circ}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\circ}) \right\} \otimes \left\{ (x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}); (x_j^{\circ}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\circ}) \right\} \right)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \left\{ (l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}); (l_{ij}^{\circ}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\downarrow}, l_{ij}^{\circ}) \right\} = \{ (b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}); (b_i^{\circ}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\downarrow}, b_i^{\circ}) \}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن $X_j = \left\{ (x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}); (x_j^{\circ}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\circ}) \right\}$ از نوع $TrPFN$ غیرمنفی هستند. مرحله ۴) با عملیات حسابی ارائه شده مساله (۱) به یک مساله برنامه ریزی خطی قطعی زیر تبدیل میشود:

$$Max (Min) R(Z) = R \left(\sum_{j=1}^n \left\{ (c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}); (c^{\circ}, c^{\downarrow}, c^{\downarrow}, c^{\circ}) \right\} \otimes \left\{ (x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}); (x_j^{\circ}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\downarrow}, x_j^{\circ}) \right\} \right)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\downarrow} = b_i^{\downarrow}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\downarrow} = b_i^{\downarrow}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\downarrow} = b_i^{\downarrow}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\downarrow} = b_i^{\downarrow}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\circ} = b_i^{\circ}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n l_{ij}^{\circ} = b_i^{\circ}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j^{\circ} - x_j^{\downarrow} \geq 0,$$

$$x_j^{\circ} - x_j^{\downarrow} \geq 0,$$

$$x_j^3 - x_j^2 \geq 0,$$

$$x_j^2 - x_j^1 \geq 0,$$

$$x_j^1 - x_j^0 \geq 0,$$

$$x_j^0 \geq 0.$$

مرحله ۵) بهوسیله یک نرم افزار رایانه‌ای مساله قطعی مرحله ۴ را حل میکنیم و جواب متغیر X_j به ازای $n, \dots, 2, 1$ و تابع هدف مساله فازی فیناگوریثی را بدست میآوریم.

مراجع

- [1] S. H. Nasseri, A. Ebrahimnejad, B.-Y. Cao, S. H. Nasseri, A. Ebrahimnejad, and B.-Y. Cao, Fuzzy linear programming. Springer, 2019.
- [2] P. Vasant, R. Nagarajan, and S. Yaacob, "Fuzzy linear programming with vague objective coefficients in an uncertain environment," Journal of the Operational Research Society, vol. 56, no. 5, pp. 597-603, 2005.
- [3] H.-J. Zimmermann, "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions," Fuzzy sets and systems, vol. 1, no. 1, pp. 45-55, 1978.
- [4] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets. Springer, 1999.
- [5] K. T. Atanassov and C. Coargov, "Interval valued intuitionistic fuzzy sets," Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications, pp. 139-177, 1999.
- [6] W.-L. Gau and D. J. Buehrer, "Vague sets," IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, vol. 23, no. 2, pp. 610-614, 1993.
- [7] H. Bustince and P. Burillo, "Vague sets are intuitionistic fuzzy sets," Fuzzy sets and systems, vol. 79, no. 3, pp. 403-405, 1996.
- [8] S. K. De, R. Biswas, and A. R. Roy, "Some operations on intuitionistic fuzzy sets," Fuzzy sets and Systems, vol. 114, no. 3, pp. 477-484, 2000.
- [9] Abhishekh and A. Nishad, "A novel ranking approach to solving fully LR-intuitionistic fuzzy transportation problems," New Mathematics and Natural Computation, vol. 15, no. 01, pp. 95-112, 2019.
- [10] S. K. Bharati and S. Singh, "Solution of multiobjective linear programming problems in interval-valued intuitionistic fuzzy environment," Soft computing, vol. 23, pp. 77-84, 2019.
- [11] A. Kabiraj, P. K. Nayak, and S. Raha, "Solving intuitionistic fuzzy linear programming problem," International journal of intelligence science, vol. 9, no. 1, pp. 44-58, 2019.
- [12] B. Pérez-Cañedo and E. R. Concepción-Morales, "On LR-type fully intuitionistic fuzzy linear programming with inequality constraints: Solutions with unique optimal values," Expert Systems with Applications, vol. 128, pp. 246-255, 2019.
- [13] X. Zhang and Z. Xu, "Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets," International journal of intelligent systems, vol. 29, no. 12, pp. 1061-1078, 2014.
- [14] X. Peng and H. Yuan, "Fundamental properties of Pythagorean fuzzy aggregation operators," Fundamenta Informaticae, vol. 147, no. 4, pp. 415-446, 2016.
- [15] G. Wei and Y. Wei, "Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the cosine function and their applications," International Journal of Intelligent Systems, vol. 33, no. 3, pp. 634-652, 2018.
- [16] R. R. Yager and A. M. Abbasov, "Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making," International Journal of Intelligent Systems, vol. 28, no. 5, pp. 436-452, 2013.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM-197، صص ۲۲۵-۲۳۰

قیمت‌گذاری اختیار معامله روی اوراق قرضه تحت مدل HJM با فرایند لوی در بازار اوراق بهادار تهران

نیلوفر پورخسروی*، الهام دسترنج آ، حسین صاحبی فرد آ

آ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: اوراق کوپن صفر اختیار معامله مدل نرخ بهره تصادفی	استفاده از مدل مناسب برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی از مهمترین چالش‌های ریاضیات مالی است. در این مقاله با استفاده از مدل HJM با فرایند لوی به قیمت‌گذاری اختیار معامله روی اوراق کوپن صفر با روش تبدیل فوریه سریع پرداخته شده است. در انتها با یک مثال عددی از اسناد خزانه‌داری در بازار بورس تهران، قیمت‌گذاری اختیاری مفروض بررسی شده است.
2020 MSC: 91G20 60G51 91-XX	

۱. مقدمه

مشتقات نرخ بهره فرابورس عمدتاً شامل قراردادهای نرخ آتی، سوآپ نرخ بهره و اختیارهای سقف و کف هستند. قیمت‌گذاری اختیار اوراق قرضه مساله‌ی مهم در ریاضیات مالی است، چراکه اختیارهای سقف و کف را می‌توان به‌عنوان شرایطی در اوراق قرضه کوپن صفر و همچنین اختیار سوآپ را به‌عنوان اختیار اوراق قرضه دارای کوپن بیان کرد.

بازار مشتقات نرخ بهره در چند سال اخیر به دلیل پیشرفت فناوری گسترش زیادی یافته است. در حال حاضر، بازار فرابورس (OTC) تحت تاثیر مشتقات نرخ بهره است. بانک تسویه‌حساب‌های بین‌المللی (BIS) در سال ۲۰۱۳ عنوان کرد که از ۲۰۱۵۸ میلیارد دلار قرارداد مشتقه در آمریکا، بیش از ۱۵۶۸۳ میلیارد دلار از ارزش مشتقات نرخ بهره در بازار جهانی مشتقات پرداخت نشده بود که برابر با ارزش ۷۸٪ از قراردادهای مشتقه است. رفع این مشکل نیاز به مدل‌سازی مناسب برای نرخ‌های بهره، به ویژه برای مدیریت ریسک ناشی از استفاده از مشتقات نرخ بهره دارد [۱].

استفاده از مدل نامناسب برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی، ممکن است منجر به قیمت‌گذاری نادرست و نامشخص مدل شود. منظور از قیمت‌گذاری نادرست این است که قیمت‌های بازار با قیمت مدل پیش‌بینی شده متفاوت باشد.

مدل‌های مشتقات نرخ بهره سابقه طولانی و غنی دارند. یک مدل مناسب برای نرخ بهره باید ارزیابی دقیق ابزارهای بازار داشته‌باشد و امکان کالیبراسیون به داده‌های بازار وجود داشته‌باشد.

یکی از اولین مدل‌های نرخ بهره مورد استفاده در بازار، مدل واسیچک است که با استفاده از فرآیند ارنشتاین-اولنبرگ برای نرخ بهره‌های کوتاه مدت ارائه شد.

* سخنران

پست الکترونیک: niloofarpourkhosravi@gmail.com (نیلوفر پورخسروی)، elham.dastranj@shahroodut.ac.ir (الهام دسترنج)، sahebi.hosein@shahroodut.ac.ir (حسین صاحبی فرد)

اما مدل واسیچک دارای نواقصی بود که با ایجاد تغییرات در این مدل سعی در برطرف کردن این نواقص شد. از جمله ایده کاکس و همکاران عبارتی جذری در ضریب انتشار فرآیند نرخ بهره کوتاه مدت واسیچک برای اطمینان از منفی نشدن نرخ ها بود. مدل هال-وایت یکی دیگر از مدل هایی است که با در نظر گرفتن مشتقات مالی به عنوان تابعی از کل منحنی بازده، به رفع نواقص مدل واسیچک پرداخت [۴]. متأسفانه، علیرغم این واقعیت که مدل های نرخ بهره تصادفی به خوبی با ساختار دوره اولیه مطابقت دارند، مطالعات نشان می دهد که به طور کلی قیمت های بازار مشتقات نرخ بهره با مدل های نرخ بهره تصادفی ناسازگار است که عمده تاً به این دلیل است که هیچ تضمینی وجود ندارد که مدل های نرخ بهره تصادفی، قیمت ها و نوسانات معقولی را ارائه کنند. به عبارت دیگر، مدل های بهره تصادفی نمی توانند حرکات پیچیده منحنی های نرخ بهره را به درستی پوشش دهند. این امر قیمت گذاری و پوشش مشتقات نرخ بهره را که ارزش آنها به شکل منحنی بازدهی بستگی دارد، دشوار می کند. به همین دلیل، ارائه مدل جایگزین برای کل منحنی بازده ضروری است.

هیث و همکاران یک چارچوب منعطف را برای توصیف تغییر در کل منحنی بازده بر حسب نرخ های پیش روی آتی فرض کردند. چارچوب کلاسیک هیث-جارو-مورتون (HJM) برای قیمت گذاری بدون آربیتراژ توسط یک حرکت براونی ساخته می شود. با این حال، این مدل نیز، به دلیل ناتوانی آن در گرفتن ویژگی های تازه مشاهده شده بازار، کامل نیست. همچنین دینامیک نرخ های بهره بازار نیز با ویژگی های حرکت براونی سازگار نیست. به بیان دقیق، یک حرکت براونی که مبتنی بر توزیع نرمال است، با توزیع بازده مشاهده شده اوراق قرضه کوپن صفر مطابقت ندارد.

۲. مدل HJM

دینامیک مدل HJM برای نرخ بهره به صورت زیر است.

$$df(t, T) = \alpha(t, T, \omega)dt + \sigma(t, T, \omega)dW_t, \quad t < T \quad (1)$$

که در آن W_t حرکت براونی d بعدی، $\alpha(t, T, \omega)$ رانش و $\sigma(t, T, \omega)$ تلاطم است که به مسیرهای نمونه ω وابسته است. چارچوب HJM نرخ های آتی لحظه ای را به عنوان بلوک های ساختمانی اساسی از مدل های ساختار زمانی قرار می دهد. در واقع مدل HJM برای آنالیز کردن مدل های نرخ بهره استفاده می شود و یک چارچوب و تعمیمی از مدل هایی با نرخ بهره کوتاه مدت هستند که بر اساس نرخ های آتی لحظه ای نوشته می شوند. مدل توسعه یافته مربوط به چارچوب HJM با مدل های نرخ بهره کوتاه مدت متفاوت است زیرا مدل های HJM کل منحنی های نرخ بازده را مورد بررسی قرار می دهد همچنین شرط بدون آربیتراژ در این مدل، آن را نسبت به سایر مدل های ارزش گذاری اختیارها، متمایز می کند. از مزیت های دیگر این مدل می توان به موارد زیر اشاره کرد

۱. مدل های قیمت گذاری دیگر مانند مدل واسیچک، CIR و هو-لی و... برای از بین بردن قیمت بازاری ریسک همه به معکوس سازی و روش برگردان منحنی نیاز دارند. در این مدل ها برای پارامتری کردن شکل قیمت بازاری ریسک، می توان فرمول قیمت گذاری ورقه قرضه را معکوس کرد و بعد از این مرحله قیمت ریسک به عنوان تابعی از قیمت های اوراق قرضه بدون کوپن به دست می آید که حل این تابع کاری مشکل است. اما مدل HJM نیازی به معکوس سازی ساختار زمانی برای از بین بردن قیمت بازاری ریسک در قیمت گذاری های اختیارها ندارد.

۲. دارای نرخ های جاری تصادفی با چند عامل تصادفی است که بر ساختار زمانی نرخ های بهره تاثیر می گذارد. نرخ های جاری برای تسویه حساب های سریع روی اوراق بهادار یا ارز بیان می شوند و منعکس کننده انتظار بازار از حرکت قیمت های آتی برای اوراق بهادار هستند.

۳. این مدل ها همه اختیارها، اعم از اروپایی و آمریکایی را شامل می شود.

۳. فرایند لوی

تعریف ۳.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ فرآیند لوی نامیده می شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ نمو های مستقل داشته باشد.
۲. توزیع های $X_{t+h} - X_t, t \geq 0$ به بستگی نداشته باشند.
۳. X بطور تصادفی پیوسته باشد. این یعنی برای هر $\epsilon > 0$ و $t \rightarrow 0$ ، $\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) \rightarrow 0$.
۴. مسیر نمونه $X_t(\omega)$ از راست پیوسته باشد.
۵. $X_0 = 0$ (a.s.).

فضای احتمال (ω, \mathcal{F}, P) ، فیلتر $F = \{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ که در آن $0 < T < \infty$ را روی آن در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید در بازار واقعی، معادلات ساختار زمانی نرخ های بهره از مدل تک متغیره مارکوفی متعلق به الگوی هیث-جرو-مورتون، پیروی کنند. در زمان t این الگو به صورت یک فرایند ایتو برای نرخ بهره آتی لحظه ای با سررسید T تحت اندازه احتمال P به صورت زیر معرفی می شود

$$df(t, T) = \alpha_f(t, T) + \delta_f(t, T)dW_t$$

که W حرکت براوانی یک بعدی استاندارد، $\alpha(t, T)$ تابعی نامنفی و $\delta_f(\circ, T)$ تابعی کراندار روی بازه $[\circ, T]$ است. معادله دیفرانسیل تصادفی با شرط اولیه فوق را می توان به صورت یک معادله انتگرالی نوشت

$$f(t, T) = f(\circ, T) + \int_{\circ}^t \alpha_f(s, T) ds + \int_{\circ}^t \delta_f(s, T) dW_s$$

منحنی نرخ پیش خرید اولیه f و پارامتر تلاطم آتی $\delta_f(\circ, T)$ پارامترهای مدل HJM هستند. بنابراین رفتار ساختار زمانی آتی مدل با انتخاب این پارامترها قابل کنترل است. مهمترین ویژگی مدل HJM این است که اگر مدل با قیمت گذاری بدون آربیتراژ سازگار باشد، آنگاه پارامترهای $\delta_f(\circ, T)$ ، $\alpha(t, T)$ وابسته به هم هستند. به عبارت دقیق تر برای اجتناب از فرصت آربیتراژ باید فرایند $\lambda(t)$ مستقل از سررسید T وجود داشته باشد که

$$\alpha_f(s, T) = \delta_f(s, T) \left[\int_s^T \delta_f(s, u) du + \lambda(s) \right]$$

$\lambda(t)$ را می توان به عنوان بیمه ریسک نرخ بهره در نظر گرفت. وجهی که در سرمایه گذاری های ریسکی به یک طرف معامله به خاطر قبول ریسک تعلق می گیرد که مستقل از سررسید T است.

۴. قیمت گذاری اوراق قرضه با مدل HJM با فرایند لوی

دینامیک نرخ بهره در مدل HJM با فرض فرایند لوی L_t به صورت زیر است

$$f(t, T) = f(\circ, T) + \alpha_L(t, T) dt - \sigma(t, T) dL_t \quad \forall \circ \leq t \leq T, \quad (2)$$

که مقادیر اولیه $f(\circ, T)$ است. قیمت گذاری اوراق کوبین صفر تحت مدل (۲) به صورت زیر است.

$$P(t, T) = P(\circ, T) B_t \exp \left(- \int_{\circ}^t \psi_s(S(s, T)) ds + \int_{\circ}^t S(s, T) dL_s \right).$$

که $S(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, u) du$ ، B_t میزان سپرده بانکی و $\psi(x)$ تابع مشخصه مربوط به فرایند لوی با پارامترهای (a_t, b_t, v_t) است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\psi_t(u) = a_t u - \frac{1}{\nu} u b_t u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{ux} - 1 - ux) v_t dx \quad (3)$$

نمایش آن به صورت نمایی به صورت زیر است

$$1 = P(t, t) = P(\circ, T) B_t \exp \left(- \int_{\circ}^t \psi_s(S(s, T)) ds + \int_{\circ}^t S(s, t) dL_s \right)$$

فرض کنید

$$B_t = \frac{1}{P(\circ, t)} \exp \left(\int_{\circ}^t \psi(S(s, t)) ds - \int_{\circ}^t S(s, t) dL_s \right). \quad (4)$$

فرمول قیمت گذاری اوراق قرضه کوبین صفر تحت مدل (۲) به صورت زیر خواهد شد

$$P(t, T) = \frac{P(\circ, T)}{P(\circ, t)} \exp \left(\int_{\circ}^t \psi(S(s, t)) ds - \psi(S(s, T)) ds + \int_{\circ}^t S(s, T) - S(s, t) dL_s \right). \quad (5)$$

می توان معادله (۵) را به صورت زیر به یک قسمت قطعی و یک قسمت تصادفی تقسیم کرد

$$P(t, T) = D(t, T) \exp(X_t), \quad (6)$$

$$D(t, T) = \frac{P(\circ, T)}{P(\circ, t)} \exp \left(\int_{\circ}^t \psi(S(s, t)) ds - \psi(S(s, T)) ds \right), \quad (7)$$

و

$$X_t = \int_0^t S(s, T) - S(s, t) dL_s. \quad (۸)$$

از آنجایی که L یک فرآیند لوی است که توسط یک توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر ایجاد می‌شود و ساختار نوسان σ برای همه سررسیدها ثابت فرض می‌شود، می‌توان نشان داد که فرآیند X_t دارای نموهای مستقل است، که الزاما ثابت (همگن) نیستند.

۵. روش تبدیل فوریه سریع برای اختیار معامله روی اوراق قرضه

در سال ۱۹۵۱ گیل پلاز با معرفی قضیه‌ای، حالتی دیگر از معکوس تبدیل فوریه^۱ را مطرح کرد [۳] و کار و مادان در سال ۱۹۹۹ با استفاده از معکوس تبدیل فوریه، با روشی جدید به نام تبدیل فوریه سریع، به قیمت‌گذاری اختیارات معاملات اروپایی تخت مدل هستون پرداختند. [۲] روش آن‌ها به سرعت به یکی از راهکارهای محبوب و مفید برای قیمت‌گذاری مشتقات تبدیل شد. چراکه این روش از سرعت و دقت بالایی برخوردار است.

فرض کنید W یک متغیر تصادفی در فضای احتمال (Ω, F, P) باشد. تبدیل فوریه یک تابع پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt < \infty \quad (۹)$$

که $\omega \in \mathbb{R}$ تابع اصلی را می‌توان از معکوس تبدیل فوریه برگرداند.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega < \infty \quad (۱۰)$$

تابع قیمت‌گذاری اختیار روی اوراق قرضه کوپن صفر به عنوان تابعی از قسمت قطعی آن بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{put}(\circ) &= P(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(K - De^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= P(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(K - e^{-\zeta} e^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= \mathbb{V}_{put}(\circ, T, K). \end{aligned}$$

که K قیمت توافقی اختیار است. با فرض $K = e^{\log K} > \circ$ می‌توان قیمت‌گذاری اختیار فروش را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{put}(\circ, T, K) &= P(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(K - e^{-\zeta} e^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= P(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(e^{\log K} - e^{-\zeta} e^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= P(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(e^{\log K} (\mathbb{1} - e^{-\zeta - \log K} e^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= KP(\circ, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[(\mathbb{1} - e^{-(\zeta + \log S)} e^{X_T})^+ | F_{\circ}] \\ &= KP(\circ, T) \mathbb{V}_{put}(\circ, T, \mathbb{1}). \end{aligned}$$

که $R \in (-\infty, \circ)$ و $\zeta = -\log D$. برای $K = \mathbb{1}$ ، تبدیل فوریه تابع ϕ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\hat{\phi}(u) = \frac{\mathbb{1}}{iu(\mathbb{1} + iu)}.$$

اکنون مساله قیمت‌گذاری به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\mathbb{V}_{put}(\circ, T, K) = \frac{KP(\circ, T)}{2\pi} e^{-R\zeta} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\zeta} \frac{\mathbb{1}}{(iu - R)(\mathbb{1} - iu - R)} \chi X_T(u - iR) du. \quad (۱۱)$$

که $\chi X_T(u)$ تابع مشخصه مدل است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi X_T(u) = \exp\left(\int_0^t \psi_s(iuS(s, T) + (\mathbb{1} - iu)S(s, t)) - \psi_s(S(s, t)) ds\right). \quad (۱۲)$$

^۱Fourier Transformation

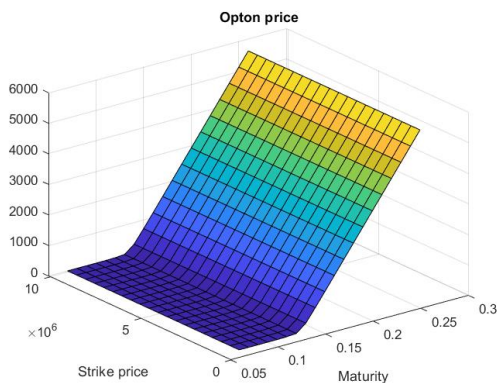
جدول ۱: برآورد پارامترها.

تاریخ شروع	تاریخ سررسید	قیمت دارایی پایه	قیمت توافقی	قیمت در سررسید	σ
۰۲/۱۰/۲۰۲۳	۰۳/۰۱/۲۰۲۴	۸۲۱۳۹۰	۸۴۷۴۳۹,۷۳۵۵	۸۶۱۷۳۰	۸۸۷۴۳۳,۷۱۶۱
۰۳/۰۷/۲۰۲۳	۰۲/۱۰/۲۰۲۳	۷۸۲۸۹۰	۸۸۷۴۳۳,۷۱۶۱	۸۲۱۳۹۰	۹۶۸۰,۳۸۶۲۴۴

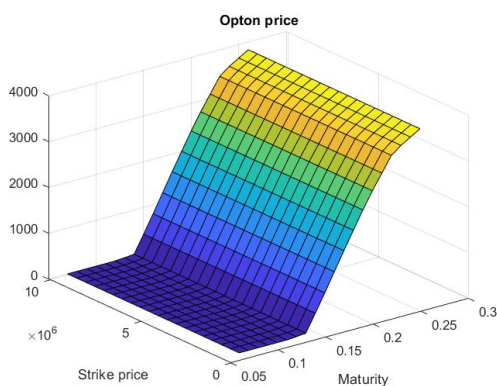
۶. مثال عددی

در این بخش به عنوان یک مثال عددی از اسناد خزانه داری که مشابه اوراق کوپن صفر هستند استفاده شده است. در واقع ارزش اسناد خزانه داری به عنوان قیمت اختیار در نظر گرفته شده است. در این مقاله با در نظر گرفتن یکی از اسناد خزانه داری (اخزا ۰۰۵) دو اختیار با سررسیدهای سه ماهه فرض و قیمت گذاری شده است. در جدول ۱ پارامترهای مورد نیاز مشخص شده اند. برای تخمین پارامترها از روش MLE استفاده شده است.

در شکل ۱ و ۲ روند تغییر قیمت اختیار با متغیر در نظر گرفتن پارامترها نشان داده شده است. در شکل ۱ مقدار $R = 1$ و در $R = 10$ فرض شده است.



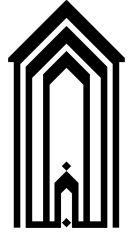
شکل ۱: حرکت براونی و انواع آن



شکل ۲: حرکت براونی و انواع آن

مراجع

- [1] Alfeus, M. (2015), Heath–Jarrow–Morton models with jumps (Doctoral dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University).
- [2] Carr, P. and Madan D.(1999), option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, 2(4), : 61-73
- [3] Gil-Pelaez J. (1951), Note on the inversion theorem, *Biometrika*, 38(3-4), 481-482.
- [4] Sahebi Fard, H., Dastranj, E., Abdolbaghi Ataabadi, A. (2022), Analytical and numerical solutions for the pricing of a combination of two financial derivatives in a market under Hull-White model. *Advances in Mathematical Finance and Applications*, 7(4), 1013-1023.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED-106، صص ۲۳۱-۲۳۴

ارزیابی و مدیریت اضطراب دانش آموزان در درس ریاضی

سارا کرنگیش*^۱، منصور نیک نژاد^۲، آرزو اسدپور^۳، زینب ملازهی^۴، هما ملازهی^۵

^۱دبیر ریاضی، شهرستان نیکشهر
^۲دبیر مطالعات اجتماعی، شهرستان نیکشهر
^۳دبیر تفکر و سبک زندگی، شهرستان نیکشهر
^۴مدیر مدرسه نقیسه جلایی کلک، شهرستان نیکشهر
^۵مدیر مدرسه آوای خاور، شهرستان نیکشهر

چکیده	اطلاعات مقاله
اضطراب واژه ای است که با معانی متفاوتی در قسمت های زیادی از روانشناسی به کار گرفته می شود. به طور کلی اضطراب بیانگر حالت هیجانی نامطلوبی است که نتیجه و محصول فشار و کشمکشهای روانی افراد می باشد و مشخصه بارز آن ترس و بیم از وقوع حوادث آینده است. اضطراب ریاضی وضعیتی روانی است که به هنگام رویارویی با محتوی ریاضی، موقعیت های یاددهی، یادگیری، حل مساله و امتحان در افراد پدید می آید این وضعیت معمولاً همراه با نگرانی زیادی، افکار تحمیلی و تنش روانی می باشد. در این مقاله سعی شده تا تاثیر این عوامل بر عملکرد در درس ریاضی مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور پژوهش توصیفی از نوع همبستگی انجام شد. جامعه آماری عبارت بود از کلیه دانش آموزان دختر و پسر پایه چهارم تا هشتم مدارس دولتی شهرستان نیکشهر روستای جلایی کلک که در سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰ مشغول به تحصیل بوده اند. نمونه ها با روش نمونه گیری خوشه ای انتخاب شدند جهت سنجش اضطراب ریاضی دانش آموزان از مقیاس ریاضی چیو و هنری ۱۹۹۰ استفاده گردید. این مقیاس دارای چهار بعد (ارزیابی اضطراب ریاضی - یادگیری - حل مسئله - معلم) است. نتایج تحقیق نشان داد که از بین مولفه های اضطراب ریاضی تنها اضطراب یادگیری ریاضی توانست عملکرد در درس ریاضی را پیش بینی کند و در ادامه مقاله چند راهکار برای مدیریت اضطراب ریاضی در کلاس درس را بیان کردیم.	واژه های کلیدی: اضطراب ریاضی عملکرد در درس ریاضی ارزیابی اضطراب ریاضی کنترل و کاهش اضطراب ریاضی 2020 MSC: 34B16 34B40 65M70

۱. مقدمه

اضطراب به طور کلی و اضطراب ریاضی به طور خاص می تواند میزان حواس پرتی و افکار نامربوط و مزاحم را در افراد افزایش دهد و با ایجاد اختلال در ساختارهای ذهنی و فرآیندهای پردازش اطلاعات، موجب تحریف ادراکات افراد از روابط و مفاهیم ریاضی شوند. تحقیقات انجام شده پیرامون اضطراب و عملکرد افراد گواه نیرومندی بر این واقعیت است که اضطراب، افسردگی و به طور کلی فشارهای روانی موجب کاهش رفتار مفید و موثر اشخاص در مقابله با موقعیت های گوناگون می شود به ویژه هنگامی که تکالیف خواسته شده ای که معلم در کلاس درس به دانش آموز می دهد دارای گام های فکری بیشتری باشد. دارلی (۱۹۹۸) و باکستون (۱۹۸۱) براساس پژوهش های خود وجود اضطراب بالا در کلاس درس ریاضی را پدیده ای خطرناک و بسیار مهم با تاثیر دراز مدت می داند و بحث می کند که چگونه هیجان های قوی از جمله اضطراب ریاضی می تواند موجب ایست توانایی تفکر و استدلال و نقصان در عملکرد مفید فرد شوند و او را در یک دور باطل گرفتار سازند. لئون (۱۹۹۲) اضطراب ریاضی را عاملی می داند که موجب اجتناب ریاضی می شود و معتقد است که میزان اضطراب ریاضی، ارتباط معکوسی با زمینه ی دانش ریاضی فرد و پیشرفت ریاضی او دارد، بنابراین میزان سطح اضطراب ریاضی در افراد می تواند به عنوان عامل پیش بینی کننده در پیشرفت ریاضی آنان

*سخنران

پست الکترونیک: Sara.karangish73@gmail.com (سارا کرنگیش)، second.author@gmail.com (منصور نیک نژاد)، third.author@gmail.com (آرزو اسدپور)، forth.author@gmail.com (زینب ملازهی)، fifth.author@gmail.com (هما ملازهی)

بشمار آید اصولاً فرد افسرده و مضطرب کم انگیزه است و برای انجام تکلیف های پیچیده تر ریاضی که نیازمند گام های فکری بیشتری باشد از قابلیت های کمتری برخوردار است زیرا براساس قانون پذیرفته شده ی برکز-دادسون درجه ی انگیزش برای انجام یک تکلیف با میزان پیچیدگی آن تکلیف کاهش می یابد.

۲. روش تحقیق

تحقیق حاضر از نوع همبستگی است که در مقوله طرح های توصیفی قرار می گیرد. داده های پژوهشی از طریق پرسشنامه گردآوری شد. جامعه تحقیق عبارت بود از کلیه دانش آموزان پایه چهارم تا هشتم دختر و پسر روستای جلایی کنگ شهرستان نیکشهر (۱۵۰=N) که از میان آنها ۶۵ دانش آموز (۳۵ پسر و ۳۰ دختر) به روش خوشه ای تصادفی انتخاب گردید و مورد بررسی قرار گرفت. ابزار تحقیق عبارت از مقیاس اضطراب ریاضی چیو و هنری بود آنان مقیاس اضطراب ریاضی را براساس مقیاس درجه بندی اضطراب ریاضی - فرم کوتاه (S-MARS) پلیک و پارکر به وجود آوردند و بر اساس آنچه خود عنوان کرده اند می توان آن را برای کودکان پایه های چهارم تا هشتم مورد استفاده قرار داد این مقیاس شامل ۲۲ عبارت کوتاه در مقیاس چهار قسمتی لیکرت می باشد که فعالیت های مرتبط با ریاضی را تصریح می کند حداقل نمره در این مقیاس ۲۲ و حداکثر نمره ۸۸ می باشد. چیو و هنری برای سنجش روایی این مقیاس، همبستگی آن را با ابزارهای مختلفی محاسبه کرده اند. این مقیاس، همبستگی بالایی (۰/۹۷) با مقیاس درجه بندی اضطراب ریاضی (MARS) دارد، علاوه بر آن بین نمرات این مقیاس و مقیاس اضطراب ریاضی (سارسون) (TASC) همبستگی مثبت بالایی (۰/۷۱) به دست آمده است. شواهد مربوط به روایی سازه، به وسیله محاسبه ضریب همبستگی، میان نمرات این مقیاس و نمره های ریاضی نیم سال تحصیلی به دست آمد. این ضرایب که برای پایه های چهارم، ششم و هفتم برآورد شده بود همه منفی و معنادار بود، حسینی برای برآورد پایایی کل و زیر مقیاس های این مقیاس از روش آلفای کرانباخ استفاده کرد. که این ضرایب در جدول شماره ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: ضرایب حاصل از اجرای آلفای کرانباخ در مورد پایایی مقیاس اضطراب ریاضی

تعداد	ضریب آلفا	بعد
۸۰	۰/۶۲	اضطراب یادگیری ریاضی
۸۰	۰/۵۲	اضطراب حل مساله ریاضی
۸۰	۰/۴۷	اضطراب معلم ریاضی
۸۰	۰/۸۰	اضطراب ارزیابی ریاضی
۸۰	۰/۸۵	کل

همچنین چیو و هنری برای برآورد پایایی این ابزار برای هر پایه و کل نمونه، از روش آلفای کرانباخ استفاده کردند که این ضرایب در جدول شماره ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: ضرایب

کلاس	تعداد	ضریب آلفا
چهارم	۱۵	۰/۸۰
پنجم	۱۰	۰/۸۲
ششم	۱۲	۰/۸۲
هفتم	۱۴	۰/۸۳
هشتم	۱۴	۰/۸۳
کل	۶۵	۰/۸۲

۳. نتایج اصلی

برای بررسی روابط مولفه های اضطراب ریاضی (اضطراب ارزیابی ریاضی، یادگیری، حل مساله، معلم) دانش آموزان با عملکرد آنان در درس ریاضی بعد از ماتریس همبستگی از تحلیل رگرسیون استفاده شد. که نتایج آن در جداول شماره ۳ و ۴ آورده شده است. که در اینجا برای (***) $p > 0.01$ و برای (*) $p > 0.05$. همان گونه که در جدول شماره ۳ مشاهده می شود رابطه تمامی مولفه های اضطراب ریاضی به غیر از اضطراب ارزشیابی ریاضی با عملکرد در درس ریاضی معنادار است و این همبستگی منفی می باشد. همچنین لازم به ذکر است

جدول ۳: ماتریس همبستگی بین مولفه های اضطراب ریاضی و عملکرد در درس ریاضی

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
					۱	نمرات ریاضی ۱
				۱	۰/۲۵۱ _**	اضطراب یادگیری ریاضی ۲
			۱	۰/۶۱۷ **	۰/۱۸۳ _**	اضطراب حل مساله ریاضی ۳
		۱	۰/۴۸۰ **	۰/۴۶۸ **	۰/۱۳۵ _*	اضطراب معلم ریاضی ۴
	۱	۰/۰۲۰	۰/۲۹۴ **	۰/۲۳۵ **	۰/۰۷۸ _	اضطراب ارزشیابی ریاضی ۵
۱	۰/۴۲۸ **	۰/۶۵۱ **	۰/۸۷۱ **	۰/۸۷۷ **	۰/۲۳۹ _**	اضطراب کلی ریاضی ۶

جدول ۴: مدل پیش بینی عملکرد ریاضی براساس اضطراب ریاضی

متغیرها	R	R ²	R ² تعدیل شده	خطای استاندارد	F	P
اضطراب یادگیری ریاضی	۰/۲۵۱	۰/۰۶۳	۰/۰۶۰	۴/۶۱	۲۰/۱۰۸	۰/۰۵

که رابطه میان اضطراب یادگیری ریاضی، حل مساله ریاضی و اضطراب کلی ریاضی با عملکرد در درس ریاضی در سطح ۰/۰۱ و رابطه اضطراب معلم ریاضی با عملکرد در درس ریاضی در سطح ۰/۰۵ معنادار است.

همان گونه که در جدول شماره ۴ مشاهده می شود. تنها اضطراب یادگیری به عنوان متغیر پیش بین معنادار وارد رگرسیون شده و به تنهایی توانسته است ۳/۶ درصد از واریانس عملکرد ریاضی را تبیین کند. سائز زیر مقیاس های اضطراب ریاضی نتوانسته اند شرط ورود را برآورده کرده و وارد رگرسیون شوند.

جدول ۵: مدل پیش بینی عملکرد ریاضی براساس اضطراب ریاضی

متغیرها	ضرایب استاندارد نشده		ضرایب استاندارد شده Beta	t	سطح معنی داری
	B	خطای استاندارد			
ثابت	۱۶/۱۴۳	۰/۹۰۶۰	-	۱۷/۸۲۲	۰/۰۰۵
اضطراب یادگیری	-۰/۲۹۴	۰/۰۶۶۰	-۰/۲۵۱۰	-۰/۴۸۴	۰/۰۰۵

در جدول ۵ نتایج مربوط به تحلیل رگرسیون گام به گام برای پیش بینی عملکرد در درس ریاضی از طریق مولفه های اضطراب ریاضی، آورده شده است. بر اساس مندرجات جدول، از بین مولفه های مربوط به اضطراب ریاضی، تنها اضطراب یادگیری ریاضی توانسته به شکل معنی داری عملکرد دانش آموزان را پیش بینی نماید. مقدار ضریب رگرسیونی استاندارد شده برای اضطراب یادگیری برابر با -۰/۲۵۱ می باشد. با توجه به مقدار آماره t به دست آمده (-۴/۴۸) که در سطح آلفای ۰/۰۰۱ معنی دار می باشد، نتیجه می گیریم که مولفه اضطراب یادگیری ریاضی بر عملکرد دانش آموزان در درس ریاضی موثر است و با افزایش یک انحراف استاندارد در متغیر اضطراب یادگیری ریاضی، عملکرد دانش آموزان به میزان ۰/۲۵۱ کاهش می یابد.

۱.۳. شیوه های علمی کنترل و کاهش اضطراب ریاضی

پس از شناخت واقعیت های مربوط به حالت های عاطفی و هیجانی و عمدتاً اضطراب ریاضی و تاثیرشان بر عملکرد ریاضی دانش آموزان باید راهکارهای علمی مهار و کاهش آنها را شناسایی کرده و به طور موثر به کارگیریم که در ادامه چند راهکار را پیشنهاد دادیم.

۱. شناخت پدیده های هیجانی و فشارهای روانی به ویژه مقوله ی اضطراب در عرصه ی فعالیت های ریاضی و تلاش برای مسلط شدن بر این حالت ها با کمک راهکارهای علمی
۲. توجه و برخورد علمی با تفاوت های فردی فراگیران در ابعاد گوناگون به ویژه از سوی معلمان و والدین این تفاوت می تواند شامل سبک های مختلف شناختی یادگیری، ظرفیت حافظه فعال، فرایندهای ذهنی و پردازش اطلاعات، مولفه های فرهنگی-اقتصادی، خانوادگی و جنسیتی باشد.
۳. اصلاح شیوه های سنتی و متعارف سنجش رفتاری ریاضی شیوه کاغذ و قلمی و معمولی ما برای اندازه گیری دانش ریاضی دانش آموزان و دانشجویان، آن هم گاه با یک بار امتحان، شاید نه عادلانه باشد و نه علمی. بیم و هراس ناشی از شرکت و توفیق در امتحان های ریاضی

همواره از آغاز ترم، ذهن و اندیشه ی فرد را به خود مشغول می کند و طبعاً بسیاری از دانش آموزان در جهتی حرکت خواهند کرد که تنها موفقیت آنان را در این امتحان های رسمی و خشک فراهم آورد. انجمن «استانداردهای سنجش برای ریاضیات مدرسه» در سال ۱۹۹۵ یک بولتن را تحت عنوان (NCTM) ملی ریاضی معلمان آمریکا منتشر کرده است که مطالعه و توجه به آن ها برای معلمان ریاضی خالی از فایده نخواهد بود.

۴. انتخاب آزاد دسته ای از مسائل و تکلیف های ریاضی برای درگیر شدن دانش آموزان و هدایت آنان برای انتخاب مسائلی که هم جذاب باشد و هم چالش انگیز.

۵. اصلاح و رفع اشتباهات درسی و علمی دانش آموزان در کلاس درس با کمک خود آنان با طرح سوال و جواب های مناسب و وادار نمودن آنان به نوشتن بیشتر، واگذاری مسئولیت پیشرفت ریاضی خوان ها به خودشان امری است که امروزه بیش از پیش فراگیران آموزش ریاضی بر آن تاکید دارند در این میان آگاهی درست شاگردان از اشتباهات و بد فهمی های علمی در موقعیت های یادگیری و حل مساله می تواند عامل تعیین کننده ای در احساس مسئولیت برای رشد عملکرد ریاضی آنان به حساب آید افزون بر آن محترم بودن شاگرد در کلاس، و احساس ایمنی و امنیت او را در میان هم کلاسی های وی به ارمغان می آورد که خود عامل هایی کارآمد برای اضطراب زدایی هستند.

۲.۳. نتیجه گیری

شواهد نظری و تجربی گذشته حکایت از آن داشت که یادگیری و پیشرفت در درس ریاضی تحت تاثیر عواملی چند قرار می گیرد که یکی از آنها اضطراب ریاضی است. نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر نیز نشان داد که اضطراب یادگیری ریاضی در یک رابطه منفی می تواند پیشرفت در درس ریاضی را پیش بینی نماید. تحقیقات گذشته نیز نتایج مشابهی را گزارش داده بودند. همان گونه که قبلاً نیز اشاره شد عوامل فرهنگی می توانند این اضطراب را تشدید کنند شاید بر همین اساس از میان مولفه های اضطراب حل مساله، معلم، و ارزیابی و اضطراب یادگیری ریاضی تنها مولفه اخیر توانسته قدرت پیش بینی عملکرد منفی در درس ریاضی را پیش بینی نماید، چرا که از نظر مفهومی این مولفه با رویارویی با موقعیت های یادگیری ریاضی در ارتباط است که می تواند قبل از تعمیم اضطراب به معلم و ارزشیابی به وجود آید و تنها عامل آن پیشینه فرهنگی کسب شده توسط فرد است. اگر چه حل مساله ریاضی نیز وضعیت مشابهی دارد، ولی به میزان لازم نتوانسته عملکرد منفی در درس ریاضی را تبیین کند. همچنین به نظر می رسد عدم تنظیم اوقات درسی و انباشته شدن مطالب برای روزهای پایانی ترم، انباشتگی کتاب های درسی ریاضی در نظام آموزشی جدید ایران و زمان ناکافی و نامتناسب با حجم مطالب در مقایسه با زمان نسبتاً باز قبلی برای آموزش و یادگیری، خصومت، نگرش های غیر حمایتی، انتظارات غیر واقع گرایانه از سوی معلمان نسبت به دانش آموزان، دست پاچه نمودن و تحقیر آنان در مقابل هم کلاسی های خود و مهارت های مطالعه ضعیف دانش آموزان را دچار نوعی اضطراب کرده است که طبعاً نقصان در عملکرد ریاضی را به همراه خواهد داشت.

مراجع

- [۱] علم الهدایی، سید حسن، اصول آموزش ریاضی، انتشارات نما، ۱۳۹۴.
- [2] Alexander L. and Martary C., (1990). *The development of abbreviated version of the mathematics anxiety raring scale*, Measurement and evaluation in counselling and development, 22(5), 143-150.
- [3] Asensio, M., Pol, E. (1998). *La compresion de los contenidos del museo*, Iber. Didactica de las Ciencias. Geografia e Historia, 15, 15-30.
- [4] Chiu L. and Henry L., (1990). *Development and validation of the mathematics anxiety scale for children*, Measurement and evaluation in counselling and development, Educational psychology, 23(8), 54-67.
- [5] Satske E. and Amato P.P.b (1995). *Mathematics anxiety and achievement among japanese elementary school students*, Journal educational and psychology measurement, 13(7), 54-81.
- [6] Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, Meta cognition and Sense making in mathematics*, In D. A. Grows (ed), Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning. Mathematics, New York.
- [7] Tishler, A. (1980). *A study of attitude- treatment interaction in mathematics with preservice elementary school teachers*, Paper presented at the Annual meeting of the Mid- South Educational Research Association, New Orleans, LA (ERIC Document Reproduction Service No. ED 195400).



تاثیر فناوری در آموزش ریاضی

ساناز بختیاری نسب^{*}

آمدرس دانشگاه علمی کاربردی استان بوشهر s.bakhtiyarinasab@yahoo.com

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: فناوری ۱، سواد دیجیتال ۲، تدریس ریاضی ۳، نرم افزار ریاضی ۴، پداگوژی ۵	امروزه نیاز به روش‌های نوین تدریس با توجه به پیشرفت روز افزون علم و فناوری حس می‌شود، استفاده از فناوری در تدریس ریاضی در دهه‌های اخیر به طور چشمگیری در جهان در حال گسترش است. هدف آموزش ریاضی برقراری ارتباط بین ریاضی و زندگی روزمره است. رابطه میان فناوری و آموزش ریاضی دارای تاریخی طولانی است. نظام آموزشی و دانش محتوایی - پداگوژی (در لغت‌نامه‌ها به معنی "روش آموزشی"، "فن تعلیم" و "علم تعلیم" ترجمه شده است). باید از تحول بنیادین دیجیتال بهره‌گیری. استفاده از آموزش الکترونیکی و دیجیتال به‌عنوان روشی موثر در توسعه آموزش ریاضی می‌باشد؛ برگزاری دوره‌های آموزشی برای آموزش سواد دیجیتال و چگونگی به‌کارگیری نرم‌افزارهای ریاضی در روش تدریس به معلمان در این زمینه بسیار کارآمد خواهد بود و درک عمیق‌تری را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورد.

۱. مقدمه

ریاضیات، علمی با مفاهیم التزامی است. التزامی بودن طعم ریاضیات امکان احساس مفاهیم را دشوار و در نتیجه آموزش و یادگیری آن را سخت کرده است به طوری که روش‌های آموزشی خاصی را می‌طلبد. در روش‌های سنتی تدریس، علمی‌الخصوص در ریاضی، فرایند و جریان تدریس و یادگیری به گونه‌ای است که مانع از فعالیت و درگیری دانش‌آموز در تجارب یادگیری می‌شود. معلم متکلم وحده بوده و بدون در نظر گرفتن توانایی‌ها استعدادها و علایق شاگردان به صورت یک‌نواختی محتوای کتاب را در قالب سخنرانی‌های طولانی مدت به آن‌ها انتقال می‌دهد. از نتایج رویکرد سنتی تدریس در سیستم‌های آموزشی، افت تحصیلی شدید در دانش‌آموزان و توجه‌ها فقط به حفظ و تکرار مطالب و محتوای دروس است [۴]. هنوز شکافی عمیق بین دانش ریاضی ارائه شده در دوره‌های تربیت معلم و موضوعاتی که در دبیرستانها تدریس می‌شود وجود دارد. دانشی که دانشجو معلمان در دانشگاه می‌آموزند ارتباط چندانی با نیازهای دانش‌آموزان ندارد [۷]. امروزه نیاز به روش‌های نوین تدریس با توجه به پیشرفت روز افزون علم و فناوری حس می‌شود، به دنبال روش‌های تدریسی بود تا به توان دانش‌آموزان را از حفظ طوطی‌وار به سوی یادگیری سوق داد. استفاده از روش‌های فعال تدریس از روش‌هایی است که کمک شایانی به دانش‌آموزان و معلمان می‌کند. روش‌های فعال تدریس روش‌هایی هستند که فعالیت ذهنی دانش‌آموز را در زمینه نیازهای عمومی و برمی‌انگیزند [۸]. هدف نهایی آموزش ریاضی به دانش‌آموزان کمک به درک مطلب، کاربرد مهارت‌ها در عمل و یادآوری مفاهیم در آینده است.

۲. دانش محتوا و پداگوژیکی معلمان ریاضی در عصر دیجیتال

هر معلمی به خوبی می‌داند یکی از موثرترین روش‌ها برای یاد دادن یک مبحث درسی، نشان دادن کاربرد آن در عرصه عمل و در دنیای واقعی است. زمانی که دانش‌آموزان نحوه کاربرد یک مسئله را در جهان واقعی و در دنیای اطراف خود می‌بینند، با آن ارتباط برقرار کرده و کمتر دچار

^{*}سخنران

پست الکترونیکی: s.bakhtiyarinasab@yahoo.com (ساناز بختیاری نسب)

فراموشی می‌شوند. اما در یک کلاس ریاضی، پیدا کردن کاربرد مباحث درسی در دنیای واقعی و زندگی روزمره همیشه ساده نیست. بنابراین می‌توان کاربرد آن مفهوم ریاضی را در سایر مباحث ریاضی یا علمی نشان داد.

. هدف از آموزش ریاضی تنها پرورش نخبه‌ها و علاقه‌مندان به ریاضی یا افراد خاصی که می‌خواهند رشته ریاضی را در سطح دانشگاهی ادامه دهند نیست، بلکه برقراری ارتباط بین ریاضی و زندگی روزمره، کسب مهارت‌های مدل سازی ریاضی و حل مسئله، رشد مهارت‌های تفکر، برقراری ارتباط بین نمایش‌های مختلف ریاضی و تعبیر و تفسیر آن‌ها، برقراری ارتباط بین ریاضی و سایر علوم و در حالت کلی، بکارگیری مفاهیم ریاضی در محیط پیرامونی و تفسیر و تحلیل آن‌ها از جمله هدف‌های اصلی برنامه درسی می‌باشد.

پداگوژی هنر یا علم وجودی یک معلم است. این اصطلاح عموماً به استراتژی‌ها یا راهبردهای آموزش مربوط می‌شود، که برخی‌ها از آن به‌عنوان سبک یادگیری نیز یاد می‌کنند. هدف نهایی، از کاربست الگوی تدریس پداگوژیک یادگیری از طریق همیاری و دستیابی به فعالیت‌های عالی ذهنی است. یادگیری از طریق هم‌یاری که در شروع این قرن از طرف جان دیویی^۱ مطرح شد، در چند سال اخیر از بحث‌های دائمی آموزش شده است. مهمترین دستاوردی که از پداگوژی انتظار می‌رود، این است که فراگیران با این روش به‌جای این‌که نگرش و مهارت‌های خود را مستقیماً از معلمان خود دریافت کنند، به‌توانند با راهنمایی معلمان، به کشف و نوآوری برسند و یاد بگیرند که به چه دانشی، نگرشی و یا مهارتی نیازمندند؛ چگونه و از چه راهی می‌توانند آن را به‌دست آورند. شولمن^۲ از جنبه نظری بین دانش پداگوژی محتوا، که دانش چگونه قابل درک ساختن یک موضوع برای دیگران است و دانش محتوایی، تمایز قائل می‌شود. او همچنین دانش پداگوژی را مشخص می‌کند که دانش مستقلی در مورد چگونگی بهینه ساختن موقعیت‌های یادگیری در کلاس درس است. دانش پداگوژی عمومی، مربوط به یادگیری و یادگیرندگان، قواعد کلی آموزش، اداره کلاس درس، اهداف و آرمانهای آموزش است. در دو دهه‌ی گذشته، پداگوژی ریاضی به شکل یک دیسپلین درآمده که به تخصص دانشگاهی برای آموزش آن نیاز است [۱]. دانش محتوایی-پداگوژیک تلفیق خاصی از محتوا و پداگوژی است و منحصر در قلمرو معلمان است و شکل خاصی از درک حرفه‌ای آن‌ها را شامل می‌شود. شولمن این دانش را مفیدترین شکل بازنمایی ایده‌ها و قدرت‌مندترین نوع استنتاج‌ها، مثال‌ها، به تصویر کشیدن‌ها، توضیحات، اثبات‌ها و در یک کلمه، مفیدترین روش بازنمایی و صورت‌بندی برای یک موضوع می‌داند که درک آن‌ها برای یادگیرندگان، قابل فهم می‌کند. دانش محتوایی-پداگوژیک شامل درک این نکته نیز هست که چه چیزی، یادگیری یک موضوع خاص را سخت یا آسان می‌سازد. این دانش، مفاهیم و تصوراتی را که دانش‌آموزان نسبت به یک موضوع در طول زمان ساخته و توسعه داده‌اند، در برمی‌گیرد [۲].

پداگوژی قدیمی و قرون وسطایی که فرهنگ کتابخوانی، یادداشت‌برداری، جواب سوالات محدود و سپس فراموش کردن همه آن‌ها (تدریس کلیشه‌ای) معلم صحبت می‌کند، شاگرد گوش می‌دهد معلم آغازگراست، شاگرد براساس فعالیت معلم عکس‌العمل نشان می‌دهد، معلم فعال و شاگرد، منفعل است. این پداگوژی از چه ضعفی رنج می‌برد باید اذعان کرد تا ۱۰۰ سال پیش این پداگوژی خوب کار می‌کرد و کارایی داشت اما در هزاره سوم و در عصر جهانی شدن جایی برای چنین پداگوژی نیست، رشد فناوری اطلاعاتی و ارتباطی پداگوژی‌های جدیدی را می‌طلبد که به‌ترتیب انسان‌های فرهیخته‌ای می‌پردازد که قادرند مسائل را در ابعاد کلان یا کلی نگرایی در نظر گیرند، قادر باشند تئوری‌های جدید را در دنیای واقعی در زمان واقعی و در موقعیت‌های زندگی واقعی به‌کار گیرند [۳].

در یک کلاس درس ریاضی ایده آل، معلم قادر است یک مسئله‌ی واحد را به شیوه‌های مختلف حل کند و دانش‌آموزان را تشویق می‌کند که هر یک راه حل‌های خلاقانه خود را برای حل مسئله امتحان کنند. هر چه راهبردهای مختلف و بیشتری برای نگاه کردن به یک مسئله و حل آن به ذهن دانش‌آموزان برسد، به همان میزان قابلیت آن‌ها برای درک جوانب مختلف مسئله نیز افزایش می‌یابد به این ترتیب آن‌ها درگیر حفظ کردن یک فرمول یا یک راه حل نمی‌شوند بلکه بالعکس سعی می‌کنند، برای هر مسئله راه حل‌های مختلفی را بیازمایند. معلمان ریاضی بیشتر از نوع معلمان درس نگر علمی هستند. آنان معمولاً سخت‌گیر و فکر می‌کنند که اگر خشک و جدی نباشند، دانش‌آموزان درس ریاضی را نخواهند خواند و چیزی از ریاضی یاد نخواهند گرفت. بسیاری از زمان‌هایی که دانش‌آموزان نسبت به تدریس یک معلم ریاضی اعتراض دارند، مسأله ربطی به تدریس معلم ندارند بلکه مشکل به نوع رفتار معلم برمی‌گردد که شاگردان دل خوشی از آن ندارند.

نظام آموزشی و دانش محتوایی-پداگوژی باید از تحول بنیادین دیجیتال بهره‌گیرد؛ سخنی است که در عصر حاضر زیاد با آن برخورد کردیم. ما در عصر اطلاعات (یا همان عصر دیجیتال) زندگی می‌کنیم؛ عصری که مرحله‌ای از تاریخ انسانی است و ویژگی آن تغییر از تولید صنعتی به اطلاعات و کامپیوتری شدن است. این عصر به‌طور قابل ملاحظه‌ای شیوه‌ی تعامل افراد را با کسب‌وکارها و با یکدیگر نحوه‌ی آموختن دانش و حتی دانش محتوایی-پداگوژیک تغییر می‌دهد.

۳. فناوری و تدریس

با ورود اینترنت به عصر فناوری، به منزله‌ی یکی از قدرت‌های عصر اطلاعات و ارتباطات، امکانات فناورانه‌ی جدیدی وارد دنیای فناوری شد، اما نقاط جغرافیایی گوناگون، چه در سطح جهانی و چه در سطح کشوری، از این امکانات به گونه‌ی برابر بهره‌مند نبودند و این فقدان تساوی منجر به پیدایش شکاف دیجیتال در میان کشورها شد. رفته رفته توجه مسئولان به برطرف سازی این شکاف جلب شد و اقداماتی نیز در این

¹John Dewey

²Shulman

مورد انجام شد که برخی اثربخش بودند و برخی دیگر کارایی لازم را نداشتند. سواد دیجیتال در کنار دانش محتوایی - پداگوژیکی که امروز یکی از ضرورت‌های زندگی و تدریس دروس در عصر دیجیتال است، یکی از ابزارهایی است که به برطرف سازی شکاف دیجیتال کمک می کند. سواد دیجیتال به معنی داشتن مهارت‌های لازم برای استفاده از فناوری های متفاوت، درک و تفسیر محتوا و اطلاعات دیجیتال و ارزش یابی اطلاعات دیجیتال است.

استفاده از آموزش الکترونیکی و دیجیتال به عنوان روشی موثر در توسعه آموزش به دانش آموزان همواره مورد توجه بوده و این موضوع با سرعت زیاد و قدرت انتقال ذاتی خودش مرزهای آموزش را درنوردیده و تمام شیوه‌های آموزش سنتی و ابعاد آن را تحت سیطره خودش قرار داده است. یکی از اهداف عالی نظام تعلیم و تربیت افزایش کیفیت یادگیری دانش آموزان در رشد علمی و فرهنگی آنان می باشد که آموزش دیجیتال در قالب دانش محتوایی - پداگوژیکی یکی از این روش های جدید است. این موضوعات در حال حاضر در حال جهانی شدن است. طرح این موضوع که آموزش دیجیتال ریاضی به منظور ایجاد تمرکز بیشتر در حال انجام است و تدارکات و سرمایه گذاری مناسب هم در سیستم یادگیری می طلبد. معلمان جامعه امروزی دیجیتال می خواهند در صورت نیاز به هنگام برخورد با مهارتی خاص و یا شکاف های دانش که مانع کامل کردن تدریس و یا دست یافتن به نتیجه‌ی محسوس و دلخواه‌شان می شود آموزش ببینند. یادگیری باید به طور مستقیم فعالیت های معلمان را در دنیای واقعی و آموزش حین خدمت حمایت کند به جای این که روی دانش آموزشی و مباحث تئوری متمرکز شود. معلمان باید بتوانند به این یادگیری خاص در حیطه‌ی تدریس خودشان و در زمانی که به آن نیاز دارند دسترسی داشته باشند.

یکی از این موارد خود یادگیری و یا آموزش از راه دور و یادگیری گروهی است. بنابراین امروزه کلاس های درس، محتوای آموزشی، جایگاه معلم و دانش آموز دارد که لازم است یک تعریف جدیدی برای آن به وجود بیاریم و که متناسب با نیازهای امروزه بشر باشد. برگزاری دوره های آموزشی برای آموزش سواد دیجیتال و نرم افزارهای آموزشی ریاضی به معلمان و سرمایه گذاری در زمینه‌ی پیشرفت حرف های معلمان. برخی از معلمان مهارت استفاده از فناوری و رسانه های جدید را ندارند و حتی برخی از آنها در این مورد در مقایسه با دانش آموزان خود دانش کمتری دارند؛ بنابراین باید مهارت های پایه را به آنها آموزش داد. می توان سازمانی را تأسیس کرد که در آن آموزش های ضمن خدمت برای معلمان برگزار شود، آموزش هایی که از طریق آن مهارت هایشان را در استفاده از فناوری و رسانه ها ارتقا دهند و اصول اصلی یادگیری دیجیتال را بیاموزند. نحوه ارائه معلمان ریاضی به استفاده از ابزارهای دیجیتالی در تدریس آنها را ارائه می دهد. بر اساس بررسی ما پیشنهاد می کنیم دو موضوع حیاتی برای توضیح درک آموزگاران در ریاضیات ارائه شود. اولاً، زمان یادگیری نرم افزار خاص برای درک مفهومی ریاضی و در مرحله دوم، معلمان موضوع درک خاص درباره آموزش و یادگیری ریاضیات. نتیجه نشان می دهد که تحقیق در آینده برای ادامه روشن ساختن ابزارهای دیجیتالی می تواند از معلمان پشتیبانی کند و به عنوان یک نتیجه یادگیری ریاضیات دانش آموزان آنها، مناسب برای قرن بیست و یکم باشد.

استفاده از فناوری در تدریس ریاضی در دهه های اخیر به طور چشمگیری به منزله‌ی شایستگی های فناوری در تدریس و یادگیری ریاضی، افزایش یافته و در جهان در حال گسترش است. رابطه میان فناوری و آموزش ریاضی دارای تاریخی طولانی است. سالهاست که بسیاری از رایانه ها و ماشین حساب ها به شیوه های گوناگون، یادگیری ریاضی را آسان کرده اند. همچنین دسترسی های گوناگون به ریاضی و ایده های ریاضی را در محیط های دیگر فراهم می کنند [۷]. آموزش ریاضی با کمک رایانه زمانی انجام می گیرد که از رایانه برای تدریس اصول ریاضی استفاده و به دانش آموزان اجازه داده شود که پدیده های ریاضی را شبیه سازی کنند و آنها را جهت دهند [۶]. نرم افزار رایانه ای نه تنها محاسبات حسابی و دست ورزی های نمادی را انجام می دهد بلکه نتایج این محاسبات را می تواند به صورت عینی نمایش دهد. این امر به مغز مستعد امکان می دهد که از نتایج نمایش داده شده به طور مجسم و دیداری، برای دیدن ارتباطات مفهومی استفاده کند. یادگیری ریاضی به کمک رایانه نقشی اساسی در آموزش این درس ایفا می کند. همچنین محیط تعاملی یادگیری به وسیله رایانه کاربرد تکمیل کننده ای است در راستای تدریس سنتی در کلاس هایی که در آنها از گچ و تخته استفاده می شود [۲].

۴. نرم افزارهای ریاضی

شیوه استفاده از کامپیوتر در تدریس و یادگیری محاسن آن در کمک به معلمان برای جذب دانش آموزان به تدریس کمک می کند، همچنین امروزه دانش آموزان یادگیری از طریق کامپیوتر خیلی استقبال می کنند. کامپیوتر در ترسیم نمودارها، تهیه داده های گرافیکی خاصی کمک می کند، اطلاعات به روز در می آید. اطلاعات تخصصی را نیز از طریق برنامه های تخصصی در کامپیوتر می توان آموزش داد. امکان تصحیح املاي کلمات، امکان ذخیره سازی اطلاعات و نحوه‌ی صحیح نوشتن عملگرهای ریاضی مثل انتگرال و غیره را فراهم می سازند. در ادامه به معرفی چندین نرم افزار ریاضی و کاربرد آنها می پردازیم:

۱- Algebra: این نرم افزار شامل دو قسمت اعمال اصلی روی اعداد صحیح و عملیات جبری روی چند جمله ای، رادیکال ها، نمودار معادله‌ی خط راست در دستگاه مختصات و نمایش اعداد روی محور اعداد حقیقی می باشد و بیشتر در دوره‌ی راهنمایی تحصیلی کاربرد دارد.

۲- Maple: تعدادی از توانایی های این نرم افزار عبارتند از: تجزیه اعداد، جبر خطی، عملیات روی ماتریس ها، حل معادلات و دستگاه معادلات جبری، حل رابطه های بازگشتی، رسم نمودارهای دو بعدی ضمنی، حدگیری، مشتق گیری و انتگرال گیری از توابع، حل معادلات دیفرانسیل، رسم نمودار سه بعدی و ...

۳- Mathcad: ماشین حساب پیشرفته، رسم نمودارهای مختلف دو بعدی، سه بعدی و رویه ای، عملیات روی ماتریس ها، عملیات روی تساوی ها و معادلات، اعمال حدگیری، مشتق گیری، انتگرال گیری، نمادهای یونانی کوچک و بزرگ، نمادهای مختلف از جمله اعشاری، مختلط،

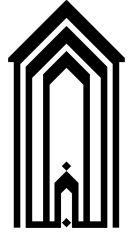
فاکتور، تابع لاپلاس، سری‌های فوریه، عملیات روی عملگرهای منطقی، برنامه نویسی Mathematica - ۴: از این نرم افزار می‌توانید در حل مسائل ریاضی شامل محاسبات جبری، تجزیه چند جمله‌ای، حل معادلات و دستگاه معادلات جبری، رسم توابع و رابطه‌ها، مثلثات، حساب دیفرانسیل و انتگرال شامل حد، مشتق‌گیری، کاربرد مشتق و انتگرال معین، جبر خطی شامل بردارها، ماتریس‌ها، مقادیر ویژه، ... و همچنین رسم سطوح و منحنی‌های سه بعدی و رویه‌های پارامتری استفاده نمود.

۵. نتیجه

می‌توان چنین برداشت نمود که با پیشرفت علم و اصول آموزش، استفاده از نرم‌افزارهای آموزشی دیجیتالی تاثیر مطلوب‌تری را نسبت به پداگوژی سنتی در امر آموزش ریاضی نشان داده و درصد موفقیت بیشتری را به خود اختصاص داده است. ارزش نرم‌افزارهای آموزشی به دلیل عرضه‌ی دانش به چندین شیوه است، دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از انواع نرم‌افزارها کاربرد همان اصول اولیه ریاضیات را با پویانمایی یا ویدئو مشاهده کنند. این تنوع فرصتی را برای درک عمیق‌تر فراهم می‌کند، پس باید تدابیری را اندیشید و به کاربرد تا به توان سطح یادگیری را در مدارس به بالاترین حد خود رساند و این کار عملی نمی‌شود مگر با ایجاد مدارس هوشمند و تشویق معلمان و یا مدرسان ریاضی به استفاده از این نرم‌افزارها، ویدئو پروژکتور و تدریس با کمک تجسم سازی و کاربرد ریاضیات در علوم مختلف می‌شود.

مراجع

- [۱] ریحانی، ابراهیم. (۱۳۹۶). اهمیت دانش پداگوژی محتوا در تدریس ریاضیات. پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی بوشهر.
- [۲] عصاره، علی‌رضا و زادشیر، محبوبه. (۱۳۹۶). بررسی تاثیر آموزش ریاضی به کمک رایانه بر نگرش ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه نهم. فصل‌نامه خانواده و پژوهش، ۳۵، ص ۴۹ الی ۶۳.
- [۳] کاظم پوریان، سعید و عبدلی، سمانه. (۱۳۹۵). سواد دیجیتال. فصل‌نامه علمی ترویجی - سیاست‌نامه علم و فناوری، ۶ (۴)، ص ۵۳ الی ۶۴.
- [۴] کیامنش، علی‌رضا و نوری، حمان. (۱۳۸۵). یافته‌های سومین مطالعه بین‌المللی TIMSS ریاضیات دوره ابتدایی. تهران: انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت.
- [۵] مرتاضی مهربانی، نرگس. (۱۳۹۵). آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی عمیق. انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۵۸، ص ۱۳۵ الی ۱۵۷.
- [۶] مژده آور، فریبا. (۱۳۸۵). تاثیر آموزش ریاضی با کمک کامپیوتر بر نگرش و یادگیری درس ریاضی دانش‌آموزان. دانشگاه تربیت معلم، پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته تحقیقات آموزشی.
- [7] Lewise, R. B., Harrison, P. J., Lynch, E. W. & Saba, F. (1994). Applications of technology in special education: A statewide study. Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal, 5(2), PP 69 -79.
- [8] Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1),



ارتباط بین موقعیت مکانی مدرسه با نگرش دانش آموزان نسبت به دروس پایه و تاثیر آن در پیشرفت تحصیلی آنها

نسترن یحیوی*، آ، خدیجه سیدمحمدی ب

*کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه غیر انتفاعی خیام مشهد، دبیرستان شایستگان، گنبد کاووس، ایران
ب-کارشناسی آموزش ابتدایی، دانشگاه آزاد اسلامی، دبستان شهید جبار خجسته، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: موقعیت مکانی مدرسه نگرش دانش آموزان دروس علوم پایه ریاضیات	در این مقاله به بررسی ارتباط بین موقعیت مکانی مدرسه بر میزان پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مقطع ابتدایی در دروس پایه می‌پردازد و به طور خاص دروس ریاضیات و علوم پایه را در نظر می‌گیرد. در این پژوهش طرح بررسی جمعی را بکار گرفته ایم و یک سوال پژوهشی به همراه فرضیه‌ای با در سطح معنی داری ۵ درصد مورد بررسی قرار داده شده است. ۹۸ دانش آموز مقطع ابتدایی به عنوان نمونه مورد سنجش قرار گرفته اند و جهت جمع‌آوری اطلاعات برای این پژوهش نیز از دو ابزار معتبر و قابل اعتماد به نام «سنجش موفقیت در ریاضیات و علوم پایه» و «سنجش موفقیت دانش آموزان» استفاده شده است. نتایج تحلیل اطلاعات که با استفاده از آنالیز تست جداگانه انجام شد، نشان داد که نمرات ضعیف دانش آموزان شهری و روستایی که نسبت به ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی دارند، با یکدیگر تفاوت چندانی ندارد. بر اساس این یافته‌ها، برای آن که دانش آموزان علی‌رغم موقعیت مکانی شان، نسبت به مطالعه ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی پیدا کنند، پیشنهادات و توصیه‌هایی ارائه گردید؛ به این خاطر که نگرش، عملکرد تحصیلی دانش آموزان را، به خصوص در ریاضیات و علوم پایه، به خوبی پیش‌بینی می‌کند.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

سیاست آموزشی ملی کشور، ریاضیات و علوم پایه را یکی از مباحث اصلی در سیستم آموزشی مدرسه معرفی کرده است که این به خاطر نقش مهم آن در توسعه ملی است. این امر نشان می‌دهد که ریاضیات و علوم پایه به عنوان یک مبحث، در برنامه آموزشی مدرسه جایگاه مهمی را به خود اختصاص می‌دهد و در رشته‌هایی چون مهندسی، مهندسی کامپیوتر، زمین شناسی، برق و الکترونیک پیشیناز است. اگر برنامه درسی ریاضیات و علوم پایه در تمامی مقاطع دبیرستان را از نزدیک مورد بررسی قرار دهیم، متوجه تاثیر سراسری آن بر فرد و نیز بر جامعه خواهیم شد [۵]. مهارتی که با مطالعه ریاضیات و علوم پایه کسب می‌شود، در تمام حوزه‌های زندگی بشر، در سطح گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. ریاضیات و علوم پایه، در شکل‌گیری نحوه تعامل با زندگی خصوصی، مدنی و اجتماعی افراد نقشی کلیدی دارد [۸]. این امر، ضرورت مطالعه مبحث را برای همه دانش‌آموزانی که در بیش‌تر کشورها تحت آموزش پایه و ثانویه قرار می‌گیرند، توجیه می‌کند. به همین دلیل ریاضیات و علوم پایه مبحثی اصلی در این مقاطع از تحصیل در سطح کشور محسوب می‌باشد. با این حال، جای تاسف دارد که در عصر حاضر، بسیاری از دانش‌آموزان با ریاضیات و علوم پایه درگیرند و در آزمون‌های پایانی خود بسیار بد عمل می‌کنند. در کشور ما، عملکرد دانش‌آموزان در «نتایج امتحانات نهایی دبیرستان» به تازگی دلگرم کننده نبوده است (گزارش آزمونگر اصلی). به هر حال، نقش اجتناب‌ناپذیری که موقعیت مکانی در

*سخنران

پست الکترونیک: first.author@gmail.com (نسترن یحیوی)، second.author@gmail.com (خدیجه سیدمحمدی)

نگرش نسبت به یادگیری ریاضیات و علوم پایه دارد، مدت زیادی است توجه پژوهشگران علوم پایه و دبیران ریاضی را، به دلیل نرخ بالای عدم موفقیت در مبحث، به خود جلب کرده است. نگرش‌هایی که دانش‌آموزان ضمن یادگیری ریاضیات و علوم پایه پیدا می‌کنند، برای مدتی طولانی باقی خواهند ماند و این نگرش‌ها ممکن است به دانش‌آموز کمک کند که ریاضیات و علوم پایه را بهتر بیاموزد [۹]. این امر درباره نگرش‌های مثبت نیز صادق است. اما همیشه این گونه نیست. دانش‌آموزان هم‌چنین ضمن یادگیری ریاضیات و علوم پایه در دبیرستان‌ها نسبت به آن نگرش منفی نیز پیدا می‌کنند. یافته‌های [۲] نشان می‌دهد که دانش‌آموزان دبستانی که نسبت به یادگیری ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی دارند، در آینده علاقه بیش‌تری به مطالعه این مباحث نشان می‌دهند. بیش‌تر دانش‌آموزان با نگرش مثبتی وارد راهنمایی می‌شوند، اما در آینده، در حین یادگیری ریاضیات در دبیرستان، نگرش خود را تغییر می‌دهند. گزارش آزمونگر اصلی [۱۰]، نشان داد که در نتایج پایانی، ضعف بدیهی دانش‌آموزان در پیشرفت در ریاضی، «دانش‌کامشان از تکنیک‌های ابتدایی دارند و نیز ناگاهی آن‌ها از مفاهیم و پروسه‌های ساده» است. این امر ممکن است ناشی از عدم موفقیت دانش‌آموزان در یادگیری تکنیک‌ها، مفاهیم و پروسه‌ها در کلاس باشد. وزارت آموزش، با همکاری آموزش و پرورش و مدارس برای دبیران ریاضیات و علوم پایه در دبیرستان‌ها، دوره‌های آموزشی ضمن خدمت برگزار کرده است. این تلاشی بود تا ترفندهای آموزشی مربی بهبود یابد. علی‌رغم این کوشش‌ها، دانش‌آموزان هم‌چنان ریاضیات و علوم پایه را درست و کامل نمی‌آموختند و در نتیجه در آزمون‌های ریاضیات و علوم پایه جامع از سوی آموزش و پرورش عملکرد بهتری نداشتند. شکست در یادگیری، نشان داد که ممکن است فاکتورهای دیگری چون نگرش‌های دانش‌آموزان و موقعیت مکانی مدرسه که ممکن است جلوی یادگیری صحیح ریاضیات را بگیرد، دخیل باشند.

۲. مفهوم موقعیت مکانی مدرسه و عملکرد آموزشی دانش‌آموزان

موقعیت مکانی مدرسه به محل خاصی گفته می‌شود که با مناطق دیگر در محیط فیزیکی در ارتباط است و مدرسه در آن قرار گرفته است. در کشور ما، زندگی روستایی، ساده و یکنواخت است و نسبت به زندگی شهری که گمان می‌رود گوناگونی فرهنگی در آن بر موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان اثر بگذارد، پیچیدگی کم‌تری دارد. این امر به این خاطر است که در مراکز شهری نسبت به مناطق روستایی، امکانات رفاهی بهتری نظیر آب لوله‌کشی، برق و خدمات مراقبت‌های پزشکی در اختیار شهروندان قرار می‌گیرد. در رابطه با امکانات آموزشی و دبیران نیز همین طور است. این شرایط معمول نشان می‌دهد که فرصت‌های آموزشی در مدارس نیجریه یکسان نیستند. بنابراین ممکن است مشاهده کنیم که در مدارس شهری ایران، نسبت به همایشان در مناطق روستایی، فرصت‌های آموزشی بیش‌تری وجود دارد. در حالی که برخی از مطالعات نشان می‌دهد که موقعیت مکانی، در حاصل یا موفقیت در یادگیری دانش‌آموزان تاثیر بسزایی دارد، برخی دیگر از مطالعات تاثیرات منفی آن را نشان می‌دهند. با (مشاهده) سختی‌های بیش‌تر دانش‌آموزان روستایی در یادگیری ریاضیات و علوم پایه نسبت به هم‌تایان شهری‌شان، دریافت که موقعیت مکانی تاثیر مهمی در یادگیری جنبه‌های مختلف ریاضیات و علوم پایه‌ای دارد که شامل زوایاست. [۳] درباره تاثیر موقعیت مکانی مدرسه بر عملکرد دانش‌آموزان در ریاضیات و علوم پایه در آزمون پایانی در مدارس روستایی و شهری تحقیق کرده و دریافتند که دانش‌آموزان شهری نسبت به هم‌تایان روستایی‌شان در این مبحث بهتر عمل کرده و نمرات ممتاز دریافت کردند، در حالی که عدم موفقیت دانش‌آموزان در مدارس روستایی بیش‌تر به چشم می‌خورد. برخی از مطالعات [۶] نشان داده که تفاوت در عملکرد تحصیلی به دلیل موقعیت مکانی نیست. دیگر بررسی‌ها نشان دادند که دانش‌آموزان روستایی در مهارت‌های عملی ریاضیات و علوم پایه، نسبت به هم‌تایان شهری‌شان عملکرد بهتری داشتند. [۶] نشان داد که موقعیت مکانی در عملکرد دانش‌آموزان ایجاد تفاوت نمی‌کند. منظور از موقعیت مکانی در این جا، این است که محل مطالعه یا مدرسه در روستا قرار دارد یا در شهر. اوب (۲۰۰۴) در عملکرد شهری-روستایی ۴۸۰ فارغ‌التحصیلان دبستانی که به راهنمایی وارد می‌شدند، در آزمون‌های فرعی شایستگی سنجی «آزمون ورودی متعارف ملی» تفاوت مهمی مشاهده کرد. او در بررسی‌اش که لقب «لیاقت سنجی تحصیلی» گرفت، به این نتیجه رسید که دانش‌آموزان محصل در مدارس شهری از هم‌تایان روستایی‌شان بهترند. هم‌چنین، دیگران شاهد رابطه مثبت مهمی بین اندازه و موقعیت مکانی مدرسه و عملکرد در آزمون «ایالت اویو» بودند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که مدارس بزرگ در مناطق شهری، به تدریج در آزمون‌های علوم پایه و ریاضیات، عملکرد بهتری نسبت به مدارس کوچک در مناطق روستایی نشان می‌دهند. با وجود این، [۱] در یافته‌های خود به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان روستایی از هم‌تایان شهری خود شایستگی کلامی بیش‌تری دارند و نیز زبان انگلیسی و امتیاز کلی آن‌ها که بر اساس (آزمون) ورودی متعارف ملی داده می‌شود، بسیار بهتر است. طی رویداد دیگری، یک گروه پژوهشگر در دانشگاه آستون اعلام کردند که بر اساس چندین گزارش معتبر دریافت شده، دانش‌آموزان راهنمایی (محصلان مدارس کوچک روستایی) نه تنها به خوبی دانش‌آموزان دیگر مدارس آموزش دیده‌اند، بلکه عموماً نگرش بهتری نسبت به کار و فعالیت‌شان را سازماندهی کنند. ممکن نبود که اندازه، تاثیر مستقیمی بر نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات داشته باشد. [۵] نیز هنگامی که داشت درباره تاثیر مدل‌های طراحی شده دیداری آموزش بر یادگیری ریاضیات و علوم پایه در سال سوم راهنمایی در ایالت نیجر مطالعه می‌کرد، چنین دیدگاهی را نشان داد و دریافت که نمرات ریاضیات و علوم پایه دانش‌آموزان در شهر و روستا تفاوتی با یکدیگر ندارد. اگر از زوایای گوناگون به اسناد مربوط به تاثیر محل بر تحصیل نگاه کنیم، نتایج، یکسان نخواهد بود. در حالی که برخی اصرار دارند که دانش‌آموزان شهری نسبت به هم‌تایان روستایی خود در آزمون‌ها بهتر عمل می‌کنند، عده‌ای دیگر به این نتیجه رسیده‌اند که دانش‌آموزان روستایی (بر خلاف همه احتمالات) عملکرد بهتری دارند. برخی این طور نتیجه گرفته‌اند که هیچ موقعیت مکانی خاصی (شهر یا روستا) ادعا کند که از دیگری برتر است؛ چرا که عملکردها در این دو محل یکسان است

۳. نگرش و یادگیری ریاضیات

منظور از گرایش در این جا، یک «میل روانشناسی» است که با میزان تایید یا عدم تایید موجودیتی خاص ارزیابی شده و این گونه شرح داده می شود [۷]. در واقع تمایل یا رغبت به پاسخ مثبت یا منفی به ایده، شی، شخص یا وضعیت خاصی است. نگرش صرفاً یعنی تأثیر انتخاب اختیاری یک فرد، و پاسخ به. چالش ها، مشوق ها و پاداش ها. [۴] بر این است که نگرش به طور کلی به نقطه نظرات مثبت یا منفی درباره اشخاص، مکان ها، چیزها یا وقایعی که اغلب «مورد نگرش» نام می گیرند. او هم چنین به نقل از آلپورت، تعریفی برای نگرش ارائه داده است: «نوعی تمایل ذهنی و عصبی که از طریق تجربیات شکل می گیرد و بر واکنش فرد نسبت به اشیا و وضعیت های اطراف، تأثیری مستقیم یا محرک می گذارد.» (ص ۱۷۰) آنچه از انواع تعاریف بر می آید، این است که نگرش، یک گرایش روانی است که نتیجه تجربیات یک فرد باعث توسعه آن می شود، که بر چگونگی در نظر گرفتن موقعیت ها، اشیا، اشخاص و چگونگی دادن پاسخ مناسب به آن ها تأثیرگذار است. این پاسخ ممکن است مثبت یا منفی باشد، یا از آن (وضعیت، فرد یا شی خاص) حمایت بکند یا نکند، خنثی و یا تردیدآمیز باشد. طبق گفته (وینر ۲۰۰۶)، نگرش ها ارزیابی ما از شخص یا چیزی را نشان می دهند. آن ها بر اساس دانش، احساسات و رفتار ما هستند و ممکن است بر رفتار آینده نیز تأثیرگذار باشند. نگرش حتماً باید هدفی داشته باشد. نگرش ما همواره نسبت به چیزها یا اشخاص است. نگرش ها از اجزای بسیار زیادی تشکیل می شوند و ممکن است بر یادگیری و درک مطلب تأثیرگذار باشند. نگرش بر رفتار اثر دارد و بر آن چه دانش آموز از محیط اطراف بر می گزیند، واکنشش نسبت به معلمان، ابزارهایی که در تدریس مورد استفاده قرار می گیرند و دیگر دانش آموزان تأثیرگذار است.

۴. نتایج پژوهش

هدف از این مطالعه به طور خاص، تشخیص این مطلب است که آیا موقعیت مکانی مدرسه، بر عملکرد دانش آموزانی که نسبت به ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی دارند، تأثیرگذار است یا خیر. بدین منظور فرضیه اولیه زیر مطرح شد تا سوالات پژوهشی درباره دانش آموزان را که در بالا مطرح شده، مورد سنجش قرار دهد. فرضیه بدین صورت بیان می شود که آیا بین نمرات پایین دانش آموزان در شهر و روستا که نسبت به ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی دارند، تفاوت قابل توجهی نیست.

جمعیتی مورد مطالعه این پژوهش، شامل همه دانش آموزان سال آخر مقطع ابتدایی در دبستانهای دولتی شهرستان گنبد کاووس می باشد. اطلاعات فرم ثبت نام مربوط به آنها نشان می دهد که این دانش آموزان جمعاً ۱۸۵۰ نفر هستند که ۱۰۲۳ نفر آن ها دختر ۸۲۷ تای دیگر پسران هستند که جمعیت مورد مطالعه این پژوهش را تشکیل می دهند. نمونه اتخاذ شده از این جمعیت برای سنجش این پژوهش ۹۸ تا بوده است که نتایج حاصل از این بررسی در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱: نتایج پژوهش تأثیر نگرش دانش آموزان شهری و روستایی نسبت به درس ریاضی

متغیر	تعداد	میانگین	انحراف معیار	درجه آزادی	آماره استیودنت-t	مقدار-P
روستایی	۵۲	۲،۷۶	۰،۶۸	۹۶	۰،۸۹	۰،۳۷۴
شهری	۴۶	۲،۶۳	۰،۷۶			

نتایج تحلیل بالا نشان داد که زمانی که آزمون در سطح معنی داری ۵ درصد و با ۹۶ درجه آزادی انجام شد، مقدار P-value حساب شده برابر ۰،۳۷۴ بیشتر از ۵ درصد بود و بر این اساس فرضیه اولیه یعنی عدم تأثیر موقعیت مکانی بر نمرات دانش آموزان پذیرفته می شود. این نتایج نشان می دهد نشان می دهد که نمرات پایین دانش آموزان شهری و روستایی که نسبت به ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبتی دارند، تفاوت زیادی با یک دیگر ندارد. هم چنین نشان می دهد که دانش آموزان شهری و روستایی، نسبت به ریاضیات و علوم پایه نگرش مثبت یکسانی دارند.

نتیجه گیری

بر اساس یافته های این مطالعه، نتیجه ای استنباط شده است. عملکرد دانش آموزان شهری روستایی در ریاضیات علوم پایه، اگر به این مبحث نگرش مثبتی داشته باشند، با یکدیگر تفاوتی ندارد.

۵. پیشنهادت

بدین وسیله از یافته ها و نتایجی که از این مطالعه به دست آمد، پیشنهادت زیر ارائه می شوند:
- از آن جایی که عملکرد تحصیلی دانش آموزان با نگرش مثبت رابطه تنگاتنگی دارد، نیاز است تا دولت، محیطی اختیاردهنده فراهم کند تا در

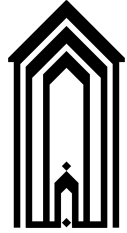
دانش آموزان نگرش مثبت ایجاد شود. با تدارک تسهیلات مورد نیاز نظیر امکانات کتابخانه ای، آزمایشگاه ریاضیات، معلمان شایسته و مجرب و مهم تر از همه، کلاسی با اندازه قابل کنترل، می توان چنین موقعیتی را فراهم کرد.

- دانش آموزان باید تشویق شوند تا بدون توجه به موقعیت مکانی شان، به مطالعه ریاضیات و علوم پایه بپردازند؛ چرا که اگر در فرد نگرش مثبتی نسبت به مبحث ایجاد شده باشد، موقعیت مکانی بر عملکرد او تاثیرگذار نخواهد بود.

دیگر پیشنهادات شامل این مواردند: نگرش منفی باید به طور حرفه ای کاهش یابد و برای این کار به اندازه کافی زود اقدام شود؛ یعنی قبل از آن که دانش آموز به طور کلی از آموختن ریاضیات و علوم پایه دست بکشد و در نتیجه عملکردش تحت تاثیر قرار بگیرد. هم چنین دبیران ریاضی و علوم پایه باید آگاهانه از منابع یادگیری موجود بهره ببرند تا نگرش مثبت را تقویت کرده و جلوی ایجاد هر نگرش منفی نسبت به یادگیری ریاضیات و علوم پایه را بگیرند. در نهایت، باید تلاش هایی صورت گیرد تا اطمینان دهد که جنسیت دانش آموزان از یادگیری ریاضیات و علوم پایه جلوگیری نمی کند. دبیران، والدین و خواهر و برادرهای دانش آموزان باید هم دانش آموزان دختر و هم دانش آموزان پسر را تشویق کنند تا به یک میزان ریاضیات و علوم پایه را فرا گیرند.

مراجع

- [1] Ezeh G. A. Urban and rural differences in creativity talents among primary school pupils in lagos. *The Social Science*, 2(2):147-164, 1998.
 - [2] I. A. Abiam. Unit cost of secondary education and students. Master's thesis, ' Academic Achievement in Ondo state (1991-1995), A Ph.D. Seminar, May 2004.
 - [3] J. Ahiaba and R.N. Igweonwu. A comparative study of the performance of boys and girls in ssc science subjects in dekina l.g.a. of kogi state. Master's thesis, Unpublished Bachelor of Science Education (B.Sc. Ed) project., Department of Science Education, Faculty of Education, University of Nigeria, Nsukka., May 2003.
 - [4] F. B. Alokun. Influence of sex and location on relationship between student problems and academic performance. *The Social Science*, 5(4): 340-345, 2010.
 - [5] Ukpong B.A. *students attitude and academic implications*. journal of education, New York, 1999.
 - [6] J. O Bosedede. *Sex Difference in Verbal Performance Discrepancies*. journal of education, New York, 2010.
 - [7] A. Fisher and F. Richard. Influence of sex and location on relationship between students problems and academic performance. *The Social Science*, 5(4):340-345, 1998.
 - [8] Mohd J. O. Sex difference in verbal performance discrepancies. *British Journal of Educational Psychology*, 47(1):85-90, 2011.
- [۹] غلامرضا دهشیری. بررسی رابطه هوش هیجانی، پیشرفت تحصیلی دانش آموزان. پژوهش های مشاوره (تازه ها و پژوهش های مشاوره)، ۱۸(۵): ۹۷-۱۰۶، ۱۳۸۵.
- [۱۰] صفری زاده صفری و فرامرز علیدادی. بررسی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان. مجله پیشرفت های نوین در روانشناسی، علوم تربیتی و آموزش و پرورش، ۳(۳۲): ۸۸-۱۰۴، ۱۳۹۹.



ایجاد انگیزه آموزشی در دانش آموزان مقطع ابتدایی و تاثیر آن بر جهت گیری اهداف آنها

نسترن یحیوی*، آ، خدیجه سیدمحمدی ب

آکارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه غیر انتفاعی خیام مشهد، دبیرستان شایستگان، گنبد کاووس، ایران
سکارشناسی آموزش ابتدایی، دانشگاه آزاد اسلامی، دبستان شهید جبار نجفستانه، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: جهت گیری اهداف دستیابی آموزش معلمان آموزش ریاضی انگیزه	با علم بر اینکه دانش آموزان در مقطع ابتدایی، مقدماتی ترین و پایه ای ترین مطالب را فرا می گیرند لذا آموزش درست و کارآمد آنها که مقدمه ای برای پیشرفت تحصیلی آنان می باشد، بسیار حائز اهمیت است. لذا هدف این مقاله افزایش درک معلمان از ماهیت و اهمیت جهت گیری های اهداف پیشرفت دانش آموزان در آموزش ریاضی ابتدایی است. به طور خاص، این مطالعه شامل یک پیشینه نظری در مورد اینکه جهت گیری هدف پیشرفت چیست و ماهیت جهت گیری های هدف دانش آموزان است. در این مقاله ابتدا مروری بر گزارشات چاپ شده در مورد مدل های اصلی شناسایی شده در نظریه هدف ارائه می شود. سپس، بحث در مورد اینکه چرا جهت گیری های هدف پیشرفت در آموزش ریاضی مهم است، با یافته های تحقیق در این زمینه پشتیبانی می شود. در نهایت، با ارائه پیشنهادات خاص به معلمان ریاضی، به جمع بندی استدلال های اصلی مطرح شده در بخش های قبل، نتیجه گیری نهایی صورت می گیرد.
2020 MSC: 34B16 34B40 65M70	

۱. مقدمه

بسیاری از روانشناسان و مربیان مدت زیادی است که انگیزه دانش آموزان را عامل مهمی برای موفقیت در یادگیری مدرسه می دانند. از اوایل دهه ۱۹۷۰، یک تمرکز تحقیقاتی پایدار در مورد چگونگی تأثیر انگیزه دانش آموزان بر یادگیری و عملکرد کلاس وجود داشته است. تحقیقات در این زمینه نشان داده است که انگیزه دانش آموزان هم کیفیت مشارکت در یادگیری مدرسه را پیش بینی می کند و میزانی که دانش آموزان به دنبال موقعیت های چالش برانگیز هستند یا از آنها اجتناب می کنند و در مواجهه با مشکلات پایداری می کنند [۱]. به ویژه، در سال های اخیر، متخصصان آموزش و پرورش به نوعی از انگیزه، به نام انگیزه پیشرفت، علاقه مند شده اند (ایمز، که به این موضوع مربوط می شود که دانش آموزان در موقعیت های مختلف یادگیری چیست، چرا و چگونه برانگیخته می شوند. در این مقالات، اهداف پیشرفت، که به عنوان "اهداف هدف" نیز شناخته می شوند که با چرایی یادگیری دانش آموزان مرتبط است. آنها بر اساس باورهای دانش آموزان، در مورد آنچه در موقعیت پیشرفت مهم است، می باشند [۸]. به عنوان مثال، دانش آموزی ممکن است سعی کند ریاضیات را بیاموزد تا با هدف نشان دادن افزایش شایستگی خود در ریاضیات را دنبال کند، در حالی که دانش آموز دیگری ممکن است ریاضیات را برای نشان دادن توانایی یا اجتناب از قضاوت های نامطلوب در مورد شایستگی خود بیاموزد.

تئوری هدف پیشرفت بیان می کند که رفتار دانش آموزان در یک تنظیم موفقیت توسط اهداف پیشرفتی که آنها برای یادگیری در نظر می گیرند هدایت می شود و این اهداف رویکرد، مشارکت و ارزیابی عملکرد آنها را در یادگیری مدرسه تعیین می کند (وردان، ۱۹۹۷). با این حال، پذیرش میزان پیشرفت یک پدیده پویا و چند وجهی است، که یک متغیر خاص موقعیت و دامنه آن بسته به تلاش های آموزشی و ویژگی های زمینه ای

*سخنران

پست الکترونیکی: first.author@gmail.com (نسترن یحیوی)، second.author@gmail.com (خدیجه سیدمحمدی)

محیط یادگیری است [۳]. به طور خاص، دانش آموزانی که اهداف پیشرفت متفاوتی را اتخاذ می کنند، می توانند به عنوان نزدیک شدن به یک موقعیت با نگرانی های مختلف، پرسیدن سؤالات مختلف و جستجوی اطلاعات متفاوت دیده شوند [۷]. تئوری هدف پیشرفت معتقد است که اهداف پیشرفت دانش آموزان همان چیزی است که شناخت، رفتار و انگیزه آنها را در یادگیری به بهترین شکل توضیح می دهد، و حجم وسیعی از تحقیقات اعتبار استفاده از نظریه هدف پیشرفت را برای درک و ارتقای سازگاری نشان داده اند [۸].

۲. مدل های اصلی جهت گیری های هدف دستیابی

در ادبیات، دو جهت گیری هدف اصلی شناسایی شده است که در یک موقعیت پیشرفت کار می کنند: جهت گیری هدف تسلط و جهت گیری هدف عملکرد [۲]. این دو جهت گیری هدف به ترتیب به عنوان «جهت گیری هدف درگیر وظیفه» و «گرایش هدف مشارکت خود» یا «جهت گیری هدف یادگیری» و جهت گیری هدف عملکرد نامگذاری شده اند. با این حال، حتی اگر اصطلاحات متفاوت باشند، تفاوت اصلی بین این دو نوع جهت گیری هدف در این است که آیا یادگیری به عنوان یک هدف به خودی خود ارزش گذاری می شود یا به عنوان وسیله ای برای رسیدن به برخی اهداف بیرونی [۷]. به ویژه، دانش آموزان با اهداف تسلط بر روی کار تمرکز می کنند و موقعیت هایی را ترجیح می دهند که بتوانند مهارت ها و دانش جدید را گسترش دهند. آنها معمولاً خود را با استفاده از «استانداردهای خودفرنس شده» ارزیابی می کنند (ایمز، ۱۹۹۲، ص ۲۶۲)، مانند آیا من به دست آورده ام؟ آیا بهبود یافته ام؟ [۱۱]. در از سوی دیگر، دانش آموزانی که اهداف عملکردی دارند بر خود تمرکز می کنند و موقعیت هایی را ترجیح می دهند که بتوانند توانایی خود را نشان دهند و آن را با دانش آموزان دیگر مقایسه کنند. این دانش آموزان معمولاً خود را با استفاده از هنجارهای بین فردی ارزیابی می کنند، مانند آیا من بهتر از سایر دانش آموزان کلاس عمل کردم؟ آیا دیگران فکر می کنند که من باهوش هستم؟ [۱].

بسیاری از مطالعات نشان داده اند که جهت گیری هدف تسلط با الگوی انطباقی پیشرفت مرتبط است پیامدهای مرتبط، مانند داشتن سطوح بالای خودکارآمدی و علاقه؛ داشتن نگرش مثبت در رابطه با وظایف و خود [۸]. اصرار طولانی تر در کارهای دشوار و درخواست کمک از همسالان و با استفاده از راهبردهای مختلف فراشناختی و خودتنظیمی. از سوی دیگر، یافته های مربوط به اهداف عملکرد به نحوی مختلط است [۶]. تعدادی از یافته های تحقیقاتی اهداف عملکرد را با پیامدهای یادگیری انطباقی مرتبط می کنند، در حالی که برخی دیگر با پیامدهای ناسازگار مرتبط هستند. در این مرحله، نظریه پردازان هدف تصمیم گرفتند جهت گیری عملکرد را به دو بعد تفکیک کنند: رویکرد عملکرد و اجتناب از عملکرد [۶]. تحقیقات انجام شده بر اساس این تمایز جدید نشان می دهد که اهداف رویکرد عملکرد با رفتارهای پیشرفت انطباقی، مانند سطوح بالای خودکارآمدی، تداوم وظیفه، و استفاده از استراتژی. از سوی دیگر، تحقیقات در مورد اهداف اجتناب از عملکرد نشان می دهد که حفظ این اهداف با طیفی از رفتارهای ناسازگار مانند سطوح پایین خودکارآمدی، استفاده از راهبردهای خودناتوانی، اجتناب از رفتارهای کمک جویی مرتبط است.

اخیراً تعدادی از نظریه پردازان هدف شروع به ارائه دیدگاه هدف چندگانه کردند و پیشنهاد کردند که دانش آموزان بیش از یک هدف دستیابی را در یک زمان دنبال کنند [۸]. به عنوان مثال، مشخص نیست که آیا اهداف چندگانه را باید به عنوان داشتن سه تا چهار هدف دستیابی مجزا در کنار هم در نظر گرفت، یا به عنوان داشتن اهداف دستیابی مرتبط یا مرتبط در برخی موارد. روش (Ng، ۱۹۹۹). تا به امروز، ماهیت اهداف چندگانه و ارتباط آنها با نتایج آموزشی به عنوان یک سؤال بی پاسخ باقی مانده است [۳]، و فقدان یک چارچوب نظری و همچنین روش شناختی وجود دارد. شیوه های هدایت درمان اهداف چندگانه (ان جی، ۱۹۹۹). بنابراین، تا کنون، در میان گزارش های نظری مختلف در مورد ماهیت و تعداد اهداف دستیابی، موردی که تسلط، رویکرد عملکرد و اهداف اجتناب از عملکرد را پیشنهاد می کند، رایج ترین چارچوب هدف دستاورد فرض می شود، و قوی ترین پشتیبانی تجربی را در ادبیات دریافت کرده است [۱۰].

۳. اهمیت جهت گیری های هدف پیشرفت در ریاضیات

امروزه، ریاضیات به عنوان چیزی که به طور منفعلانه آموخته می شود، در نظر گرفته نمی شود، بلکه به عنوان چیزی که دانش آموزان انجام می دهند. در این راستا، تمرکز آموزش ریاضی از توسعه صلاحیت ریاضی برای آماده سازی یادگیرندگان کاملاً کارآمد و دلسوز که قادر به پیگیری اهداف تحصیلی خود هستند تغییر کرده است. با توجه به اینکه اهداف پیشرفت دانش آموزان واسطه ای برای یادگیری آنهاست و اهداف پیشرفت متفاوت منجر به «روش های متفاوتی برای نزدیک شدن، تعامل و پاسخ به موقعیت های پیشرفت می شود» [۶] بسیار مهم است که بدانیم دانش آموزان چگونه اهدافی را برای یادگیری ریاضی خود تعیین می کنند و این اهداف چگونه با هم مرتبط هستند. به نتایج تحصیلی خود. در این جنبه، نظریه هدف پیشرفت به شدت تاکید می کند که اهداف پیشرفت دانش آموزان آن چیزی است که شناخت، رفتار و انگیزه آنها را در یادگیری به بهترین شکل توضیح می دهد. بنابراین، توسعه جهت گیری هدف تسلط دانش آموزان باید یک هدف اساسی برای همه باشد معلمان ریاضی با این حال، به ویژه در زمینه آموزش ریاضی، تحقیقات نشان می دهد که بسیاری از دانش آموزان ریاضیات را به عنوان یک موضوع دشوار و ترسناک درک می کنند که در آن موفق نمی شوند. بنابراین، چگونه دانش آموزان می توانند بر تسلط بر یادگیری ریاضیات تمرکز کنند؟ اگرچه، دلایلی که دانش آموزان درگیر تکالیف تحصیلی می شوند، پیامدهایی برای چگونگی و آنچه می آموزند دارد، مهم است که بدانیم دانش آموزان «انزوای اجتماعی از تأثیر اطرافیان نشان نیستند».

[۱۱] در واقع، دانش آموزان اهداف پیشرفت را به نحوی با توجه به فضای اجتماعی و روانی گسترده تری که در آن یاد می گیرند توسعه می دهند. به خصوص، دانش آموزان اهداف پیشرفتی را اتخاذ می کنند که موازی با اهداف معلمانشان است [۵]. به ویژه، زمانی که دانش آموزان بر این باورند که معلمانشان بر تسلط بر یادگیری تمرکز می کنند و بر درک عمیق مطالب آموخته شده تأکید می کنند، تمایل دارند نگرش های مشابهی داشته باشند و اهداف تسلط را برای آن موضوع اتخاذ کنند. از سوی دیگر، هنگامی که دانش آموزان احساس می کنند که معلمان آنها رقابت را به شدت ترویج می کنند و به عملکرد بهتر پاداش می دهند، این ارزش ها را درونی می کنند و رویکرد عملکرد یا اهداف اجتناب از عملکرد را برای آن موضوع اتخاذ می کنند. به خصوص، با توجه به آموزش ریاضیات، تحقیقات نشان داده است که ماهیت تکالیف ریاضی، هنجارهای کلاس درس و ماهیت شیوه های معلم به شدت بر دلایل دانش آموزان برای یادگیری ریاضیات تأثیر می گذارد [۴]. در واقع، بسیاری از روانشناسان آموزشی انتخاب می کنند که تحقیقات انگیزشی را به طور خاص در کلاس درس ریاضیات قرار دهند، زیرا ویژگی های بسیاری از کلاس های ریاضی به نظر می رسد که الگوهای ناسازگار انگیزه را تسهیل می کند. از این جنبه، تحقیقات نشان می دهد که معلمان تمایل دارند ریاضیات را به روشی که تدریس می کردند تدریس کنند و بیشتر معلمان با رویکردهای سنتی تدریس می شدند. که عملکرد محور بودند، که پذیرش اهداف عملکرد را تشویق می کنند [۱۱].

۴. ترویج اتخاذ اهداف تسلط در آموزش ریاضی

اگر معلمان ریاضی مایلند سطح پیشرفت دانش آموزان خود را بهبود بخشند، ممکن است نیاز داشته باشند که نوع اهداف پیشرفتی را که دانش آموزانشان دنبال می کنند، غربال کنند و الهام بخشند. به طور کلی پذیرفته شده است که محیط های یادگیری قدرتمند پذیرش جهت گیری های هدف تسلط را پیش می برند [۲]، عمدتاً به این دلیل که حفظ اهداف تسلط عموماً با الگوی انطباقی نتایج مرتبط با پیشرفت مرتبط است [۱۰]. در این جنبه، پژوهش به تعدادی از متغیرهای کلاس درس و شیوه های آموزشی اشاره می کند که می تواند به پذیرش اهداف تسلط کمک کند. این شیوه ها شامل طراحی کار، توزیع اختیارات، شناخت دانش آموزان، ترتیب گروه بندی، شیوه های ارزشیابی و تخصیص زمان است [۶]. این ابعاد را می توان برای تغییر نحوه آموزش ریاضیات به دانش آموزان و نحوه سازماندهی کلاس های درس ریاضی به منظور بهره مندی از یادگیری و رشد دانش آموزان مورد استفاده قرار داد. به طور خاص، در مورد طراحی تکلیف، اگر دانش آموزان متوجه شوند که مطالب آموزشی متنوع است، ارزش کاربردی دارد و به علایق فردی آنها توجه می کند، ممکن است انگیزه درونی برای یادگیری در آنها ایجاد شود و لذت آنها را افزایش می دهد [۱۱]. در مرحله بعد، با توجه به توزیع اختیار، معلمان می توانند با به حداقل رساندن کنترل های بیرونی، مشارکت فعال دانش آموزان در برنامه ریزی و تصمیم گیری، و برخورد با پیامدهای تصمیمات خود، از استقلال دانش آموز حمایت کنند. با توجه به شیوه های ارزشیابی، اگر معلمان ارزشیابی را به جای عمومی انجام دهند و اشتباهات دانش آموزان را بخشی از یادگیری خود بدانند، ممکن است تأثیر مقایسه های اجتماعی را در بین دانش آموزان کاهش دهد و ترس از شکست را کاهش دهد.

علاوه بر این، اغلب معلمان سؤالاتی می پرسند که فقط یک پاسخ صحیح دارند یا می توان با یک پاسخ ساده بله یا خیر به آنها پاسخ داد. اگر دانش آموز بلافاصله پاسخ مورد انتظار را ندهد، معلم یا از دانش آموز دیگری سوال می کند یا مستقیماً پاسخ را ارائه می دهد. این نوع گفتمان حمایتی برای پرورش اهداف تسلط نیست [۹]. این پیام را به دانش آموزان می دهد که داشتن پاسخ صحیح تنها چیزی است که مهم است. در عوض، معلمان می توانند مقداری زمان انتظار اضافی را فراهم کنید، سؤالات راهنما بپرسید، یا کار را به بخش های کوچک تر تقسیم کنید که مطابق با سؤال اصلی است. علاوه بر این، معلمان باید مراقب نوع پیامی باشند که وقتی دانش آموزان پاسخ های نادرست می دهند. اگر معلم این پیام را بدهد که اشتباه کردن بخشی طبیعی از یادگیری است، دانش آموزان ممکن است اشتباهات را به عنوان فرصت های یادگیری خود در نظر بگیرند. برای انجام این کار، ممکن است به دانش آموزان اجازه داده شود که خطاهای خود را پیدا کنند. در همین راستا، اغلب دانش آموزان فقط می خواهند پاسخ درست را دریافت کنند تا نمره بالایی کسب کنند. آنها معمولاً علاقه ای به درک مفاهیم ندارند، اما علاقه مند به حفظ برخی فرمول ها یا رویه ها برای حل مسائل هستند. با این حال، برای یادگیری ریاضیات، درستی یا نبودن پاسخ باید کمتر از فرآیند تفکری باشد که برای حل مسئله استفاده می شود. برای ارتقای یادگیری به خاطر خود، معلمان باید بر اهمیت درک مفاهیم از طریق ارتباط دادن آنها با زندگی روزمره دانش آموزان و پرسیدن مشکلات معنادار تأکید کنند. در نهایت، اعمالی مانند ارسال لیست نمرات که به ترتیب از بالاترین به پایین ترین مرتبه شده اند، یا نمره دهی بر روی یک منحنی فقط بر رقابت بین دانش آموزان تأکید می کند. به منظور تقویت تسلط در یادگیری، نمره دادن باید بر خودسازی تأکید کند و معلمان باید بازخورد اساسی و سازنده ارائه دهند، که شامل بیش از نشان دادن پاسخ های درست یا غلط است.

مراجع

- [1] C. Ames. Classrooms: Goals, structures, and student motivation. . *Journal of Educational Psychology*, 84(3):261-271, 1992.
- [2] A. Bandura. *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: W. H. Freeman and Company, 1997.
- [3] Dowson M. Barker, K. and D. M. McInerney. Performance approach, performance avoidance and depth of information processing: A fresh look at relations between students' academic motivation and cognition. *Educational Psychology*, 22(3):571-589, 2002.
- [4] R. P. Dilworth. The role of problems in mathematical education. in the role of axioms and problem solving in mathematics. in *Washington, DC: The Conference Board of the Mathematics Sciences*. 1966.

- [5] A. J Elliot. Approach and avoidance motivation and achievement goals. *Journal of Educational Psychology*, 34(1):169-189, 1999.
- [6] F. K. Fadlelmula. Educational motivation and students' achievement goal orientations. . *Journal of Educational Psychology*, 2(3):859-863, 2010.
- [7] M.L. Maehr and C. Midgley. Enhancing student motivation: A school wide approach. Master's thesis, Educational Psychologist, 26, 399-427, May 1391.
- [8] A. M. Ryan and H. Patrick. The classroom social environment and changes in adolescents' motivation and engagement during middle school. *The classroom social environment and changes in adolescents' motivation and engagement during middle school*, 37(2):437-460, 2001.
- [9] T. C. Urdan and C. Midgley. Changes in the perceived classroom goal structure and pattern of adaptive learning during early adolescence. contemporary. *Educational Psychology*, 28(2):524-551, 2003.
- [۱۰] الهه سعادت. آثار ایجاد انگیزه در دانش آموزان و تاثیر آن در عملکرد تحصیلی. دومین کنگره تازه یافته ها در حوزه خانواده، بهداشت روان، اختلالات، پیشگیری و آموزش، صفحات ۲۲-۲۷، ۱۳۹۹.
- [۱۱] محمد مصطفوی. کتاب روش های ایجاد انگیزه ی تحصیلی ویژه ی مدیران، مشاوران و معلمان مدارس. انتشارات وراي دانش، تهران، ویرایش ۳، ۱۳۸۷.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED-158، صص ۲۴۷-۲۵۸

تأثیر دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین استان همدان در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

روح‌الله صبوری*، اکبر رضایی ب

آ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه پیام نور کرمان
ب عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور کرمان

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: دست‌ورزی یادگیری اشکال هندسی حجم سطح	هدف از تحقیق حاضر، بررسی تأثیر دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی پایه هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین استان همدان در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ بود. مطالعه حاضر با توجه به هدف، در زمره پژوهش‌های کاربردی؛ با توجه به نوع داده‌ها، کمی و با توجه به ماهیت و نوع مطالعه در ردیف پژوهش‌های آزمایشی و بر اساس طرح، پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری این تحقیق شامل دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین که به روش نمونه‌گیری در دسترس ۳۰ نفر از دانش‌آموزان به صورت تصادفی ساده به دو گروه آزمایش (۱۵ نفر) و کنترل (۱۵ نفر) تقسیم شدند. در این مطالعه از آزمون ماتریس‌های پیشرونده ریون، آزمون محقق‌ساخته یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی استفاده شد. در این تحقیق به دو روش توصیفی و استنباطی به تجزیه و تحلیل داده‌های به دست آمده پرداخته شد؛ در بخش آمار توصیفی، داده‌ها با استفاده از آماره‌های میانگین و انحراف معیار توصیف؛ و در بخش آمار استنباطی، آزمون تحلیل کوواریانس به منظور تعدیل پیش‌آزمون و کنترل اثرات آن بر نتایج پس‌آزمون مورد استفاده قرار گرفت. کلیه مراحل تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS.۲۱ انجام گرفت. در نهایت تحلیل داده‌ها نشان داد که بین میزان تأثیر دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی گروه آزمایش در مقایسه با گروه کنترل، تفاوت معناداری وجود دارد؛ لذا استفاده از دست‌سازه‌ها در کلاس درس موجب افزایش سطح یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی پایه هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ شده است.

۱. مقدمه

امروزه برنامه‌های درسی جدید و روش‌های آموزش آن، تأکید اساسی بر روش‌هایی دارند که در آن دانش‌آموزان نقش فعالی داشته باشند؛ اصولاً در این روش‌ها، نقش اصلی در فرآیند یادگیری بر عهده خود دانش‌آموز است و اوست که این فرآیند را به پیش می‌برد و عواملی مانند: محتوای آموزشی، تجهیزات و ابزارهای کمک‌آموزشی و نیز اقدامات معلمان، همگی در ارتباط با دانش‌آموز معنی و مفهوم پیدا می‌کنند؛ البته در این راستا، معلم بیش‌تر نقش جهت‌دهنده و سازمان‌دهنده را ایفاء می‌نماید و می‌کوشد تا فعالیت‌های دانش‌آموزان را متناسب با اهداف درس در مسیر صحیح هدایت نماید. در واقع در رویکردهای جدید آموزش، عقیده بر این است که برای تدریس نمی‌توان به یک شیوه به خصوص تکیه کرد بلکه معلمان باید بتوانند با بکارگیری شیوه‌های متنوع تدریس، علاقه و توجه دانش‌آموزان را به درس جلب و تدریس خود را به یادگیری فعال نزدیک‌تر نمایند (شعبانی، ۱۳۹۰). در این مسیر، پیازه^۱ بیش از همه به اهمیت روش‌های فعال تدریس پی برد و بکارگیری آن را توصیه کرد؛ وی روش‌های فعال

* سخنران

پست الکترونیک: rohallasabori@gmail.com (روح‌الله صبوری)، rezaei@pnu.ac.ir (اکبر رضایی)

^۱. Piaget

تدریس را بهترین روش برای شکوفایی دانش‌آموزان در امر یادگیری معرفی کرد؛ هر چند در تدریس فعال، مسئولیت نهایی یادگیری بر عهده شخص دانش‌آموزان است؛ اما یک تدریس خوب، دانش‌آموزان را به تلاش و سعی بیش‌تر در مسیر یادگیری تشویق می‌کند؛ همچنین به آنان فرصت تجربه و تمرین می‌دهد. علاوه بر این در روش‌های تدریس فعال، دانش‌آموزان آزادی عمل دارند تا از شیوه‌های یادگیری متفاوتی استفاده نمایند؛ حواس و هوش‌های مختلف خود را به کار برند؛ با هم یاد بگیرند و از آموخته‌های خود در زندگی استفاده کنند؛ که در نتیجه آن، مهارت‌های ذهنی و عملی پرورش می‌یابد؛ جو خودانضباطی بر کلاس حاکم می‌شود؛ به تفاوت‌های فردی توجه ویژه می‌شود و زمینه پرورش تخیل، نوآوری و خلاقیت و در نهایت یادگیری بهتر و دقیق‌تر فراهم می‌گردد (دیزج و همکاران، ۱۳۹۳). بر این اساس امروزه اکثر صاحب‌نظران و برنامه‌ریزان درسی و آموزشی، در کنار روش‌های تدریس فعال و در نتیجه یادگیری فعال، استفاده هر چه بیش‌تر از تجهیزات آموزشی از جمله دست‌سازها را در امر یادگیری توصیه می‌نمایند (فرهادیان و خنیفر، ۱۳۹۶). دست‌سازها اشیائی فیزیکی هستند که به‌عنوان ابزارهای تدریس مورد استفاده قرار می‌گیرند تا دانش‌آموزان را با یادگیری عملی به‌ویژه در درس ریاضیاتی درگیر کنند (بوگان و همکاران^۲، ۲۰۰۹). دست‌سازها می‌توانند از یک فروشگاه خریداری شوند یا از خانه آورده شوند، یا این که توسط معلم و دانش‌آموز ساخته شوند. از نظر اسمیت^۳ (۲۰۰۹)، یک دست‌ساز خوب می‌تواند مانند پلی، فاصله بین ریاضیات رسمی و ریاضیات غیررسمی را پر کند. کندی^۴ (۱۹۸۶)، نیز دست‌سازها را اشیائی معرفی می‌کند که می‌توانند چندین حس را درگیر کنند، به این معنا که این اشیاء توسط دانش‌آموزان لمس می‌شوند، حرکت داده می‌شوند، مرتب می‌شوند، و دست‌ورزی‌های دیگری روی آن‌ها انجام می‌شوند. از دیدگاه مویر-پاکتهام و بولیارد^۵ (۲۰۱۶)، دست‌سازها، ابزارهایی هستند که ایده‌های انتزاعی ریاضیاتی را به‌طور صریح، روشن و محسوس نمایش می‌دهند. استین و بووالینو^۶ (۲۰۰۱)، دست‌سازها را به‌عنوان یکی از راه‌هایی که ریاضیاتی را برای دانش‌آموزان با معنا می‌کند، معرفی کرده‌اند (مرادی توپقرا و بیات، ۱۳۹۰). طبق دیدگاه مارش و کوک^۷، دست‌سازها به سه شکل یافت می‌شوند: ۱) دست‌سازهای ساخته‌نشده که با ابزارهای در دسترس (مقوا، چسب، نخ، چوب‌کبریت و ...)، توسط معلم و دانش‌آموز ساخته می‌شوند. ۲) دست‌سازهای ساخته‌شده که توسط شرکت‌های صنایع آموزشی تهیه می‌شوند. ۳) دست‌سازهای مجازی که شباهت زیادی به دست‌سازهای فیزیکی دارند و در محیط رایانه یافت می‌شوند (مارش و کوک، ۲۰۱۵). هدف از به‌کارگیری این مجموعه دست‌ساز در کلاس ریاضی (هندسه)، فراهم آوردن مدل‌ها عینی از ایده‌های مجرد ریاضی است زیرا زمانی که نمایش مستقیم یک مفهوم ریاضی (هندسه) با استفاده از ابزارهای دست‌ورزی‌شده ممکن شود، برای یادگیرنده این احتمال وجود دارد که بتواند از طریق کاربرد مناسب دست‌ساز در یک محیط کاری معنادار، یک مفهوم ریاضی (هندسه) بسازد یا یک ساختار ریاضی (هندسه) را کشف نماید؛ لذا با تدریس مفاهیم جدید به شیوه‌های مختلف از جمله دست‌سازها و فرآیند دست‌ورزی، می‌توان برای شناخت درک جاری دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی از جمله مباحث هندسی استفاده نمود؛ چرا که دست‌ساز به دلیل عینی بودن و واقعی بودن، این توانایی را دارند که نقش مؤثری در بهبود و پالودن تعاریف ریاضیاتی دانش‌آموزان داشته باشند (اولکان و تولوک^۸، ۲۰۱۴)؛ بنابراین می‌توان به این موضوع اشاره کرد که دست‌سازها نه تنها این امکان را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورند که نسبت به ایجاد مدل‌های ادراکی خود در مورد فرآیندها و ایده‌های انتزاعی ریاضیاتی اقدام کنند، بلکه ارائه‌دهنده یک زبان مشترک هستند که به واسطه آن، دانش‌آموزان امکان ارتباط برقرار کردن و تبادل این مدل‌ها را با معلم و دیگر دانش‌آموزان پیدا می‌کنند؛ لذا علاوه بر قابلیت دست‌سازها در کمک‌رسانی مستقیم در قالب فرآیندهای ادراکی، مزیت‌های دیگری همانند: به‌کارگیری و ایجاد زمینه مشارکت دانش‌آموزان و افزایش سطح علاقه‌مندی و لذت‌بردن از مطالب ریاضیاتی و در نهایت شرایط را برای یادگیری بهتر و سریع‌تر بویژه در درسی مانند هندسه فراهم آورند (ها و فانگ^۹، ۲۰۱۸)؛ چرا که هندسه یکی از مهم‌ترین مؤلفه‌های جوامع مدرن امروزی به‌شمار می‌آید (عالمیان و همکاران، ۱۳۹۷)؛ که هدف کلی مباحث هندسی آن است که فرد را قادر سازد که دانش ریاضیاتی لازم در زندگی روزمره را فرا گیرد، نحوه حل مسائل را آموزش و باعث شود که یادگیرنده روشی برای حل مسائل داشته باشد و روش‌های استدلال و تجزیه و تحلیل را فرا گیرد (اوزرم^{۱۰}، ۲۰۱۲)؛ لذا از آنجائیکه یکی از مشکل‌ترین بخش‌های درس ریاضی برای فراگیران، مباحث هندسی است که هدف اصلی از آموزش آن در مدارس فقط ارائه و دریافت دانش نظری دانش‌آموزان از هندسه و نقشه‌کشی نیست؛ بلکه هدف آن، بالابردن سطح هوش فضایی دانش‌آموزان به‌عنوان یکی از هوش‌های چندگانه و از جمله ضروری‌ترین و حیاتی‌ترین هوش‌ها در آموزش‌های مهندسی است (گارسیا و همکاران^{۱۱}، ۲۰۱۷)؛ که متأسفانه در یادگیری این عرصه بسیار مهم، به سبب ماهیت مجرد و انتزاعی آن و نیز نیاز به تجسم قوی و فهم دشوار مسائل هندسی، مشکلات عدیده‌ای بر سر راه آموزش و یادگیری آن وجود دارد (بازگیر و همکاران، ۱۴۰۰). در واقع اهمیت درس هندسه برای دانش‌آموزان از آن رو است که در سایر شاخه‌های ریاضی هم تأثیر دارد و اساساً یادگیری آن دو هدف را دنبال می‌نماید: یکی توسعه مهارت تفکر و دیگری شکل‌گیری شهود فضایی؛ که منظور از شهود

². Boggan et al.

³. Smith

⁴. Kennedy

⁵. Moyer-Packenham & Bolyard

⁶. Stein & Bovalino

⁷. Marsh & Cooke

⁸. Olkun & Toluk

⁹. Ha & Fang

¹⁰. Özerem

¹¹. Garcia et al.

فضایی آن است که فرد چگونه فضا و ناحیه (حجم و سطح) را در دنیای واقعی می‌نگرد (الکس و مامن^{۱۲}، ۲۰۱۶). بر همین اساس، پنج مهارت پایه در آموزش هندسه وجود دارد که به توجه خاص در نظام آموزشی نیاز دارد؛ که توسعه بعضی از این مهارت‌ها از دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول شروع و بعضی نیز در سطح آموزش متوسطه دوم مطرح می‌شوند، که عبارتند از: (۱) مهارت دیداری^{۱۳}: بدون شک هندسه موضوعی دیداری است و این جنبه به‌عنوان ابزاری مقدماتی در اثبات‌ها به کار می‌رود. (۲) مهارت شفاهی^{۱۴}: درس هندسه از جمله درس‌هایی است که روی زبان تأکید دارد و دانش‌آموزان باید واژه‌های زیادی را یاد بگیرند و تعریف‌های دقیق و ویژگی‌های شکل‌ها و روابط بین آن‌ها را توصیف کنند. (۳) مهارت ترسیمی^{۱۵}: درس هندسه باید برای دانش‌آموزان فرصتی فراهم آورد که ایده‌های خود را در قالب تصویر و نمودار بیان کنند؛ چرا که آن‌ها در آینده زندگی خود بیش از اثبات قضیه، نیازمند داشتن مهارت کافی در رسم تصویر از یک موقعیت هندسی هستند. (۴) مهارت منطقی^{۱۶}: هندسه یکی از موضوع‌هایی است که چگونگی تجزیه و تحلیل و تشخیص درستی آن را آموزش می‌دهد. متأسفانه بعضی از برنامه‌های درسی و بعضی از روش‌های تدریس، دانش‌آموزان را به حفظ مفاهیم و نه درک آن، سوق می‌دهند. (۵) مهارت کاربردی^{۱۷}: امروزه توصیف ریاضی پدیده‌ها «مدل‌سازی ریاضی» خوانده می‌شود؛ با تجزیه و تحلیل یک مدل و پیاده‌سازی آن غالباً به اطلاعاتی در مورد پدیده اصلی می‌رسیم (عالمیان و همکاران، ۱۳۹۷)؛ بنابراین به‌نظر می‌رسد که پیاده‌سازی این دسته مهارت‌ها با استفاده از دست‌سازها در فرآیند آموزش به‌ویژه در دروسی مانند هندسه که با حجم، سطح و ... سروکار دارد، برای همه گروه‌های فراگیر می‌تواند مؤثر واقع گردد (مویر-پاکنهام و بولیارد، ۲۰۱۶)؛ به‌نحوی که امروزه از دست‌سازها به‌عنوان وسایل و ابزارهای کمک‌آموزشی در فرآیند یادگیری نام برده می‌شود (زینی‌وندزاده، ۱۳۹۶) و یادگیری از طریق دست‌ورزی به‌عنوان روشی مؤثر مبدل گردیده که به دانش‌آموزان در کاهش مشکلات یادگیری درس هندسه کمک می‌نماید، زیرا به سبب دست‌ورزی و ملموس بودن اشیاء، رابطه هندسه با دنیای واقعی بیش از قبل آشکار شده و دانش‌آموزان می‌توانند با کاربرد آن در دنیای واقعی به شناخت بهتری دست یابند. همچنین بکارگیری مستقیم آن‌ها در فرآیند تدریس، روحیه جمعی و کار گروهی، اعتمادبه‌نفس، انگیزه و تفکر خلاقانه را در دانش‌آموزان بالا برده و بهره‌مندی مطلوب و کارآمد از دست‌سازها، بی‌شک کلاس درس هندسه را جذابتر و کارآمدتر کرده و از حالت ایستا و کسل‌کنندگی خارج می‌کند؛ زیرا دانش‌آموزان با انجام فعالیت‌های دست‌ورزی به‌عنوان عضوی فعال در یادگیری شرکت می‌کند. در واقع معلم و دانش‌آموز با استفاده از دانش و تجربه قبلی خود، شروع به ساختن اشکال هندسی می‌کند و در حین فعالیت، مفاهیم جدید را کسب می‌نماید و معناسازی برای آنان اتفاق می‌افتد. همچنین با یاری این فعالیت‌ها می‌توانند جهان‌نماها و مفاهیم انتزاعی را برای خود قابل فهم‌تر و ملموس‌تر کرده و این یادگیری معنادار، از فراموش شدن دانش و یافته‌های آن‌ها جلوگیری می‌نماید (ال-ابوس^{۱۸}، ۲۰۱۶). از آنجائیکه مفاهیم هندسه در کتاب‌های درسی ما غالباً به شیوه مکتوب و خارج از حیطه زندگی و به‌صورتی غیرپویا مطرح و تشریح شده‌اند، به‌نظر می‌رسد ساخت و استفاده از دست‌سازها توسط معلم و دانش‌آموزان می‌تواند در راستای محرک‌سازی ذهن، فراگیری در امر یادگیری بهتر و نیز انجام محاسبات به آنان کمک شایان توجه‌ای نماید؛ که البته این مسأله در نظام آموزشی ما مورد غفلت واقع شده، زیرا به دلیل عدم شناخت معلمان از شیوه‌های نوین تدریس و ساخت و استفاده از دست‌سازها هم از طرف معلمان و هم دانش‌آموزان، باعث گردیده که دانش‌آموزان از یک آموزش صحیح، به‌روز و حتی خلاقانه محروم باشند؛ بنابراین از آنجائیکه «فصل ۶ (سطح و حجم)» کتاب ریاضی هفتم مقطع متوسطه اول دارای مفاهیم پایه مهارت‌های هندسه است و یادگیری آن‌ها برای دانش‌آموزان امری مهم، ضروری و پیش‌نیاز یادگیری در سال‌های بعد به‌شمار می‌آید؛ لذا محقق سعی دارد در این مطالعه با پاسخ به این سؤال که: آیا دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟ بتواند همکاران خود را به شیوه‌های نوین تدریس و استفاده از دست‌سازها در امر آموزش دعوت کرده و راهکارهایی را در جهت هر چه بهتر شدن شرایط آموزش و یادگیری سریع‌تر و خلاقانه‌تر فرزندان این مرزوبوم، پیش پای همکاران خود قرار دهد.

۲. ادبیات و پیشینه تحقیق

امروزه بسیاری از منتقدین آموزش ریاضی، نوعاً کلاس‌های هندسه را بنا به کار بردن عبارت‌هایی همچون: یادگیرندگان منفعل، یادگیری طوطی‌وار، یک شیوه کلیشه‌ای در حل مسائل، تکالیف مداد- کاغذی و ... توصیف می‌کنند و تدریس کتاب ریاضی و مباحث هندسی در کلاس درس تحت تنظیمات معلم انجام می‌گیرد (اوکانر^{۱۹}، ۲۰۱۲). بانیتسا و کلمنت^{۲۰} (۱۹۹۹)، مشاهده کرده‌اند که در بسیاری از کلاس‌های هندسه، نخست

12. Alex & Mammen

13. Visual Skill

14. Oral Skills

15. Graphic Skill

16. Logical Skill

17. Applied Skills

18. Al-ealous

19. O'Connor

20. Battissa & Clement

با استفاده از مثال‌ها و توضیحاتی به دانش‌آموزان یاد می‌دهند که چگونه مسائل را حل کنند، سپس از آن‌ها می‌خواهند که مسائل مشابه را حل کنند. همچنین بر اساس رویکرد بالا به پایین، ابتدا تعمیم‌ها و قوانین و تعاریف ارائه و سپس مثال‌ها بیان می‌شوند. به‌طور مشابه، گاریتی^{۲۱} (۱۹۹۸)، بیان کرده که کلاس‌های ریاضی و مباحث هندسی عموماً مبتنی بر یادگیری و حفظ طوطی‌وار حقایق است، معلمان سخنرانی می‌کنند و دانش‌آموزان مسائل بی‌شماری از کتاب درسی را حل می‌کنند و آموزش به‌منظور ارتقای یادگیری معنادار طراحی نشده و در واقع یادگیری ریاضیات (مباحث هندسی) بدون فهم یک مشکل اساسی در تدریس ریاضیات می‌باشد (مهدیان و همکاران، ۱۳۹۶). به‌طور کلی، آموزش در ریاضی و مباحث هندسی به شیوه معلم‌محور، رویه‌مدار و تجویزی است؛ که این روش‌ها، رشد خلاقیت، تجسم و ادراک را در دانش‌آموزان محدود می‌کند. همچنین سوئن‌فلد^{۲۲} (۲۰۱۵)، معتقد است که دانش‌آموز نمی‌تواند در کلاس‌های سنتی تفکر خلاقانه و نوآورانه کافی داشته باشند. به‌علاوه، این رویکرد برای بسیاری از دانش‌آموزان و معلمان مشکل‌آفرین بوده و هر دو گروه، هندسه و مباحث آن را، موضوعی زجرآور دانسته‌اند؛ نتیجه این که، شگفت‌آور نیست اگر بسیاری از دانش‌آموزان علاقه‌شان به هندسه را از دست بدهند. سوئن‌فلد، محدودیت روش‌های سنتی تدریس در هندسه را مرتبط به آموزش معلم‌محور و ارائه اطلاعات «آماده» به دانش‌آموزان دانسته است؛ چرا که روش‌های سنتی تدریس هیچ‌گونه فرصتی به دانش‌آموزان به غیر از تکیه‌دادن به صندلی و گوش‌دادن نمی‌دهند؛ در حالی که باید به دانش‌آموزان فرصتی برای درگیر شدن در فرآیند آموزش به‌منظور یادگیری معنادار داده شود. بر این اساس، مشکل مهم مدارس امروزی مربوط به روش‌های تدریسی است که موجب گریز دانش‌آموزان از دروس ریاضیاتی از جمله مباحث هندسی شده است (یافتیان و یازوکی، ۱۴۰۰).

بر این اساس در مطالعه‌ای که توسط عبودی و همکاران (۱۴۰۲)، با عنوان «آموزش مبحث سطح و حجم کتاب ریاضی پایه هفتم» صورت گرفت نتایج نشان داد که دانش‌آموزان بعد از پایان درس توانستند اشکال و حجم‌های هندسی را به‌خوبی از هم تمایز دهند و با استفاده از مقوا یا خمیر آن‌ها را بسازند و از این که مفاهیم درس را به‌صورت عینی و قابل‌لمس دیدند و لذت بردند. ربی و اصغری (۱۴۰۱)، در تحقیقی با عنوان «بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان دوره متوسطه در مواجهه با شکل هندسی» نشان دادند که بسیاری از دانش‌آموزان برای پاسخ به سؤالات هندسی از درک اجمالی نسبت به درک عاملی استفاده می‌کنند. همچنین، تدریس هندسه با توجه به درک‌های اجمالی و عاملی می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا از مسیر درک طبیعی نگاه‌کردن به شکل هندسی به مسیر درک استدلالی ارتقاء یابند. خجسته و دمیلوی‌نژاد (۱۴۰۰)، در تحقیقی با عنوان «اثربخشی استفاده از روش دست‌ورزی برای آموزش درس محیط و مساحت در ریاضی دوره اول ابتدایی شهر بندرخمیر در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰» نشان دادند که آموزش به روش دست‌ورزی بر یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی مباحث محیط و مساحت به‌صورت معناداری مؤثر است. بازگیر و همکاران (۱۴۰۰)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر فعالیت‌های دست‌ورزی بر یادگیری مهارت‌های هندسه (محیط و مساحت) دانش‌آموزان پسر» نشان دادند که برای متغیر مهارت‌های هندسی نسبت T به‌دست آمده (۱۸/۵۳۶) با درجه آزادی ۲۷ از جدول t بحرانی، بزرگتر است؛ لذا نتایج آزمون بیانگر این است که فعالیت‌های دست‌ورزی بر یادگیری مهارت‌های هندسه دانش‌آموزان تأثیرگذار است. یافتیان و یازوکی (۱۴۰۰)، در تحقیقی با عنوان «چالش‌های دانش‌آموزان با مفاهیم شکلی در هندسه» مطالعه به‌صورت مروری و به روش کتابخانه‌ای انجام شد که بر اساس پژوهش‌های معتبر به شرح بخشی از این مشکلات پرداخته شد. بسیاری از دانش‌آموزان، نام اشکال هندسی را تنها با توجه به شکل ظاهری آن‌ها حدس می‌زنند و با خصوصیات اصلی هر یک از این اشکال به‌درستی آشنا نبودند و در تشخیص اشکال هندسی، تنها بر شهود و تجارب قبلی خود تکیه می‌کردند و تمایل به نادیده‌گرفتن تعریف دارند. بحث پیرامون چنین موضوعاتی، آگاهی معلمان را نسبت به مشکلات یادگیری دانش‌آموزان بالا برد و همچنین بازبینی فرآیند آموزش هندسه و اصلاح شیوه‌های تدریس را در پی داشت. پاکروان (۱۳۹۷)، در تحقیقی با عنوان «تدریس برخی مفاهیم ریاضی پایه هفتم متوسطه اول با کمک دست‌سازها و مقایسه آن با روش سنتی (مطالعه موردی: شهرستان جاسک سال تحصیلی ۱۳۹۶-۱۳۹۵)» نشان دادند که بین تأثیر آموزش اعداد صحیح، آموزش حجم، آموزش احتمال و آموزش ترسیم‌های هندسی با کمک دست‌سازها با آموزش آنان به روش سنتی بر میزان یادگیری دانش‌آموزان تفاوت معناداری وجود دارد.

عالمیان و همکاران (۱۳۹۷)، در تحقیقی با عنوان «شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم در مهارت‌های هندسی در هندسه و استفاده از نظریه ون‌هیلی^{۲۳} برای ارتقاء و بهبود سطح مهارت‌های هندسی دانش‌آموزان» نشان دادند که اغلب دانش‌آموزان خطاهای متعددی در مباحث هندسه و مهارت‌های هندسی داشتند. میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه آزمایش در بدفهمی‌ها پایین‌تر از میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه کنترل بود. بین عملکرد دانش‌آموزان گروه کنترل و آزمایش در سطوح تفکر ون‌هیلی تفاوت معناداری وجود داشت؛ این تفاوت به‌سود دانش‌آموزان گروه آزمایش بود. همچنین بین عملکرد دانش‌آموزان دو گروه در مهارت‌های هندسی تفاوت معناداری وجود داشت که به‌سود دانش‌آموزان گروه آزمایش بود. فرهادیان و خنیفر (۱۳۹۶)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر بکارگیری دست‌سازهای ریاضی بر ادراک محیط کلاس» نشان دادند که بین تدریس مبتنی بر دست‌ساز و ادراک محیط کلاس و پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون تفاوت معناداری وجود دارد. همچنین بکارگیری دست‌سازهای ریاضی بر ادراک محیط کلاس و پیشرفت دانش‌آموزان در چارچوب گروه‌های یادگیری مشارکتی تأثیرگذار بوده است. مهدیان و همکاران (۱۳۹۶)، در تحقیقی با عنوان «ارائه مدلی جهت رشد تفکر هندسی: تأثیر حافظه تصویری بر رشد تفکر هندسی از طریق معرفت‌شناسی علمی هندسه» از نتایج آن می‌توان به تأثیر غیرمستقیم حافظه تصویری بر رشد تفکر هندسی و تأثیر مستقیم معرفت‌شناسی علمی هندسه بر رشد تفکر هندسی اشاره کرد. طباطبایی و ناصری (۱۳۹۶)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر روش‌های تدریس فعال

21. Garrity

22. Schoenfeld

23. van Hiele Model

ریاضی بر یادگیری دانش آموزان: اقدام پژوهی» نشان دادند که نمرات آزمون‌های برگزار شده در بین دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی و همچنین آزمون پیشرفت تحصیلی قبل و بعد از مداخله به گونه‌ای معنادار افزایش پیدا کرده؛ بر این اساس استفاده از روش بازی، نمایش، ایفای نقش، استفاده از فناوری‌های نوین، استفاده از دست‌سازه‌ها و نیز مشارکت دانش آموزان در فرایند یاددهی - یادگیری، در علاقه‌مند کردن دانش آموزان به درس ریاضی و بالابردن نمرات آنان مؤثر بوده است.

بهرامی سعادت‌آبادی و همکاران (۱۳۹۶)، در تحقیقی با عنوان «بررسی آموزش هندسه از طریق مقایسه روش‌های سنتی و دست‌سازه‌های آموزشی» نشان دادند که روش استفاده از دست‌سازه‌های آموزشی تأثیر معنادار، مثبت و قابل ملاحظه‌ای بر یادگیری دانش آموزان دارد. اعتمادالعلماء و رضایپور (۱۳۹۵)، در تحقیقی با عنوان «دست‌ورزی، شیوه تسهیل‌کننده یادگیری ریاضی» هدف این پژوهش بیان و ارائه روش‌ها و فرآیندهایی مانند (دست‌ورزی) که آموزش ریاضی را بیش‌تر بر پایه فهم مسئله و تفکر استوار می‌کند و با فعال‌ساختن دانش آموز در محیط مدرسه و جایگزین ساختن آن به جای روش‌های تدریس سنتی مانند: سخنرانی، پرسش و پاسخ و ... اقدام می‌کند و معلمان و دانش آموزان را در ارتباط با یکدیگر یاری داده تا آموزشی اثربخش در کلاس درس ریاضی سازماندهی شود و دانش آموزان به اندیشیدن و پژوهش راهنمایی شوند؛ که در نهایت نتایج نشان داد که دانش آموزان تأثیرگذار است. فرهادیان و پاشا (۱۳۹۴)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر روش تدریس ساخت‌گرایی همراه با دست‌سازه در هندسه (خاصیت چهارضلعی‌ها) بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه هشتم ناحیه ۲ یزد» نشان دادند که پیشرفت تحصیلی گروه آزمایش که با روش تدریس مبتنی بر ساخت‌گرایی E5 آموزش دیدند، از گروه کنترل که با روش تدریس متداول (سنتی) آموزش دیده‌اند، بالاتر بود. دهقان‌پور (۱۳۸۹)، در تحقیقی با عنوان «آموزش هندسه با استفاده از دست‌سازه‌های آموزشی و مقایسه آن با روش تدریس سنتی در مدارس راهنمایی دخترانه ناحیه یک کرمان در سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸» نشان داد که به‌کارگیری دست‌سازه‌ها در آموزش ریاضی در مقایسه با روش تدریس سنتی بر افزایش میزان یادگیری، بهبود نگرش مثبت دانش آموزان نسبت به این درس، لذت بیش‌تر بردن از ریاضی، کاستن ترس و اضطراب، افزایش انگیزه، افزایش مهم و سودمند دانستن ریاضی، افزایش توانایی حل مسئله ریاضی و افزایش میزان فراشناخت در دانش آموزان مؤثر است و دیدگاه معلمان درباره دست‌سازه‌های آموزشی مناسب است.

گاجتسیس و همکاران^{۲۴} (۲۰۲۲)، در تحقیقی با عنوان «آیا ارائه یک تکلیف هندسی می‌تواند بر خلاقیت دانش آموزان تأثیر بگذارد؟» نشان دادند که استفاده از دست‌سازه‌ها به‌عنوان یک تکلیف در یادگیری و خلاقیت دانش آموزان نقش مؤثری دارد. گریدوس و همکاران^{۲۵} (۲۰۲۱)، در تحقیقی با عنوان «درک شکل هندسی، ساخت خطوط کمکی و راه‌حل‌های متعدد در حل مسئله: جنبه‌های خلاقیت ریاضی در هندسه مدرسه» نشان دادند که شکل هندسی نشان‌دهنده اطلاعات زیادی است، اما دانش آموزان همه آن‌ها را تشخیص نمی‌دهند؛ بنابراین به سبک یادگیری «دست‌ورزی» به‌عنوان روشی مؤثر نیازمند هستند. باروت و رتاواتی^{۲۶} (۲۰۲۰)، در تحقیقی با عنوان «یادگیری هندسه در دبیرستان حرفه‌ای: بررسی مشکلات و سطوح تفکر دانش آموزان» نشان دادند که چالش‌های دانش آموزان در هندسه عبارتند از: عدم توانایی تشخیص اشکال هندسی با توجه به تعاریف رسمی آن‌ها، ضعف در تجسم، عدم درک نمادها و اصطلاحات هندسی، عدم توانایی ارائه استدلال‌های دقیق در ارتباط با اشکال هندسی و غیره.

کنتاس (۲۰۱۸)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر دست‌ورزی‌ها روی پیشرفت تحصیلی ریاضی در میان دانش آموزان دبیرستانی» نشان داد که تفاوت معناداری بین گروه کنترل و آزمایش بر حسب نگرش به ریاضی وجود دارد. لاسکی و همکاران^{۲۷} (۲۰۱۶)، در تحقیقی با عنوان «چه چیزی دستکاری‌های ریاضی را مؤثر می‌کند؟» بر این باورند که استفاده از دست‌سازه‌ها و اشیاء بتنی و آنچه شبیه اسباب‌بازی‌ها هستند، فرآیند یادگیری ریاضی را تسهیل می‌کنند و انگیزه بچه‌ها را جهت یادگیری افزایش می‌دهند.

گابنبرگ^{۲۸} (۲۰۱۵)، در تحقیقی با عنوان «ارتباطات دنیای واقعی در تدریس ریاضیات متوسطه» به این نتیجه دست یافتند که ارتباط ریاضی با دنیای واقعی و دست‌سازه‌ها باعث افزایش انگیزه یادگیری ریاضیات می‌شود و به دانش آموزان کمک می‌کند تا مفاهیم ریاضیات را درک کنند و ریاضیات را برای حل مشکلات واقعی به کار برند. دولونن و لودویگزن^{۲۹} (۲۰۱۲)، در تحقیقی با عنوان «تجزیه و تحلیل تعامل دانش آموزان با ابزار یادگیری هندسه سه بعدی و معلم آن‌ها» با استفاده از آمار توصیفی از پیش و پس‌آزمون، متوجه می‌شویم که نمره کلی دانش آموزان بهبود می‌یابد. از طریق تعامل اجتماعی، می‌توانیم الگوهایی را شناسایی کنیم که می‌توانند بینش جدیدی در مورد چگونگی و چرایی درک دانش آموزان از مفاهیم هندسی ایجاد کنند. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که استراتژی تدریس بر اساس مشارکت دانش آموزان و نمایش دانش و ویژگی‌های موجود در حالت سه بعدی طراحی شده، می‌تواند درک قوی و معتبری از یادگیری دانش آموزان ارائه دهد. ال - افسای و نوفل^{۳۰} (۲۰۱۰)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر استفاده از ابزارهای دست‌سازه بر پیشرفت ریاضی دانش آموزان پایه اول» نتایج نشان داد که استفاده از دست‌سازه‌ها از جمله روش‌هایی است که می‌تواند در پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در درس ریاضی مؤثر واقع گردد.

اویج^{۳۱} (۲۰۰۹)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر مواد دست‌ورزی بر پیشرفت ریاضی دانش آموزان پایه اول» نتایج نشان داد که استفاده از دست‌ورزی

24. Gagatsis et al.

25. Gridos et al.

26. Barut & Retnawati

27. Laski et al.

28. Gainsburg

29. Dolonen & Ludvigsen

30. al-Absi & Nofal

31. Ojose

از جمله روش‌هایی است که می‌تواند در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در درس ریاضی مؤثر واقع گردد. پارهام^{۳۲} (۲۰۰۸)، در تحقیقی با عنوان «استفاده از دست‌سازه‌های ریاضی سطح ابتدایی» نتایج نشان داد که نشانه‌های مثبت گوناگونی در پیشرفت درسی دانش‌آموزانی که از دست‌سازه در آموزش ریاضی استفاده می‌کنند نسبت به آن‌هایی که استفاده نمی‌کنند، وجود دارد. استین و بووالینو (۲۰۰۱)، در تحقیقی با عنوان «دست‌ورزی‌ها: یک تکه از پازل» نتایج نشان داد که دست‌سازه‌ها می‌توانند به‌عنوان ابزاری مهم در کمک‌رسانی به دانش‌آموزان با هدف تفکر و استدلال به روش‌های معنادارتری مورد استفاده قرار گیرند. موک^{۳۳} (۲۰۰۱)، در تحقیقی با عنوان «دست‌سازه‌ها کار می‌کنند!» نتایج نشان داد که استفاده از دست‌سازه‌ها از جمله روش‌هایی است که می‌تواند در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در درس ریاضی مؤثر واقع گردد. سول^{۳۴} (۲۰۰۰)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر روش‌های گوناگون دست‌سازه‌ها با دانش‌آموزان سال دوم» نتایج نشان داد که استفاده از دست‌سازه‌ها باعث پیشرفت در ریاضیات در یک دوره تحصیلی شده است.

لذا در دهه اخیر تلاش‌های فراوانی صورت گرفته تا روش‌های کلیشه‌ای و سنتی آموزش جای خود را به روش‌های تازه، بدیع و مبتنی بر نیازهای فردی و اجتماعی دانش‌آموزان دهد؛ دانش‌آموزان را خلاق و تولیدکننده علم و دانش پرورش دهد و دریچه‌های نوینی را در زمینه علوم و فناوری در کشور بگشاید؛ که تغییر نظام آموزشی و کتب درسی نیز در همین راستا صورت گرفته است؛ علی‌رغم تمام زحمات و هزینه‌های گزافی که به نظام آموزش و پرورش تحمیل شده، متأسفانه هنوز شاهد تدریس به شیوه سنتی و معلم‌محور هستیم؛ در قریب به اتفاق مدارس کشور هیچ تغییری در زمینه تدریس و ارزشیابی دیده نمی‌شود. هنوز معلم متکلم و وحده بوده و بدون در نظر گرفتن توانایی‌ها، استعدادها و علایق شاگردان به‌صورت یکنواختی محتوای کتب درسی را در قالب سخنرانی‌های طولانی مدت به آن‌ها انتقال می‌دهد؛ که از نتایج این نوع از تدریس در نظام آموزشی، اُفت تحصیلی شدید در دانش‌آموزان و توجه آن‌ها فقط به حفظ و تکرار مطالب و محتوای دروس به دور از هر نوع نگاه خلاقانه و نوآورانه است. در واقع این مشکلات، دامن‌گیر نظام آموزشی کشور شده به‌نحوی که به‌نظر می‌رسد، هر گونه سرمایه‌گذاری در آموزش و پرورش، بدون تغییر دادن نگرش‌ها و شیوه‌های آموزش معلمان امری بی‌ثمر است؛ لذا محقق بر خود لازم می‌داند تا در این مطالعه به بررسی تأثیر دست‌ورزی بر یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی ریاضی پایه هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ بپردازد؛ چرا که از جمله مشکل‌ترین بخش‌های درس ریاضی برای فراگیران، مباحث هندسی آن است. در علوم ریاضیات برای درک بهتر مفاهیم ریاضی، اگر تجسم هندسی و یا تعبیر هندسی درستی از آن داشته باشیم، مفهوم موردنظر را بهتر می‌آموزیم، همین امر برای مهم بودن هندسه کافی است تا تلاش بیش‌تری در بهبود کیفیت آموزش انجام گیرد؛ لذا برای رسیدن به آن باید در جهت رفع مشکلات آموزشی هندسه برآییم؛ چرا که دانش‌آموزان به‌طور معمول درک درستی از هندسه و کاربرد آن در دروس دیگر ندارند، به همین دلیل همواره سؤال می‌پرسند که مطالب موجود در درس هندسه به چه دردی می‌خورد و چه کاربردی دارد؟ این در صورتی است که همکارانی باتجربه و توانمند در امر تدریس هندسه در مدارس حضور دارند، اما دانش‌آموزان از خستگی و کسل بودن‌شان در ساعت درس هندسه صحبت می‌کنند و این یعنی نداشتن آموزش مناسب و درک صحیح از هندسه و کاربرد دست‌سازه‌ها چه از طرف معلم و چه از طرف دانش‌آموزان؛ لذا اینجاست که توجه به پدیده دست‌ورزی در مباحث هندسی، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند که در پیشبرد توانایی‌های منطقی و فضایی دانش‌آموزان، لازم و ضروری به‌نظر می‌رسد.

بر این اساس، سؤالات زیر مطرح می‌گردد:

- ۱- آیا دست‌ورزی بر یادگیری حجم اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟
- ۲- آیا دست‌ورزی بر یادگیری سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

۳. روش تحقیق

تحقیق حاضر با توجه به هدف، در زمره پژوهش‌های کاربردی؛ با توجه به نوع داده‌ها، کمی و با توجه به ماهیت و نوع مطالعه در ردیف پژوهش‌های آزمایشی و بر اساس طرح پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری این تحقیق را کلیه دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تشکیل دادند. به دلیل ارائه کاربردی و قابل تعاملی بودن محتوا و موضوع آموزش، نمونه‌گیری به روش در دسترس انجام گرفت و ۳۰ نفر از دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین انتخاب و به‌صورت تصادفی ساده به گروه آزمایش (۱۵ نفر) و گروه کنترل (۱۵ نفر) تقسیم شدند. شایان ذکر است که همه دانش‌آموزانی که در آزمایش شرکت کردند از نظر جنسیت پسر، از نظر هوشی دارای هوش متوسط به بالا و از نظر فرهنگی نسبتاً یکسان بودند. شرایط عدم حضور در تحقیق نیز عبارت بود از: هر گونه معلولیت جسمی و دیرآموز بودن و ملاک خروج از این تحقیق، غیبت بیش از دو جلسه بود. در این مطالعه از ابزار سنجش زیر استفاده شده است:

32. Parham

33. Moch

34. Sowell

الف) آزمون هوش ریون: آزمون ماتریس‌های پیش‌رونده ریون یکی از آزمون‌های هوشی غیرکلامی است که توسط ریون^{۳۵} در انگلستان برای اندازه‌گیری عامل عمومی اسپیرمن ساخته شده است. بعد از تهیه این آزمون پژوهش‌های زیادی درباره آن به‌عمل آمده و بارها مورد تجدیدنظر قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، فرم ماتریس‌های پیش‌رونده که رنگی و شامل ۳۶ تصویر است که برای سنجش سطح هوش دانش‌آموزان و انتخاب آنان به‌عنوان همیار معلم مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرم در سال ۱۹۴۷ برای آزمایش کودکان ۵ تا ۱۱ سال و بزرگسالان به کار گرفته می‌شود. سؤال‌های مطرح شده شامل توالی الگوهای اشکال یا نمودارهایی است که بر اساس منطق خاص تنظیم شده‌اند. آزمودنی باید هر یک از تصاویر یا نمودارها را با انتخاب یک تصویر از بین چند تصویر ارائه‌شده در پایین صفحه کامل کند. یافتن پاسخ هر سؤال مستلزم آن است که آزمودنی رابطه بین اجزای تصاویر را کشف کند سپس رابطه کشف‌شده را برای یافتن جزء ناقص به کار برد؛ لذا با توجه به عملکرد آزمودنی در این دفترچه می‌توان رتبه درصدی و هوشبهر وی را مشخص کرد. سؤال‌های اولیه بسیار آسان است؛ ولی به تدریج مشکل‌تر می‌شود به طوری که سؤال‌های انتهایی به قدری مشکل است که کمتر کسی می‌تواند در یک زمان محدود، پاسخ درست آن‌ها را پیدا کند. این آزمون به دو صورت فردی و گروهی قابل اجرا است. در هنجاریابی این آزمون روی دانش‌آموزان مقطع راهنمایی و متوسطه شهر تبریز آزمون به‌صورت گروهی اجرا و ۵۰ دقیقه فرصت داده شد (دُر تاج، ۱۳۹۲). نکته مهم این که در تحقیق حاضر، مدت‌زمان انجام آزمون هوش ریون ۳۰ دقیقه در نظر گرفته شد.

ب) آزمون یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی: در تحقیق حاضر از آزمون محقق‌ساخته آزمون یادگیری حجم و سطح استفاده گردیده است. قبل از اجرای روش دست‌ورزی ابتدا از هر دو گروه (آزمایش و کنترل) پیش‌آزمون گرفته شد و پس از طی آموزش (دست‌سازه و سنتی) به دو گروه، از هر گروه پس‌آزمون گرفته شد. برای تدوین سؤال‌های آزمون از روش‌های رایج و سؤالات آزمون ریاضی در مدارس استفاده شد. برای پیش‌آزمون و پس‌آزمون دو نمونه سؤال هر کدام با ۱۵ سؤال طراحی گردید. این سؤالات بر روی یک گروه ۱۵ نفری از دانش‌آموزان که به‌صورت تصادفی انتخاب شدند، به اجرا درآمد. سپس بر اساس ضریب دشواری، ضریب همبستگی و شناسایی سؤالات مبهم، برخی از سؤالات آن حذف یا اصلاح گردید. پس از تعیین ضریب دشواری و ضریب همبستگی سؤالات در پایان، ۱۲ سؤال برای پیش‌آزمون و ۱۲ سؤال برای پس‌آزمون تعیین گردید. با توجه به این که محتوای یک آزمون باید شامل نمونه دقیق از محتوای برنامه درسی و اهداف آموزشی باشد از نظر صوری سؤالات آزمون باید شبیه به موضوعی باشد که برای اندازه‌گیری آن تهیه شده‌اند؛ لذا برای سنجش اعتبار محتوایی و صوری آزمون‌های موردنظر علاوه بر این که از نظر استاد راهنما و مشاور استفاده گردید، از نظر تعدادی از کارشناسان آموزش متوسطه اول شهر فامنین به‌عنوان متخصص بهره گرفته شد. همچنین برای سنجش پایایی آزمون، سؤالات مقدماتی بر روی یک گروه ۱۵ نفری اجرا و پایایی آزمون با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ محاسبه گردید، سپس پایایی آزمون نیز در پیش‌آزمون و پس‌آزمون بر اساس آلفای کرونباخ $0/81$ محاسبه گردید. در هر آزمون اگر مقدار ضریب آلفای کرونباخ مساوی یا بزرگتر از $0/70$ ، می‌توان نتیجه گرفت که سؤالات آزمون از اعتبار (پایایی) لازم برخوردارند. نکته مهم این که یادگیری دانش‌آموزان هر دو گروه آزمایش و کنترل از طریق آزمون محقق‌ساخته یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی (پیش‌آزمون - پس‌آزمون) (زمان پاسخگویی هر آزمون ۶۰ دقیقه) مورد سنجش قرار گرفت.

همانطور که در قسمت‌های قبلی اشاره شد، جهت گردآوری اطلاعات و داده‌ها از منابع اسنادی کتب، مقالات و ... همچنین آزمون ریون، آزمون معلم‌ساخته یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی استفاده شده است. این مطالعه با توجه به استفاده از شیوه‌های نوین آموزشی و طراحی دست‌ورزی‌های مناسب در آموزش هندسه می‌تواند در بهبود اوضاع آموزشی تأثیر داشته باشد و مورد استفاده مراکز آموزشی قرار گیرد. روش این تحقیق با توجه به موضوع، محتوا و اهداف آموزشی از نوع روش تحقیق شبه‌آزمایشی با دو گروه (کنترل و آزمایش) و استفاده از پس‌آزمون بوده است. در یک گروه تدریس هندسه (حجم و سطح) اشکال هندسی از طریق انجام فعالیت دست‌ورزی انجام می‌شود. در گروه یادگیری مهارت‌های هندسه مبتنی بر انجام فعالیت دست‌ورزی (برنامه مداخله)؛ در ابتدا محقق در طی دو هفته، با توجه به اهداف تک‌تک دروس مربوط به فصل ۶ (سطح و حجم) کتاب ریاضی پایه هفتم متوسطه اول و راهنمای تدریس ریاضیات و روش‌های نوین تدریس، اقدام به تهیه طرح درس و پیش‌بینی فعالیت‌های لازم دست‌ورزی برای آموزش در کلاس گروه آزمایش نموده است. به مدت یک‌ماه ۸ جلسه (هر جلسه ۴۵ دقیقه) در گروه آزمایش، با استفاده از فعالیت‌های دست‌ورزی، هندسه (حجم و سطح) از طریق مقوا، کاغذ و ... تدریس خواهد شد و در گروه دیگر، بدون استفاده از دست‌سازه‌ها و به روش دیداری و سنتی می‌باشد. در این تحقیق نیز برای بررسی همگنی هوش دو گروه از آزمون هوش ریون استفاده شد. همچنین در هر دو گروه ابتدا پیش‌آزمون گرفته شد، پیش‌دانش‌های دانش‌آموزان هر دو گروه در مباحث پیش‌بینی شده برای آموزش مورد سنجش قرار گرفت؛ سپس با استفاده از روش دست‌سازه‌ها در گروه آزمایش و در گروه کنترل به روش سنتی مباحث پیش‌بینی شده تدریس گردید. پس از اجرای آموزش با استفاده از پس‌آزمون، آموخته‌های دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه کنترل مورد سنجش قرار گرفت و دو گروه آزمایش و کنترل با هم مقایسه شدند. نکته مهم این که یادگیری (حجم و سطح) دانش‌آموزان هر دو گروه آزمایش و کنترل از طریق آزمون معلم‌ساخته یادگیری حجم و سطح اشکال هندسی (پیش‌آزمون - پس‌آزمون) (زمان پاسخگویی هر آزمون ۶۰ دقیقه) مورد سنجش قرار گرفت. در این مطالعه در بخش آمار توصیفی، داده‌ها با استفاده از آماره‌های میانگین و انحراف معیار، توصیف؛ در بخش آمار استنباطی، از آزمون تحلیل کوواریانس به‌منظور تعدیل پیش‌آزمون و کنترل اثرات آن بر نتایج پس‌آزمون استفاده شد و کلیه مراحل تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS.۲۱ صورت گرفت.

35. Raven

جدول ۱: میانگین و انحراف معیار نمره‌های آزمون یادگیری حجم و سطح دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

گروه	پیش‌آزمون		پس‌آزمون	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
آزمایش	۹/۷۰	۲/۰۲	۱۲/۱۳	۳/۱۲
کنترل	۹/۶۰	۱/۹۷	۱۰/۶۵	۲/۹۹

جدول ۲: آزمون کولموگروف - اسمیرنوف

شاخص / متغیر	mean	s	k-s-z	Sig
گروه آزمایش	۶/۷۰	۲/۴۵	۰/۸۷۱	۰/۴۳۴
گروه کنترل	۷/۷۳	۱/۹۷	۰/۵۰۷	۰/۹۵۹

۴. یافته‌های تحقیق

۱.۴. یافته‌های توصیفی

۱.۴.۱. شاخص‌های توصیفی متغیرها

سؤالات تحقیق به شرح زیر می‌باشد:

۱- آیا دست‌ورزی بر یادگیری حجم اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ تأثیر معناداری دارد؟

۲- آیا دست‌ورزی بر یادگیری سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ تأثیر معناداری دارد؟

چنان‌که پیش‌تر عنوان شد در تحقیق حاضر دو گروه (آزمایش و کنترل) مورد مطالعه قرار گرفتند. عملکرد هر یک از گروه‌ها در دو نوبت (پیش‌آزمون - پس‌آزمون) بر اساس آزمون یادگیری حجم و سطح محقق ساخته اندازه‌گیری شد تا بتوان بر اساس اندازه‌های به‌دست آمده نسبت به اثربخشی کاربردی به‌عمل آمده در طی زمان، داوری کرد؛ به این دلیل در این قسمت برای عینیت بخشی به وضعیت هر یک از گروه‌ها در پیش‌آزمون و پس‌آزمون به شاخص‌های پراکندگی اشاره شده است.

همانطور که نتایج جدول (۱) نشان داد میانگین گروه‌های آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون تفاوت چندانی نداشت (۹/۷۰ در مقابل ۹/۶۰)؛ در حالی که در پس‌آزمون تفاوت بارزی بین دو گروه مشاهده می‌شود (۱۲/۱۳ در مقابل ۱۰/۶۵)؛ که این تفاوت به نفع گروه آزمایش است.

۲.۱.۴. بررسی پیش فرض نرمال بودن داده‌ها

همانطور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود مقدار دوطرفه p -value تقریبی محاسبه شده در دو گروه آزمایش و کنترل به ترتیب برابر با ۰/۴۳۴ و ۰/۹۵۹ می‌باشند که از ۰/۰۵ بیشتر هستند؛ بنابراین فرض صفر رد نمی‌شود و داده‌ها نرمال می‌باشند.

۳.۱.۴. بررسی پیش فرض برابری واریانس

برای انجام تحلیل کوواریانس، باید واریانس‌های گروه یکسان باشد. برای این کار از آزمون لوین استفاده می‌شود. اطلاعات مورد نیاز برای بررسی این فرضیه در صورت انتخاب گزینه لازم در هنگام اجرای تحلیل کوواریانس به‌دست خواهد آمد.

جدول ۳: نتایج آزمون لوین برای بررسی یکسانی واریانس

شاخص / متغیر	F	Df1	Df2	Sig
گروه آزمایش	۰/۰۳۱	۱	۱۴	۰/۸۶۱
گروه کنترل	۱/۲۶	۱	۱۴	۰/۲۷۱

جدول ۴: نتایج تحلیل کواریانس دو گروه آزمایش و کنترل در یادگیری حجم اشکال هندسی

متغیر	شاخص	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	ضریب F	معناداری (P)	مجذور اتا
پیش‌آزمون		۳۸۳۳	۱	۳۸۳۳	۱۱۳/۸۸	۰/۰۰	۰/۸۰۸
گروه‌ها		۸۵۲/۱۱	۱	۸۵۲/۱۱	۲۵/۳۱	۰/۰۰	۰/۴۸
خطا		۹۰۸/۸۴	۲۷	۳۳/۶۶			
کل تصحیح شده		۶۸۵۰	۲۹				

جدول ۵: نتایج تحلیل کواریانس دو گروه آزمایش و کنترل در یادگیری سطح اشکال هندسی

متغیر	شاخص	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	ضریب F	معناداری (P)	مجذور اتا
پیش‌آزمون		۹۵۰/۴۷	۱	۹۵۰/۴۷	۸۳/۷۳	۰/۰۰	۰/۷۵۶
گروه‌ها		۲۶۶/۴۰	۱	۲۶۶/۴۰	۲۳/۴۷	۰/۰۰	۰/۴۶۵
خطا		۳۰۶/۴۶	۲۷	۱۱/۳۵			
کل تصحیح شده		۱۴۶۴/۹۶	۲۹				

جدول (۳) نتایج آزمون لوین که جهت برابری واریانس گروه‌ها استفاده می‌شود را نشان می‌دهد. همانطور که قابل مشاهده است سطح معناداری گروه آزمایش و کنترل بیش‌تر از ۰/۰۵ می‌باشد، بنابراین فرض صفر رد نمی‌شود و واریانس گروه‌ها در این دو متغیر برابر می‌باشد؛ لذا در این مطالعه هم داده‌ها نرمال بوده و هم گروه‌ها دارای واریانس برابری هستند.

۲.۴. یافته‌های استنباطی مربوط به فرضیه‌های تحقیق

سؤال اول: آیا دست‌ورزی بر یادگیری حجم اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

جدول (۴) نتایج آزمون تحلیل کواریانس یادگیری حجم اشکال هندسی را نشان می‌دهد. همانطور که قابل مشاهده است با حذف اثرات نمرات پیش‌آزمون یادگیری حجم اشکال هندسی، بین دو گروه آزمایش و کنترل تفاوت در پس‌آزمون متغیر یادگیری حجم اشکال هندسی تفاوت معناداری وجود دارد ($F = 25.31$ و $p < 0.01$)؛ بنابراین دست‌ورزی بر یادگیری حجم اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد.

سؤال دوم: آیا دست‌ورزی بر یادگیری سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

جدول (۵) نتایج آزمون تحلیل کواریانس یادگیری سطح اشکال هندسی را نشان می‌دهد. همانطور که قابل مشاهده است با حذف اثرات نمرات پیش‌آزمون یادگیری سطح اشکال هندسی، بین دو گروه آزمایش و کنترل تفاوت در پس‌آزمون متغیر یادگیری سطح اشکال هندسی تفاوت معناداری وجود دارد ($F = 23.47$ و $p < 0.01$)؛ بنابراین دست‌ورزی بر یادگیری سطح اشکال هندسی ریاضی هفتم دانش‌آموزان پسر شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در دنیای امروزی بیش‌تر علم در جهت پیشبرد عملی و کاربردی در سراسر جهان به کار برده می‌شود، اما در کشور ما به سبب نظری بودن دروس مختلف، به‌ویژه ریاضیات که مبتنی بر فرمول و حفظیات شده و از این جهت رغبت و انگیزه دانش‌آموزان را برای فراگیری این درس کاهش داده است؛ لذا استفاده از روش‌های عملی و بهره‌گیری از دست‌ورزی‌ها در امر تدریس، ضمن آن که نقش ارزنده‌ای که در آموزش آن‌ها با سبک‌های مختلف یادگیری دارد، می‌تواند درس ریاضی (هندسه) را از دنیای اعداد و فرمول دور کرده و با نزدیک کردن این درس به واقعیت‌های زندگی طبیعی بر لذت‌بخش کردن آن بیافزاید؛ یا به عبارت دیگر، وجود ارتباط معنادار میان آن‌چه در ریاضی به اثبات رسیده و آن‌چه در محیط طبیعی وجود دارد سبب می‌شود هر آن‌چه که به ظرافت ولی دقیق و ساده برای بهره‌گیری در تدریس استفاده می‌کنیم، دارای محتوای اثربخش باشد.

هندس یکی از موضوعات مهم در ریاضیات مدرسه‌ای است که با دارا بودن جایگاهی ثابت، حجم قابل ملاحظه‌ای از برنامه درسی ریاضیات مدرسه را به خود اختصاص داده است. هندسه همچنین یکی از چالش‌برانگیزترین دروس ریاضی محسوب می‌شود که از گذشته تاکنون توجه بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود جلب کرده است. برای درک هندسه مدرسه‌ای، شناخت شکل‌های هندسی نقش تعیین‌کننده‌ای دارد. در جای جای کتاب‌های درسی هندسه، شکل‌های هندسی مختلفی مشاهده می‌شود و می‌توان گفت، شناخت و ارتباط با این شکل‌ها بخش مهمی از فرآیند یادگیری هندسه است؛ اما نتایج پژوهش‌ها و تجارب معلمان، نشان‌دهنده این موضوع است که دانش‌آموزان در درک شکل‌های هندسی و به‌طور کلی، مفاهیم شکلی با مشکلات بسیاری مواجه هستند که این امر مانع بزرگی برای یادگیری هندسه محسوب می‌شود. در این راستا مهم‌ترین هدف از به‌کارگیری دست‌سازها در کلاس‌های هندسه، فراهم آوردن مدل‌ها عینی از ایده‌های مجرد ریاضی است. زمانی که نمایش مستقیم یک مفهوم ریاضی با استفاده از ابزارهای دست‌ورزی شده واقعاً غیرممکن است، برای یادگیرنده این احتمال وجود دارد که بتواند از طریق کاربرد مناسب دست‌ساز در یک محیط کاری معنادار، یک مفهوم ریاضی بسازد یا یک رابطه ریاضی را کشف کند. تفکر هندسی شامل حل مسأله و دست‌ورزی با تصاویر فضایی است و مثال‌های قابل درک می‌تواند، برای صحت بخشیدن به آن‌ها کمک کند. همچنین مهارت‌های دیداری، شفاهی، ترسیمی، منطقی و کاربردی از مهارت‌های هندسی هستند. جدید بودن مطالب، ضعف در یادآوری دانش قبلی، عدم انتخاب روش صحیح و ناتوانی در تجسم فضایی اشکال هندسی از مشکلات عمده دانش‌آموزان محسوب می‌شود. معلم باید برای تدریس هندسه، روش تدریس عملی که توسط خود دانش‌آموز انجام می‌شود، اتخاذ کند. به این صورت که در آموزش، جزئیات ارائه‌شده توسط معلم، به‌وسیله تک‌تک دانش‌آموزان با وسایل ساده و در دسترس، انجام شود و آن‌ها عیناً چیزی را که در حال یادگیری هستند، لمس کنند. وقتی آموزش ریاضی با فعالیت دست‌ورزی همراه می‌گردد. کیفیت یاددهی - یادگیری را بالا آموزش اثربخشی انجام می‌شود. ضمن این که دانش‌آموز می‌تواند در حیطه کاربرد پا نهاده و تأثیر و نقش این درس را به‌وضوح مشاهده کند. حال آن که دخیل کردن وی در امر آموزش که به سبب ساختار این سبک که توجه ویژه‌ای به تفاوت‌های فردی دارد و فعالیت‌های مبتنی بر کار گروهی و خارج از مدرسه با خانواده نیز به نوبه خود می‌تواند در تکوین شخصیت دانش‌آموز و بالابردن روحیه عزت‌نفس، خودباوری و اعتمادبه‌نفس در جامعه نقش مهمی ایفاء نماید که بر اساس سند تحول بنیادین همین امر سبب ایجاد شهروند مطلوب و مفید در آینده می‌شود؛ اگر چه استفاده از این روش‌ها بسیار کارآمد است، ولی به لحاظ وقت‌گیر بودن استفاده از این دست‌ورزی‌ها کمی دشوار می‌باشد؛ حال آن که همه معلمان نیز به سبب عدم‌آشنایی با این روش‌ها نمی‌توانند به نحو احسن از آن‌ها بهره‌گیرند؛ از سوی دیگر، ساختن برخی از ابزارها برای تمام دروس با استفاده از وسایل در دسترس سخت می‌باشد. سخن پایانی این که توجه داشته باشیم دانش‌آموزان با استفاده از دست‌ساز به راحتی ریاضی یعاد نمی‌گیرند، بلکه معلم باید به‌طور آشکاری نحوه استفاده از آن را به دانش‌آموزان نشان دهد و به آن‌ها در کشف و تمرکز بر روی مفاهیم ریاضی کمک کند. از این گذشته، معلم باید در ذهن خود هدف مشخصی را برای فعالیت‌ها داشته باشد و با طراحی سؤالات مناسب، به دانش‌آموزان اجازه دهد که آن‌ها دانش مورد نیاز خودشان را بسازند.

بر این اساس پیشنهادات ذیل مطرح می‌گردند که عبارتند از:

- پیشنهاد می‌شود معلمان به سطوح هندسی در طرح درس‌های خود و تشویق معلمان هنگام استفاده از روش‌های نوین تدریس توجه نمایند.
- پیشنهاد می‌شود که نظام آموزش و پرورش با برگزاری دوره‌های ضمن خدمت هندسه با محتوای آموزش نظریه‌های هندسی از جمله نظریه هندسی ون‌هیلی، معلمان را برای تدریس بهتر هندسه در مدارس آماده سازند.
- پیشنهاد می‌شود فیلم‌های آموزشی با روش دست‌ورزی، جهت بهره‌گیری در کلاس و یا فراگیری معلمان تهیه گردد.
- به طراحان و برنامه‌ریزان کتب نظام آموزشی پیشنهاد می‌شود که کتب درسی و تمرین‌ها و نیز فنون تدریس با روش دست‌ورزی منطبق سازند.
- پیشنهاد می‌شود میان دروسی مانند: ریاضی، هنر، کار و فناوری و اورینگامی‌ها (هنری که در اصل نقش دست‌ورزی درس ریاضی را دارد) انطباق و عملکردی تلفیقی ایجاد شود.
- آموزش ریاضیات باید بر فرآیند و ساختار و نه بر پاسخ متمرکز باشد و دانش‌آموزان را طوری هدایت کرد که چگونه یاد گرفتن را یاد بگیرند.
- پیشنهاد می‌شود که معلمان در ایام مختلف سال تحصیلی از جمله: روز دانش‌آموز، هفته پژوهش، روز معلم و ... اقدام به برگزاری نمایشگاهی از دست‌سازهای خود دانش‌آموزان کنند که همه از کارشان بازدید کنند و به توضیح و بحث و بررسی پیرامون کاربرد آن‌ها و چگونگی ساخت‌شان بپردازند؛ که این امر، خود پیش‌درآمدی برای ایجاد افکار جدید و جرقه‌ای برای روشن شدن قوه خلاقیت و تفکر دانش‌آموزان می‌شود.
- اگر تجهیزات لازم و مناسب فراهم نگردد، ممکن است همه تلاش‌ها بی‌نتیجه بماند؛ وقتی ما برای معلمان سمینار و کارگاه برگزار کنیم و از روش‌های فعال تدریس سخن می‌گوییم از طرفی نرم‌فراگیران هر کلاس ۳۰ تا ۴۰ نفر می‌باشد و وجود میز و نیمکت‌های خلاقیت‌کش فرصت حضور چهره‌به‌چهره دانش‌آموزان را از دست داده است و در کلاس‌های غیراستاندارد و کوچک بدون نور کافی تدریس صورت گیرد، یعنی پنبه کردن آن چه ریشه شده است. پس باید در مدارس اتافی خاص تحت عنوان آزمایشگاه ریاضی دایر شود و در آن حداقل امکانات (قیچی، قلم، مقوا، چسب) تدارک دیده شود، طوری که چیدمان میز و صندلی‌ها متفاوت از کلاس‌های عادی باشد و موجب تعامل بیشتر دانش‌آموزان گردد و حجم دانش‌آموزان در کلاس کمتر شود.

مراجع

- [۱] اعتمادالعلماء، ن.، و رضایور، ی. (۱۳۹۵). دست‌ورزی، شیوه تسهیل‌کننده یادگیری ریاضی، اولین همایش ملی تازه‌های تعلیم و تربیت در نظام آموزشی ایران، اردکان.

- [۲] بازگیر، ت.، عبدالحسینی، ف.، و شباک، م. (۱۴۰۰). تأثیر فعالیت‌های دست‌ورزی بر یادگیری مهارت‌های هندسه (محیط و مساحت) دانش‌آموزان پسر، دوفصلنامه نظریه و عمل در تربیت معلمان (راهبردهای نوین تربیت معلمان)، دوره هفتم، شماره ۱۱، ۴۶-۲۳.
- [۳] بهرامی سعادت‌آبادی، ز.، دانشمند، پ.، و پارسایور، ا. (۱۳۹۶). بررسی آموزش هندسه از طریق مقایسه روش‌های سنتی و دست‌سازهای آموزشی، اولین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی نوین در علوم پایه، بندرعباس.
- [۴] پاکروان، ع. (۱۳۹۷). تدریس برخی مفاهیم ریاضی پایه هفتم متوسطه اول با کمک دست‌سازها و مقایسه آن با روش سنتی (مطالعه موردی: شهرستان جاسک سال تحصیلی ۱۳۹۶-۱۳۹۵). پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرعباس.
- [۵] خجسته، س.، و دمیلوی نژاد، ف. (۱۴۰۰). اثربخشی استفاده از روش دست‌ورزی برای آموزش درس محیط و مساحت در ریاضی دوره اول ابتدایی شهر بندر خمیر در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰، اولین کنفرانس ملی مطالعات کاربردی در فرآیندهای تعلیم و تربیت، بندرعباس.
- [۶] درناج، ف. (۱۳۹۲). مقایسه تأثیر دو روش آموزش به شیوه بازی و سنتی بر انگیزه و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان، مجله روانشناسی مدرسه، دوره دوم، شماره ۴، ۸۰-۶۲.
- [۷] هفزان‌پور، م. (۱۳۸۹). آموزش هندسه با استفاده از دست‌سازهای آموزشی و مقایسه آن با روش تدریس سنتی در مدارس راهنمایی دخترانه ناحیه یک کرمان در سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [۸] دیزج، ا.، حسینی نسب، د.، و عسگریان، ف.، شیرعلی‌پور، ا. و مقصودی، م. (۱۳۹۳). فراتحلیل اثربخشی روش‌های تدریس فعال در عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان ایرانی: یک مطالعه مروری ساختاریافته، فصلنامه روانشناسی تربیتی، سال یازدهم، شماره ۳، ۷۹-۱۰۳.
- [۹] ربی، س.، و اصغری، ن. (۱۴۰۱). بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان دوره متوسطه در مواجهه با شکل هندسی، فصلنامه مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، دوره یازدهم، شماره ۴، ۳۵۳-۳۸۷.
- [۱۰] زینی‌وندزاده، ف. (۱۳۹۶). اعتبارسازی ابزار با استفاده از نظریه‌های فعالیت و پرسش و پاسخ برای ارزشیابی درک دانش‌آموزان از دست‌ورزی‌های مجازی در یادگیری ریاضی، فصلنامه نوآوری‌های آموزشی، سال هفدهم، شماره ۶۵، ۱۳۰-۱۰۵.
- [۱۱] شعبانی، ح. (۱۳۹۰). مهارت‌های آموزشی و پرورشی (روش‌ها و فنون تدریس)، تهران: انتشارات سمت.
- [۱۲] طباطبایی، خ.، و ناصری، ف. (۱۳۹۶). تأثیر روش‌های تدریس فعال ریاضی بر یادگیری دانش‌آموزان: اقدام‌پژوهی، اولین همایش کشوری دانش موضوعی-تربیتی (دانش‌آموز محنتوا) آموزش ریاضی در ابتدایی، سمنان.
- [۱۳] عالمیان، و.، سیدی، م.، و حبیبی، م. (۱۳۹۷). شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم در مهارت‌های هندسی در هندسه و استفاده از نظریه ون‌هیلی برای ارتقاء و بهبود سطح مهارت‌های هندسی دانش‌آموزان، فصلنامه علمی نوآوری‌های آموزشی، دوره هفدهم، شماره ۳، ۱۴۷-۱۳۳.
- [۱۴] عبودی، ج.، حسینی، ن.، بوستان‌افروز، ف.، کوهی، ف.، مسرت، ن.، و رحمانی، ر. (۱۴۰۲). آموزش مبحث سطح و حجم کتاب ریاضی پایه هفتم، شانزدهمین کنفرانس بین‌المللی روانشناسی، مشاوره و علوم تربیتی، تهران.
- [۱۵] فرهادیان، م.، و خنیفر، م. (۱۳۹۶). تأثیر به‌کارگیری دست‌سازهای ریاضی بر ادراک محیط کلاس، اولین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی علوم کاربردی و علوم پایه در ایران، همدان.
- [۱۶] فرهادیان، م.، و پاشا، م. (۱۳۹۴). تأثیر روش تدریس ساخت‌گرایی همراه با دست‌ساز در هندسه (خاصیت چهارضلعی‌ها) بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هشتم ناحیه ۲ یزد، نهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور، تبریز.
- [۱۷] مرادی‌توپقرا، ل.، و بیات، م. (۱۳۹۰). نقش دست‌ساز ریاضی در تدریس مثلثات، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، دوره ۲۸، ۳۰-۲۴.
- [۱۸] مهدیان، م.، لیاقتدار، م.، و عریضی‌سامانی، ح. (۱۳۹۶). ارائه مدلی جهت رشد تفکر هندسی: تأثیر حافظه تصویری بر رشد تفکر هندسی از طریق معرفت‌شناسی علمی هندسه، مجله علوم تربیتی، دوره بیست‌وچهارم، شماره ۱، ۶۹-۴۵.
- [۱۹] یافتیان، ن.، و پازوکی، ل. (۱۴۰۰). چالش‌های دانش‌آموزان با مفاهیم شکلی در هندسه، دوفصلنامه نظریه و عمل در تربیت معلمان (راهبردهای نوین تربیت معلمان)، دوره هفتم، شماره ۱۱، ۶۵-۴۷.
- [20] Al- Absi, M. & Nofal, M. (2010). The Effect of Using Manipulatives on the Mathematical Achievement of the First Grade Students. *Damascus University Journal*; 26(1): 154-167.
- [21] Al-ebous, T. (2016). Effect of the Van Hiele Model in Geometric Concepts Acquisition: The Attitudes towards Geometry and Learning Transfer Effect of the First Three Grades Students in Jordan. *International Education Studies*; 9(4): 87-98.
- [22] Alex, J.K. & Mammen, K.J. (2016). Lessons Learnt from Employing van Hiele Theory Based Instruction in Senior Secondary School Geometry Classrooms. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*; 12(8): 2223-2236.
- [23] Barut, M.E.O. & Retnawati, H. (2020). Geometry learning in vocational high school: Investigating the students' difficulties and levels of thinking. *In Journal of Physics: Conference Series*; 1613(1): 1-12.
- [24] Battissa, M.T. & Clement, D.H. (1999). Research Into Practice: Using Spatial Imaginary in Geometric Reasoning. *Arithmetic Teacher*; 39(3): 18-21.
- [25] Boggan, M. Harper, S. & Whitmire, A. (2009). Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. Mississippi State University. *Journal of Instructional Pedagogies*; 1(1): 1-6.
- [26] Dolonen, J. & Ludvigsen, S. (2012). Analyzing students' interaction with a 3D geometry learning tool and their teacher. *Learning, Culture and Social Interaction*; 1(3-4): 167-182.
- [27] Gagatsis, A. Elia, I. Geitona, Z. Deliyianni, E. & Gridos, P. (2022). How could the presentation of a geometrical task influence student creativity? *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education*; 5(1): 93-116.
- [28] Gainsburg, J. (2015). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*; 15(2): 199-219.
- [29] Garcia, R.R. Quiros, J.S. Santos, R.G. Gonzalez, S.M. & Fernanz, S.M. (2017). Interactive multimedia animation with Macromedia Flash in Descriptive Geometry teaching. *Computers & Education*; 49(3): 615-639.
- [30] Garrity, C. (1998). *Does the use of hands-on learning, with manipulatives, improve the test scores of secondary education geometry students?* (ERIC Document Reproduction Service No. ED-422-179).
- [31] Gridos, P. Avgerinos, E. Mamona-Downs, J. & Vlachou, R. (2021). Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: aspects of mathematical creativity in school geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*; 19(4): 1-18.
- [32] Ha, O. & Fang, N. (2018). Interactive Virtual and Physical Manipulatives for Improving Students' Spatial Skills. *Journal of Educational Computing Research*; 55(8): 1088-1110.
- [33] Kennedy, L.M. (1986). A Rationale. *Arithmetic Teacher*; 33(6): 6-7.

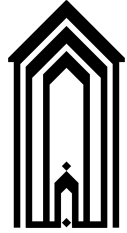
- [34] Kontas, H. (2018). The Effect of Manipulatives on Mathematics Achievement and Attitudes of Secondary School Students. *Journal of Education and Learning*; 5(3): 10-20.
- [35] Laski, V. Jamilah R. Jordan, C. Angela, K. & Murray, A. (2016). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? *Lessons From Cognitive Science and Montessori Education*. *SAGE Open*; 125(1): 1-8.
- [36] Marsh, L. & Cooke, N. (2015). The Effects of Using Manipulatives in Teaching Math Problem Solving to Student with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*; 11(1): 58-65.
- [37] Moch, P. (2001). Manipulativeswork! The Educational Forum. Retrieved from *Education Full Text database*; 66(1): 7-81.
- [38] Moyer-Packenham, S. & Bolyard, J. (2016). *Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative*. In P.S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. Cham: Springer International Publishing. 3-23.
- [39] O'Connor, P.A. (2012). *Construction of Mathematical Meaning in a 6th Grade Classroom: An Analysis of Modal Auxiliaries in Teacher Interrogatives Across the Teaching of Fractions and Geometry*. (Unpublished PhD Dissertation). McGill University, Canada.
- [40] Olkun, S. & Toluk, Z. (2014). Teacher Questioning with an Appropriate Manipulative May Make a Big Difference. *IUMPST: The Journal*; 2(1): 1-12.
- [41] Ojose, B. (2009). The Effect of Manipulative Materials on Mathematics Achievement of First Grade Students. *The Mathematics Educator*; 12(1): 3-14.
- [42] Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*; 55(1): 720-729.
- [43] Parham, J.L. (2008). A Meta Analysis of the Use of Manipulative Materials and Student Achievement in Elementary School Mathematics. *Dissertation Abstracts International*; 96(1): 44-57.
- [44] Schoenfeld, A.H. (2015). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum: A Report, Recommendations, and an Annotated*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America. Sherard, W. (1981). Why is Geometry a Basic Skill? *Mathematics Teacher*; 74 (1): 19-21.
- [45] Smith, S.S. (2009). *Early Childhood Mathematics* (4th. ed). Boston: Pearson Education Using Manipulatives.
- [46] Stein, M.K. & Bovalino, J.W. (2001). Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in Middle School*; 6(6): 356-360.
- [47] Sowell, E. (2000). Effect of Manipulative Mathematics in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*; 20(1): 498-505.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED-159، صص. ۲۵۹-۲۷۳

اثربخشی نقش همیار معلم بر خودباوری و انگیزه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین استان همدان در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

مهدی شاکری*^۱، سید عباس نعمت‌الله‌زاده^ب

آ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه پیام نور کرمان
ب عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور کرمان

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>هدف از تحقیق حاضر، بررسی میزان اثربخشی نقش همیار معلم بر خودباوری و انگیزه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین استان همدان در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ بود. مطالعه حاضر با توجه به هدف، در زمره پژوهش‌های کاربردی؛ با توجه به نوع داده‌ها، کمی و با توجه به ماهیت و نوع مطالعه در ردیف پژوهش‌های نیمه‌آزمایشی و بر اساس طرح، پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری این تحقیق شامل دانش آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین که به روش نمونه‌گیری در دسترس ۶۰ نفر از دانش آموزان به صورت تصادفی به دو گروه آزمایش (۳۰ نفر) و کنترل (۳۰ نفر) تقسیم شدند. در این مطالعه از آزمون ماتریس‌های پیش‌رونده ریون، آزمون محقق‌ساخته پیشرفت تحصیلی و پرسشنامه‌های انگیزه پیشرفت تحصیلی هارتر (۱۹۸۶)، و خودباوری دانش آموزان فرزان‌پور و همکاران (۱۳۹۱)، استفاده شد. در این تحقیق به دو روش توصیفی و استنباطی به تجزیه و تحلیل داده‌های به دست آمده پرداخته شد؛ در بخش آمار توصیفی، داده‌ها با استفاده از آماره‌های میانگین و انحراف معیار توصیف؛ در بخش آمار استنباطی، آزمون تحلیل کوواریانس به منظور تعدیل پیش‌آزمون و کنترل اثرات آن بر نتایج پس‌آزمون مورد استفاده قرار گرفت. کلیه مراحل تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS.۲۱ انجام گرفت. در نهایت تحلیل داده‌ها نشان داد که بین میزان اثربخشی نقش همیار معلم بر خودباوری و انگیزه پیشرفت تحصیلی گروه آزمایش در مقایسه با گروه کنترل، تفاوت معناداری وجود دارد؛ لذا نقش همیار معلم موجب افزایش سطح خودباوری و نیز انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ شده است.</p>	<p>واژه‌های کلیدی: همیار معلم انگیزه پیشرفت تحصیلی خودباوری</p>

۱. مقدمه

ریاضی یکی از کهن‌ترین دانش‌هایی است که همواره مورد توجه بشر بوده است. این دانش اهمیت بسزایی در زندگی بشر به خصوص زندگی روزمره افراد ایفاء می‌نماید و اهمیت آن به حدی است که از همان سال‌های اول آموزش، ساعات زیادی از برنامه‌های آموزشی را به خود اختصاص می‌دهد و شاید ساده‌ترین توضیح در مورد علت یادگیری و اهمیت ریاضیات آن باشد که با زندگی ما و به‌طور کلی با جهان اطراف ما عجین شده است (درتاج، ۱۳۹۲)؛ لذا امروزه آموزش ریاضی در بسیاری از کشورها از اهمیت و جایگاه خاصی برخوردار است (حق‌خواه و داودی، ۱۳۹۹)؛ چرا که علم ریاضی، یکی از اثربخش‌ترین و کارآمدترین مواد درسی می‌باشد که به اعتقاد کورانت^۱ «ریاضیات یکی از عالی‌ترین

*سخنران

پست الکترونیک: sakart14021402@gmail.com (مهدی شاکری)، nemato1ahzadeh@pnu.ac.ir (سید عباس نعمت‌الله‌زاده)

^۱.Courant

تراوش‌های اندیشه‌آدمی است که منعکس‌کننده اراده انسان و نشان‌دهنده سیر عقل و برهان و همچنین بیان‌کننده میزان علاقه بشر به کمال و زیبایی است» (سیدعلیان و صالحی، ۱۴۰۰). وی همچنین معتقد است که نقش بنیادی علم ریاضی در پیشبرد سایر علوم و فنون نیز مورد پذیرش همگان است، طوری که نرسیدن به اهداف آموزشی در زمینه ریاضی، موجب ضعف، ناتوانی و دست‌نیافتن به اهداف مربوط به پیشرفت علوم و فنون دیگر خواهد شد (درتاج، ۱۳۹۲). بر این اساس، امروزه ریاضی و نقش و جایگاه معلمان در فعالیت‌های آموزش و یاددهی درس ریاضی بسیار پیچیده و حائز اهمیت است. شاید در نگاه سطحی و اولیه، فعالیت‌های یاددهی، فرصتی برای یادگیری دانش‌آموزان باشد، ولی معلم در نقش طراح فعالیت، راهنمای دانش‌آموزان، نظارت بر فرآیند اجرا و ارائه بازخورد، وظایف متنوعی برعهده دارد؛ حتی فراتر از آن، معلم باید در راستای مشارکت دانش‌آموزان در کلاس درس و تدریس، تلاش نماید؛ چرا که آموختن دروس مختلف از جمله ریاضیات یک فرآیند اجتماعی است و از طریق آن دانش‌آموزان با همکاری یکدیگر و به‌طور گروهی، دانش و مهارت‌های ریاضی خود را می‌سازند؛ در نتیجه فرصت‌های یادگیری نیز از راه گفتگوی جمعی، توضیح، توجیه و مذاکره درباره معنا و مفهوم، پدید می‌آید (دیزج و همکاران، ۱۳۹۳). در این میان، انتخاب شیوه تدریس (آموزش) تأثیر زیادی بر توانایی‌های یادگیری دانش‌آموزان دارد؛ زیرا یادگیری و آموزش به هم وابسته‌اند، یادگیری هدف است و آموزش وسیله رسیدن به هدف؛ بنابراین استفاده از روش‌های تدریس فعال نسبت به روش‌های سنتی با کمیت و کیفیت بیش‌تری زمینه درگیر شدن دانش‌آموزان با فرآیند یادگیری را فراهم می‌نماید (شبنانی، ۲۰۰۸)؛ که به اعتقاد کارشناسان تعلیم و تربیت و برنامه‌ریزان درسی، دانش‌آموزانی که از طریق روش‌های نوین تدریس به امر یادگیری می‌پردازند نه تنها بهتر فرا می‌گیرند، بلکه از یادگیری لذت بیش‌تری می‌برند؛ زیرا به جای این که فقط شنونده باشند، فعالانه در جریان یادگیری مشارکت دارند و خود را مسئول یادگیری خویش می‌دانند (کرامتی، ۲۰۰۳). بر این اساس یکی از مهم‌ترین روش‌های فعال تدریس، طرح همیار معلم^۲ است که در این طرح، معلمان، دانش‌آموزان ممتاز و ساعی کلاس خود را شناسایی و انتخاب کرده و بعد به گروه‌های ۳ الی ۶ نفره تقسیم می‌کند و یک نفر از بین اعضای گروه به‌عنوان سرگروه که همان «همیار معلم» است، برگزیده می‌شود که در هر کلاس درس، همیاران معلم وظایف زیر را برعهده دارند: بازدید تکالیف درسی، مرور درس جلسه قبل، یادآوری فعالیت‌ها و تکالیف به دانش‌آموزان عضو گروه و توضیح مطالب درس به دانش‌آموزان غایب و ... (جیانگرکو^۳، ۲۰۲۱)؛ بنابراین می‌توان گفت که طرح همیار معلم یکی از شیوه‌های یادگیری گروهی است که از جمله اهداف آن می‌توان به بهره‌گیری از توانمندی‌های علمی دانش‌آموزان ممتاز هر درس به‌منظور رفع تدریجی اشکالات درسی از سایر دانش‌آموزان، جلب مشارکت دانش‌آموزان ساعی در امر تعلیم و تربیت و نهادینه‌کردن فعالیت‌های گروهی و ارتقای کیفی تعامل اجتماعی و افزایش سطح خودباوری دانش‌آموزان نام برد (ژو و همکاران^۴، ۲۰۱۶). در واقع طرح همیار معلم نسبت به روش تدریس سنتی در پرورش سطح اعتمادبه‌نفس و خودباوری دانش‌آموزان تأثیر بسزایی دارد. خودباوری یک پندار روانشناختی است که در طول دوران رشد در وجود هر کس شکل می‌گیرد و به سادگی و سرعت قابل تغییر نیست، البته بهبود فرآیند شکل‌گیری خودباوری در دانش‌آموزان مستلزم برنامه‌ریزی‌های کارشناسانه طولانی‌مدت و میان‌مدت در نظام آموزشی است (قرلباش و همکاران، ۲۰۱۵)؛ لذا استفاده از دانش‌آموزان در طرح همیار معلم منجر به افزایش سطح خودباوری و در نتیجه رشد اجتماعی آنان می‌شود (حسینی و جهان‌دیده، ۲۰۱۳). روش همیار معلم به‌عنوان استراتژی مفیدی، می‌تواند در یادگیری متون درسی کمک فزون‌تری به فراگیران بکند؛ که با استفاده از این طرح می‌توان از زمان‌های به‌هدر رفته در کلاس و نیز از دانش‌آموزان فعال و کوشا برای پیشرفت تحصیلی سایر دانش‌آموزان استفاده نمود (وانگ و همکاران^۵، ۲۰۱۸)؛ بنابراین با استفاده از این طرح و بهره‌مندی از دانش‌آموزان کوشا و ممتاز می‌توان سطح انگیزه را در جهت پیشرفت تحصیلی که به‌عنوان یکی از ابعاد پیشرفت در نظام آموزش و پرورش به‌شمار می‌آید، در سایر دانش‌آموزان بوجود آورد. همچنین طرح همیار معلم باعث تلاش بیش‌تر و دستیابی به موفقیت در گذراندن دروس یک پایه تحصیلی مشخص یا موفقیت در امر یادگیری مطالب درسی در آنان شود (قاسمی و همکاران، ۱۳۹۸). بر این اساس، طرح همیار معلم می‌تواند بر یادگیری دانش‌آموزان و تعاملات کلاسی، پویایی کلاس و انگیزه دانش‌آموزان در جهت پیشرفت، تأثیر بگذارد؛ چرا که انگیزش پیشرفت تحصیلی به‌عنوان یکی از انگیزه‌های پیشرفت، نیرویی درونی است که یادگیرنده را به ارزیابی همه‌جانبه عملکرد خود با توجه به عالی‌ترین معیارها، تلاش برای موفقیت در عملکرد و برخورداری از لذتی که با موفقیت در عملکرد همراه است، سوق می‌دهد (سیف، ۱۳۹۶)؛ لذا در دهه‌های اخیر تلاش‌های زیادی در کشورهای پیشرفته صورت گرفته تا روش‌های کلیشه‌ای و سنتی آموزش جای خود را به روش‌های تازه، بدیع و مبتنی بر نیازهای فردی و اجتماعی دانش‌آموزان دهد؛ آنان را خلاق و تولیدکننده علم و دانش، پرورش داده و دریچه‌های نوینی را در زمینه علوم و فناوری بگشاید؛ هر چند در کشور ما طی سال‌های گذشته، تلاش زیادی در زمینه تغییر نظام آموزشی و کتب درسی صورت گرفته است؛ اما علی‌رغم تمام زحمات و هزینه‌های سنگینی که آموزش و پرورش متحمل شده، هنوز شاهد تدریس به شیوه سنتی و معلم‌محور هستیم و در قریب به اتفاق مدارس کشور هیچ تغییری در زمینه شیوه‌های نوین تدریس از جمله همیار معلم آن‌گونه که شایسته و بایسته است، دیده نمی‌شود. هنوز هم معلم متکلم و حده بوده و بدون در نظر گرفتن توانایی‌ها، استعدادها و علایق شاگردان، به‌صورت یکنواختی محتوای کتاب را در قالب سخنرانی‌های طولانی‌مدت به آن‌ها انتقال می‌دهد که از نتایج آن کاهش انگیزه و علاقه در دانش‌آموزان و توجه آن‌ها فقط به حفظ و تکرار مطالب و محتوای دروس به دور از هر نوع نگاه خلاقانه و پرورش تفکر خودباوری است؛ لذا بدون تغییر دادن نگرش‌ها و شیوه‌های تدریس، آموزش این چنینی امری بی‌ثمر است؛ بنابراین محقق سعی دارد در این مطالعه به بررسی دقیق و موثکافانه این موضوع بپردازد که: آیا

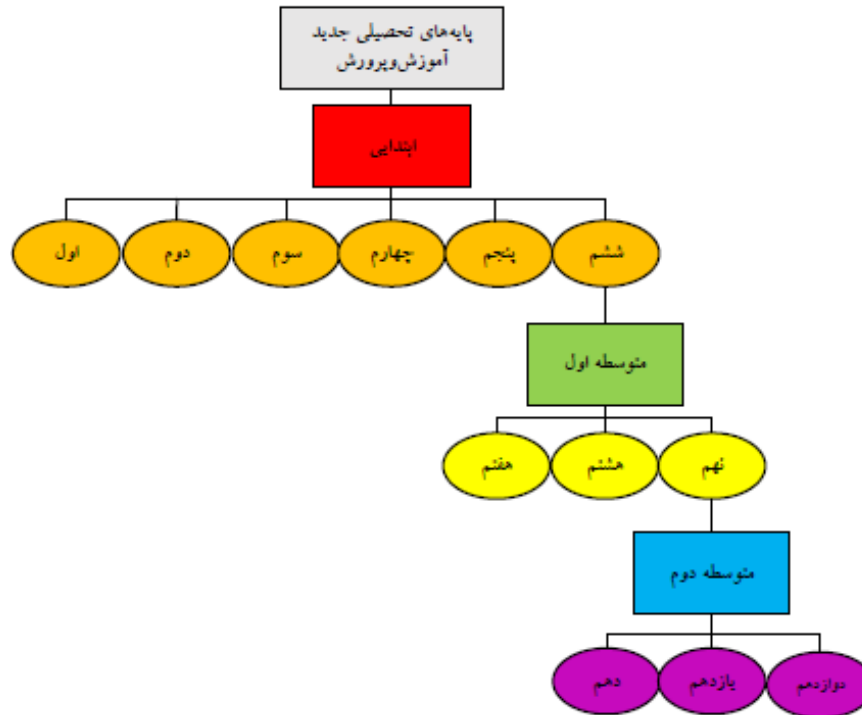
2. Teacher -Assistant Project

3. Giangreco

4. Zhou et al.

5. Wang et al.

نقش همیار معلم بر خودباوری و انگیزه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟ تا با پاسخ به سؤال، به نقش و جایگاه استفاده از طرح همیار معلم در امر آموزش پی برده و تجارب به‌دست آمده را با همکاران خود به اشتراک بگذارد.



۲. مبانی نظری

۱.۱. همیار معلم

در روش همیار معلم کلیه دانش‌آموزان به جای معلم در تدریس درس شرکت دارند. ویژگی اصلی این روش مشارکت دانش‌آموزان در انتقال مفاهیم و مطالب درسی به سایر دانش‌آموزان می‌باشد. در یادگیری از طریق همیار معلم تفاوت افراد گروه باعث کارآمد شدن یادگیری می‌شود. یکی از هدف‌های یادگیری از طریق این روش، این است که دانش‌آموزان یاد بگیرند با هر کسی کار کنند و از این طریق موجب بالارفتن پیشرفت تحصیلی فراگیران، ایجاد ارتباط مثبت و انتقال تجاربی به آن‌ها می‌شود که برای توسعه اجتماعی، روانی و شناختی سالم به آن نیاز دارند. برای این که گروه‌های همیار در روش همیار معلم موفق شوند، معلم سه چیز را باید رعایت کنند: (۱) رفتار همه دانش‌آموزان را زیر نظر داشته باشد. (۲) نتایج حاصل از مهارت‌های اجتماعی‌ای را که دانش‌آموزان به کار می‌برند به آنان بگوید. (۳) در مواقع مناسب برای آموزش مهارت‌های ضروری در کارگروه‌ها مداخله کند (جیانگکو، ۲۰۲۱). همیار معلم با هدایت و راهنمایی معلم، دانش‌آموزان قوی از نظر علمی (زرنگ) دانش‌آموزان ضعیف کلاس را کمک و تحت پوشش قرار داده و با تمرین، تکرار و مشارکت، آنان را به سطح قابل قبولی ارتقاء داده تا آن‌ها به سطح علمی متوسط در کلاس برسند. بر اساس این طرح و نقش، معلم با شناخت و سازماندهی دانش‌آموزان کلاس می‌تواند از توانمندی‌های فکری و علمی دانش‌آموزان معدل بالا در جهت تقویت دروس دانش‌آموزان ضعیف استفاده نماید. شناسایی دانش‌آموزان می‌تواند بر اساس معدل، استعداد و توان مالی آنان باشد (سوآو^۶، ۲۰۰۵). با توجه به مطالب ذکر شده، می‌توان عنوان کرد که اساس روش تدریس مبتنی بر همیار معلم، همیاری در یادگیری است. می‌توان این‌گونه عنوان کرد که سرآغاز اندیشه همیاری در یادگیری آثار و افکار جان دیویی در ابتدای قرن بیستم است. در سال‌های آغازین این قرن، دیویی، معلمان را به تشکیل گروه‌هایی برای بررسی و حل مسأله ترغیب می‌کرد. در دهه ۱۹۶۰، دوچ^۷ نیز کار خود را با تحقیق و ترویج الگوهای همیاری در یادگیری شروع کرد. پژوهش درباره یادگیری از طریق همیاری در دهه ۱۹۷۰ هم ادامه یافت و مورد توجه

۶. Suave

۷. Dutch

اساتید زیادی قرار گرفت. راجرز و جانسون^۸، سالوین^۹، دیویدسون^{۱۰}، کاگان^{۱۱} از جمله افرادی بودند که روی این مسأله به تحقیق پرداختند (بارتوش^{۱۲}، ۲۰۰۳). پژوهشگران حوزه روش تدریس مبتنی بر همیاری بر این باورند که یادگیری یک فرآیند اجتماعی است و فعالیت‌های یادگیری برای رسیدن به مرحله تولید اندیشه و اطلاعات، حیاتی است. پیازه^{۱۳} نشان داده است که بیش‌تر آموخته‌های ما حاصل تعامل با دیگران است؛ لذا روش تدریس مبتنی بر همیار معلم، فرصت لازم برای تلاش اساسی به‌منظور رسیدن به اهداف گوناگون آموزشی را فراهم می‌آورد؛ با این همه، عمده‌ترین هدف این روش تدریس، کوشش برای دستیابی به فعالیت‌های عالی ذهنی است. به گفته جانسون (۱۹۸۴)، معلمان در کلاس درس با سه موقعیت آموزشی روبرو هستند؛ برخی معلمان روش رقابتی را ترغیب می‌کنند و دانش‌آموزان وادار می‌شوند برای برنده‌شدن، تلاش کنند. برخی از آموزگاران، موقعیت آموزشی را در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند و اجازه می‌دهند که بر اساس میل خود به یادگیری بپردازند. و در برخی موارد معلمان، دانش‌آموزان را به‌صورتی سازماندهی می‌کنند که در قالب گروه‌های همیاری مطالب درسی را فرا بگیرند؛ ولی امروزه مشاهده می‌شود که اغلب روش‌های مورد استفاده در تدریس، حالت مسابقه‌ای و رقابتی دارد و دانش‌آموزان برای نمره و امتیاز درس می‌خوانند و از تکالیفی که آن‌ها را به فعالیت‌های گروهی و آموزش گروهی ترغیب کند، کمتر استفاده می‌شود (سپهوند، ۲۰۱۷). بر این اساس، یکی از مزایای مدرسه همیاری و یادگیری همیاری، رشد زمینه‌های دانشی، عاطفی و اجتماعی دانش‌آموزان و توجه به شخصیت اجتماعی آنان است. همانطوری که در بحث چرایی روش تدریس همیاری عنوان شد که مشکلاتی از قبیل: اُفت پیشرفت تحصیلی، گوشه‌گیری فراگیران بی‌هدفی و ناراحت‌بودن در فعالیت‌های جمعی را از بین می‌برد؛ در مطالعات و تحقیقات بلوم^{۱۴} (۱۹۸۴)، فاریوار^{۱۵} (۱۹۹۴)، هوک و همکاران^{۱۶} (۱۹۹۷)، وینمن و همکاران^{۱۷} (۲۰۰۵)، کاواناک^{۱۸} (۲۰۱۱)، به روشنی اثرگذاری روش همیار معلم در برآورده شدن اهداف آموزشی، عاطفی، اجتماعی و شناختی اثبات می‌شود (جهان‌دیده و سعدی‌پور، ۱۴۰۰).

۲.۲. پیشرفت تحصیلی

سازه پیشرفت تحصیلی در مدرسه به رفتارهایی که به یادگیری پیشرفت مربوط است، اطلاق می‌شود. رویکردهای زیادی برای تعریف انگیزش پیشرفت تحصیلی وجود دارد، بعضی از رویکردها، به‌طور عام به انگیزش‌های مربوط به موفقیت می‌پردازند. یکی از آنها، رویکرد هدف‌هاست؛ رویکرد هدف‌ها بر اساس انگیزش‌های سازگارانه و ناسازگارانه پدید آمده، تحقیقات در زمینه این رویکرد نشان داده است؛ دانش‌آموزانی که توانایی‌های یکسانی دارند در برابر مشکلات آموزشی و یادگیری، پاسخ‌های متفاوتی می‌دهند؛ بعضی از افراد با وجود توانایی‌های سطح بالا با این دشواری‌ها به گونه‌ای مواجه می‌شوند که به نظر می‌رسد توانایی اندکی دارند و از این که تلاش‌هایشان به موفقیت نرسد ناامید می‌شوند (امجد و همکاران^{۱۹}، ۲۰۲۲). همچنین گاهی در قالب الگوی درماندگی آموخته شده آن را تفسیر می‌کنند که ناسازگارانه است، زیرا در مقابل رسیدن دانش‌آموزان به اهداف ارزشمند و بالفعل کردن توانایی‌های درونی آنها مانع ایجاد می‌کند. در مقابل، گروهی مشکلات را به گونه‌ای می‌بینند که می‌توانند بر چالش‌هایی که بر سر راه‌شان هست، غلبه کنند، از مشکلات ناراحت نمی‌شوند، حتی در وجودشان احساس لذت از غلبه نمودن بر چالش پدید می‌آید. آنها توجه خود را به تغییر دادن راهبردها با حداکثر تلاش متمرکز می‌کنند و سطوح حل مسأله خود را غنی‌تر می‌کنند؛ این واکنش‌ها را پاسخ‌هایی با جهت‌گیری تسلط می‌نامند (اسنولا و همکاران^{۲۰}، ۲۰۲۰). در دایره‌المعارف تعلیم و تربیت، هوسن و همکاران^{۲۱} (۱۹۹۴)، انگیزش پیشرفت تحصیلی را بیش‌تر به آن بُعدی از انگیزش منحصر می‌دانند که انگیزش درونی دانش‌آموز نامیده می‌شود. انگیزش درونی یک حالت روانشناختی است و هنگامی حاصل می‌شود که انسان خود را دارای کفایت لازم و خودکنترلی بداند. خودکنترلی به دو بخش تقسیم می‌شود: (۱) فرصت کنترل یا فرصتی که به دانش‌آموز داده می‌شود تا برای امور تحصیلی خود تصمیم بگیرد. (۲) توانایی کنترل یا احساس کفایتی که دانش‌آموز در موقعیت باید داشته باشد تا بتواند بر اساس آن اقدام کند (راکوسیزی و بریگت^{۲۲}، ۲۰۱۳).

۳.۲. خودباوری

نظریه‌های مختلف روانشناختی متعددی در خلال سال‌ها تلاش کردند تا رفتار آدمی را تبیین کنند. نظریه شناختی-اجتماعی یکی از این نظریه‌هاست. در ۱۹۶۸ بندورا^{۲۳} این نظریه را در مورد کنش‌وری آدمیان ارائه کرد که در آن، نقش «باورهای خود» را در شناخت انگیزش عاطفه و رفتار آدمی

8. Johnson

9. Slavin

10. Davidson

11. Kagan

12. Bartosh

13. Piaget

14. Bloom

15. Farivar

16. Hook et al.

17. Winman et al.

18. Kavanagh

19. Amjad et al.

20. Esnaola et al.

21. Husson et al.

22. Rakoczy & Birgit

23. Bandura

برجسته نمود. بندورا معتقد است که افراد، یک «نظام خود» را می‌پروراند که آن‌ها را قادر می‌سازد تا بر تفکرات، احساسات و اعمال‌شان مهارت داشته باشند. علاوه بر آن بندورا (۱۹۹۷، ۲۰۰۱)، خودباوری را در بافت یک نظریه کارگزاری شخصی و جمعی قرار داده که به همراه دیگر عوامل شناختی- اجتماعی در تنظیم موفقیت و سلامت آدمی فوق‌العاده مؤثر است (کیندت و همکاران^{۲۴}، ۲۰۱۳).

یکی از بهترین شیوه‌ها برای به‌دست دادن تعریف دقیق و منسجم از خودباوری آن است که بگوییم این مفهوم چه فرقی با مفاهیم تا حدی شبیه و نزدیک به آن دارد:

- خودباوری مهارت ادراک‌شده نیست. خودباوری عبارتست از: باور فرد درباره این که با مهارت‌های خود می‌توانم در شرایط معین، کاری را انجام دهم؛ که با باورهای فرد درباره توانایی هماهنگی و منسجم‌کردن مهارت‌ها و توانایی‌ها در موقعیت‌های متغیر و چالش‌انگیز سروکار دارد (عاشوری، ۱۳۹۳).

از آنجائیکه هدف اصلی امر آموزش، ایجاد یادگیری در دانش‌آموزان است و این امر با عمل تدریس اتفاق می‌افتد؛ لذا عمل تدریس به سلسله فعالیت‌های مرتب، منظم، هدفدار و از پیش طراحی شده نیاز دارد؛ فعالیتی که هدفش ایجاد شرایط مطلوب یادگیری باشد. فعالیتی که به‌صورت تعامل و رفتار متقابل بین معلم و فراگیر جریان داشته باشد؛ یعنی ویژگی‌ها و رفتار معلم در فعالیت‌ها و اعمال شاگردان تأثیرگذار باشد و بالعکس؛ از ویژگی‌ها و رفتارهای آنان متأثر شود. این تأثیر ممکن است به‌صورت مستقل یا غیرمستقل به‌وقوع بپیوندد. به عبارت دیگر، تدریس عبارتست از: تعامل یا رفتار متقابل معلم و شاگرد، بر اساس طراحی منظم و هدفدار معلم برای ایجاد تغییر در رفتار شاگرد؛ که هدف آن، افزایش توانایی یادگیری است و تدریس خوب نتیجه‌اش خوب یادگرفتن است (لودیا و برهمهات^{۲۵}، ۲۰۱۹)؛ لذا دانش‌آموزانی خوب یاد می‌گیرند که راهبردهای خوب یادگرفتن و کسب آموزش و پرورش را در خود توسعه می‌دهند و الگوی تدریس به دانش‌آموزان کمک می‌کند که ذخایر این راهبردها در آنان توسعه یابد، این الگوها به رشد دانش‌آموزان به مثابه فردی با توانایی افزایش تفکر و رفتار عاقلانه و ساختن مهارت‌ها و تعهدات اجتماعی یاری می‌رساند (وانگ و همکاران، ۲۰۱۸)؛ که متأسفانه در مدارس ما چندان توجهی به این اصل مهم نمی‌شود؛ زیرا در چنین نظام‌های آموزشی، معلمان بیش از آن که عمل کنند، حرف می‌زنند. آنان با روش‌های خشک قالبی، دیکت کردن کتاب‌های درسی و برنامه‌های فشرده خود، قدرت اندیشیدن را از شاگردان گرفته‌اند و مدارس به جای انتقال و انباشتن حقایق علمی به ذهن شاگردان، باید بتوانند با استفاده از روش‌های فعال تدریس از جمله طرح همیار معلم، که باعث افزایش قدرت تفکر انتقادی و اندیشیدن در دانش‌آموزان می‌شود، تأکید کنند (خسروی‌نژاد و همکاران، ۱۴۰۰). هر چند در روند انتخاب روش‌های تدریس مناسب، معلمان نقش بسزایی دارند و لازم است آن‌ها برای تدریس، روش‌هایی را به کار ببرند تا دانش‌آموزان به‌صورت فعال و متفکرانه در فرآیند یادگیری دخالت کنند؛ و معلمان اگر با اصول و مبانی تعلیم‌وتربیت، با ویژگی‌های فراگیران و نیازهای آنان و نیز روش‌ها و فنون تدریس آشنایی نداشته باشند، هرگز قادر نخواهند بود به‌عنوان سازندگان جامعه ایفای نقش کنند و دانش‌آموزان را برای برخورد با شرایط مختلف زندگی و موقعیت‌های جدید که روبرو می‌شوند، آماده کنند؛ اینجاست که حس استقلال و خودباوری در دانش‌آموزان از بین می‌رود (جاردی و همکاران، ۲۰۲۲)؛ لذا اینجاست که پیاده‌سازی طرح همیار معلم ارزش پیدا می‌کند و جایگاه خود را در نظام آموزشی نشان می‌دهد؛ به عقیده راجرز^{۲۶} «آن نوع یادگیری تسهیل می‌شود که خودانگیزخته باشد و شاگرد در فرآیند یادگیری مشارکت مسئولانه داشته باشد، زیرا در این راستا خودانگیزگی کل شخصیت شاگرد، یعنی عقل و احساس او را شامل می‌شود و فراگیرترین و پایدارترین نوع یادگیری را بوجود می‌آورد» (جیانگرکو، ۲۰۲۱). در واقع با اجرای روش همیار معلم، دانش‌آموزان یا با هم موفق می‌شوند یا با هم شکست می‌خورند. دانش‌آموزان به جای این که معلم را مرجع اصلی خود بدانند به هم‌کلاسی‌های خود به‌عنوان مرجع مهم و بارز یادگیری نگاه می‌کنند؛ در چنین کلاسی، دانش‌آموزان انگیزه بالاتری برای یادگیری دارند و همین انگیزش عامل فعال‌ساز رفتار انسان است (اشجاری و همکاران، ۱۳۹۳)؛ همچنین احساس وابستگی مثبت به همدیگر دارند، یعنی هر فرد مسئول است تا دیگران را کمک کند تا یاد بگیرند و هیچ یک از اعضای گروه نمی‌توانند موفق شوند مگر این که تمام اعضای گروه موفق شوند (جهان‌دیده و سعدی‌پور، ۱۴۰۰).

بر این اساس، در مطالعه‌ای که توسط هوشمند (۱۴۰۱)، با عنوان «بررسی تأثیر اجرای طرح همیار معلم بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه دهم» صورت گرفت، نتایج حاصل آزمون‌های به‌عمل آمده نشان داد که پیشرفت تحصیلی قابل‌ملاحظه کلاس با همیار معلم نسبت به کلاس دیگر بود. از ویژگی‌های مهم اجرای این روش، استفاده از توانمندی دانش‌آموزان برای رشد خویش و همسالان، تقویت نگرش انسانی و احساس مسئولیت نسبت به سرنوشت دیگر دانش‌آموزان، توسعه مهارت اجتماعی، تقویت و پرورش روحیه خودباوری، مسئولیت‌پذیری، تصمیم‌گیری و مهارت فردی است. قائمی‌امیری و قائمی‌امیری (۱۴۰۱)، در تحقیقی با عنوان «استفاده از همیار معلم در آموزش درس شیمی: بیان یک تجربه» نتایج کسب‌شده توسط دانش‌آموزان، در مقایسه با کلاس‌هایی که به روش سنتی اداره می‌شدند بسیار قابل‌توجه بود و تأثیر زیادی بر یادگیری دانش‌آموزان داشته است. نعمت‌نژاد (۱۴۰۱)، در تحقیقی با عنوان «بررسی نکات قوت و ضعف اجرای طرح همیار معلم از نظر معلمان کلاس‌های چندپایه» نشان داد که از دیدگاه معلمان، افزایش اعتمادبه‌نفس، افزایش مسئولیت‌پذیری، پیشرفت تحصیلی، فعال‌بودن دانش‌آموزان، افزایش قدرت انجام کارهای گروهی، افزایش نظم کلاس، پیشرفت دروس بر اساس بودجه‌بندی را از نکات قوت اجرای طرح همیار می‌دانند و معلمان حسادت بین دانش‌آموزان، دل‌سردی از معلم، عدم تلاش برای حل مسائل، حمایت از دوستان، عدم آگاهی معلم از مشکلات، ایجاد سروصدا، عدم اعتماد

24. Kyndt et al.

25. Lodhiya & Brahmhatt

26. Rogers

دانش‌آموزان به همیار، شکایت اولیاء را از نکات ضعف طرح همیار بیان می‌کنند. گرشاسبی و همکاران (۱۳۹۸)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر یادگیری مشارکتی همیار دبیر و خودارزیابی بر انگیزش خود و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان سوم دبیرستانی با رویکرد مدل جیگساو» نشان دادند که «یادگیری مشارکتی و خودارزیابی» در ارتقاء «انگیزش خود» دانش‌آموزان در درس هندسه تأثیر دارد. همچنین «یادگیری مشارکتی و خودارزیابی» بر مؤلفه‌های انگیزش خود یا همان «باورهای انگیزشی» تأثیر و تفاوت معناداری را در گروه‌ها نشان داد. علاوه بر این، الگوی یادگیری مشارکتی همیار دبیر و خودارزیابی هم در سطوح بالای یادگیری و هم در سطوح پایین یادگیری دانش‌آموزان در حیطه شناختی تأثیر مثبتی داشت.

قاسمی و همکاران (۱۳۹۸)، در تحقیقی با عنوان «بررسی تأثیر روش تدریس همیاری بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در درس علوم تجربی دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهرستان مسجدسلیمان» به این نتیجه رسیدند که میزان تأثیر روش تدریس همیاری در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در درس علوم تجربی در بُعد اهداف مهارتی بیش‌تر از روش آموزش سنتی است، در صورتی که روش تدریس همیاری در بُعد اهداف شناختی تفاوت قابل ملاحظه‌ای با روش سنتی نداشته است. صالحی و عبدالله‌پور (۱۳۹۷)، در تحقیقی با عنوان «بررسی یادگیری مشارکتی به شیوه اداره کشور (در کلاس درس) با طرح همیار معلم در دانش‌آموزان دختر متوسطه دوم» یافته‌ها نشان دادند بین عملکرد دانش‌آموزان در دو طرح همیار معلم و شیوه اداره کشور تفاوت معناداری وجود دارد. مقادیر اندازه اثر پایه‌های دهم، یازدهم و کل نیز این تفاوت معناداری را تأیید و بیان می‌کنند که عملکرد دانش‌آموزان در طرح اداره کشور نسبت به طرح همیار معلم بهتر شده است. حبیبی و همکاران (۱۳۹۷)، در تحقیقی با عنوان «بررسی اثربخشی طرح همیار معلم از دیدگاه معلمان و دانش‌آموزان» با تحلیل داده‌ها نشان دادند که اجرای طرح مذکور بر ایجاد انگیزه و خودباوری اثربخش می‌باشد. صفایی‌دهبارز (۱۳۹۶)، در تحقیقی با عنوان «بررسی اثربخشی طرح همیار معلم در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه سوم متوسطه رشته‌های نظری شهرستان رودان» یافته‌ها نشان داد تفاوت معنادار بین روش همیار معلم در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان وجود دارد. همچنین بین انگیزش افرادی که با روش سنتی آموزش دیده‌اند با انگیزش افرادی که با طرح همیار معلم آموزش دیده‌اند، به لحاظ دستیابی به انگیزش تفاوت معناداری وجود داشت. بین افزایش میانگین نمرات امتحانات نهایی افرادی که با روش معمول آموزش دیده‌اند با افزایش میانگین نمرات امتحانات نهایی افرادی که با طرح همیار معلم آموزش دیده‌اند، به لحاظ دستیابی به میانگین بیش‌تر نمرات امتحانات نهایی تفاوت معنادار وجود داشت. خفته‌دل و همکاران (۱۳۹۴)، در تحقیقی با عنوان «مقایسه تأثیر روش تدریس همیاری با روش تدریس ۵E بر پیشرفت تحصیلی و مهارت‌های اجتماعی دانش‌آموزان پسر در درس علوم تجربی پایه پنجم ابتدایی» نتایج نشان داد بین میانگین نمرات پیشرفت تحصیلی و مهارت‌های اجتماعی دانش‌آموزانی که با روش تدریس ۵E آموزش دیده‌اند و دانش‌آموزانی که با روش تدریس همیاری آموزش دیده‌اند، تفاوت معناداری وجود دارد. به عبارتی تدریس با روش ۵E بر پیشرفت تحصیلی و تدریس با روش همیاری بر مهارت‌های اجتماعی دانش‌آموزان مؤثرتر بوده است. مومنی‌مهموئی و همکاران (۱۳۹۴)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر روش تدریس همیاری بر انگیزه پیشرفت، خودپنداره و پیشرفت تحصیلی در درس علوم تجربی دانش‌آموزان دختر پایه پنجم ابتدایی» نشان دادند روش تدریس همیاری به‌طور معنادار بر افزایش انگیزه پیشرفت، خودپنداره و پیشرفت تحصیلی در درس علوم دانش‌آموزان مؤثر بوده است.

خلیلی‌نژاد و همکاران (۱۳۹۴)، در تحقیقی با عنوان «بررسی افزایش خلاقیت دانش‌آموزان با استفاده از روش همیاری و تأثیر آن بر یادگیری درس ریاضی» یافته‌های حاصل از آزمون t برای نمونه‌های مستقل و زوجی نشان داد که شیوه تدریس همیاری، تأثیر مثبتی بر افزایش انگیزه و خلاقیت و در پی آن، رشد یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی داشته است. ایزان و همکاران (۱۳۹۲)، در تحقیقی با عنوان «بررسی تأثیر مدیریت کلاس درس بر اساس رویکرد همیاری بر پیشرفت تحصیلی علوم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهر پیرانشهر» نشان دادند که پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزانی که با مدیریت کلاس به شیوه همیاری به یادگیری پرداخته بودند، با میانگین نمرات (۱۵/۶۹)، بیش‌تر از دانش‌آموزانی بود که بر اساس روش معمول (سخنرانی)، با میانگین نمرات (۱۴/۱۰)، مشغول یادگیری بودند. همچنین در گروه‌های همیاری میان دو گروه پسران با میانگین نمرات ۱۵/۶۳ و دختران با میانگین نمرات ۱۵/۷۵، تفاوت معناداری دیده نشد. سیفی و همکاران (۱۳۹۲)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر معلم دوم (همیار معلم) بر پیشرفت تحصیلی و نگرشی دانش‌آموزان متوسطه» مطالعه به‌صورت نیمه‌تجربی و با دو گروه آزمایش و کنترل با اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون انجام گرفته که پس از تأیید روایی و پایایی محتوای آموزشی طراحی و اجرا گردیده است. گروه آزمایش به مدت ۱۲ هفته در درس شیمی با روش همیار معلم و گروه کنترل بدون همیار معلم آموزش داده شده‌اند. پس از این مدت، از هر دو گروه، پس‌آزمون به‌عمل آمد. میانگین نمرات پیشرفت تحصیلی و نگرشی گروه آزمایش و کنترل با یکدیگر تفاوت معناداری دارند که بیانگر اثربخشی معلم دوم در پیشرفت تحصیلی و نگرش دانش‌آموزان است. سیرتی‌لیاوی و همکاران (۱۳۹۱)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر روش تدریس همیاری بر نگرش و پیشرفت تحصیلی درس ریاضی دانش‌آموزان پایه پنجم ابتدایی شهرستان چالوس» نشان دادند که میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه آزمایش به‌طور معناداری بیش از میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه کنترل است. همچنین مقایسه نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون نگرش در گروه آزمایش تفاوت معناداری را نشان می‌دهد. علاوه بر این میانگین نمرات آزمودنی‌های پسر بیش‌تر از میانگین نمرات آزمودنی‌های دختر است، این تفاوت معنادار نیست. نتایج حاکی از آن است، گرچه اعمال روش تدریس همیاری در مقایسه با روش آموزش سنتی در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان به‌طور معناداری مؤثر است و موجب افزایش نگرش مثبت دانش‌آموزان به درس ریاضی می‌شود.

^{۱۷} روش تدریس ۵E یک مدل آموزشی مبتنی بر رویکرد ساخت‌گرایانه برای یادگیری است که می‌گوید یادگیرندگان مطالب جدید را به کمک مطالب قدیمی خود یاد می‌گیرند. علاوه بر آموزش، چارچوبی نیز برای کمک به جذاب‌تر و معنادارتر کردن ارائه‌ها برای مخاطبان است. هر یک از مراحل ۵E یک مرحله از یادگیری را توصیف می‌کند، و هر مرحله با حرف "E" شروع می‌شود: تعامل، کاوش، توضیح، تفصیل، و ارزیابی. ۵E به دانش‌آموزان و مربیان اجازه می‌دهد تا فعالیت‌های مشترک را تجربه کنند، از دانش و تجربه قبلی استفاده کنند و بر اساس آن، معنا بسازند، و درک خود را از یک مفهوم به‌طور مستمر ارزیابی کنند.

جاردی و همکاران (۲۰۲۲)، در تحقیقی با عنوان «ایجاد مشارکت موفق بین همیار معلمان و معلمان: کدام عوامل بین‌فردی اهمیت دارد؟» این مطالعه عواملی را شناسایی می‌کند که مشارکت بین‌فردی مؤثر بین همیار معلمان و معلمان شاغل در مدارس در کاتالونیا را مشخص می‌کند. این مطالعه پدیدارشناختی بر اساس ۴۰ مصاحبه نیمه‌ساختاریافته با ۲۲ همیار معلم و ۱۸ معلم نشان داد که عوامل بین‌فردی اصلی مؤثر بر مشارکت عبارتند از: احساس آرامش، اعتماد، توجه و ارزش قائل شدن برای یکدیگر؛ و از نظر شرکت‌کنندگان جنبه‌های کلیدی مانند: وابستگی شخصی، سازگاری حرفه‌ای، ارتباط باز، احساس تعلق به یک گروه کلاس و کار گروهی را به‌عنوان مهم‌تر عوامل برای مشارکت‌های موفق توضیح دادند. این یافته‌ها پیشی را در مورد این که چگونه مدارس می‌توانند از توسعه مشارکت مؤثر همیار معلمان حمایت کنند، ارائه می‌دهد. لودیا و برهه‌بها (۲۰۱۹)، در تحقیقی با عنوان «اثر بخشی روش‌های آموزش همیاری (مشارکتی) در مقابل آموزش سنتی در درس ریاضی» نشان دادند که روش همیاری در بهبود عملکرد و میزان خودباوری دانش‌آموزان بسیار مؤثر بود. اسلاوین و همکاران^{۲۸} (۲۰۱۶)، در تحقیقی با عنوان «ارزیابی‌های تجربی برنامه‌های علوم ابتدایی: ترکیب بهترین شواهد» نشان دادند یادگیری مشارکتی باعث تقویت حس همکاری، افزایش شوق به یادگیری، احساس مسئولیت فردی و گروهی، پرورش روحیه انتقادپذیری و انتقادگری، تقویت قدرت گوش‌دادن، بهبود روابط عاطفی، افزایش اعتماد، احترام متقابل، تقویت حس وظیفه‌شناسی، رشد مهارت‌های کلامی، کاهش اضطراب، افزایش خودباوری، تقویت مهارت‌های خودرهبری و کاهش وابستگی دانش‌آموزان به معلم گردیده و در نتیجه زمینه‌های مناسبی را برای رشد مهارت‌های اجتماعی دانش‌آموزان فراهم می‌سازد. شکار و فیشر^{۲۹} (۲۰۱۴)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر یادگیری مشارکتی (همیاری) در پیشرفت تحصیلی، انگیزش و نگرش دانش‌آموزان» نشان دادند که دانش‌آموزان آموزش‌دیده به این روش مشارکتی (همیاری) در مقایسه با گروه گواه، نمرات بهتری و به سطح خودباوری بیش‌تری کسب کرده‌اند. پان و وو^{۳۰} (۲۰۱۳)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر یادگیری مشارکتی بر درک مطلب خواندن انگلیسی و انگیزه یادگیری دانش‌آموزان سال اول زبان انگلیسی» نشان دادند که آموزش یادگیری مشارکتی بر درک مطلب خواندن انگلیسی دانش‌آموزان به‌ویژه دانش‌آموزان متوسط و کم‌مهارت تأثیر مثبتی دارد. همچنین آموزش به روش یادگیری مشارکتی اثر مثبتی بر انگیزه و خودباوری دانش‌آموزان برای یادگیری خواندن زبان انگلیسی را نشان داد.

الخاطب و جمعه^{۳۱} (۲۰۱۰)، در تحقیقی با عنوان «تأثیر یادگیری مشارکتی روی عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان پایه هشتم در درس جبر» نتایج به‌دست آمده تفاوت معناداری بین عملکرد دانش‌آموزان در گروه یادگیری مشارکتی و سنتی نشان دادند. لازاروویتز^{۳۲} (۱۹۹۴)، در تحقیقی با عنوان «اثرات محیط یادگیری آموزش همیاری بر پیشرفت تحصیلی و پیامدهای عاطفی آن در درس زمین‌شناسی دانش‌آموزان دوره دبیرستان» نتایج حاکی است محیط یادگیری همیاری منجر به افزایش پیامدهای آکادمیکی در دانش‌آموزان می‌شود و در حیطه عاطفی موجب بالا رفتن عزت‌نفس، خودباوری، اشتغال و درگیری در فعالیت‌های کلاسی و افزایش تعداد دوستان می‌شود. راس و رافوئل^{۳۳} (۱۹۹۰)، در تحقیقی با عنوان «رابطه پیشرفت تحصیلی و حل مسأله در گروه‌های یادگیری مشارکتی» نشان دادند که رابطه بسیار باثباتی بین روش همیاری با پیشرفت تحصیلی به‌دست آورده‌اند، آن‌ها در توضیح این نتیجه اظهار داشتند، دانش‌آموزان از طریق گفتگو با یکدیگر مواد آموزشی را مرور می‌کنند، ملاک و بازخوردی برای چگونگی و میزان درک و فهم‌شان به‌دست می‌آوردند و اطلاعاتی را که ممکن است فاقد باشند یا ناقص یاد گرفته باشند، به‌دست آورده و تکمیل می‌نمایند، از این رهگذر دانش‌آموزان قادرند مطالب یاد گرفته را به‌طور بازسازی‌شده، به دیگران منتقل نمایند. شاران^{۳۴} (۱۹۸۴)، در تحقیقی با عنوان «مقایسه اثرات آموزش به روش سنتی را با دو تکنیک روش همیاری» در این مطالعه آموزش مشارکتی و آموزش تحقیق گروهی به شیوه استاد، مورد آزمون قرار گرفت که نتایج حاکی از آن بود که به‌طور کلی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در هر دو تکنیک آموزش همیاری برتر از آموزش سنتی دارد. آرونسون و همکاران^{۳۵} (۱۹۷۸)، در تحقیقی با عنوان «مقایسه شیوه آموزش همیاری از نوع تکنیک "جیگساو" با آموزش سنتی در پیشرفت تحصیلی و نگرش دانش‌آموزان در دروس ریاضی و علوم اجتماعی» نشان دادند که بین شیوه آموزش همیاری از نوع تکنیک "جیگساو"^{۳۶} در میزان سطح خودباوری، میزان پیشرفت تحصیلی و نگرش دانش‌آموزان نسبت به آموزش سنتی تفاوت معناداری وجود دارد.

بر این اساس، روش‌های تدریس اگر متناسب با شرایط و نیاز فراگیران و جامعه نباشد، قادر نخواهد بود رسالت خویش را انجام دهد؛ چرا که نظام آموزش و پرورش با مسائل و مشکلات گوناگون و پر فراز و نشیبی مواجه است که برای حل آن‌ها، نیاز به انسان‌های فرهیخته و هنرمند دارد؛ که تربیت این دسته انسان‌ها، یک ضرورت قطعی و اجتناب‌ناپذیر است؛ انسان‌هایی که قادر باشند «به جای پاک‌کردن صورت مسأله» و «طرز و حذف مشکل»، روش‌های حل مسأله را متناسب انتخاب و بهینه نمایند. واقعیت امر این است که روش‌های تدریس سنتی به دلایل مختلف جوابگوی تغییرات معطوف به هدف در راستای تربیت منابع انسانی مورد نیاز جامعه امروز نیست و ضرورت دارد، شیوه‌های نوین تدریس، تحول‌گرا و مشارکتی همچون روش همیار معلم جایگزین آن‌ها شود؛ در غیر این صورت، آموزش و پرورش یک‌سویه و غیرپویا در دنیای امروز و به‌ویژه فردا ره‌آورد رضایت‌بخشی را بدنبال نخواهد داشت؛ بنابراین نظام‌های آموزش و پرورش به جنبشی اساسی نیاز دارند که در آن دقیقاً با الزام

28. Slavin et al.

29. Shachar & Fischer

30. Pan & Wu

31. Alkhateb & Jemaah

32. Lazarowitz

33. Ross & Raphael

34. Sharan

35. Aronson et al.

36. Jigsaw

عمیق‌تری مشخص شده باشد که به کجا می‌روند و در آینده به چه نوع انسان‌های تربیت شده‌ای نیاز دارند؟ در این صورت است که متخصصان تعلیم و تربیت می‌توانند چارچوب مشخصی را برای تحول تعلیم و تربیت تعیین کنند و تمام منابع و نیروهای کارآمد و دلسوز را به کار بگیرند، تا روش‌های تدریس به شیوه‌ای نوین به کار گرفته شود و زمینه لازم برای مشارکت فعال در فرآیند آموزش فراهم گردد که بهترین الگوی این مشارکت در جریان یاددهی - یادگیری، طرح همیار معلم است که در چند سال اخیر به یکی از بحث‌های دائمی در امر آموزش و پرورش تبدیل شده است؛ و معلمان مدارس ابتدایی، متوسطه اول و دوم، گروه‌های یادگیری از طریق همیاری را مورد آزمایش قرار می‌دهند تا ببینند آیا یادگیری دانش‌آموزانشان بیش‌تر و بهتر می‌شود یا فقط از یادگیری لذت می‌برند. بر این اساس، سؤالات زیر مطرح می‌گردد:

- ۱- آیا نقش همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟
- ۲- آیا نقش همیار معلم بر خودباوری دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

۳. روش تحقیق

تحقیق حاضر با توجه به هدف، در زمره پژوهش‌های کاربردی؛ با توجه به نوع داده‌ها، کمی و با توجه به ماهیت و نوع مطالعه در ردیف پژوهش‌های نیمه‌آزمایشی و بر اساس طرح پیش‌آزمون - پس‌آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری این تحقیق را کلیه دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تشکیل دادند. به دلیل ارائه کاربردی و قابل‌تعملی بودن محتوا و موضوع آموزش، نمونه‌گیری به روش در دسترس انجام گرفت و ۶۰ نفر از دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین انتخاب و به‌صورت تصادفی به دو گروه آزمایش (۳۰ نفر) و گروه کنترل (۳۰ نفر) تقسیم شدند. شایان ذکر است که دانش‌آموزانی که در آزمایش شرکت کردند از نظر جنسیت پسر، از نظر هوشی دارای هوش متوسط به بالا و از نظر فرهنگی نسبتاً یکسان بودند. شرایط عدم حضور در تحقیق نیز عبارت بود از: هر گونه معلولیت جسمی و دیرآموز بودن و ملاک خروج از این تحقیق، غیبت بیش از دو جلسه بود. در این مطالعه از ابزار سنجش زیر استفاده شده است:

الف) آزمون هوش ریون: آزمون ماتریس‌های پیش‌رونده ریون یکی از آزمون‌های هوشی غیرکلامی است که توسط ریون^{۳۷} در انگلستان برای اندازه‌گیری عامل عمومی اسپیرمن ساخته شده است. بعد از تهیه این آزمون، پژوهش‌های زیادی درباره آن به‌عمل آمده و بارها مورد تجدیدنظر قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، فرم ماتریس‌های پیش‌رونده که رنگی و شامل ۳۶ تصویر است که برای سنجش سطح هوش دانش‌آموزان و انتخاب آنان به‌عنوان همیار معلم مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرم در سال ۱۹۴۷ برای آزمایش کودکان ۵ تا ۱۱ سال و بزرگسالان به کار گرفته می‌شود. سؤال‌های مطرح شده شامل توالی الگوهای اشکال یا نمودارهایی است که بر اساس منطق خاص تنظیم شده‌اند. آزمودنی باید هر یک از تصاویر یا نمودارها را با انتخاب یک تصویر از بین چند تصویر ارائه‌شده در پایین صفحه کامل کند. یافتن پاسخ هر سؤال مستلزم آن است که آزمودنی رابطه بین اجزای تصاویر را کشف کند سپس رابطه کشف‌شده را برای یافتن جزء ناقص به کار برد؛ لذا با توجه به عملکرد آزمودنی در این دفترچه می‌توان رتبه درصدی و هوشبهر وی را مشخص کرد. سؤال‌های اولیه بسیار آسان است؛ ولی به‌تدریج مشکل‌تر می‌شود به‌طوری که سؤال‌های انتهایی به قدری مشکل است که کمتر کسی می‌تواند در یک زمان محدود، پاسخ درست آن‌ها را پیدا کند. این آزمون به دو صورت فردی و گروهی قابل اجرا است. در هنجاریابی این آزمون روی دانش‌آموزان مقطع راهنمایی و متوسطه شهر تبریز آزمون به‌صورت گروهی اجرا و ۵۰ دقیقه فرصت داده شد (دُرُتاج، ۱۳۹۲). نکته مهم این که در تحقیق حاضر، مدت‌زمان انجام آزمون هوش ریون ۳۰ دقیقه در نظر گرفته شد.

ب) آزمون پیشرفت تحصیلی: در تحقیق حاضر از آزمون محقق‌ساخته پیشرفت تحصیلی استفاده گردیده است. قبل از اجرای روش تدریس فعال (طرح همیار معلم) ابتدا از هر دو گروه (آزمایش و کنترل) پیش‌آزمون گرفته شد و پس از طی آموزش (همیار و سنتی) به دو گروه، از هر دو گروه پس‌آزمون گرفته شد. برای تدوین سؤال‌های آزمون از روش‌های رایج و سؤالات آزمون ریاضی در مدارس استفاده شده است. برای پیش‌آزمون و پس‌آزمون دو نمونه سؤال هر کدام با ۱۵ سؤال طراحی گردید. این سؤالات بر روی یک گروه ۳۰ نفری از دانش‌آموزان که به‌صورت تصادفی انتخاب شدند، به اجرا درآمد. سپس بر اساس ضریب دشواری ضریب همبستگی و شناسایی سؤالات مبهم، برخی از سؤالات آن حذف یا اصلاح گردید. پس از تعیین ضریب دشواری و ضریب همبستگی سؤالات در پایان، ۱۲ سؤال برای پیش‌آزمون و ۱۲ سؤال برای پس‌آزمون تعیین گردید. با توجه به این که محتوای یک آزمون باید شامل نمونه دقیق از محتوای برنامه درسی و اهداف آموزشی باشد از نظر سؤالات آزمون باید شبیه به موضوعی باشد که برای اندازه‌گیری آن تهیه شده‌اند؛ لذا برای سنجش اعتبار محتوایی و صوری آزمون‌های موردنظر علاوه بر این که از نظر استاد راهنما و مشاور استفاده شد، از نظر تعدادی از کارشناسان آموزش متوسطه اول شهر فامنین به‌عنوان متخصص بهره گرفته شد. همچنین برای سنجش پایایی آزمون، سؤالات مقدماتی بر روی یک گروه ۳۰ نفری اجرا و پایایی آزمون با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ محاسبه گردید، سپس پایایی آزمون نیز در پیش‌آزمون و پس‌آزمون بر اساس آلفای کرونباخ ۰/۷۶ محاسبه گردید. در هر آزمون اگر مقدار ضریب آلفای کرونباخ مساوی یا بزرگتر از ۰/۷۰، می‌توان نتیجه گرفت که سؤالات آزمون از اعتبار لازم برخوردارند. نکته مهم این که یادگیری دانش‌آموزان هر دو گروه از طریق آزمون محقق‌ساخته (پیش‌آزمون - پس‌آزمون) (زمان پاسخگویی هر آزمون ۶۰ دقیقه) مورد سنجش قرار گرفت.

37. Raven

ج) پرسشنامه انگیزه پیشرفت تحصیلی: پرسشنامه استاندارد انگیزه پیشرفت تحصیلی هارتر^{۳۸} (۱۹۸۶)، شامل ۳۳ گویه و هدف آن بررسی انگیزش پیشرفت تحصیلی در بین دانش‌آموزان است. این ابزار شکل اصلاح‌شده مقیاس هارتر (۱۹۸۱، ۱۹۸۰)، به‌عنوان یک ابزار سنجش انگیزش تحصیلی است. همانگونه که بیان شد مقیاس اصلی هارتر، انگیزش پیشرفت تحصیلی را با سؤال‌های دوقطبی می‌سنجد که یک قطب آن انگیزش درونی و قطب دیگر انگیزش بیرونی است و پاسخ آزمودنی به موضوع هر سؤال فقط می‌تواند یکی از دلایل بیرونی یا درونی را در برداشته باشد. از آنجا که در بسیاری موضوع‌های تحصیلی، انگیزه‌های درونی و بیرونی هر دو نقش دارند؛ لپر و همکاران^{۳۹} (۲۰۰۵)، مقیاس هارتر را به شکل مقیاس‌های معمول درآوردند که هر سؤال تنها یکی از دلایل انگیزش درونی و بیرونی در نظر می‌گیرد. این پرسشنامه بر اساس مقیاس لیکرت (هیچ‌وقت=۱؛ به‌ندرت=۲؛ گاهی اوقات=۳؛ اکثر اوقات=۴؛ تقریباً همیشه=۵) می‌باشد. بحرانی (۱۳۸۸)، در مطالعه خود با استفاده از شیوه تحلیل اکتشافی ضریب KMO برابر با ۰/۸۴ را به‌دست آورده و روایی ابزار را تأیید کرد. نجفی و همکاران نیز اعتبار این ابزار را با استفاده از آزمون کرونباخ ۰/۸۲ گزارش کرده‌اند. معروفی و همکاران (۱۳۹۵)، نیز روایی این پرسشنامه را تأیید کرده و اعتبار آن را با آزمون آلفای کرونباخ ۰/۸۵ به‌دست آورده‌اند. در مطالعه شاه‌مرادی و مهرانی، اعتبار پرسشنامه ۰/۷۹ به‌دست آمد که نشان از اعتبار مناسب ابزار تحقیق دارد (شاه‌مرادی و مهرانی، ۱۳۹۷).

د) پرسشنامه خودباوری: پرسشنامه استاندارد خودباوری دانش‌آموزان فرزیان‌پور و همکاران (۱۳۹۱)، با هدف سنجش میزان خودباوری دانش‌آموزان ساخته شده است؛ این پرسشنامه یک آزمون ۵۰ گویه‌ای است که به‌صورت طیف لیکرت چهار درجه‌ای می‌باشد که برای گزینه‌های «هرگز»، «به‌ندرت»، «بعضی مواقع» و «تقریباً همیشه» به‌ترتیب امتیاز ۱، ۲، ۳، ۴ در نظر گرفته می‌شود؛ البته گویه‌های شماره ۲، ۳، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۷، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۳، ۴۵ و ۵۰ به‌صورت معکوس نمره‌گذاری می‌شوند که برای گزینه‌های «هرگز»، «به‌ندرت»، «بعضی مواقع» و «تقریباً همیشه» به‌ترتیب امتیازات ۴، ۳، ۲ و ۱ در نظر گرفته می‌شود. در تحقیق فرزیان‌پور و همکاران روایی محتوایی پرسشنامه تأیید شده است؛ همچنین اعتبار پرسشنامه با آلفای کرونباخ بالای ۰/۸۵ به‌دست آمده است (فرزیان‌پور و همکاران، ۱۳۹۱). همانطور که در قسمت‌های قبلی اشاره شد، جهت گردآوری اطلاعات و داده‌ها از منابع اسنادی کتب، مقالات و ... همچنین آزمون هوش ریون برای سنجش سطح هوش دانش‌آموزان مورد مطالعه و انتخاب آنان به‌عنوان همیار معلم، آزمون محقق‌ساخته پیشرفت تحصیلی، پرسشنامه انگیزه پیشرفت تحصیلی و پرسشنامه خودباوری استفاده شد. ابتدا و قبل از هر گونه عمل آزمایشی، از هر دو گروه آزمایش و کنترل (۶۰ نفر) پیش‌آزمون از طریق آزمون‌ها و پرسشنامه‌های مذکور به‌عمل آمد. نمونه‌گیری به روش در دسترس انجام و ۶۰ نفر از دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین انتخاب و به‌صورت تصادفی به دو گروه آزمایش (۳۰ نفر) و گروه کنترل (۳۰ نفر) تقسیم شدند. در گروه آزمایش، گروه‌بندی دانش‌آموزان در ۶ گروه ۵ نفره بر اساس میانگین نمرات کلاسی با شیوه انتخاب ناهمگون و ناهمسان (قوی، متوسط و ضعیف در یک گروه کنار هم) انجام شد. این گروه‌ها در قالب همیار معلم به سرپرستی دانش‌آموز ممتاز علمی، اخلاقی و انضباطی جهت همیاری در آموزش سازماندهی شدند. در این مطالعه، آموزش کتاب ریاضی پایه هفتم (فصل اول: راهبردهای حل مسأله، فصل دوم: عددهای صحیح) با استفاده از روش تدریس همیار معلم در قالب ۱۰ جلسه ۵۰ دقیقه‌ای (هر هفته دو جلسه)، به مدت ۴۰ روز برای گروه آزمایش ارائه گردید؛ اما گروه کنترل، مداخله‌ای دریافت نکرد و صرفاً با روش سنتی (معلم‌محور) کتاب ریاضی پایه هفتم (فصل اول: راهبردهای حل مسأله، فصل دوم: عددهای صحیح) برای آنان آموزش داده شد. در انتهای جلسات آموزش، از نمونه‌های پژوهشی (گروه آزمایش و گروه کنترل) پس‌آزمون (شامل: آزمون پیشرفت تحصیلی، پرسشنامه‌های انگیزه پیشرفت تحصیلی و خودباوری) گرفته شد و آموخته‌های دانش‌آموزان دو گروه آزمایش و کنترل با هم مقایسه گردید.

در این مطالعه در بخش آمار توصیفی، داده‌ها با استفاده از آماره‌های میانگین و انحراف‌معیار، توصیف؛ در بخش آمار استنباطی، از آزمون تحلیل کوواریانس به‌منظور تعدیل پیش‌آزمون و کنترل اثرات آن بر نتایج پس‌آزمون استفاده شد و کلیه مراحل تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS.۲۱ صورت گرفت.

۴. یافته‌های تحقیق

تجزیه و تحلیل داده‌ها برای بررسی صحت و وسقم سؤالات و یافتن پاسخ برای هر نوع تحقیق از اهمیت خاصی برخوردار است. از آنجائیکه امروزه در بیش‌تر تحقیقاتی که متکی بر اطلاعات جمع‌آوری شده از موضوع تحقیق می‌باشد، تجزیه و تحلیل از اصلی‌ترین و مهم‌ترین بخش‌های تحقیق محسوب می‌شود در نتیجه داده‌های خام با استفاده از فنون آماری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و پس از پردازش اطلاعات در اختیار استفاده‌کنندگان قرار می‌گیرند.

بر این اساس، سؤالات تحقیق به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- آیا نقش همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟
- ۲- آیا نقش همیار معلم بر خودباوری دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

38. Harter

39. Lapper et al.

جدول ۱: میانگین و انحراف معیار نمره‌های آزمون پیشرفت تحصیلی دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

گروه	پیش‌آزمون		پس‌آزمون	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
آزمایش	۱۰/۶۴	۲/۱۹	۱۳/۴۵	۱/۷۵
کنترل	۱۰/۴۳	۱/۹۵	۱۰/۵۶	۲/۰۱

جدول ۲: نتایج تحلیل کواریانس آزمون انگیزه پیشرفت تحصیلی (متغیر وابسته: پس‌آزمون انگیزه پیشرفت تحصیلی)

اثرات متغیرها	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی داری
پیش‌آزمون انگیزه پیشرفت تحصیلی	۱۱/۵۸	۱	۱۱/۵۸	۰/۲۱	۰/۶۱۰
نقش همیار معلم	۱۳۹۴/۲۵	۱	۱۳۹۴/۲۵	۲۴/۱۲	۰/۰۰۰۱
خطا	۱۰۲۴۳/۱۰	۵۶	۵۷/۳۴		
کل	۱۱۶۳۸/۲۱	۵۹			

چنان‌که پیش‌تر عنوان شد در تحقیق حاضر دو گروه (آزمایش و کنترل) مورد مطالعه قرار گرفتند. عملکرد هر یک از گروه‌ها در دو نوبت (پیش‌آزمون - پس‌آزمون) بر اساس آزمون انگیزه پیشرفت تحصیلی محقق‌ساخته و خودباوری اندازه‌گیری شد تا بتوان بر اساس اندازه‌های به‌دست آمده نسبت به اثربخشی کاربردی به‌عمل آمده در طی زمان، داوری کرد؛ به این دلیل در این قسمت برای عینیت‌بخشی به وضعیت هر یک از گروه‌ها در پیش‌آزمون و پس‌آزمون به شاخص‌های پراکندگی اشاره شده است.

همانطور که نتایج جدول (۱) نشان داد میانگین گروه‌های آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون تفاوت چندانی نداشت (۱۰/۶۴ در مقابل ۱۰/۴۳)؛ در حالی که در پس‌آزمون تفاوت بارزی بین دو گروه مشاهده می‌شود (۱۳/۴۵ در مقابل ۱۰/۵۶)؛ که این تفاوت به نفع گروه آزمایش است. به‌منظور بررسی اثرات روش همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هفتم در درس ریاضی از تحلیل کواریانس استفاده شده است. در تحلیل کواریانس تأثیر نمره‌های پس‌آزمون از نمره‌های متغیر وابسته برداشته می‌شود و گروه‌ها با توجه به نمره‌های باقیمانده مقایسه می‌شوند که نتایج آن در جدول (۲) آمده است.

نتایج جدول (۲) حاکی از این است که تفاوت بین گروه‌ها در پس‌آزمون انگیزه پیشرفت تحصیلی بعد از تعدیل تفاوت‌های اولیه بین گروه‌ها در انگیزه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی پایه هفتم معنی‌دار است، یعنی $(F = 24.12, df = 1, 59, P < 0.0001)$ ؛ معنی این یافته این است که روش همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد. به عبارتی، تأثیر طرح همیار معلم در افزایش انگیزه دانش‌آموزان با تأثیر روش تدریس معمول یکسان نیست.

همانطور که نتایج جدول (۳) نشان داد میانگین گروه‌های آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون تفاوت چندانی نداشت (۴۸/۱۷ در مقابل ۴۷/۹۵)؛ در حالی که در پس‌آزمون تفاوت بارزی بین دو گروه مشاهده می‌شود (۶۵/۲۴ در مقابل ۵۱/۱۲)؛ که این تفاوت به نفع گروه آزمایش است. به‌منظور بررسی اثرات روش همیار معلم بر خودباوری دانش‌آموزان پایه هفتم در درس ریاضی از تحلیل کواریانس استفاده شده است. در تحلیل کواریانس تأثیر نمره‌های پس‌آزمون ریاضی از نمره‌های متغیر وابسته برداشته می‌شود و گروه‌ها با توجه به نمره‌های باقیمانده مقایسه می‌شوند که نتایج آن در جدول (۴) آمده است.

نتایج جدول (۴) حاکی از این است که تفاوت بین گروه‌ها در پس‌آزمون خودباوری بعد از تعدیل تفاوت‌های اولیه معنی‌دار است، یعنی $(F = 80.75, df = 1, 59, P < 0.0001)$ ؛ معنی این یافته این است که روش همیار معلم بر خودباوری دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس

جدول ۳: میانگین و انحراف معیار نمره‌های خودباوری دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

گروه	پیش‌آزمون		پس‌آزمون	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
آزمایش	۴۸/۱۷	۲/۸۵	۶۵/۲۴	۷/۵۴
کنترل	۴۷/۹۵	۲/۶۳	۵۱/۱۲	۳/۷۴

جدول ۴: نتایج تحلیل کوواریانس آزمون خودباوری (متغیر وابسته: پس آزمون خودباوری)

اثرات متغیرها	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی داری
پیش آزمون خودباوری	۳۴/۵۶	۱	۳۴/۵۶	۰/۲۶۴	۰/۶۰۰
نقش همیار معلم	۱۱۵۶۸/۰۳	۱	۱۱۵۶۸/۰۳	۸۰/۷۵	۰/۰۰۰۱
خطا	۲۴۵۱۰/۱۵	۵۶	۱۳۵/۴۸		
کل	۳۶۰۳۵/۲۵	۵۹			

متوسطه اول شهر فامنین در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد. به عبارتی، تأثیر طرح همیار معلم در افزایش خودباوری دانش آموزان با تأثیر روش تدریس معمول یکسان نیست.

۵. بحث و نتیجه گیری

از موضوعات مهم در آموزش مدرسه‌ای، ریاضیات است. قرن‌ها ریاضیات به‌عنوان والاترین درس برای تربیت "قدرت استدلالی" تلقی می‌شد. در گذشته و حال، متعارف‌ترین پاسخ به این پرسش که چرا این همه ریاضیات در مدرسه هست؟ این بوده است که "ریاضیات به انسان، فکر کردن بهتر را می‌آموزد." به دلیل چنین نقشی، در نظام آموزشی ایران نیز ریاضی در برنامه درسی مدرسه‌ای از جایگاه بالایی برخوردار است. با این حال در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای موانعی وجود دارد که شناختن و مرتفع کردن آن‌ها از دغدغه‌های اصلی آموزشگران بوده است؛ که یکی از علت‌های ضعف آموزش ریاضی، استفاده نکردن معلمان از روش‌های تدریسی است که متناسب با درس ریاضی باشد یعنی دانش‌آموزان را وادار می‌سازد تا فکر کنند و افکار خود را هر چند که درست نباشد، بیان کنند. همه می‌دانیم که به تعداد معلمان دنیا روش‌های مختلف تدریس وجود دارد اما همه روش‌های تدریس معمولاً در چند قالب کلی جای می‌گیرد؛ پس اهمیت دارد که چه روشی با توجه به شرایط و وضعیت کلاس انتخاب گردد که ما را به بیش‌ترین بهره‌وری برساند؛ ولی متأسفانه در کشور ما، روش‌هایی برای تدریس این درس مهم انتخاب می‌شود که آسانترین روش باشد؛ که معمولاً بهترین روش، آسانترین روش ارائه درس توسط معلم می‌باشد. همچنین در مواردی روش‌هایی انتخاب می‌شود که از نظر معلمان روش مناسب تشخیص داده شده ولی از نظر دانش‌آموزان بدترین روش برای یادگیری این درس است؛ چرا که درس ریاضی، برای یادگیری بهتر نیاز به مشارکت مستقیم‌تر و بیش‌تر دانش‌آموزان دارد تا بتواند از این طریق شور و شوق را برای یادگیری افزایش دهد و از آن حالت نمره‌محور خارج شود؛ بنابراین معلمان و مربیان تعلیم و تربیت باید به اهداف آموزشی هر موضوع درسی آگاهی کامل داشته باشند تا بهتر بتوانند موقعیت‌های کلاسی را درک کرده و روش تدریس هر مبحث درسی را با توجه به این اهداف تعیین نمایند. لذا امروزه ریاضیات بیش از هر زمان دیگر ملموس شده و نقش حیاتی به خود گرفته است؛ چرا که در ربع قرن گذشته، ریاضیات و روش‌های تدریس ریاضی به جزء لاینفک، فراگیر و اساسی علوم، تکنولوژی و اقتصاد تبدیل شده است که در آستانه قرن ۲۱ ناتوانی در درک یا بکارگیری ریاضیات نمایانگر یک شکاف آموزشی عمیق است. در واقع ما، بارها خودمان را عقب‌افتاده نامیده‌ایم؛ اما هرگز سعی نکرده‌ایم در جهت رفع این معضل گامی برداریم. معلمان از درس نخواندن شاگردان شکایت دارند و دانش‌آموزان به محض گرفتن نمره بد از معلمان و نحوه تدریس آن‌ها شاک می‌کنند. اکثر والدین هم فکر می‌کنند این کار از عهده آن‌ها خارج است؛ در نهایت، مسئولیت را نمی‌پذیرند و از برعهده گرفتن قسمتی از خطاها، شانه خالی می‌کنند؛ بر این اساس می‌توان گفت که تقریباً در همه کلاس‌ها شاهد بی‌رغبیتی و بی‌انگیزگی یا کم‌انگیزگی تعدادی از شاگردان نسبت به درس ریاضی هستیم ولی می‌توان با اقدام به بعضی فعالیت‌ها از سوی معلم و همچنین والدین و از همه مهم‌تر خود دانش‌آموزان این مسأله را برطرف ساخت؛ البته مرتفع ساختن این مسأله نیاز به یک فعالیت دسته‌جمعی دارد که دور از دسترس نیست؛ بنابراین اگر پایه تدریس بر انتقال معلومات به دانش‌آموزان استوار نباشد و به یک نظام تحقیقی و فعال - که دانش‌آموز محور اصلی انجام عمل ریاضی باشد - توجه شود؛ اگر محتوای مطالب آموزش ریاضی با فعالیت‌های ذهنی دانش‌آموزان منطبق گردد و اگر کلاس درس ریاضی طوری اداره شود که دانش‌آموزان با تلاش خود و با راهنمایی معلم به اهداف آموزش نائل شوند، یادگیری بهتر، آسانتر، پایدارتر و عمیق‌تر صورت می‌پذیرد؛ لذا استفاده از روش‌های نوین تدریس و فعال‌بودن دانش‌آموز در جریان تدریس، توجه به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان، ایجاد نگرش صحیح در دانش‌آموزان و حتی والدین آن‌ها، جهت علاقه به درس ریاضی و پی بردن به اهمیت ریاضی در زندگی، در برطرف شدن مشکل و ارتقای سطح یادگیری دانش‌آموزان و در نتیجه پیشرفت و خودباوری آنان بسیار مؤثر خواهد بود. در نهایت این که در شیوه فعال تدریس از جمله طرح همیار معلم، موضوع نقش معلم به‌عنوان راهنما، از اهمیت خاصی برخوردار است؛ به‌طوری که در بعضی از موضوعات درسی، دانش‌آموزان قادرند آن موضوع را قبل از کلاس بخوانند و در کلاس درس آن را ارائه دهند. به‌طور کلی، این مطالعه نقشه راه را برای رسیدن به اهداف سند برنامه درسی در مورد نقش معلم به‌عنوان راهنما، ترسیم می‌کند؛ بنابراین با بهره‌گیری از طرح همیار معلم در کلاس درس می‌توان به تمام اهداف سند برنامه درسی را که تشریح شده است، رسید:

۱) معلم نقش راهنما و راهبری یادگیری را برعهده دارد و متریبان را با منابع یادگیری آشنا می‌کند. ۲) معلم فرصت‌های مناسب یادگیری را برای متریبان فراهم می‌کند. ۳) معلم با استفاده از طرح همیار معلم، به اجرای فعالیت‌های یادگیری، سازمان و جهت می‌دهد. ۴) معلم به سازماندهی فعالیت گروهی و مشارکتی متریبان اهمیت می‌دهد. در مجموع مباحثی که بیان شد، می‌توان نتیجه گرفت اگر برای یادگیری دانش‌آموزان از یک الگوی صحیح و بومی طرح همیار معلم استفاده شود، می‌توان پیشرفت چشمگیری را در عملکرد تحصیلی و نیز سطح اعتمادبه‌نفس و خودباوری دانش‌آموزان مشاهده کرد. بر این اساس در تبیین یافته‌های تحقیق می‌توان گفت که:

سؤال اول: آیا نقش همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟

در تبیین یافته تحقیق می‌توان گفت که روش‌های تدریس فعال، رغبت، علاقه و انگیزه یادگیرنده را افزایش می‌دهد، چرا که در این روش‌ها، کلاس از حالت خشک و معمول خارج شده و تبدیل به صحنه‌ای شاد می‌شود و طراوت ذهنی خاصی بین دانش‌آموزان ایجاد می‌گردد که در یادگیری بسیار مهم و بااهمیت هستند. همچنین روش‌های فعال تدریس (همیار معلم یا دانش‌آموزمحور) در مقایسه با روش‌های تدریس منفعل (معلم‌محور)، مشارکت، فعالیت و تعامل دانش‌آموزان با معلم و با یکدیگر در فرآیند تدریس افزایش می‌یابد؛ هر چه فعالیت و مشارکت دانش‌آموزان بیش‌تر گردد انگیزه آن‌ها برای یادگیری بالا رفته و به تبع آن، یادگیری افزایش می‌یابد و پیشرفت تحصیلی حاصل می‌گردد. بر این اساس، باورهای ارزش و علاقه است که ادراک دانش‌آموزان از علاقه‌های شخصی مثلاً دوست داشتن مشارکت در امر تدریس (همیار معلم) و اهمیت و فایده‌مندی آن را برای وی نشان می‌دهد. آگاهی از این حالات انگیزشی مختلف دانش‌آموزان را یاری می‌دهد تا یادگیری خود را تحت نظارت و کنترل درآورند و در کسب موفقیت آنان بسیار مفید است. در واقع در طرح همیار معلم، کلاس تبدیل به جامعه‌ای از یادگیرندگان می‌شود که به‌صورت فعال با هم کار می‌کنند تا دانش، صلاحیت و لذت افراد را بالا ببرند. طرح همیار معلم به اصلاح و تقویت مهارت‌های همکاری و احترام به اندیشه‌های دیگران، پرورش تفکر انتقادی و تحمل اندیشه‌های مخالف منتهی می‌گردد. وقتی دانش‌آموزان با ویژگی‌های مختلف در یک گروه کاری برای یک هدف مشترک کار می‌کنند، آن‌ها نسبت به یکدیگر علاقه و احترام پیدا می‌کنند. در این نوع یادگیری، یادگیرنده خود منبع اصلی تحول خویش است و بیش‌تر بر انتخاب آزاد معیارها و ارزش‌ها برای رسیدن به حقایق علمی اجتماعی بر اساس فعالیتی مردم‌سالارانه تأکید می‌شود؛ لذا سه اصل آزادی، مسئولیت و انتخاب، نقش اساسی در یادگیری همیار معلم بازی می‌کنند. از این رو فرآیند یادگیری دانش‌آموزان، فرآیندی خودگردان، خودفرمان، خودنظم‌جو و خودرهبان است؛ بنابراین هم‌کوشی به‌وجود آمده در گروه‌های مبتنی بر تشریک‌مساعی و تعامل، بیش از محیط‌های مبتنی بر رقابت و فردگرایی ایجاد انگیزش می‌کند. در روش همیار معلم، یادگیری تابع تحول ذهنی دانش‌آموز است و تحول روانی توضیح‌دهنده یادگیری است. در این روش آنچه دانش‌آموز انجام می‌دهد، سبب یادگیری می‌شود. یادگیرنده بر اثر تأثیر خود بر محیط و واکنش فعال در برابر عمل محیط به پیشرفت دست می‌یابد. بر این اساس، نتایج حاصل از این فرضیه با نتایج تحقیقات هوشمند (۱۴۰۱)، قائمی‌امیری و قائمی‌امیری (۱۴۰۱)، نعمت‌نژاد (۱۴۰۱)، گرشاسبی و همکاران (۱۳۹۸)، قاسمی و همکاران (۱۳۹۸)، صالحی و عبدالله‌پور (۱۳۹۷)، حبیبی و همکاران (۱۳۹۷)، صفایی‌دهباز (۱۳۹۶)، مومنی‌مهموئی و همکاران (۱۳۹۴)، خلیلی‌نژاد و همکاران (۱۳۹۴)، ایزان و همکاران (۱۳۹۲)، سیفی و همکاران (۱۳۹۲)، سیرتی‌لیاوی و همکاران (۱۳۹۱)، جاردی و همکاران (۲۰۲۲)، لودیا و برهمیهات (۲۰۱۹)، اسلاوین و همکاران (۲۰۱۶)، شکار و فیشر (۲۰۱۴)، پان و وو (۲۰۱۳)، الخاطب و جمعه (۲۰۱۰)، لازارویتر (۱۹۹۴)، راس و رافوئل (۱۹۹۰)، شاران (۱۹۸۴)، آرونسون و همکاران (۱۹۷۸)، همخوانی دارد.

سؤال دوم: آیا نقش همیار معلم بر خودباوری دانش‌آموزان پسر پایه هفتم مدارس متوسطه اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ تأثیر معناداری دارد؟ در تبیین یافته تحقیق می‌توان گفت که در طرح همیار معلم، دانش‌آموزان آزادی عمل دارند تا از شیوه‌های یادگیری متفاوتی استفاده کنند؛ همچنین حواس و هوش‌های مختلف خود را به کار برند، با هم یاد بگیرند و از آموخته‌های خود در زندگی استفاده کنند؛ در نتیجه، استفاده از آن باعث تقویت اعتمادبه‌نفس در آنان می‌شود؛ مهارت‌های ذهنی و عملی پرورش می‌یابد، جو خودانضباطی بر کلاس حاکم می‌شود، به تفاوت‌های فردی توجه می‌شود و زمینه پرورش تحلیل، نوآوری و خلاقیت فراهم می‌آید و همین امر زمینه را برای خودباوری هر چه بیش‌تر دانش‌آموزان فراهم می‌کند. در واقع شعار کلاس همیاری این است: یا همه نجات می‌یابیم یا همه غرق می‌شویم؛ لذا در این روش، جنبه‌های منفی رقابت دانش‌آموزان از بین می‌رود و آن‌ها را به درس علاقه‌مند می‌سازد و باعث ارتقاء باورهای ارزش و علاقه در دانش‌آموزان می‌شود. در طرح همیار معلم این فرصت به تمام دانش‌آموزان داده می‌شود تا موفقیت را به‌صورت مدام تجربه کنند. به عبارت دیگر در این روش، همه شاگردان به نوعی رهبر و مسئول هستند. یادگیری به روش همیار معلم در پرورش اعتمادبه‌نفس و خودباوری دانش‌آموزان بسیار مؤثر است. دانش‌آموزان موفقیت‌ها و حمایت را در گروه تجربه می‌کنند و زمانی که دانش‌آموزان دیگر از آن‌ها سؤال می‌پرسند و به مشارکت آن‌ها احتیاج دارند، خود را باارزش احساس می‌کنند. در یادگیری همیاری به تقویت عزت‌نفس از طریق افزایش یادگیری و احساس شخص از این که مورد احترام و توجه افراد دیگر قرار گرفته منجر می‌شود. از این روست که یادگیری همیار معلم با بالا بردن اعتمادبه‌نفس و عزت‌نفس دانش‌آموزان در ارتقاء باورهای خودباوری مؤثر می‌افتد. افراد خودباور بر اساس اهداف انتخابی، خود را موظف به تعیین معیارهای عملکرد کرده و پس از آن به مشاهده و قضاوت درباره نتایج عملکرد خود می‌پردازند و در صورت مشاهده ناهمخوانی بین سطوح واقعی و مطلوب عملکرد، آنان احساس نارضایتی کرده و این محرکی برای تعیین و اصلاح عمل در آن‌هاست. افراد دارای احساس خودباوری بالا، موفقیت‌ها و اهدافی را انتخاب می‌کنند که ممکن است، ولی خارج از توان آنان نیست؛ لذا می‌توان اذعان داشت که یادگیری از طریق همیاری با ارتقاء باورهای خودکارآمدی دانش‌آموزان باعث می‌شود تا باورهای آنان درباره اهداف نیز ارتقاء بیابد. بر این اساس نتایج حاصل از این فرضیه با نتایج تحقیقات هوشمند (۱۴۰۱)، نعمت‌نژاد (۱۴۰۱)، خسروی‌نژاد و همکاران

(۱۴۰۰)، گرشاسبی و همکاران (۱۳۹۸)، حبیبی و همکاران (۱۳۹۷)، خفته‌دل و همکاران (۱۳۹۴)، مومنی مهموئی و همکاران (۱۳۹۴)، جاردی و همکاران (۲۰۲۲)، لودیا و برهمبها (۲۰۱۹)، اسلاوین و همکاران (۲۰۱۶)، شکار و فیشر (۲۰۱۴)، پان و وو (۲۰۱۳)، لازاروینز (۱۹۹۴)، آرونسون و همکاران (۱۹۷۸)، همخوانی دارد.

در نهایت پیشنهاداتی ذیل مطرح می‌گردند که عبارتند از:

- پیشنهاد می‌گردد که تحقیقات مشابهی در سایر جوامع و استان‌ها به‌عمل آید و نتیجه به‌دست آمده با نتایج این مطالعه مقایسه شود.
- به نظر می‌رسد استفاده از پژوهش‌های کیفی می‌تواند مدل نظری جامع‌تری در حوزه شناختی را در پی داشته و مطالعات آزمایشی می‌توانند مداخلاتی مبتنی بر روابط معنی‌دار و تأثیرگذار، طراحی و اثربخشی آن را در گروه‌های نمونه بررسی کنند.
- پیشنهاد می‌گردد پژوهش‌هایی با تأکید و تأمل بر مشاهدات کلاسی و مصاحبه با دانش‌آموزان و معلمان انجام شود.
- پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی، پژوهش‌هایی در زمینه چالش‌ها و موانع بکارگیری روش‌های فعال تدریس از جمله طرح همیار معلم صورت گیرد.
- با توجه به تأثیر مثبت روش تدریس مبتنی بر طرح همیار معلم بر انگیزه پیشرفت تحصیلی و خودباوری دانش‌آموزان، می‌توان در یک مطالعه پدیدارشناسانه، ادراکات دانش‌آموزان در خصوص شرکت در طرح همیار معلم، احساسی که نسبت به حضور در کلاس به‌عنوان همیار دارند و نقشی که در انجام فعالیت‌های درسی و سایر فعالیت‌های کلاسی دارند را مورد واکاوی و سنجش قرار داد.
- مطالعه انجام‌گرفته در مدت زمان مشخص (۱۰ جلسه) اجرا گردید. از این رو پیشنهاد می‌شود، امکانی فراهم شود تا از برنامه‌های پیگیری در مدت زمان‌های منظم، به‌منظور بررسی نتایج این پژوهش در طول مراحل رشد دانش‌آموزان استفاده شود.
- مطالعه انجام‌شده به دلیل شرایط موجود، به روش نیمه‌آزمایشی اجرا گردید و این مسأله موجب شد از نمونه‌گیری در دسترس و جایگذاری تصادفی در دو گروه آزمایش و کنترل استفاده شود؛ به همین منظور، پیشنهاد می‌شود این مطالعه به صورتی غیر از نیمه‌آزمایشی نیز انجام گردد؛ به گونه‌ای که از نمونه‌گیری تصادفی استفاده گردد و عوامل تهدیدکننده روایی بیرونی تا حد امکان حذف یا کنترل گردند.
- در مطالعه انجام‌گرفته، به‌منظور حذف و یا کنترل متغیر همپراش (پیش‌آزمون) از روش آماری تحلیل کوواریانس استفاده شد، از این رو پیشنهاد می‌شود، سازوکاری فراهم شود که در مطالعات آینده از روش چهار گروهی سالمون استفاده شود تا بتوان اثر پیش‌آزمون را به روش پژوهشی کنترل کرد.
- از آنجائیکه در مطالعه انجام‌گرفته، محقق همان مدرس بوده و این امر می‌تواند بر نتایج تأثیرگذار باشد؛ لذا پیشنهاد می‌شود، در مطالعاتی با این محوریت، محقق و مدرس آموزشی یک فرد نباشند تا بتوان از سوگیری و تورش در مطالعه جلوگیری به‌عمل آورد. همچنین پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی از روش سه سوکور استفاده شود که در آن آزمودنی‌ها، محقق و تحلیلگر در جریان نباشند.

مراجع

- [۱] اشجاری، م.، زاهدبابلان، ع.، و رضایی شریف، ع. (۱۳۹۳). رابطه سبک مدیریت کلاس و انگیزه پیشرفت با یادگیری خودگردان دانش‌آموزان دوره متوسطه شهرستان مرند، فصلنامه رهبری و مدیریت آموزشی، دوره هشتم، شماره ۴، ۲۳-۲۱.
- [۲] ایزان، م.، کرامتی، م.، و غلامعلی‌لواسانی، م. (۱۳۹۲). بررسی تأثیر مدیریت کلاس درس بر اساس رویکرد همیاری بر پیشرفت تحصیلی علوم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهر پیرانشهر، فصلنامه یادگیری الکترونیکی، دوره دوم، شماره ۵، ۱۰۶-۹۳.
- [۳] بحرانی، م. (۱۳۸۸). بررسی روایی و پایایی مقیاس انگیزش تحصیلی هارتر، نشریه مطالعات روانشناختی، دوره پنجم، شماره ۱، ۷۲-۵۱.
- [۴] جهان‌دیده، ح.، و سعیدی‌پور، ا. (۱۴۰۰). مقایسه اثربخشی روش تدریس همیاری و روش تدریس کوشگری بر خلاقیت دانش‌آموزان دختر پایه پنجم ابتدایی، فصلنامه پژوهش در برنامه‌ریزی درسی، دوره هجدهم، شماره ۶۸، ۲۰۲-۱۹۰.
- [۵] حبیبی، ح.، اسلامی، ا.، و معبودی، ن. (۱۳۹۷). بررسی اثربخشی طرح همیار معلم از دیدگاه معلمان و دانش‌آموزان، اولین کنفرانس ملی توسعه پایدار در علوم تربیتی و روانشناسی ایران، تهران.
- [۶] حق‌خواه، س.، و داودی، ا. (۱۳۹۹). راهکارهای پیشگیری و اصلاح بدفهمی‌های ریاضی (یک مطالعه کیفی)، فصلنامه پویا در آموزش علوم پایه، دوره ششم، شماره ۲۱، ۴۰-۲۶.
- [۷] خسروی‌نژاد، ش.، طالی، ز.، احمدی، ا.، و نوروزی، د. (۱۴۰۰). تأثیر استفاده از ربات همیار معلم بر ارتقای مهارت‌های تولیدی زبان انگلیسی با تأکید بر رویکرد ارتباطی: سنتز پژوهی، فصلنامه فناوری آموزش، دوره چهاردهم، شماره ۳، ۶۱۴-۶۰۳.
- [۸] خفته‌دل، م.، ادیب‌نیا، ا.، و مهاجر، ی. (۱۳۹۴). مقایسه تأثیر روش تدریس همیاری با روش تدریس E۵ بر پیشرفت تحصیلی و مهارت‌های اجتماعی دانش‌آموزان پسر در درس علوم تجربی پایه پنجم ابتدایی، فصلنامه پژوهش در برنامه‌ریزی درسی (دانش و پژوهش در علوم تربیتی - برنامه‌ریزی درسی)، دوره دوازدهم، شماره ۱۹، ۱۰۳-۹۰.
- [۹] خلیلی‌نژاد، ا.، شاه‌ورانی، ا.، و مردان‌بیگی، م. (۱۳۹۴). بررسی افزایش خلاقیت دانش‌آموزان با استفاده از روش همیاری و تأثیر آن بر یادگیری درس ریاضی، کنفرانس بین‌المللی مهندسی و علوم کاربردی، استانبول.
- [۱۰] ذرتاج، ف. (۱۳۹۲). مقایسه تأثیر دو روش آموزش به شیوه بازی و سنتی بر انگیزه و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان، مجله روانشناسی مدرسه، دوره دوم، شماره ۴، ۸۰-۶۲.
- [۱۱] دیزج، ا.، حسینی‌نسب، د.، و عسگریان، ف.، شیرعلی‌پور، ا.، و مقصودی، م. (۱۳۹۳). فراتحلیل اثربخشی روش‌های تدریس فعال در عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان ایرانی: یک مطالعه مروری ساختاریافته، فصلنامه روانشناسی تربیتی، سال یازدهم، شماره ۳۵، ۱۰۳-۷۹.
- [۱۲] سیدعلیان، م.، و صالحی، ک. (۱۴۰۰). تأثیر استفاده از وسایل کمک آموزشی و فناوری اطلاعات در بهبود یادگیری ریاضیات دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، نشریه علمی فناوری آموزشی، دوره پانزدهم، شماره ۴، ۶۹۴-۶۸۳.
- [۱۳] سیرتی‌لیاوی، ف.، خاکپور، م.، و شاه‌مردی، م. (۱۳۹۱). تأثیر روش تدریس همیاری بر نگرش و پیشرفت تحصیلی درس ریاضی دانش‌آموزان پایه پنجم ابتدایی شهرستان چالوس، اولین همایش ملی حسابداری و مدیریت، نور.

- [۱۴] سیف، ع. (۱۳۹۶). روانشناسی پرورشی نوین (روانشناسی یادگیری آموزش)، تهران: نشر دوران.
- [۱۵] سیفی، ف.، جوان‌محبوب‌دوست، و.، و آبی، م. (۱۳۹۲). تأثیر معلم دوم (همیار معلم) بر پیشرفت تحصیلی و نگرشی دانش‌آموزان متوسطه، هشتمین سمینار آموزش شیمی ایران، سمنان.
- [۱۶] شاه‌مرادی، م.، و مهرانی، ط. (۱۳۹۷). بررسی تأثیر رفتار مشارکت‌جویانه معلمان بر انگیزش و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان ابتدایی، فصلنامه توسعه حرفه‌ای معلم، دوره سوم، شماره ۴، ۶۳-۷۴.
- [۱۷] صالحی، م.، و عبدالله‌پور، ک. (۱۳۹۷). بررسی یادگیری مشارکتی به شیوه اداره کشور (در کلاس درس) با طرح همیار معلم در دانش‌آموزان دختر متوسطه دوم، فصلنامه پژوهش در برنامه درسی، دوره پانزدهم، شماره ۵۷، ۶۷-۷۹.
- [۱۸] صفایی‌دهبارز، ن. (۱۳۹۶). اثربخشی طرح همیار معلم در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه سوم متوسطه رشته‌های نظری شهرستان رودان، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد واحد بندرعباس.
- [۱۹] عاشوری، ج. (۱۳۹۳). ارتباط خودکارآمدی، تفکر انتقادی، سبک‌های تفکر و هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی دانشجویان پرستاری، مجله علمی دانشکده پرستاری و مامایی همدان، دوره بیست‌دوم، شماره ۳: ۲۳-۱۵.
- [۲۰] فرزین‌پور، ف.، حسینی، م.، حسینی، ش.، موحلکر، ا.، و عامرزاده، م. (۱۳۹۱). بررسی ارتباط بین خودباوری مدیران پرستاری با رضایتمندی بیماران در بیمارستان‌های دانشگاه علوم پزشکی تهران، مجله دانشکده پیراپزشکی دانشگاه علوم پزشکی تهران (پیاورد سلامت)، دوره ششم، شماره ۵، ۳۳۰-۳۴۱.
- [۲۱] قاسمی، ا.، پورموسوی، ا.، و آقاجسینی، ت. (۱۳۹۸). بررسی تأثیر روش تدریس همیاری بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در درس علوم تجربی؛ مورد مطالعه: دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهرستان مسجدسلیمان، دوماهنامه علمی - تخصصی پژوهش در هنر و علوم تخصصی، دوره چهارم، شماره ۷، ۱۸-۹.
- [۲۲] قائمی‌امیری، ف.، و قائمی‌امیری، ز. (۱۴۰۱). استفاده از همیار معلم در آموزش درس شیمی: بیان یک تجربه، هفتمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد.
- [۲۳] گرشاسبی، ا.، فتحی‌اجارگاه، ک.، و عارفی، م. (۱۳۹۸). تأثیر یادگیری مشارکتی همیار دبیر و خودارزیابی بر انگیزش خود و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان سوم دبیرستانی با رویکرد مدل جیگساو، فصلنامه علمی-پژوهشی ره‌یافتی‌نو در مدیریت آموزشی، دوره دهم، شماره ۳۷، ۶۸-۴۵.
- [۲۴] معروفی، ی.، پورجمشیدی، م.، و مرادی، ح. (۱۳۹۵). پیش‌بینی انگیزش تحصیلی دانش‌آموزان از طریق سواد فناورانه معلمان، فصلنامه فناوری برنامه درسی، دوره اول، شماره ۲، ۴۳-۳۱.
- [۲۵] مومنی‌مهمونی، ح.، پاکدامن، م.، فاضلی، م.، و غلامی‌نوقاب، م. (۱۳۹۴). تأثیر روش تدریس همیاری بر انگیزه پیشرفت، خودپنداره و پیشرفت تحصیلی در درس علوم تجربی دانش‌آموزان دختر پایه پنجم ابتدایی، دومین کنفرانس ملی توسعه پایدار در علوم تربیتی و روانشناسی، مطالعات اجتماعی و فرهنگی، تهران.
- [۲۶] نعمت‌زاده، م. (۱۴۰۱). بررسی نکات قوت و ضعف اجرای طرح همیار معلم از نظر معلمان کلاس‌های چندپایه، پنجمین همایش ملی فناوری‌های نوین در تعلیم و تربیت، روانشناسی و مشاوره ایران، تهران.
- [۲۷] هوشمند، ص. (۱۴۰۱). تأثیر اجرای طرح همیار معلم بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه دهم، چهارمین همایش ملی پژوهش‌های حرفه‌ای در روانشناسی و مشاوره با رویکرد از نگاه معلم، میناب.
- [28] Alkhateb, H.M. & Jemaah, M. (2010). Cooperative learning and Algebra Performance of Eight Grade Students in unitedArabEmirates. *Journal of Contemporary Educational Psychology*; 6(1): 245-257.
- [29] Amjad, S. Younas, M. Anwar, M. Shaheen, Q. Shiraz, M. & Gani, A. (2022). Data Mining Techniques to Analyze the Impact of SocialMedia on Academic Performance of High School Students. *Wireless Communications and Mobile Computing*; 1(1): 1-11.
- [30] Aronson, E. Bridgeman, D.L. & Geffner, R. (1978). *The effects of a cooperative classroom structure on students' behaviour and attitudes*. In D. Bar-Tal & L. Saxe (Eds.). *Social psychology of education: Theory and research*. Washington, DC, New York 7itd: Hemisphere.
- [31] Bartosh, O. (2003). *Environmental education: Improving student achievement*. Master's Dissertation, Evergreen State College, Olympia, WA, USA.
- [32] Esnaola, I. Sesé, A. Antonio Agirre, I. & Azpiazu, L. (2020). The development of multiple selfconcept dimensions during adolescence. *Journal of Research on Adolescence*; 30(1): 100-114.
- [33] Ghezlbash, S. Rahmani, F. Peyrovi, H. Inanloo, M. & Shekarchian, S. (2015). Comparison of self-esteem among first to fourth year nursing students from Universities of Medical Sciences in Tehran. *Thrita*; 4(1): 1-5.
- [34] Giangreco, M.F. (2021). Maslow's Hammer: teacher assistant research and inclusive practices at a crossroads. *European Journal of Special Needs Education*; 36(2): 278-293.
- [35] Harter, S. (1986). *The relationship between perceived competence, affect, and motivational orientation within the classroom: Process and pattern of change*, university of Denver.
- [36] Hassani, H. & Jahandideh, J. (2013). Investigating the effect of cooperative teaching method on the creativity of fifth grade elementary school female students in experimental sciences. *Bi-Quarterly Journal of Education and Learning Research (Daneshvar Behavior)*; 22(6): 139-150.
- [37] Jardí, A. Webster, R. Petreñas, C. & Puigdel·l·ivol, I. (2022). Building successful partnerships between teaching assistants and teachers: Which interpersonal factors matter? *Teaching and Teacher Education*; 109(10): 103523.
- [38] Keramati, M.R. (2003). *Collaborative learning*. Mashhad: Meta Motivation Publications.
- [39] Kyndt, E. Raes, E. Lismont, B. Timmers, F. Cascallar, E. & Dochy, F. (2013). A meta- analysis of the effects of face-to-face cooperative learning. Do recent studies falsify or verify earlier findings? *Educational Research Review*; 10(1): 133-149.
- [40] Lapper, R. Corpus, J.H. & Iyengar, S. (2005). Intrinsic and extrinsic motivation in the classroom: Age diferences and academic correlates. *Journal of Educational Psychology*; 97(2): 184-196.
- [41] Lazarowitz, R. (1994). Setting academic achievement and affective outcomes. *Journal of Research in Science Teaching*; 31(10): 1121-1131.
- [42] Lodhiya, K.K. & Brahmabhatt, K.R. (2019). Effectiveness of Collaborative Versus Traditional Teaching Methods in a Teaching Hospital in Gujarat. *Indian J Community Med*; 44(3): 243-246.
- [43] Pan, C.Y. & Wu, H.Y. (2013). The Cooperative Learning Effects on English Reading Comprehension and Learning Motivation of EFL Freshmen. *English Language Teaching*; 6(5): 13-15.
- [44] Rakoczy, K. & Birgit, H. (2013). Written feedback in mathematics: Mediated by students' perception, moderated by goal orientation. *Learning and Instruction*; 27(1): 63-73.
- [45] Ross, J.A. & Raphael, D. (1990). Communication and problemsolving achievement in cooperative learning groups. *Journal of Curriculum Studies*; 22(2): 149-164.
- [46] Sepahvand, A. (2017). *Teaching strategies in multi-grade classes: space arrangement, teacher assistance, importance to sports and art*

- Lessons*. The First International Conference on Social Sciences, Education, Humanities and Psychology, Tehran.
- [47] Shabani, H. (2008). *Teaching skills and techniques, advanced teaching methods*. Tehran: Samt Publications.
- [48] Shachar, H. & Fischer, S. (2014). Cooperative learning and the achievement of motivation and perceptions of students in 11th grade chemistry classes. *Learning and Instruction*; 14(1): 69-87.
- [49] Sharan, S. (1984). Cooperative learning in small group: Recent methods and effects on achievements, attitudes and ethnic relations. *Review of Educational Research*; 50(1): 241-272.
- [50] Slavin, R. Lake, C. Hanley, P. & Thurston, A. (2016). Experimental evaluations of elementary science programs: A best-evidence synthesis. *Journal of Research in Science Teaching*; 51(1): 870-901.
- [51] Suave, L. (2005). Currents in Environmental Education: Mapping a Complex and Evolving Pedagogical Field. *Canadian Journal of Environmental Education*; 10(1): 11-37.
- [52] Wang, J. Chu, M. & Ma, Y. (2018). Measuring Rice Farmer's Pesticide Overuse Practice and the Determinants: A Statistical Analysis Based on Data Collected in Jiangsu and Anhui Provinces of China. *Sustainability*; 10(3): 677-698.
- [53] Zhou, J. Yan, Z. & Li, K. (2016). Understanding farmer cooperatives' selfinspection behavior to guarantee agriproduct safety in China. *Food Control*; 59(10): 320-327.



دانشگاه گنبدکاووس

چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار

<https://conf.gonbad.ac.ir/msc1402>



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED-163، صص. ۲۷۴-۲۷۸

بررسی تأثیر ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش-آموزان متوسطه اول پایه نهم شهرستان شهرکرد در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ دانشگاه پیام نور کرمان

الهام قادری قهفرخی*^آ، دکتر محمود فرهادیان^ج، دکتر شریفه رضاقلی^{آج}، داریوش رحیمی دستنایی^ج

شهرکرد
سکرمان

@yahoo.com ۱۳rahimi^ع

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: ذهنیت فلسفی خودپنداره تحصیلی عملکرد ریاضی	هدف پژوهش حاضر بررسی تأثیر ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان متوسطه اول پایه نهم شهرستان شهرکرد در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ می‌باشد. تحقیق حاضر توصیفی از نوع همبستگی بوده است. جامعه آماری این مطالعه کلیه دانش‌آموزان پایه نهم دوره متوسطه اول شهرستان شهرکرد در استان چهارمحال و بختیاری به تعداد ۴۱۰۳ نفر می‌باشد. در این پژوهش از نمونه‌گیری تصادفی ساده و از جدول مورگان استفاده شده و ۳۵۱ نفر انتخاب شدند. جهت جمع‌آوری اطلاعات از پرسشنامه ذهنیت فلسفی سلطانی (۱۳۷۵)، پرسشنامه خودپنداره تحصیلی یس سین چن (۲۰۰۴) و نمره نهایی کسب شده درس ریاضی استفاده شده است. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات و برای تایید یا رد فرضیه‌ها از آزمون ضریب همبستگی پیرسون و رگرسیون دو متغیره استفاده گردید. یافته‌ها نشان داد که ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد تحصیلی تأثیر مثبت داشته‌اند.
2020 MSC:	
34B16	
34B40	
65M70	

۱. مقدمه

در این مقاله، یکی از مولفه‌هایی که کمتر مورد توجه پژوهشگران در حوزه فلسفه و تفکر در آموزش و یادگیری است، ذهنیت فلسفی می‌باشد. این اصطلاح همان روش اندیشیدن درست علمی است که عبارت از توانمندی و خصوصیات ذهنی که فرد را در تفکر درست یاری می‌نماید و او را به داشتن آیین داوری صحیح سوق می‌دهد و شامل ابعاد سه گانه جامعیت، تعمق و انعطاف‌پذیری است. مهمترین هدف نظام‌های آموزشی در عصر حاضر، آموزش چگونه فکر کردن به دانش‌آموزان است و به همین دلیل قبل از هر چیز، معلمان باید از تفکر صحیح، منطقی و خلق بر خوردار باشند. به عبارت بهتر خود باید دارای ذهنیت فلسفی باشند تا بتوانند ذهنیت فلسفی را در دانش‌آموزان کشف و پرورش دهند. مواردی از تأثیر ذهنیت فلسفی معلمان در عملکرد آنان: انتخاب راه‌حل‌های مطلوب در رویارویی با مشکلات آموزشی؛ نداشتن تعصب نسبت به روش خاص در حل مسائل؛ توجه ویژه به رشد علمی و فکری دانش‌آموزان؛ دوری از اتخاذ تصمیمات عجولانه و ایجاد روابطه دوستانه با دانش‌آموزان؛ ایستادگی نکردن در مقابل تغییرات جدید و داشتن عکس‌العمل مناسب در برابر این موقعیت جدید؛ ساختن ارتباطی مؤثر میان مسائل زودگذر با اهداف نهایی. حقیقت پیچیده و درهم تنیده ناگزیر تحقیقات در زمینه علوم رفتاری ضرورت دقت به اثرات متعدد متغیرها را دوبرابر می‌کند. خودپنداره به عنوان یک واژه نظری، تعاریف متعددی دارد. در برخی تحقیقات، به این واژه به مفهوم شمای خود، خودنمایی، تصویری

*سخنران

پست الکترونیک: elham.ghderi130@gmail.com (الهام قادری قهفرخی)، farhadian@pnu.ac.ir (دکتر محمود فرهادیان)، sh_rezagholi79@yahoo.com (دکتر شریفه رضاقلی)

از خود نشان داده اطلاق شده است. مطالعه در رابطه با مواردی که باعث عملکرد هرچه بهتر ریاضی دانش‌آموزان شود، هم از بعد نظری و هم بعد عملی، اهمیتی ویژه دارد، چون علاوه بر اینکه دانشی نو در حیطه رفتار انسانی پدید می‌آورد، بلکه محیطی آموزشی می‌سازد که رشد دانش آموز را میسر و آسان می‌سازد. بدین ترتیب در این زمان تمرکز روی این ساختار خاص در پروسه یاددهی - یادگیری و یافتن متغیرهای مانند خودپنداره تحصیلی که این متغیر را پیش‌بینی می‌کند، در امر تعلیم و تربیت اهمیت و ضرورت خاصی دارد (عشورنژاد، ۱۳۸۷).

د پژوهش حاضر درصدد پاسخ به این سؤال است که آیا ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه نهم شهرستان شهرکرد تأثیر معنادار دارند؟

تعریف ۱.۱. ذهنیت فلسفی: ذهنیت فلسفی توانمندی است که به شکل ابزاری جهت یاری افراد در تفکر استفاده می‌شود و جامع اندیشی به عنوان یکی از جنبه‌های آن، مستلزم مقاومت در قبال اثرگذاری امور زودگذر و مقطعی است. مطرح ساختن پرسشهایی در مورد اینکه هدف ما از زیستن چیست یا اعمال ما چه رابطه‌ای با آن هدف دارد و یا اینکه این مسئله چه ارتباطی با دیگر مسائل دارد، مرحله‌ای در جهت جامع اندیشی به شمار می‌رود (جاویدی کلاته آبادی و ابوترابی، ۱۳۸۹).

۱

تعریف ۲.۱. خودپنداره تحصیلی: خودپنداره تحصیلی شامل ادراک دانش آموز از شایستگی‌هایش در رابطه با یادگیری در مدرسه اشاره دارد (خجسته مهر و همکاران، ۱۳۹۱).

تعریف ۳.۱. عملکرد ریاضی: شیوه ارزشیابی است که در آن فراگیر با حل مسائل واقعی و یا مشابه با زندگی واقعی توانمندی خود را در بهرگیری از علم و مهارت‌های یاد گرفته شده بر استدلال، حل مسئله، تولید راه حل و یا اجرای یک مهارت ویژه در ریاضی نشان داده و آن گاه معلم با نظارت بر عملکرد وضعیت آن را تفسیر و مورد داوری قرار می‌دهد (مختاری پور، ۱۳۸۵).

۲

تعریف ۴.۱. ذهنیت فلسفی به اعتقاد اسمیت، کسی که ذهن فلسفی دارد، میل بسیاری به دانستن دارد و این تمایل را به روش محتاطانه راجع باورهایش ترکیب می‌کند. ذهنیت وی منطقی است و آیین او درست اندیشیدن است. عادت به تفکر و قضاوت درست و ارزش گذاری و توانایی استفاده از آن در زندگی را می‌توان ذهنیت فلسفی نامید. ذهنیت فلسفی منشی می‌سازد که عبارت است از شکل دادن عادات، نگرش‌ها و ارزش‌هایی که تفکر و قضاوت درست بر آن استوار باشد (بیکزاد و دادخواه، ۲۰۱۲). ذهنیت فلسفی نوعی خصلت فکری است که باعث بهتر شدن قضاوت‌های ارزشی در افراد می‌گردد و به معلمان علم و آگاهی می‌دهد که بتوانند در برخورد با مسائل آموزشی و مشکلات و مسائل تربیتی آن‌ها را به طور صحیح حل نموده، و با میسر ساختن فرصت‌های یادگیری و فراهم آوردن مواد آموزشی برای ساختن موقعیت مطلوب یادگیری، عمل نمایند و به این وسیله، زمینه‌ی رشد و پرورش تفکر و شکوفایی همه جانبه‌ی دانش‌آموزان را فراهم سازند. افراد دارای ذهنیت فلسفی خصوصیتی را دارند که ممکن است در سه بُعد بهم مرتبط، یعنی جامعیت، تعمق و انعطاف‌پذیری گروه‌بندی شوند.

۳

تعریف ۵.۱. جامعیت: نشانه‌ها و خصوصیات «جامعیت» عبارتند از: الف) توجه به موارد ویژه و خاص در ارتباط با زمینه‌ای وسیع (ب) ایجاد ارتباط میان مسائل آنی و اهداف درازمدت (ج) کاربرد قوه ی تعمیم (د) صبوری در اندیشه‌های عمیق نظری (قبل از اقدام به عمل، امر به کسب علم)

تعریف ۶.۱. تعمق: از جمله نشانه‌های تعمق در افرادی که دارای ذهن فلسفی یا همان تفکر منطقی هستند عبارتند از: الف) آنچه برای دیگران مسلم قلمداد می‌شود را مورد سؤال قرار می‌دهد. ب) کشف، و تدوین نظریه‌ها؛ سؤال‌ها، و فرض‌های اساسی در موقعیت ویژه. ج) حساس بودن به معانی تلویحی و ربط امور. د) حکم و قضاوت را به شیوه فرضیه‌ای قیاسی ساختن.

۴

تعریف ۷.۱. انعطاف‌پذیری: علائم داشتن انعطاف چهار مورد می‌باشد: الف) آزاد شدن از جمود روانی (ب) ارزش گذاری بر روی اندیشه‌ها، افکار و نظریات بدون در نظر آوردن منابع آنها (ج) مورد توجه قرار دادن مسائل مورد نظر از جوانب مختلف (د) صبوری در داوری‌های زودگذر و مشروط و تمایل به عمل در وضعیت پیچیده (کوشای و سلطانی، ۱۳۹۴).

¹ Philosophical mentality

² Mathematical Performance

³ Comprehension

⁴ Penetration

ملاحظه ۸.۱. ویژگی‌های ذهنیت فلسفی: تردید منطقی – کنجکاوی – ژرفاندیشی – سعه صدر – دید وسیع – وحدت شخصیت – ترقی طلبی – طرفداری از ارزش‌های انسانی خودپنداره به عقیده بیشتر روان‌شناسان، پاسخ هر فرد به پرسش «من کیستم؟» همان چیزی است که خود یا مفهوم خویشتن فرد را می‌سازد، و ارزیابی وی از پاسخش به این سوال، عزت نفس یا میزان پذیرش و علاقه او را نشان می‌دهد. به نظر بسیاری از نگره‌پردازان، عزت نفس و خودپنداره نقشی اصلی در سازگاری افراد دارند. از جمله دشواری‌های عصر ما، دید خودکم بینانه‌ی افراد، و خصوصاً دختران است. تحقیق‌های گوناگون نشان می‌دهد که شیوه‌ی نگرش افراد به خویش (خودپنداره) در فراهم ساختن شکست یا پیروزی آنها مؤثر است. از این رو، امروزه به عامل‌های مشخص‌کننده‌ی رفتار، به ویژه نظام خود و خودارزیابی‌ها توجهی خاص می‌شود. دانش آموزان، هم‌چنان که رشد می‌کند، تجربه‌های بیشتری به دست می‌آورد و پندارهای فردی را از خود به عنوان یک فرد گسترش و رشد می‌دهد. این پنداشت‌ها، همان گونه که در رابطه با دیگران آماده می‌شود، می‌تواند بر گزینش و کنش اشخاص مؤثر می‌باشند و از این‌رو متخصصان روان‌شناسی خودپنداره را حائز خصوصیات انگیزشی می‌دانند. آنها عوامل زیادی را در تشکیل خودپنداره مؤثر می‌شمرند که از بین آنها می‌توان عکس‌العمل دیگران، قیاس با دیگران، همانندسازی با الگو، بحران هویت و اجرای نقش را نام برد (به نقل از شاملو، ۱۳۷۲). تحقیقات ثابت کرده است که توصیف دانش آموزان از خود با بالا رفتن سن تغییر می‌یابد. ویگفیلد و کارپاتی‌ین (۱۹۹۱) با مطالعه رشد خودپنداره دریافتند که کسب لیاقت و توقعات دانش آموزان در دوره‌های آغازین ابتدایی از دوره‌های تحصیلی بعدی بیشتر است. کسب لیاقت آنان در دوره‌های آغازین ابتدایی با داوری‌هایشان از لیاقت رابطه‌ای ندارد. خودپنداره به خودپنداره‌ی تحصیلی و غیرتحصیلی تقسیم بندی می‌شود. خودپنداره‌ی تحصیلی به مفاهیمی از خود در زمینه‌ی موضوعی ویژه (مانند ادبیات، ریاضیات، و علوم) دسته‌بندی می‌شود. خودپنداره‌ی غیرتحصیلی نیز شاخه‌های خودپنداره‌ی عاطفی، فیزیکی، و خودپنداره‌ی اجتماعی را در شامل می‌شود. خودپنداره تحصیلی: این روزها یکی از مهمترین مسائلی که دنیا به طور اعم و آموزش و پرورش به طور اخص با آن درگیر است «خود» و بررسی‌های کیفیت «خود» در میان افراد است. نوجوانان در تجربه‌ها و اعمال و رفتار اجتماعی و چگونگی محتوای «خود» تفاوت‌های بسیار زیادی با هم دارند. نوجوانانی که ارزش و منزلت بیشتری نسبت به خودشان احساس می‌کنند در رابطه با دیگران نیز موفق‌ترند. ایفورت (۱۹۸۸)، به نقل از احمدی، (۱۳۷۵) بیان می‌کند وقتی فرد خویش را شخصی توانمند بداند در برابر مشکلات استقامت بیشتری نشان می‌دهد در حالی‌که اگر خود را فردی ناتوان بداند خیلی زود دست از سعی و تلاش برمی‌دارد. چنانچه دانش‌آموزی در وضعیتی قرار گیرد که کاملاً در توصیف خویش، دقیق و آزاد باشد و دست آورد این توصیف، کلماتی همچون «باهوش»، «وظیفه‌شناس»، «پرتلاش‌شناس» و مثل این‌ها باشد، آن‌گاه آنچه بدست آورده‌ایم چکیده خودپنداره او است. خودپنداره تغییرناپذیر و ثابت نیست بلکه با تجربه افراد و تعبیر دیگران از آن تجربه، شکل می‌گیرد. کسب نمره عالی در درس ریاضی «من در درس ریاضی عالی هستم»، گل زدن برای تیم «من یک گل‌زن بارز هستم»، چنانچه در درس املاء شش غلط داشته باشد «من در املاء اوضاع بدی دارم». باورهای هستند که حاصل، تجربه شخص می‌باشند و اساس نگاه او به خودش می‌باشد.

ملاحظه ۹.۱. خودپنداره صرفاً وصف خود نیست. آنچه در نوع تجاربی که افراد خواهند داشت تأثیر می‌گذارد طرز تلقی آنها از خودشان است. برای مثال، عجیب نیست که از دو دانش‌آموز درس هندسه با توانایی مساوی، دانش‌آموزی که معتقد است در «درس ریاضی دانش‌آموز خوبی است»، در زمانهای بیکاری کتاب و مقاله‌هایی درباره ریاضی بخواند، در تیم ریاضی مدرسه شرکت کند و با میل و رغبت تکالیف درس هندسه را انجام دهد و بنابراین عملکرد بهتری داشته باشد و نگرش خود را درباره خود به اثبات برساند. دانش‌آموز دوم که عقیده دارد «در ریاضی دانش‌آموز ضعیفی است»، از مطالعه ریاضی اجتناب ورزد، فعالیت فوق برنامه مربوط به ریاضی نداشته باشد و از انجام دادن تکالیف هندسه تا آخرین لحظه اجتناب می‌کند. به اعتقاد گلاور و برنینگ، این شخص نیز احتمالاً نگرش خود را درباره خویش ثابت می‌کند (گلاور و برنینگ، ترجمه خرازی، ۱۳۷۵). بر طبق ارزیابی‌های روزنبرگ (۱۹۷۹) به نقل از کریم‌زاده، (۱۳۸۰) همچنین می‌توان پیش‌بینی کرد که پیشرفت تحصیلی بر اساس ارزشیابی‌های افراد معتبر مثل معلم، والدین و یا دوستان بر مفهوم خود تحصیلی دانش‌آموز اثر گذار است. همچنین، بر طبق نظریه مقایسه اجتماعی، رفتار مناسب درون یک مجموعه مقایسه اجتماعی، مخصوصاً در فضای کلاس درس بر مفهوم خود تأثیر می‌گذارد. در حالت دوم دلیل پیشرفت تحصیلی خودپنداره محسوب می‌شود. الگو رشد مهارت خودپنداره بر این اساس قرار دارد، طبق این الگو خودپنداره تحصیلی نتیجه پیشرفت تحصیلی است و پیشرفت تحصیلی همچون علت و مشخص‌کننده اصلی خودپنداره تحصیلی به شمار می‌آید. در الگوی خودافزایی خودپنداره، بر دخالت آشکار و ضمنی در برنامه‌های آموزشی برای رشد خودپنداره تصریح می‌شود. زیرا که با بالا رفتن خودپنداره، پیشرفت تحصیلی نیز رشد پیدا می‌کند. به عکس در الگوی افزایش مهارت، بر رشد دادن و افزایش مهارت‌ها در پیشرفت تحصیلی تأکید می‌کند. عوامل مؤثر بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ریاضیات درسی است که در مدارس جایگاه ویژه و اهمیت خاصی دارد. از زمان‌های دور تا امروز نظریه‌پردازان و محققان بسیاری در حیطه یادگیری ریاضی و عوامل مؤثر بر آن، به نظریه پردازی و بررسی پرداخته‌اند بیشتر فعالیت‌های انجام شده در حیطه ریاضی را می‌توان به سه دسته: آموزش کلاسی، پژوهشهای آموزشی و طراحی آموزشی طبقه‌بندی کرد. تمامی افرادی که در این سه

5 Flexibility

6. Wigfield & Karpathian

7. Effert

زمینه فعالیت می‌کنند، دارای آرمان یکسانی هستند و آن آرمان بهبود آموزش و یادگیری ریاضی است. در زمینه آموزش کلاسی معلمان جهت بالا رفتن توان یادگیری دانش‌آموزان، در زمینه تحقیقات آموزشی، پژوهشگران برای درک و فهم بیشتر یادگیری و آموزش ریاضی، و همچنین برنامه ریزان آموزشی برای رشد و پیشرفت مواد آموزشی مناسب کوشش می‌کنند (ماگیدسون، ۲۰۱۵). هر چند پژوهشگران، طراحان آموزشی و معلمان هر کدام مستقل فعالیت می‌کنند، اما هر یک به شدت به دیگری وابسته‌اند.

۹۸

ملاحظه ۱۰.۱. یکی از مباحث مهم در ریاضیات "توانایی حل مساله" است. قلمرو بررسی ریاضیات، همیشه با مفهوم‌سازی حل مساله به شکل یک مشکل مواجه بوده است. کارشناسان متفاوت برای حل مساله، گامهای گوناگونی را بیان کرده‌اند. همچنین پولیا (۲۰۱۶) تمرکز خود را روی چهار گام برای حل مساله قرار می‌دهد. این گامها شامل؛ درک و فهم مساله، طراحی راه‌حل، اجرای راه‌حل و امتحان کردن درستی راه‌حل است. شونفلید (۲۰۱۰) و ورشافل و دیگر (۲۰۰۷) نیز کما بیش به گامهای نظیر گامهای پولیا اشاره کرده‌اند. اصلی‌ترین علت چنین بحثی این است که آزمون‌های پیشرفت تحصیلی دارای گویه‌هایی است که در زمینه حقایق و مفاهیم ویژه ای وجود دارد. برای آن که شاگردان در آن زمینه ویژه بتوانند حل مساله کنند یا به تکالیف جواب بدهند، لازم است فرصت‌های متنوع و مناسب برای یادگرفتن و بکار بردن این حقایق، مفاهیم و روشهای کار کردن را در طول مدت تحصیل تجربه کنند. بدین ترتیب از دید این اندیشمندان مهیا کردن فرصت‌های مطلوب برای یادگیری یکی از شرایط لازم تدریس موفق به شمار می‌رود (جونز و بیرنز، ۲۰۱۶). نکته اصلی در گردآوری روش تحقیق آن است که در این حوزه اصولاً چارچوب ویژه ای (یا گامهای یکسانی) که مورد توافق متخصصان باشد وجود ندارد و حتی در بعضی موارد اختلاف‌نظرهایی هم نمایان است، به طور کلی پژوهشگر روش مطالعه (نوع پژوهش)، جامعه آماری، حجم نمونه و روش نمونه‌گیری، ابزار گردآوری اطلاعات، ویژگی‌های ابزار گردآوری اطلاعات (ساختار پرسشنامه)، روش تجزیه و تحلیل داده‌ها، ابزار مورد استفاده برای تجزیه و تحلیل اطلاعات، روایی و پایایی پرسشنامه، مراحل انجام پژوهش، قلمرو پژوهش و ملاحظات اخلاقی پرداخته است.

۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰

روش پژوهش: شیوه اتخاذ شده در این تحقیق با توجه به معیارهای مختلفی صورت پذیرفته است، این پژوهش بر مبنای معیار ماهیت داده‌ها و اساس تحقیق یک تحقیق توصیفی است زیرا هدف آن توصیف واقعی، عینی و منظم رویدادها، موضوعات و حوادث مختلف است. هم چنین روش پژوهش حاضر همبستگی است. و نیز این پژوهش از نوع پیمایشی می‌باشد. از حیث هدف کلی، پژوهش کاربردی و از حیث محیط پژوهش میدانی با استفاده از تکنیک پرسشنامه، و از لحاظ زمان اجراء نیز از نوع مقطعی است. جامعه آماری این تحقیق همه ی دانش‌آموزان پایه نهم دوره متوسطه اول شهرستان شهرکرد در استان چهارمحال و بختیاری به تعداد ۴۱۰۳ نفر (۱۸۹۴ نفر دانش‌آموز پسر؛ ۲۲۰۹ دانش‌آموز دختر) تشکیل می‌دهند. با توجه به حجم جامعه آماری، حجم نمونه پژوهش حاضر با استفاده از جدول مورگان ۳۵۱ نفر به دست آمد. روش نمونه‌گیری در این تحقیق نمونه‌گیری تصادفی ساده می‌باشد. جمع‌آوری داده‌ها در این پژوهش از دو روش بدست آمده است: الف) روش کتابخانه‌ای (ب) روش میدانی مهم‌ترین ابزار جمع‌آوری اطلاعات در این تحقیق عبارتند از: ۱- پرسشنامه ذهنیت فلسفی سلطانی (۱۳۷۵) ۲- پرسشنامه خودپنداره تحصیلی یس سین چن (۲۰۰۴) ۳- عملکرد ریاضی ملاک اندازه‌گیری عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در پژوهش حاضر، نمره نهایی کسب شده ریاضی سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ می‌باشد. یافته‌ها: فرضیه اصلی به دو قسمت تقسیم می‌شود و بررسی می‌شود: فرضیه اصلی الف): ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان متوسطه اول پایه نهم شهرستان شهرکرد در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳، تاثیر معنادار دارند. نتایج یافته‌ها نشان داد که در بررسی تاثیر ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان همبستگی بین متغیرهای مستقل (ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی) و متغیر وابسته (عملکرد ریاضی دانش‌آموزان) برابر با ۰/۸۳۴ است. ضریب تعیین ۰/۶۹۶ بدست آمده و این مقدار نشان می‌دهد که ۷۰ درصد از تغییرات عملکرد ریاضی دانش‌آموزان به ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی مربوط می‌شود. چون این مقدار درجه آزادی را در نظر نمی‌گیرد لذا از ضریب تعیین تعدیل شده برای این منظور استفاده می‌شود که آن هم در این آزمون برابر با ۶۹ درصد بوده است. معادله رگرسیونی را می‌توان با استفاده از ستون ضرایب استاندارد نشده به شرح زیر محاسبه کرد: $عملکرد ریاضی = ۱۴۹.۷ + (۱۲۰.۰) \times \text{ذهنیت فلسفی} + (۲۲۷.۰) \times \text{رضایت درونی} + (-۷۸۴.۰) \times \text{خود پنداره تحصیلی}$ با توجه به اینکه سطح معنی داری مربوط به آزمون t مربوط به ضرایب رگرسیون برای متغیرهای ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی برابر با ۰/۱۳ و ۰/۰۱ که از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر بوده، در نتیجه در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان موثر است. می‌توان گفت با ارتقاء یک واحد از هر متغیر مستقل به میزان ضریب نوشته شده متغیر وابسته ارتقاء پیدا خواهد کرد. یا به عبارتی با ارتقای یک واحد ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی، ۰/۱۲

8 . Rosenberg

9 . Magidson

10 . Problem Posing Capacity

11 . Polya

12 . Schoenfeld

13 . Verschaffel & De Corte

14 . Elements

15 . Jones & Byrnes

و ۲۲۷/۰ واحد انحراف معیار عملکرد ریاضی دانش آموزان ارتقاء پیدا خواهد کرد، در نتیجه ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد تحصیلی تأثیر مثبت داشته‌اند. پس ذهنیت فلسفی و خودپنداره تحصیلی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان متوسطه اول پایه نهم تأثیرگذار است که این هم بر شیوه تفسیر آنها از یادگیری شاگردان مؤثر است که به سهم خویش باعث پیشرفت کارکرد تحصیلی دانش‌آموزان می‌شود. فرضیه اصلی: ب) خودپنداره تحصیلی عمومی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان متوسطه اول پایه نهم شهرستان شهرکرد در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲، تأثیر معنادار دارد. ۱۶ در بررسی تأثیر خودپنداره تحصیلی عمومی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان همبستگی بین متغیرهای مستقل (خودپنداره تحصیلی عمومی) و متغیر وابسته (عملکرد ریاضی دانش‌آموزان) برابر با ۰/۷۷۱ است. ضریب تعیین ۰/۵۹۵ بدست آمده و این مقدار نشان می‌دهد که ۶۰ درصد از تغییرات عملکرد ریاضی دانش‌آموزان به خودپنداره تحصیلی عمومی مربوط می‌شود. چون این مقدار درجه آزادی را در نظر نمی‌گیرد لذا از ضریب تعیین تعدیل شده برای این منظور استفاده می‌شود که آن هم در این آزمون برابر با ۰/۵۹ درصد بوده است. معادله رگرسیونی را می‌توان با استفاده از ستون ضرایب استاندارد نشده به شرح زیر محاسبه کرد: $عملکرد ریاضی = ۹۶۶.۷ + (۰.۷۶۰۰) \times خودپنداره تحصیلی عمومی$ با توجه به اینکه سطح معنی داری مربوط به آزمون t مربوط به ضرایب رگرسیون برای متغیرهای خودپنداره تحصیلی عمومی برابر با ۰/۰۰۰ که از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر بوده، در نتیجه در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان مؤثر است. می‌توان گفت با ارتقاء یک واحد از هر متغیر مستقل به میزان ضریب نوشته شده متغیر وابسته ارتقاء پیدا خواهد کرد. یا به عبارتی با ارتقای یک واحد خودپنداره تحصیلی عمومی، ۰/۳۷۶ واحد انحراف معیار عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ارتقاء پیدا خواهد کرد، در نتیجه خودپنداره تحصیلی عمومی بر عملکرد تحصیلی تأثیر مثبت داشته است. در تبیین این نتیجه می‌توان اینطور بیان کرد که افرادی که در انجام فعالیت‌های تحصیلی، خود را مطمئن‌تر و توانمندتر می‌دانند، در مقایسه با دیگران خودپنداره تحصیلی بسیار مؤثرتری را رشد می‌دهند و بر این اساس چنین خودپنداره‌ای موجب رشد و پیشرفت تحصیلی فرد می‌شود. موفقیت‌های بیشتر به مرور این احساس را در دانش‌آموز -آموز بوجود می‌آورد که مدرسه مکان مناسبی برای پیشرفت اوست؛ بنابراین انجام فعالیت‌های تحصیلی خود و مشارکت در امور درسی در وجود او زنده می‌شود. این تمایل در بلندمدت باعث رشد بیشتر خودپنداره تحصیلی وی شده و موفقیت‌های بیشتری بدست می‌آورد. پیشنهاد می‌شود، ذهنیت فلسفی و خودپنداره و عملکرد ریاضی در کلاس‌های ریاضی مقاطع دیگر انجام و تحلیل شود. این تحقیق محدود به دختران و پسران پایه نهم متوسطه شهرستان شهرکرد در استان چهارمحال و بختیاری بود. مبحث ریاضی محدود به چند مبحث از کتاب ریاضی پایه نهم متوسطه بود. این تحقیق به سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ محدود بوده است.

مراجع

- [1] and Byrnes J. P. Characteristics of students who benefit from high-quality mathematics instruction. *Contemporary Educational Psychology*, pages 328–343, 2016. 31.
- [2] Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. 2007.
- [3] Polya. G. *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. Moscow: Nauka (Russian translation edited by I. Yaglom), 2016.
- [4] Smith. Ph.G. *Philosophic-mindedness in educational and school management*. Translated by M.R. Behrangi, 5th Publication. Tehran: Kamal-e-Tarbiat, 2013.
- [5] Magidson. S. *Building bridges within mathematics ducation: Teaching, research, and instructional design*. Journal of Mathematical Behavior, 2015. 24.
- [6] Magidson. S. *system (CLASS)*. Journal of Mathematical Behavior, 2015. 24.
- [7] Verschaffel.L and De Corte. E. *Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes & P.* 2007.
- [8] H. J Walberg. *Improving the productivity of American schools*. *Educational Leadership*. number 41. 2014.
- [9] A Wigfield and M Karpeathian. *Who am I and What I do children's self-concept and motivation in achievement situations*. *Educational psychologist*. number 26. 1991.
- [10] Marilyn S Thompson Yi-Hsin Chen. *Confirmatory Factor Analysis of a School Self-Concept Inventory*, *Journal Online Submission*. 2004.
- [11] الف احمدی. روانشناسی نوجوانان و جوانان. ترمه، تهران، ویرایش ۳، ۱۳۷۵.
- [12] ذ.عباسپور، الف. کرابی، و ر.کوچکی. تأثیر برنامه موفقیت تحصیلی بر عملکرد و خودپنداره تحصیلی، نگرش نسبت به مدرسه، یادگیری شیوه موفقیت در مدرسه و سازگاری اجتماعی دانش‌آموزان. *مجله روانشناسی مدرسه (دانشگاه محقق اردبیلی)*، صفحات ۲۷-۴۵، ۱۳۹۱.
- [13] ر.ابوترابی و ط. جاویدی کلاته جعفرآبادی. ذهنیت فلسفی و سبک رهبری مدیران دانشگاه فردوسی مشهد، مطالعات تربیتی و روانشناسی. ترمه، تهران، ویرایش ۳، ۱۳۸۹.
- [14] م.کریم زاده. بررسی رابطه مفهوم خود (تحصیلی و غیرتحصیلی) و خودکارآمدی با پیشرفت تحصیلی در دانش‌آموزان دختر شهر تهران. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه تهران، ۱۳۸۰.
- [15] س.شاملو. مکتب‌ها و نظریه‌ها در روانشناسی شخصیت. رشد، تهران، ۱۳۷۲.
- [16] الف. سلطانی. سنجش ذهنیت فلسفی مدیران. *مجله تدبیر*، صفحات ۱۶-۱۹، ۱۳۹۱. ۶۲.
- [17] ع.شریعتمداری. کتاب اصول و فلسفه تعلیم و تربیت. شرکت چاپ و نشر بین الملل (وابسته به سازمان تبلیغات اسلامی)، ۱۴۰۱.
- [18] ف.عشورنژاد. بررسی روابط ساختاری خودپنداره یادگیری خودتنظیمی و موفقیت تحصیلی دانشجویان دانشگاه شهید بهشتی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، رشته روانشناسی تربیتی، دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی. دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۷.
- [19] ح. مقامی و ف.قنادی. بررسی رابطه خودپنداره‌ی تحصیلی با عملکرد ریاضی در دوره‌ی راهنمایی. پژوهش در نظام‌های آموزشی، صفحات ۱۴۳-۱۶۱، ۱۳۹۱. ۲۰.
- [20] م.مختاری پور. بررسی رابطه بین هوش هیجانی و تئوری‌های رهبری، پژوهشنامه علوم انسانی و اجتماعی. دانشگاه تهران، ۱۳۸۵. ۲۱.

^{۱۶} این نوع پژوهش برای مطالعه میزان تغییرات در یک یا چند عامل در اثر تغییرات یک یا چند عامل دیگر بکار می‌رود. در این نوع پژوهش درجات همبستگی و روابط بین متغیرها بررسی می‌گردد. هدف این نوع پژوهش آن است که مشخص سازیم که متغیرها با یکدیگر به‌طور نسبی در جهت مثبت یا منفی همگام هستند.



ایجاد تفکر فراشناخت در درس ریاضی از طریق آموزش حل مسایل برای دانش آموزان متوسطه دوم

جعفر اوجبگ*

آموزش و پرورش استان آذربایجان غربی - شاهین دژ

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: فراشناخت راهبردهای حل مسئله آموزش ریاضی	مهمترین هنر معلم در کلاس درس ریاضی، شناسایی توانایی‌های دانش آموز در برخورد با حل مسئله است. چنانچه دانش آموز، آگاهانه و هدفمند، وارد فرایند حل مسئله شود، نوعی تفکر فراشناختی ایجاد می‌شود. دانش آموزی که تفکر فراشناختی دارد به گفته‌های معلم در کلاس درس و حتی نوشته‌های کتاب درسی اعتماد نمی‌کند و درستی آن‌ها را آزمایش می‌نماید. در این مقاله به ارائه راهکارهای عملی جهت ایجاد تفکر فراشناخت در دانش آموزان دبیرستان با ارائه روشی برای آموزش حل مسایل ریاضی همراه با مثالهایی از دوره دوم متوسطه نظری می‌پردازیم.
97B10 97B50	2020 MSC:

۱. مقدمه

فعالان حوزه آموزش تا چند دهه اخیر معتقد بودند که حل مسئله آموزش دادنی نیست، بلکه یک هنر یا ویژگی و توانایی است که بعضی از انسان‌ها دارند و بعضی ندارند. بنابراین تلاشی برای آموزش حل مسئله به دانش آموزان صورت نمی‌گرفت. در سالهای اخیر، تعداد کسانی که در مورد آموزش حل مسئله تحقیق می‌کنند بیشتر شده است. یکی از کسانی که در این زمینه مطالعات زیادی انجام داده است جورج پولیا است. پولیا تلاش کرد تفکر حل مسئله را به نوعی مدل‌سازی کند. در ایران نیز فعالان و پژوهشگران حوزه آموزش تلاش گسترده‌ای را برای این مهم آغاز کرده‌اند. این تلاشها بصورت مقالات علمی پژوهشی و سیاستگذاری‌های آموزشی در حال انجام است. ایجاد خانه‌های ریاضیات و اتاقهای تفکر ریاضی در مدارس و پژوهشسراهای دانش آموزی از عمده تلاشهایی است که سبب شده تا فرایند تقویت تفکر حل مسئله به صورت جدی مورد توجه قرار گیرد. اگر چه در کتابهای تالیف شده جدید مقطع متوسطه نیز فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی که نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش آموزان دارد، گنجانده شده‌اند، اما به عقیده صاحب نظران این حوزه، هنوز تا وضعیت مطلوب فاصله داریم.

مهارت‌های حل مسئله علاوه بر ایجاد اعتماد به نفس و عزت نفس در دانش آموز، باعث ارتقای سطح تفکر و ارتقای توانایی توسعه مطالب در سایر علوم خواهد شد. لذا از نظام آموزشی انتظار می‌رود به جای انتقال صرف اطلاعات به دانش آموزان، موقعیتهای مناسبی برای پرورش تفکر و توسعه توانایی استدلال منطقی آنها فراهم سازد. در اغلب نظام‌های آموزشی دنیا تاکید ویژه‌ای بر ریاضی به عنوان کلید توسعه جامعه وجود دارد. آموزش حل مسئله به معنای آموزش روشهایی است که منجر به ایجاد مهارت حل مسئله ریاضی در دانش آموز می‌گردد. این مهارتها می‌تواند الگوهای منظم از پیش تعیین شده یا الگوهای قابل توسعه باشد. گانیه معتقد است حل مسئله تنها به کارگیری قاعده‌ها، تکنیکها، مهارتها و مفاهیم

* سخنران

پست الکترونیک: jafar.ojbag@gmail.com (جعفر اوجبگ)

یادگرفته شده قبلی دانش و تجربه فرد در یک موقعیت جدید نیست، بلکه فرایندی است که موجب یادگیری جدید نیز می‌شود. از عمده دلایل ناتوانی دانش‌آموزان در حل مسئله ریاضی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- فقدان طراحی آموزشی برای یاد دادن مهارت حل مسئله

- فضای امتحان زده حاکم بر محیط‌های آموزشی و تکرار فعالیت‌های مکانیکی

- نداشتن درک عمیق نسبت به مفاهیم ریاضی

- متناسب نبودن حجم مطالب آموزشی با زمان آموزش

- بدفهمی‌های ریاضی

- آثار مخرب روش‌های کنکوری و تستی

در بیشتر موارد جهت آموزش ریاضی، تنها قواعد و فرمول‌های ریاضی درس داده می‌شود. دانش‌آموزان درک درستی از ریاضیات ندارند و ریاضیات را مجموعه‌ای از فرمولها و رابطه‌های بی‌معنی می‌پندارند.

شناخت به فعالیتهای درونی ذهنی یا راههایی که در آنها اطلاعات پردازش می‌شوند، گفته می‌شود؛ یعنی راههایی که ما توسط آنها به اطلاعات توجه می‌کنیم، آنها را تشخیص می‌دهیم و به رمز در می‌آوریم و در حافظه ذخیره می‌کنیم و به هنگام نیاز، با فراخوانی آنها را مورد استفاده قرار می‌دهیم. فراشناخت به دانش و آگاهی ما درباره فرایندهای شناختی خودمان و چگونگی استفاده بهینه از آنها برای رسیدن به هدفهای یادگیری گفته می‌شود (بایلر و اسنومن، ۱۹۹۳).

براساس نظر توبیاس واورسون، (به نقل از زارع و احمد آبادی، ۱۳۹۰) تفاوت میان دانش‌آموزان ضعیف یا قوی در میزان دانش فراشناختی آنها است.

۲. روشی عملی برای آموزش حل مسئله

دانش‌آموزان قبل از آگاهی از حقایق مرتبط، مسائل مشابه یا نظریه‌های مربوط، دوست دارند شروع به حل مسئله کنند و اغلب تمایل دارند مسئله را با همان سرعتی که می‌خوانند، حل کنند. حل مسئله برای دانش‌آموز جذاب و لذت بخش خواهد بود، اگر بتواند ارتباط بین مفاهیم را با حل مسئله برقرار کند و یا مفاهیم را با اطلاعات به روزتر بیان نماید. برای شروع آموزش روش حل مسئله به دانش‌آموز باید ابتدا تمام دانش مورد نیاز برای فهم مسئله، ابزارهای لازم برای حل مسئله به صورت واضح در اختیار دانش‌آموز قرار داده شود. بهتر است یک سوم تخته سیاه (وایتبرد) به نوشتن دانش مورد نیاز و ابزارهای لازم برای مسئله‌ای که از قبل طراحی شده اختصاص یابد و مسئله و حل آن در دو سوم باقیمانده صورت پذیرد، به طوریکه دانش‌آموز به کل مطالب گفته شده دسترسی داشته باشد. در ابتدا لازم است مسئله‌هایی مطرح شود که با دانش کم و ابزارهایی که دانش‌آموز عمیقاً درک کرده است، قابل حل باشند.

در جریان حل مسئله به این روش باید موارد زیر را در نظر داشته باشیم:

ایده‌های اصلی برای حل یک مسئله معین را طرح و دانش‌آموز را از خیره شدن بدون تفکر به مسئله بازداریم. ایده حل مسئله را به کمک اطلاعات موجود در خود مسئله ایجاد کنیم و این مطلب را عملاً به دانش‌آموز نشان دهیم که هر مسئله حاوی اطلاعاتی است که اغلب به صورت معماگونه و زیرکانه در دل صورت مسئله پنهان شده است. خطاپذیری یکی از ویژگی‌های است که باید مورد توجه قرار گیرد؛ زیرا می‌تواند باعث پیشروی شود. در آموزش حل مسئله ریاضی باید شرایط و بستری فراهم شود تا یادگیری معنادار از طریق برقراری ارتباطات و اتصالات بین مفاهیم و روش‌ها ایجاد شود.

در طرح مسئله نیز باید موارد زیر را به دقت مورد توجه قرار دهیم:

- مسئله باید در زمان مناسب خود مطرح شود.

- از جذابیت کافی برخوردار باشد (در عین سادگی، حل آن تحسین برانگیز باشد)

- راه حل طولانی نداشته باشد ولی به دفعات لازم قابل تکرار باشد.

- در امتداد تدریس کلاسی باشد.

- بتوان مشابه آن مسئله را برای کار در منزل در اختیار دانش‌آموز قرار داد.

- فرآیند حل مسئله برای مسایل مشابه قابل اجرا باشد.

در ادامه به بیان چهار گام اصلی برای اجرای روش آموزش حل مسئله می‌پردازیم:

۱. یافتن سرنخ حل مسئله: فقط به قسمتی از مسئله (کلمه یا عبارات) که برایمان قابل درک است نگاه می‌کنیم و مابقی را موقتاً نادیده می‌گیریم. تمام اطلاعاتی را که به یاد می‌آوریم به طور کوتاه و خلاصه یادداشت می‌کنیم.
۲. بازنویسی مسئله: بازنویسی مسئله با اطلاعاتی که از سرنخ مسئله به دست آورده‌ایم. نگاهی به کل مسئله بیندازید و جاهایی که باید را با اطلاعات مفید و سازگار بازنویسی کنید.
۳. تکمیل اطلاعات: برای تکمیل اطلاعات و حل مسئله (تفکر و عمل همزمان، توصیف کوتاه) افکار توصیفی را یادداشت کنید. در صورت لزوم نمودار بکشید. از علائم ساده استفاده کنید. (نوشتن همراه با تفکر به تولید ایده منجر خواهد شد).
۴. ساده‌سازی و استخراج راه حل: در این مرحله تا حد امکان روابط استخراج شده را ساده کنید تا به جواب مورد نظر برسید.

شکل ۱: نمونه حل مسئله

در پایان لازم است دانش آموزان را ترغیب کنیم که در تهیه مسایل جدید مشابه با مسایل حل شده با الگویی روشن برای حل آنها با ما همکاری کنند. همچنین در جلسات فرصت کار گروهی را به شکل منظم و از قبل هماهنگ شده در اختیار دانش آموزان قرار دهیم تا بتوانند تبادل نظر داشته باشند. مسائل باید هم به کاربرد ریاضیات در موقعیت‌های روزمره در تجربه دانش آموزان و هم به موقعیت‌هایی که ناآشنا هستند مربوط باشد.

مراجع

- [۱] حسین زارع، و ناصر محمدی احمدآبادی، "تاثیر آموزش فراشناخت در حل مسایل ریاضی دانش آموزان"، رهیافتی نو در مدیریت آموزشی، دوره ۲، شماره ۳ (پیاپی ۷)، ۱۳۹۰، ۱۶۱-۱۷۵.
 - [۲] زهرا گویا، "میزگرد آموزش معلمان ریاضی و اهمیت آن"، رشد آموزش ریاضی، دوره -، شماره ۶۹، ۴۵-۶۱، ۱۳۸۱.
 - [۳] نرگس حسن مرادی، عباسعلی قیومی، و ناهید سادات‌نیا. "تاثیر کارگروهی بر یادگیری ریاضی دانش آموزان دوره اول متوسطه"، پژوهش در آموزش ریاضی، دوره ۱، شماره ۱، ۱۳۹۹، ۱۵-۲۸.
 - [۴] سبیده نوروزی، و عظیمه سادات خاکباز، "بررسی تاریخیچه تحولات برنامه درسی ریاضی متوسطه در ایران"، ارایه شده در همایش ملی انجمن مطالعات درسی ایران (تغییر در برنامه درسی دوره های تحصیلی آموزش و پرورش). ۱۳۹۲.
 - [۵] مهدی نجفی خواه، نرگس یافتیان، و شهرناز بخشعلی زاده، "دورنمایی از خلاقیت در فرآیند آموزش ریاضی"، فناوری آموزش (فناوری و آموزش)، دوره ۵، شماره ۴، ۲۶۴-۲۵۱، ۱۳۹۰.
- [6] Biehler, R., & Snowman, J. (1993). *Psychology applied to teaching*. Houghton Mifflin.



بررسی تأثیر آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری خودراهبر و مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان با استفاده از آزمون لون و کوواریانس چندمتغیری

فاطمه خیاط‌عبائی*، آ. اکبر رضایی ب، سمیه برهانی‌نژاد رایینی ج

آ دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران
ب دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران
ج استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران

چکیده

هدف تحقیق حاضر تعیین اثربخشی الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی پایه هفتم است. تحقیق حاضر از نوع نیمه آزمایشی بوده است. جامعه آماری این مطالعه کلیه دانش‌آموزان دختر پایه هفتم شهر اربیل است. با استفاده از نمونه‌گیری در دسترس از بین مدارس دخترانه متوسطه اول شهر اربیل، مدرسه ایرانیان اربیل انتخاب و دو کلاس به‌عنوان نمونه به‌طور تصادفی انتخاب و آزمون‌ها/پرسشنامه بر روی نمونه‌ها پیاده‌سازی می‌شود. حجم نمونه موردنظر برای این پژوهش، ۳۰ دانش‌آموز دختر پایه هفتم است. جهت جمع‌آوری اطلاعات از پرسشنامه یادگیری خودراهبر توسط فیشر و همکاران (۲۰۰۱) و آزمون ریاضی استفاده شده است. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات و برای تأیید یا رد فرضیه‌ها از آزمون کوواریانس چندمتغیری استفاده شده است. یافته‌ها نشان داد که الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی پایه هفتم اثرگذار است.

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله
یادگیری خودراهبر
یادگیری مفاهیم ریاضی

2020 MSC:

34B16
34B40
65M70

۱. مقدمه

پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان یکی از شاخصه‌های مهم در ارزیابی آموزش و پرورش است و تمام کوشش‌های این نظام برای جامه عمل پوشاندن به این امر است که با نگاهی دقیق‌تر به عوامل مؤثر بر پیشرفت تحصیلی پی‌می‌بریم که عوامل مختلفی بر پیشرفت تحصیلی تأثیر دارند ([۲]). مفهوم یادگیری، کسب دانش و اطلاعات، عادت‌های مختلف، مهارت‌های متنوع و راه‌های گوناگون حل کردن مسئله است. هم‌چنین، می‌توان یادگیری را به‌عنوان فراگیری رفتارها و اعمال پسندیده، حتی به‌عنوان کسب رفتارها و اعمال مضر و ناپسند تعریف کرد. با این حال، معروف‌ترین تعریف از یادگیری به این قرار است: یادگیری، به فرآیند ایجاد تغییرات نسبتاً پایدار در رفتاری که حاصل تجربه است، گفته می‌شود ([۱]). یکی از مفاهیم مهم در یادگیری، مفهوم یادگیری خودراهبر است که در چند دهه اخیر، به یکی از اهداف اصلی آموزش و پرورش مبدل شده است. تئوری یادگیری خودراهبر به‌طور روزافزون در زمینه آموزش و پرورش به کار گرفته می‌شود ([۴]). یادگیری خودراهبر به‌عنوان فرآیندی است که در آن یادگیرندگان مسئولیت شناسایی نیازهای آموزشی خود، برنامه‌ریزی، اجرا و ارزشیابی نتایج یادگیری خود را بر عهده داشته و یادگیرندگان با ابتکار و به‌طور مستقل از دیگران به‌منظور نیل به اهداف یادگیری از قبل تعیین‌شده تلاش و فعالیت می‌کنند ([۶]). یادگیری خودراهبر به‌عنوان یک شیوه آموزشی مستقل و مادام‌العمر پیش‌بینی‌کننده مؤثری برای عملکرد آموزشی یادگیرندگان است و نقش مهمی در موفقیت تحصیلی آنان دارد ([۷]).

*سخنران

پست الکترونیک: fatemeh.Khayatabaei@gmail.com (فاطمه خیاط‌عبائی)، rezaei@pnu.ac.ir (اکبر رضایی ب)، borhani@pnu.ac.ir (سمیه برهانی‌نژاد رایینی ج)

همه‌گیری ویروس کرونا که سراسر جهان را فراگرفت، همه بخش‌های اجتماعی و به‌طور خاص‌تر، بخش مدارس و دانشگاه‌ها را تحت تأثیر قرار داد. از آنجایی‌که این بخش‌ها، بخش بزرگی از جامعه را تحت تأثیر قرار می‌دهند، تأثیر آموزش از راه دور بر مهارت‌های یادگیری خودراهبری و انگیزه دانش‌آموزان در طول همه‌گیری بررسی شد. یافته‌ها نشان داد که این عوامل به‌طور مثبت تحت تأثیر استفاده از روش‌های یادگیری از راه دور در طول قرنطینه همه‌گیر قرار گرفتند ([۳]). در آموزش مجازی فراگیر از طریق وب فعالیت‌های آموزشی را انجام می‌دهد. به‌عبارت‌دیگر، آموزش مجازی تلاشی برای تکمیل برنامه آموزشی در سیستم‌های آموزش سنتی است که در آن از امکانات بالقوه و گسترده اینترنت استفاده می‌شود. هدف این برنامه، فراهم نمودن اطلاعات برابر برای تمام فراگیران، صرف‌نظر از موقعیت جغرافیایی، اجتماعی و اقتصادی آن‌هاست ([۵]). با توجه به لزوم استفاده از آموزش مجازی در شرایط بحرانی و از طرفی ارتقای کیفیت یادگیری نسبت به آموزش حضوری، سعی بر این است که مهارت‌های حل مسئله در تدریس ریاضی به شیوه مجازی پیاده‌سازی شود. لذا سؤال اصلی پژوهش که باید بدان پاسخ دهیم بدین صورت است: آیا الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی پایه هفتم اثرگذار است؟

۲. روش پژوهش

روش پژوهش از جهت هدف، کاربردی و از نظر روش گردآوری داده‌ها، نیمه آزمایشی می‌باشد. در این پژوهش که برای پژوهشگر فرصت و ظرفیتی لازم برای کنترل یا تغییر و تعدیل کامل متغیر یا متغیرهای اثرگذار وجود ندارد، لذا ما تلاش می‌کنیم تا با کشف متغیرها و چالش‌ها و ارتقای آگاهی‌های لازم، روش خود را در اجرای پژوهش به روش آزمایشی نزدیک کنیم؛ بنابراین برای بررسی و مطالعه موقعیت پژوهش، از روشی به نام «روش پژوهش نیمه آزمایشی» استفاده می‌شود. با توجه به تعاریف موردنظر در علم آمار و روش‌شناسی، متغیر وابسته در پژوهش، یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان است و متغیر مستقل، آموزش ریاضی به‌صورت مجازی مبتنی بر حل مسئله است. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از دو بخش آمار توصیفی و استنباطی استفاده می‌شود. در آمار توصیفی، به محاسبه شاخص‌های مرکزی، پراکندگی داده‌ها پرداخته و در بخش آمار استنباطی با استفاده از آزمون‌های آماری مناسب (همچون کوواریانس)، به بررسی و نتیجه‌گیری در مورد فرضیات مطرح‌شده در این مقاله می‌پردازیم. این کار با استفاده از نرم‌افزارهای آماری SPSS نسخه ۲۶ انجام می‌گردد.

۳. یافته‌ها

تحلیل‌های آماری انجام شامل «تحلیل توصیفی» و «تحلیل استنباطی» می‌باشد که به ترتیب تشریح خواهند شد.

۱.۳. یافته‌های توصیفی:

میانگین و انحراف معیار نمره یادگیری خودراهبر و مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان دو گروه در قبل و بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله به ترتیب در جدول ۱ و ۲ آمده است.

جدول ۱: میانگین و انحراف معیار نمره یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان دو گروه در قبل و بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله

متغیر مرحله	گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار
یادگیری خودراهبر	پیش‌آزمون	۱۵	۴۶۷/۱۲۵	۸۳۳/۶
	آزمایش	۱۵	۴/۱۲۳	۱۶۹/۷
یادگیری خودراهبر	پس‌آزمون	۱۵	۶/۱۲۳	۴۰۵/۷
	آزمایش	۱۵	۴/۱۶۵	۹۳۵/۸

جدول ۲: میانگین و انحراف معیار نمره یادگیری مفاهیم ریاضی دو گروه در قبل و بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله

متغیر مرحله	گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار
یادگیری مفاهیم ریاضی	پیش‌آزمون	۱۵	۱۳۳/۱۳	۱۲۵/۱
	آزمایش	۱۵	۶۶۷/۱۲	۲۳۴/۱
یادگیری مفاهیم ریاضی	پس‌آزمون	۱۵	۳۳۳/۱۲	۲۳۴/۱
	آزمایش	۱۵	۸۶۷/۱۷	۱۲۵/۱

۲.۳. یافته‌های استنباطی

برای استفاده از تکنیک‌های آماری ابتدا باید مشخص شود که داده‌های جمع‌آوری شده از توزیع نرمال برخوردار است یا غیر نرمال. چون در صورت نرمال بودن توزیع داده‌های جمع‌آوری شده برای آزمون فرضیه‌ها می‌توان از آزمون‌های پارامتریک استفاده نمود و در صورت غیر نرمال بودن از آزمون‌های ناپارامتریک. بدین منظور در این مرحله به بررسی نتایج حاصل از آزمون شاپیرو-ویلک در مورد هر یک از متغیرهای وابسته و مستقل می‌پردازیم و بر اساس نتایج حاصل، آزمون‌های مناسب برای بررسی صحت و سقم فرضیات تحقیق را انتخاب می‌کنیم. با توجه به نتایج جدول ۳ اگر مقدار سطح معنی‌داری بزرگتر از مقدار خطا باشد، فرضیه صفر را نتیجه می‌گیریم و در صورتی که مقدار سطح معنی‌داری از مقدار خطا کوچکتر باشد، فرضیه یک را نتیجه می‌گیریم. با توجه به نتایج جدول چون مقدار سطح معنی‌داری برای تمامی مؤلفه‌ها بزرگ‌تر از مقدار خطای

جدول ۳: میانگین و انحراف معیار نمره یادگیری مفاهیم ریاضی دو گروه در قبل و بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله

مرحله	متغیر	آزمون شاپیرو-ویلک	
		آماره	درجه آزادی
پیش آزمون	یادگیری خودراهبر	۹۹۶/۰	۳۰
	یادگیری مفاهیم ریاضی	۹۲۴/۰	۳۰
پس آزمون	یادگیری خودراهبر	۸۳۲/۰	۳۰
	یادگیری مفاهیم ریاضی	۹۰۲/۰	۳۰

۰/۰۵ است در نتیجه برای این متغیرها توزیع نرمال را پذیرفته و جهت آزمون فرضیات از آزمون‌های پارامتریک استفاده می‌شود.

۴. آزمون فرضیات پژوهش

– فرضیه اول: الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله در یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی پایه هفتم اثرگذار است. به منظور بررسی این فرضیه ابتدا از تحلیل کوواریانس چند متغیری برای بررسی معنی‌داری تفاوت‌های دو گروه در میزان یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی استفاده شد، نتایج در جدول ۴ آمده است. نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که با کنترل قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی

جدول ۴: نتایج تحلیل کوواریانس چند متغیری برای بررسی معنی‌داری تفاوت‌های دو گروه در میزان یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی

نام آزمون شاخص‌ها	مقدار	F	DF فرضیه	DF خطا	سطح معنی‌داری	مجدور اتا	توان آماری DF
آزمون اثر پیلاپی	۳۸/۰	۱۵۶/۱۷	۲	۵۶	۰۰۱/۰	۳۸/۰	۱
آزمون لامبدای ویلکز	۶۲/۰	۱۵۶/۱۷	۲	۵۶	۰۰۱/۰	۳۸/۰	۱
آزمون اثر هتلینگ	۶۱۳/۰	۱۵۶/۱۷	۲	۵۶	۰۰۱/۰	۳۸/۰	۱
آزمون بزرگ‌ترین ریشه روی	۶۱۳/۰	۱۵۶/۱۷	۲	۵۶	۰۰۱/۰	۳۸/۰	۱

بر حل مسأله، سطوح معنی‌داری همه آزمون‌ها، بین دانش‌آموزان گروه‌های آزمایش و کنترل حداقل از لحاظ یکی از متغیرهای یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی تفاوت معنی‌داری مشاهده می‌شود. میزان تأثیر برابر با ۳۸/۰ می‌باشد، یعنی ۳۸ درصد تفاوت‌های فردی در نمره‌های بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله در یادگیری خودراهبر و یادگیری مفاهیم ریاضی مربوط به تأثیر الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله می‌باشد. توان آماری برابر با ۱ است، یعنی امکان خطای نوع دوم وجود نداشته است. برای پی بردن به این‌که در کدام متغیر بین دو گروه تفاوت وجود دارد، دو تحلیل کوواریانس یک متغیری مانکوا انجام شد که نتایج آن در ادامه آمده است.

– فرضیه دوم: الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله در یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان دختر پایه هفتم شهر اربیل اثرگذار است. به منظور بررسی این فرضیه ابتدا برای رعایت پیش فرض تساوی واریانس‌ها و ماتریس کوواریانس‌های یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان در دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله، از آزمون لون و تحلیل واریانس یک راهه استفاده شد. نتایج در جداول ۵ و ۶ آمده است.

همان‌گونه که در جدول ۵ ملاحظه می‌شود، فرض صفر برای تساوی واریانس دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله، برای میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان تأیید می‌گردد. یعنی فرض تساوی واریانس‌های نمره‌های میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان، در دو گروه آزمایش و کنترل در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله تأیید گردید. این یافته نشان می‌دهد که در تحلیل واریانس‌های دو گروه در بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسأله، به دلیل همگنی واریانس‌های گروه‌ها در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی

جدول ۵: نتایج آزمون لون در مورد فرض تساوی واریانس‌های دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان

مرحله	متغیرها	آماره لون	درجه آزادی اول	درجه آزادی دوم	سطح معنی‌داری
پیش‌آزمون	یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان	۰۶۲/۰	۱	۲۸	۸۰۵/۰

جدول ۶: نتایج تحلیل واریانس یک راه در مورد فرض تساوی واریانس‌های قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در دو گروه در میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان

مرحله	متغیرها	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی‌داری
پیش‌آزمون	یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان	۰۳۳/۳۲	۱	۰۳۳/۳۲	۶۵۳/۰	۴۲۶/۰

بر حل مسئله، این تأثیرات متغیر مستقل (الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله) خواهد بود که در تفاوت احتمالی نمرات دو گروه، نقش خواهد داشت. همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده می‌شود قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله دو گروه در میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان، در گروه کنترل و آزمایش تفاوت معناداری با یکدیگر ندارد و این یافته نشان می‌دهد که فرض تساوی واریانس‌های نمره‌های میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان، در دو گروه آزمایش و کنترل در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله برقرار است. پس از بررسی فرض همگنی واریانس‌ها و کوواریانس‌های دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، به‌منظور بررسی فرضیه اصلی پژوهش از تحلیل کوواریانس برای بررسی معنی‌داری تفاوت‌های دو گروه در میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان، استفاده شد و نتایج در جدول ۷ آمده است.

جدول ۷: نتایج تحلیل کوواریانس یک راه روی میانگین نمرات میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله دو گروه با کنترل قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله

متغیر	منبع تغییرات	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی‌داری	مجذورات	توان آماری
یادگیری خودراهبر	مرحله	۰۶۷/۶۰۴۰	۱	۰۶۷/۶۰۴۰	۸۶۸/۳۲	۰۰۱/۰	۳۶۶/۰	۱
دانش‌آموزان	گروه	۲۶۷/۵۹۲۰	۱	۵۹۲۰/۲۶۷	۲۱۷/۳۲	۰۰۱/۰	۳۶۱/۰	۱
	خطا	۶/۱۰۴۷۴	۵۷	۷۶۵/۱۸۳				

همان‌طور که در جدول ۷ نشان داده شده است با کنترل قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، بین گروه‌های آزمایش و کنترل از لحاظ نمره میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان تفاوت معنی‌داری وجود دارد ($P < ۰/۰۰۱$ و $F = ۳۲/۲۱۷$). به عبارت دیگر، الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله با توجه به میانگین میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان گروه آزمایش (۱۶۵/۴) نسبت به میانگین میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان گروه کنترل (۱۲۳/۶)، موجب افزایش معنادار میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان در گروه آزمایش شده است. میزان تأثیر یا تفاوت برابر با ۰/۳۶۱ می‌باشد، یعنی ۳۶ درصد تفاوت‌های فردی در نمرات میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان مربوط به تأثیر الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله می‌باشد. توان آماری برابر با ۱ است، یعنی امکان خطای نوع دوم وجود نداشته است؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله باعث افزایش میزان یادگیری خودراهبر دانش‌آموزان شده است و بدین ترتیب فرضیه اول پژوهش تأیید می‌شود.

فرضیه دوم: الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه هفتم شهر اربیل اثرگذار است. به‌منظور بررسی فرضیه دوم پژوهش ابتدا برای رعایت پیش‌فرض تساوی واریانس‌ها و ماتریس کوواریانس‌های یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان در دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، از آزمون لون و تحلیل واریانس یک راه استفاده شد. نتایج در جداول ۸ و ۹ آمده است.

جدول ۸: نتایج آزمون لون در مورد فرض تساوی واریانس‌های دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان

مرحله	متغیرها	آماره لون	درجه آزادی اول	درجه آزادی دوم	سطح معنی‌داری
پیش‌آزمون	یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان	۲۶۶/۰	۱	۲۸	۶۱۰/۰

جدول ۹: نتایج تحلیل واریانس یک راهه در مورد فرض تساوی واریانس‌های قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در دو گروه در میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان

مرحله	متغیرها	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی‌داری
پیش‌آزمون	یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان	۶۳۳/۱	۱	۶۳۳/۱	۱۷۱/۱	۲۸۸/۰

همان‌گونه که در جدول ۸ ملاحظه می‌شود، فرض صفر برای تساوی واریانس دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، برای میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان تأیید می‌گردد. یعنی فرض تساوی واریانس‌های نمره‌های میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان، در دو گروه آزمایش و کنترل در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله تأیید گردید. این یافته نشان می‌دهد که در تحلیل واریانس‌های دو گروه در بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، به دلیل همگنی واریانس‌های گروه‌ها در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، این تأثیرات متغیر مستقل (الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله) خواهد بود که در تفاوت احتمالی نمرات دو گروه، نقش خواهد داشت. همان‌طور که در جدول ۹ مشاهده می‌شود قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله دو گروه در میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان، در گروه کنترل و آزمایش تفاوت معناداری با یکدیگر ندارد و این یافته نشان می‌دهد که فرض تساوی واریانس‌های نمره‌های میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان، در دو گروه آزمایش و کنترل در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله برقرار است. پس از بررسی فرض همگنی واریانس‌ها و کوواریانس‌های دو گروه در قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، به منظور بررسی فرضیه اصلی پژوهش از تحلیل کوواریانس برای بررسی معنی‌داری تفاوت‌های دو گروه در میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان، استفاده شد. نتایج در جدول ۱۰ آمده است. همان‌طور که در جدول ۱۰ نشان داده شده است با کنترل قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله، بین گروه‌های آزمایش

جدول ۱۰: نتایج تحلیل کوواریانس یک راهه روی میانگین نمرات میزان یادگیری خودراهر دانش‌آموزان بعد از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله دو گروه با کنترل قبل از الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله

متغیر	منبع تغییرات	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معنی‌داری	مجذورات	توان آماری
یادگیری مفاهیم	مرحله	۶/۷۲	۱	۶/۷۲	۴۱۶/۱۹	۰۰۱/۰	۲۵۴/۰	۱
ریاضی دانش‌آموزان	گروه	۲۶۷/۹۶	۱	۲۶۷/۹۶	۷۴۵/۲۵	۰۰۱/۰	۳۱۱/۰	۱
	خطا	۱۳۳/۲۱۳	۵۷	۷۳۹/۳				

و کنترل از لحاظ نمره میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان تفاوت معنی‌داری وجود دارد ($F = ۲۵/۷۴۵$ و $P < ۰/۰۰۱$). به عبارت دیگر، الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله با توجه به میانگین میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان گروه آزمایش (۱۷/۸۶۷) نسبت به میانگین میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان گروه کنترل (۱۲/۳۳۳)، موجب افزایش معنادار میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان در گروه آزمایش شده است. میزان تأثیر یا تفاوت برابر با $۰/۳۱۱$ می‌باشد، یعنی ۳۱ درصد تفاوت‌های فردی در نمرات میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان مربوط به تأثیر الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله می‌باشد. توان آماری برابر با $۰/۹۹$ است، یعنی امکان خطای نوع دوم وجود نداشته است؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله باعث افزایش میزان یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان شده است و بدین ترتیب فرضیه دوم پژوهش تأیید می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

این تحقیق با استفاده از نمونه‌گیری غیر تصادفی (در دسترس) و ۳۰ دانش‌آموز دختر پایه هفتم به عنوان نمونه در نظر گرفته شد. بدین منظور، در ابتدا پیش‌آزمون ریاضی به عمل آمد. سپس، محقق برای گروه آزمایش، از کتاب پایه هفتم شیوه آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله را پیاده‌سازی کرد و سپس در اتمام جلسات مداخله از دانش‌آموزان پس‌آزمون به عمل آورد. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات، از آزمون تحلیل آزمون کوواریانس یک راهه استفاده شده است. یافته‌ها نشان داد که الگوی آموزش مجازی مبتنی بر حل مسئله در یادگیری خودراهر و یادگیری مفاهیم ریاضی پایه هفتم اثرگذار است.

مراجع

- [۱] سیف، ع. ا. (۱۴۰۰). روان‌شناسی پرورشی نوین، تهران: نشر دوران.
- [۲] قنبری هاشم‌آبادی، ب.، گراوند، ه.، محمدزاده قصر، الف. و حسینی، س. الف. (۱۳۹۲). بررسی رابطه بین تمایل به تفکر انتقادی و خودراهبری در دانشجویان پرستاری و مامایی و نقش آن در پیشرفت تحصیلی آن‌ها، مجله علوم پزشکی، ۷(۴)، ۱۵-۲۷.
- [3] Almomani, L., M., Halalsheh, N., Al-Dreabi, H., Al-Hyari, L. and Al-Quraan R. (2023). Self-directed learning skills and motivation during distance learning in the COVID-19 pandemic (Case study: The university of Jordan, *Heliyon*, 9(9),1-13.
- [4] Cazan, A. M. and Magdalena, S. (2015). Self – directed learning and academic adjustment at Romanian student, *RJEAP*, 1(6), 9-20.
- [5] Feng, Y., Cheng, Y., Wang, G., Xu, X. Han, H. and Wu, R. (2019). Radar Emitter Identification under Transfer Learning and Online Learning, *Information*, 11 (1), 55.
- [6] Fisher, M. J. and King, J. (2010). The self- directed learning readiness scale for nursing education revisited: a confirmatory factor analysis, *Nurse Educ*, 30(1), 44-8.
- [7] Lalitha, T., B. and Sreeja, P. S. (2020). Personalized self-directed learning recommendation system, *Procedia Computer Science*, 171: 583-592.



ارتباط هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی دانش آموزان مقطع ابتدایی

مریم حسین زاده بافرانی^۱، عاطفه حسینی بافرانی^{۲*}

^۱عضو علمی گروه علوم تربیتی دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
^۲عضو علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: یادگیری ریاضی هوش هوش هیجانی	جامعه مورد مطالعه کلیه دانش آموزان پسر مقطع ابتدایی شهر نایین در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ می باشند که با استفاده از روش نمونه گیری تصادفی تعداد ۱۰۰ نفر از دانش آموزان پسر در کلاس پنجم ابتدایی به عنوان نمونه انتخاب شدند. داده ها به وسیله پرسشنامه محقق ساخته با کسب ایده از پرسشنامه هوش هیجانی شرینگ و پرسشنامه هوش هیجانی بار-ان به دست آمد. میزان پایایی پرسشنامه از طریق آلفای کرونباخ معادل ۰/۸۷ حاصل گردید. نتایج نشان داد که بین هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی دانش آموزان مقطع ابتدایی شهر نایین رابطه معنی داری وجود دارد. همچنین نتایج تحلیل رگرسیون چندگانه به روش گام به گام نشان داد که بیشترین قدرت پیش بینی کننده نمره ریاضی متعلق به مؤلفه مهارت های درون فردی از هوش هیجانی می باشد.

۱. مقدمه

یکی از دروس مهمی که دانش آموزان در مدرسه یاد می گیرند، درس ریاضی است. چرا که متخصصان تعلیم و تربیت معتقدند آموخته های دانش آموز در درس ریاضی نه تنها در رشد عقلانی و منطقی بلکه در رشد اجتماعی، فرهنگی و سایر ابعاد رشد شخصیتی دانش آموز مؤثر است. پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در این درس تحت تأثیر عوامل متعددی است که باید هر چه بیشتر شناخته و بکار گرفته شوند. البته شناسایی عوامل مؤثر بر یادگیری درس ریاضی مانند سایر دروس مسأله‌ای پیچیده است، چرا که آن یک عنصر چندبعدی است و به گونه‌ای بسیار ظریف به رشد جسمی، اجتماعی، شناختی و عاطفی دانش آموز مربوط است. تا کنون بسیاری از پژوهشگران بر تأثیر توانایی‌های ذهنی و شناختی بر پیشرفت تحصیلی و یادگیری درس ریاضی تأکید کرده اند. اما به مرور زمان مشخص شده که هر چند توانایی‌های ذهنی و شناختی تا اندازه‌ای با یادگیری و پیشرفت تحصیلی رابطه دارند و تا حدود زیادی یادگیری در این درس را پیش‌بینی می‌کنند، اما تنها کلید پیش‌بینی موفقیت تحصیلی نیستند. به همین دلیل محققان در سال‌های اخیر درصدد بر آمده اند تا مجموعه ای از عوامل غیرشناختی که می‌توانند در یادگیری درس ریاضی و به طور کلی موفقیت تحصیلی مؤثر باشند شناسایی نمایند. آنها دریافته‌اند یکی از عوامل غیرشناختی، هوش هیجانی است. طبق تعریف گلمن (۲۰۱۲) هوش هیجانی عبارت است از مجموعه ای از دانش ها و توانایی های هیجانی و اجتماعی که بر قابلیت کلی ما در پاسخ به نیازهای محیطی به طور مؤثری تأثیر می‌گذارد. این مجموعه شامل موارد زیر است:

۱. توانایی آگاه بودن از خود، درک و فهم خود و قدرت بیان احساسات
۲. توانایی آگاه بودن از دیگران، درک و فهم دیگران و قدرت بیان آن
۳. توانایی رویارویی با هیجان های شدید و کنترل تکانه ها در خویشتن
۴. توانایی انطباق با تغییرات و حل مسایل اجتماعی و فردی

*سخنران

پست الکترونیک: maryam.bafrani@pnu.ac.ir (مریم حسین زاده بافرانی)، a.hassani@pnu.ac.ir (عاطفه حسینی بافرانی)

هوش هیجانی مفهوم گسترده‌ای دارد که می‌تواند شامل احساسات، علائق، آرزوها، نگرش‌ها، اعتبارات، تعهدات، قدرت مناسب و درست، تمایلات و حالات، اخلاقیات و ارزش‌ها باشد (پراکت، ۲۰۱۰).

تحقیقات نشان داده است که هوش هیجانی به میزان بسیار زیادی می‌تواند موفقیت اجتماعی و تحصیلی فرد را پیش بینی کند. آکپور (۲۰۲۰) در تحقیقی به بررسی مروری ارتباط بین هوش هیجانی و موفقیت تحصیلی دانش آموزان با استفاده از فراتحلیلی بر مطالعات انجام شده پرداخته و نتیجه گرفته است که هوش هیجانی بالا با پیشرفت تحصیلی بالاتر مرتبط است. حلیمی و همکاران (۲۰۲۰) در تحقیقی به بررسی هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دبیرستان مستقر در کشور کویت، با استفاده از مطالعه ای پیمایشی نتیجه گرفتند که موفقیت تحصیلی به شدت با ارزیابی خود هیجانی و استفاده از احساسات مرتبط است. با این حال، نتایج همبستگی مستقیمی با سن، سیستم دبیرستان، جنسیت و ملیت نشان نداد. بیلینگر و همکاران (۲۰۱۴)، در یافته‌های خود به این نتیجه رسیدند که هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی رابطه مثبت و معنادار دارد. نتیجه مطالعه لیم و همکاران (۲۰۰۸) نشان می‌دهد که یادگیرندگان که از راهبردهای شناختی سطح بالا یا راهبردهای فراشناختی استفاده می‌کنند در فعالیت‌های یادگیری خود به پیشرفت بالاتری دست می‌یابند. پارکر و همکاران (۲۰۰۴) در مطالعه خود بر روی ۶۶۷ دانش آموز دبیرستانی در کانادا به این نتیجه رسیدند که همبستگی بین هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی برابر با $0/41$ است و هوش هیجانی به طور معناداری پیشرفت تحصیلی را پیش بینی می‌کند. در بررسی‌های گامورا و ارسنیون (۲۰۰۲)، نتایج نشان داد که افرادی که مهارت‌های هیجانی بالایی دارند از مهارت‌های اجتماعی بهتری برخوردارند، روابط درازمدت و توانایی بیشتری در حل تعارضات دارند، مسئولیت پذیرترند، علاقه مند به علم آموزی و کسب موفقیت اند، اعتماد به نفس بالایی دارند، با پشتکار هستند و همچنین این افراد توانایی بیشتری برای تمرکز بر مشکل و استفاده از مهارت‌های حل مسئله دارند که موجب افزایش توانایی‌های شناختی آنان می‌شود.

در پژوهش دیفرایز و پلیمن (۱۹۹۴) نشان داده شد که اکثر افراد با افزایش سن، به خودآگاهی بیشتری دست می‌یابند و با بالا رفتن سن راحت تر می‌توانند هیجان‌ها و رفتار خود را کنترل کنند. محمدی و همکاران (۱۳۹۸) در تحقیقی به بررسی ارتباط هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی در دانشجویان هوشبری و اتاق عمل دانشگاه علوم پزشکی تهران پرداخته و نتیجه گرفتند که ارتباط آماری مثبت و معناداری بین پیشرفت تحصیلی با هوش هیجانی وجود دارد. احراری و همکاران (۱۳۹۷) رابطه هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی: نقش واسطه‌ای حرمت خود و حمایت اجتماعی را مورد بررسی قرار داده و نتیجه گرفتند که بین هوش هیجانی، حرمت خود و حمایت اجتماعی با پیشرفت تحصیلی رابطه معناداری وجود دارد. صبحی قراملکی (۱۳۹۱) در نتایج تحقیق خود عنوان کرد که هوش هیجانی با انگیزه پیشرفت رابطه مثبت و معناداری دارد. در این پژوهش به ترتیب خوابگاه، خودمدیریتی و مدیریت رابطه که از مؤلفه‌های هوش هیجانی هستند بیشترین همبستگی را با انگیزه پیشرفت داشتند در صورتی که مؤلفه آگاهی اجتماعی با آن رابطه معناداری نداشت. نتایج تحقیق ثمری و طهماسبی (۱۳۸۶) با عنوان بررسی هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی در دانشجویان دانشگاه نشان دهنده رابطه هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی است. دهشیری (۱۳۸۵) در تحقیق خود همبستگی بین هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی برابر با $0/37$ گزارش کرد و عنوان کرد که انعطاف پذیری، استقلال و همدلی از بین مؤلفه‌های هوش هیجانی نقش معناداری در پیش بینی پیشرفت تحصیلی دارند و این مؤلفه‌ها $0/19$ از واریانس پیشرفت تحصیلی را تبیین می‌کنند. رضویان شاد (۱۳۸۴) تحقیقی درباره رابطه هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی شهر تبریز داشته که نتیجه گرفت، بین هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی شهر تبریز رابطه معنادار وجود دارد. با در نظر گرفتن اینکه هوش هیجانی زمینه‌ای برای ارتقا عملکرد یادگیری است. مطالعه حاضر به دنبال بررسی ارتباط بین هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی می‌باشد و همچنین به بررسی رابطه بین مؤلفه‌های هوش هیجانی (مهارت‌های درون فردی، مهارت‌های میان فردی، سازگاری، مدیریت استرس، خلق و خوی عمومی) با یادگیری درس ریاضی و میزان رابطه هر یک از مؤلفه‌ها با درس ریاضی می‌پردازد.

۲. روش شناسی

پژوهش حاضر از لحاظ هدف کاربردی و از لحاظ روش جمع‌آوری داده‌ها از نوع توصیفی - همبستگی است. جامعه پژوهشی تحقیق شامل کلیه دانش‌آموزان پسر مقطع ابتدایی شهرنابین در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ می‌باشند که با استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده ۱۰۰ نفر از دانش‌آموزان پسر در کلاس پنجم ابتدایی به عنوان نمونه آماری تحقیق انتخاب شدند.

در این پژوهش، با توجه به اینکه پرسشنامه هوش هیجانی شرینگ و پرسشنامه هوش هیجانی بار - ان برای افراد بالای ۱۶ سال تهیه شده بودند، با کسب ایده از آنها اقدام به تهیه پرسشنامه مناسب جهت اندازه‌گیری هوش هیجانی کودکان شد. پرسشنامه محقق ساخته شامل ۵۶ سؤال بود. تمامی سؤالات با طیف ۵ گزینه‌ای لیکرت که از گزینه‌های "خیلی کم" تا "خیلی زیاد" را شامل می‌گردد مورد آزمون قرار گرفت. پایایی پرسشنامه با استفاده از آلفای کرونباخ $0/87$ بدست آمد که نشانگر تأیید پایایی پرسشنامه مورد نظر می‌باشد. همچنین جهت روایی، از روایی صوری استفاده شد. نمره ریاضی، میانگین نمرات مستمر و نمرات نهایی دانش‌آموزان بود که از سامانه ثبت نمرات مدرسه گرفته شد. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها در آمار توصیفی از بیشترین و کمترین مقادیر متغیرها، میانگین، انحراف معیار آنها و در بخش آمار استنباطی از از ضریب همبستگی پیرسون و از رگرسیون گام به گام استفاده شد. به منظور تجزیه و تحلیل داده‌ها از بسته نرم‌افزاری SPSS (۱۸) استفاده شده است.

۳. یافته‌ها

همان گونه که در جدول (۲) مشاهده می‌شود آماره $k-s-z$ در سطح $0/05 \geq p$ نرمال است. به عبارت دیگر توزیع نمرات متغیرهای پژوهش نرمال می‌باشد. همان گونه که در جدول (۲) مشاهده می‌شود آماره $k-s-z$ در سطح $0/05 \geq p$ نرمال است. به عبارت دیگر توزیع نمرات متغیرهای

جدول ۱: توصیف آماری سن پاسخگویان

خطای معیار	میانگین	بیشترین سن	کمترین سن	سن
0/04	11/54	13	11	سن

جدول ۲: آزمون کولموگروف اسمیرنوف جهت بررسی نرمال بودن داده ها

متغیرهای پژوهش	k-s-z	P
مهارت های درون فردی	1/19	/072
مهارت های بین فردی	/984	/268
سازگاری	1/35	/143
مدیریت استرس	/804	/540
خلق و خوی عمومی	/447	/765
هوش هیجانی	/567	/671
نمره درس ریاضی	/870	/294

پژوهش نرمال می باشد. همان طور که در جدول (۴) مشاهده می گردد، برای تعیین قدرت پیش بینی کنندگی مؤلفه های هوش هیجانی بر نمره درس ریاضی دانش آموزان از رگرسیون چندمتغیری گام به گام استفاده شده است. ۳۴۲/۵ تغییرات نمره ریاضی را مؤلفه های مهارت های درون فردی، مهارت های بین فردی و سازگاری پیش بینی می کنند که بیشترین قدرت پیش بینی کنندگی نمره ریاضی را مؤلفه مهارت های درون فردی دارا بوده و کمترین قدرت پیش بینی کنندگی نمره ریاضی را مؤلفه مهارت های بین فردی دارا می باشد. مؤلفه های دیگر از قدرت پیش بینی کنندگی کافی در این خصوص برخوردار نمی باشند.

۴. بحث و نتیجه گیری

با توجه این که هوش هیجانی نقش مهمی در تعلیم و تربیت دارد، لازم است به پرورش هوش هیجانی به منظور ارتقای یادگیری در دروس مختلف به ویژه درس ریاضی توجه نمود. از این طریق بایستی به معلمان خاطر نشان ساخت که رفتار های هیجانی و عوامل درونی و بیرونی مرتبط با آن را می توان تغییر داد و در بهبود آن تلاش کرد. که این به نوبه خود به یادگیری بهتر درس ریاضی منجر خواهد شد. علاوه بر این، یکی از کارکردهای اصلی آموزش و پرورش آن است که دانش آموزان را نسبت به شخصیت خودشان آگاه سازد. دانش آموزان باید از همان سال های ورود به مدرسه بی همتا بودن خود و دیگران را بطور عمیق و کامل احساس کنند. آنها برای پیشرفت، یادگیری و خودشنکوفایی باید به ارزش فردی خود اطمینان داشته باشند و در کنار آن با نقش های اجتماعی شان آشنا شوند. صاحب نظران تعلیم و تربیت تأکید دارند محیط اجتماعی مدرسه نمونه کوچکی از نظام اجتماعی جامعه تلقی می گردد. روابطی که دانش آموزان با معلمان و همسالان خود در مدارس برقرار می کنند، نقش اساسی در اکتساب نگرش ها، باورها و ارزش های بنیادین اجتماعی دارد و درک دانش آموزان را از جامعه و محیطی که در آن قرار دارند، تحت تأثیر قرار می دهد. همچنین، مدرسه یکی از مهم ترین بافت های یادگیری مهارت های هیجانی است. پژوهش حاضر به بررسی ارتباط هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی دانش آموزان مقطع ابتدایی شهر نایین می پردازد. یافته های کلی پژوهش نشان داد بین هوش هیجانی با یادگیری درس ریاضی دانش آموزان مقطع ابتدایی شهر نایین رابطه معنی داری وجود دارد. نتایج تحلیل رگرسیون چندگانه به روش گام به گام نشان داد که بیشترین سهم مؤلفه مؤثر و پیش بینی کننده نمره ریاضی متعلق به مؤلفه مهارت های درون فردی از هوش هیجانی می باشد. این یافته ها با نتایج پژوهش های آکیور (۲۰۲۰)، حلیمی و همکاران (۲۰۲۰)، بیلینگز و همکاران (۲۰۱۴)، پارکر و همکاران (۲۰۰۴)، گامورا و آرسنیون (۲۰۰۲)، محمدی و همکاران (۱۳۹۸)، احاراری و همکاران (۱۳۹۷)، صبحی قراملکی (۱۳۹۱)، ثمری و طهماسبی (۱۳۸۶) دهشیری (۱۳۸۵)، رضویان شاد (۱۳۸۴) همسو است.

در راستای تبیین این یافته ها می توان گفت برای اینکه یادگیری درس ریاضی در میان دانش آموزان از سطح بالایی برخوردار باشند، بهتر است

جدول ۳: نتایج تحلیل داده ها

متغیر	بیشترین	کمترین	میانگین	انحراف معیار	ضریب همبستگی با نمره درس ریاضی	سطح معناداری
مهارت های درون فردی	120	78	95/20	22/18	0/38	0/05
مهارت های بین فردی	93	70	80/05	12/20	0/42	0/01
سازگاری	55	34	52/62	4/30	0/62	0/01
مدیریت استرس	59	37	48/21	4/68	0/13	0/05
خلق و خوی عمومی	50	36	46/60	4/05	0/23	0/01
هوش هیجانی	295	184	242/17	24/21	0/5	0/05
نمره درس ریاضی	20	14	18/63	1/65	1	-

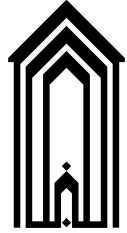
جدول ۴: نتایج تحلیل رگرسیون چند متغیری گام به گام

Sig	T	Beta	مجذور R	R	متغیرهای پیش بینی کننده
0/05	5/28	0/609	0/342	0/623	های درون فردی مهارت
0/001	0/565	0/079			مهارت های بین فردی
	0/942	0/138			سازگاری

هوش هیجانی آنان تقویت گردد. آموزش هیجانی می‌تواند از طریق گستره‌ای از تلاش‌ها مانند آموزش کلاسی، فعالیت‌های فوق‌برنامه، جو و شرایط حمایتی مدرسه و درگیر کردن دانش‌آموزان، معلمان و والدین در فعالیت‌های اجتماعی صورت گیرد. در صورتی که فرآیند اجتماعی شدن و رشد مهارت‌های هیجانی در محیط اولیه خانواده مطلوب نباشد، این امکان وجود دارد تا مدارس از طریق آموزش‌های ترمیمی به جبران این کاستی‌ها بپردازند، این تلاش به یادگیری بهتر درس ریاضی منجر خواهد شد.

مراجع

- [۱] احراری، عمادالدین؛ نجفی، محمود؛ محمدیفر، محمد علی (۱۳۹۷) رابطه هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی: نقش واسطه‌ای حرمت خود و حمایت اجتماعی، مطالعات روان‌شناسی تربیتی، دوره ۱۵، شماره ۳، صفحه ۱-۳۰
- [۲] ثمری، علی اکبر؛ طهماسبی، فهیمه (۱۳۸۶)، بررسی هوش هیجانی و پیشرفت تحصیلی در دانشجویان دانشگاه. فصلنامه سلامت روان، دوره ۹، شماره ۱۸، صفحه ۱۲۸-۱۲۱
- [۳] دهشیری، غلامرضا (۱۳۸۵)، بررسی رابطه هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان. تازه‌ها و پژوهش‌های مشاوره، شماره ۱۸، صفحه ۹۷-۱۰۶
- [۴] رضویان شاد، مرتضی (۱۳۸۴)، رابطه هوش هیجانی با سازگاری اجتماعی و پیشرفت تحصیلی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه تبریز
- [۵] صبحی قراملکی، ناصر (۱۳۹۱) پیش‌بینی انگیزه پیشرفت تحصیلی براساس هوش هیجانی دانش‌آموزان، مجله روان‌شناسی مدرسه، دوره ۱، شماره ۳، صفحه ۴۹-۶۲
- [۶] محمدی، آیین؛ مجتهدزاده، ریتا؛ شمس‌افضل (۱۳۹۸)، بررسی ارتباط هوش هیجانی با پیشرفت تحصیلی در دانشجویان هوشبری و اتاق عمل دانشگاه علوم پزشکی تهران، پی‌اورد سلامت، دوره ۱۳، شماره ۴، صفحه ۲۹۰-۲۸۱
- [7] Akpur, U. (2020). A systematic review and meta-analysis on the relationship between emotional intelligence and academic achievement. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 20(4), 51-64.
- [8] Billings, C., Lomas, J., Downey, L., Stough, C. (2014); Emotional intelligence and academic achievement in preadolescent students from Australian schools. *Journal of Personality and Individual Differences*, 60, 520-531.
- [9] Brackett M.A., Rivers S.E., Salovey P. *Implications for Personal, Social, Academic, and Workplace Success*. *Social and Personality Psychology Compass*. 5(1): 88-103, 2011.
- [10] Defries, J., Polmin, R. (1994). *Nature and nurture during middle childhood*. Oxford UK: Black well.
- [11] Golman D. Parsa N, Editor. *Emotional self-Awareness, continence, empathy and to help others*. Tehran: Roshd Publications; 2012: 59-75.
- [12] Gumora, G. & Arsenion, F. (2002); Emotionality, emotion regulation and school performance in middle school children. *Journal of School Psychology*, 40(5), 395-413.
- [13] Halimi, F., AlShammari, I., & Navarro, C. (2020). Emotional intelligence and academic achievement in higher education. *Journal of Applied Research in Higher Education*



شناسایی دیدگاه‌های دانش‌آموزان درباره مدرسه و کلاس درس ریاضی

اسماء نکوئی قهفرخی^ا، نرگس یافتیان^ب

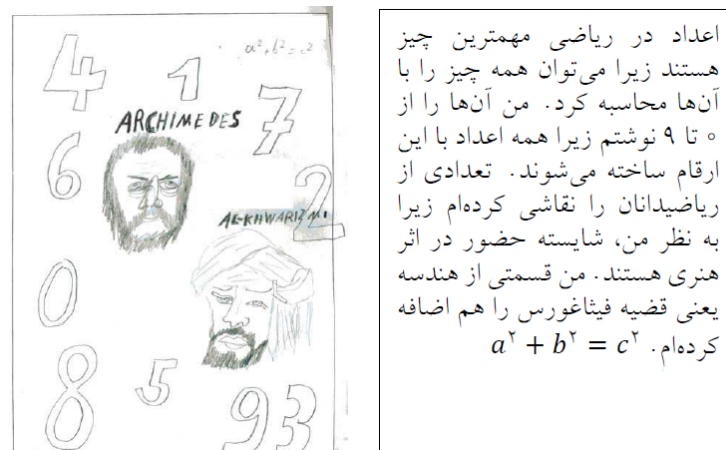
^اکارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی استان چهارمحال و بختیاری
^بدانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: استعاره‌ها دانش‌آموزان پایه چهارم باورها درباره کلاس درس ریاضی باورها درباره مدرسه	در فرآیند یاددهی - یادگیری ریاضی، باورهای دانش‌آموزان در حال شکل‌گیری است و این باورها از موارد بسیاری تاثیر می‌پذیرند. هدف از پژوهش حاضر، بررسی باورهای دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی درباره دو مورد از این عوامل اثرگذار یعنی کلاس درس ریاضی و مدرسه براساس استعاره‌ها است که به روش توصیفی - پیمایشی انجام شد. جامعه آماری، دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم شهرستان شهرکرد است که براساس نمونه‌گیری تصادفی - خوشه‌ای، ۱۰۸ نفر انتخاب شدند. ابزار پژوهش، پرسش‌نامه‌ای شامل دو پرسش در رابطه با دیدگاه دانش‌آموزان درباره کلاس درس ریاضی و مدرسه بود. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از آمارهای توصیفی (شامل جدول‌ها و درصد‌های فراوانی) و استنباطی (شامل آزمون مجذورخی) استفاده گردید. ابتدا، استعاره‌های دانش‌آموزان درباره کلاس درس ریاضی در ۶ مقوله و درباره مدرسه در ۴ مقوله دسته‌بندی شدند که از جمله این مقوله‌ها می‌توان به «لذت‌بخش»، «سودمند و کاربردی» و «آزاردهنده» اشاره نمود. این مقوله‌ها بیانگر آن است که دانش‌آموزان، دیدگاه‌ها و باورهای متنوعی درباره کلاس درس ریاضی و مدرسه دارند. برای مثال، برخی از دانش‌آموزان، بودن در کلاس درس ریاضی و مدرسه رفتن را لذت‌بخش توصیف کردند و برخی نیز معتقد بودند که آن‌ها در زندگی کاربرد دارند و مفید هستند. عده‌ای نیز، آن‌ها را رنج‌آور و آزاردهنده می‌دانستند. نتایج نشان داد که اکثریت دانش‌آموزان، در استعاره‌های خود به مقوله «لذت‌بخش» اشاره داشتند و همچنین، براساس آزمون مجذورخی، تفاوت معناداری بین فراوانی مقوله‌های حاصل از استعاره‌های دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم مشاهده نگردید.
2020 MSC: 97C20	

۱. مقدمه

با توجه به اهمیت ریاضی و کاربردهای فراوان آن در زندگی بشر، این علم به عنوان جزء جدایی ناپذیر از برنامه درسی و موضوعی محوری در آموزش عمومی محسوب می‌شود [۱۴]. در فرآیند یاددهی و یادگیری ریاضی عوامل فراوانی وجود دارد که عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان را تحت تاثیر قرار می‌دهد [۱۵]. از جمله این عوامل اثرگذار که در فعالیت‌ها و عملکرد دانش‌آموزان نقش قابل توجهی ایفا می‌کند، باورهای دانش‌آموزان درباره ریاضی و موارد مرتبط با آن است. باورها، بر کیفیت یادگیری و روش‌هایی که افراد، دانش را یاد می‌گیرند تاثیر می‌گذارند [۱۳]. به همین جهت باورهای دانش‌آموزان در مورد ریاضی و موارد مرتبط با آن از جمله بودن در کلاس درس ریاضی و مدرسه رفتن می‌توانند نقش برجسته‌ای در علاقه آن‌ها به ریاضی، لذت بردن از ریاضی و انگیزه آن‌ها در کلاس‌های ریاضی داشته باشند [۹، ۵]. با توجه به نقش اساسی باورها در فرآیند یاددهی و یادگیری ریاضی، نیازمند بررسی دقیق‌تری هستند. یکی از راه‌های آگاهی از باورها و دیدگاه‌های دانش‌آموزان و آنچه در ذهن آن‌ها می‌گذرد، استفاده از استعاره است [۱، ۲، ۴، ۸، ۱۱، ۱۲]. لاکف و جانسون [۱۰] در این مورد بیان نموده‌اند که استعاره‌ها، ابزارهایی هستند که با استفاده از ویژگی‌های چیزهای شناخته شده برای درک، توصیف و توضیح مجهولات در مورد یک پدیده یا شی جدید استفاده می‌شوند. به عنوان مثال، وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که استعاره‌ای با ذکر دلیل در مورد ریاضیات بیان کنند، می‌توان پی برد، علاقه یا عدم علاقه و باور او نسبت به ریاضی ناشی از چیست و برای برطرف کردن مشکلات مرتبط با باورهای دانش‌آموزان در چه زمینه‌ای نیاز به کار بیشتری است

[۷، ۱۲]. در برخی از پژوهش‌ها، پژوهشگران با بررسی استعاره‌های دانش‌آموزان درباره ریاضی و موارد مرتبط با آن به برخی از باورهای مثبت و منفی افراد پی بردند [۳، ۷، ۹]. علاوه بر به کارگیری استعاره‌های کلامی، برخی از پژوهش‌ها از استعاره‌های بصری برای پی بردن به دیدگاه‌های دانش‌آموزان استفاده نموده‌اند. بر همین اساس، هالورشاید و رولکا [۶] در پژوهشی به بررسی باورهای دانش‌آموزان پایه پنجم ابتدایی با استفاده از نقاشی پرداختند. در این پژوهش از دانش‌آموزان خواسته‌اند تا نظرات خود پیرامون ریاضی را با کشیدن یک نقاشی و ارائه توضیح بیان کنند. یکی از دانش‌آموزان در نقاشی خود، مواردی از جمله ارقام ۰ تا ۹، تصاویری از خوارزمی، ارشمیدس و رابطه فیثاغورس را رسم کرد. نقاشی این دانش‌آموز به همراه توضیح او در مورد نقاشی خود در شکل ۱ ارائه شده است.



شکل ۱: استعاره دانش‌آموز پسر ۱۱ ساله درباره ریاضی [۶، ص ۲۳۷]

بنابراین از شکل ۱ می‌توان برداشت کرد که این دانش‌آموز، ریاضی را وابسته و تشکیل شده از اعداد می‌داند و معتقد است که این علم، بر مبنای فرمول‌ها و نظریات ریاضی دانان است. در مجموع می‌توان گفت، باورها در یادگیری و عملکرد دانش‌آموزان مهم و تاثیرگذار هستند و در تمامی مقاطع تحصیلی به ویژه مقطع ابتدایی نقش به‌سزایی دارند. بنابراین، آگاهی از باورها و دیدگاه‌های دانش‌آموزان ضروری است و در همین راستا، پژوهش حاضر بر آن است که به سوالات زیر پاسخ دهد:

- ۱) دانش‌آموزان چه دیدگاه‌هایی درباره کلاس درس ریاضی دارند؟
- ۲) دانش‌آموزان چه دیدگاه‌هایی درباره مدرسه دارند؟

۲. روش پژوهش

هدف از پژوهش حاضر که به روش توصیفی - پیمایشی انجام شده است، بررسی باورهای دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی درباره کلاس درس ریاضی و مدرسه به کمک استعاره‌ها است. جامعه آماری این پژوهش، دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم ابتدایی شهرستان شهرکرد و نمونه آماری شامل ۱۰۸ نفر (۵۶ دختر و ۵۲ پسر) از این دانش‌آموزان بود که به روش نمونه‌گیری تصادفی - خوشه‌ای انتخاب شدند. ابزار پژوهش، پرسش‌نامه‌ای شامل دو پرسش در ارتباط با دیدگاه دانش‌آموزان درباره «کلاس درس ریاضی» و درباره «مدرسه» بود که این پرسش‌ها با الهام از پژوهش‌های مرتبط [۲، ۳، ۷] و مشورت با صاحب‌نظران تدوین گردید و در شکل ۲ ارائه شده است. در راستای اعتبار پژوهش، از نظرات متخصصان آموزش ریاضی بهره گرفته شد. استعاره‌های مطرح شده توسط دانش‌آموزان درباره «کلاس درس ریاضی» و «مدرسه» در چند مقوله قرار گرفتند که برخی از این مقوله‌ها با برخی از پژوهش‌های مرتبط [۲، ۳، ۷] مشترک بود. برای تجزیه و تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده، از آمار توصیفی شامل جدول‌های فراوانی و درصد فراوانی‌ها و آمار استنباطی شامل آزمون خی‌دو در نرم‌افزار spss نسخه ۲۷ استفاده شد.

۳. نتایج

پرسش اول پژوهش: دانش‌آموزان چه دیدگاه‌هایی درباره کلاس درس ریاضی دارند؟

دانش آموز عزیز، از اینکه با دقت به سوالات پاسخ میدی، از تو ممنونیم.

برای هر یک از موارد زیر، نمونه‌ای از زندگی بیاور و حتما دلیل خودت را نیز بنویس:

۱) کلاس درس ریاضی مانند زیرا

۲) مدرسه مانند زیرا

شکل ۲: پرسشنامه دیدگاه‌های دانش‌آموزان پایه چهارم درباره «کلاس درس ریاضی» و «مدرسه».

برای پاسخ به این پرسش استعاره‌های دانش‌آموزان پایه چهارم مورد بررسی قرار گرفت. دانش‌آموزان در ارتباط با کلاس درس ریاضی استعاره‌هایی مطرح نموده‌اند که این استعاره‌ها براساس دلایل مطرح شده، در ۷ مقوله دسته‌بندی گردیدند. این مقوله‌ها عبارتند از «آسان»، «لذت‌بخش»، «سودمند و کاربردی»، «خسته‌کننده»، «دشوار» و «آزاردهنده». لازم به ذکر است که برخی از دانش‌آموزان پایه چهارم نتوانسته یا نخواسته بودند که استعاره‌ای درباره کلاس درس ریاضی مطرح نمایند و به همین دلیل، دسته‌ای به نام «فاقد استعاره» نیز در نظر گرفته شد. در جدول ۱ توزیع فراوانی هر یک از این مقوله‌ها به همراه مثال‌هایی مربوط به آن برای کلاس درس ریاضی به تفکیک جنسیت ارائه شده است.

جدول ۱: توزیع فراوانی مقوله‌ها و مثال‌هایی از استعاره‌های دانش‌آموزان پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی

مقوله‌ها	جنسیت	استعاره	فراوانی	درصد
آسان	دختر	کلاس درس ریاضی مانند کمک‌کردن به خواهر کوچکم است زیرا آسان است.	۵	۸/۹
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند راه رفتن زیرا آسان است.	۸	۱۵/۴
لذت‌بخش	دختر	کلاس درس ریاضی مانند یک ظرف پر از شیرینی و شکلات زیرا آن را دوست دارم.	۲۱	۳۷/۵
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند شهربازی است زیرا چیزهای جدید و جالبی دارد.	۱۲	۲۳/۱
سودمند و کاربردی	دختر	کلاس درس ریاضی مانند خواندن کتاب است زیرا آموزنده و مفید است.	۳	۵/۴
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند تمرین خط است زیرا در آینده به ما کمک می‌کند.	۱۱	۲۱/۲
خسته‌کننده	دختر	کلاس درس ریاضی مانند مسابقه دو زیرا خسته می‌شوم.	۳	۵/۴
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند شب نخوابیدن است زیرا بعد از آن خسته هستیم.	۴	۷/۷
دشوار	دختر	کلاس درس ریاضی مانند امتحان است زیرا خیلی سخت است و استرس می‌گیرم.	۷	۱۲/۵
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند جهنم با آتش زیاد است زیرا تحمل آن خیلی سخت است.	۳	۵/۸
آزاردهنده	دختر	کلاس درس ریاضی مانند یک هیولا زیرا ترسناک است.	۱۲	۲۱/۴
	پسر	کلاس درس ریاضی مانند سوسک است زیرا من از آن می‌ترسم.	۱۰	۱۹/۲
فاقد استعاره	دختر	کلاس درس ریاضی مانند مرگ است زیرا بدترین زمان زندگی است.	۵	۸/۹
	پسر		۴	۷/۷
تعداد کل	دختر		۵۶	۱۰۰
	پسر		۵۲	۱۰۰

براساس جدول ۱، مقوله «آسان» توسط ۵ نفر (۸/۹ درصد) از دانش‌آموزان دختر و ۸ نفر (۱۵/۴ درصد) از دانش‌آموزان پسر مطرح گردید. همچنین، مقوله «لذت‌بخش» در میان استعاره‌های دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی رایجتر از سایر مقوله‌ها بود و ۲۱ دانش‌آموز دختر (۳۷/۵ درصد) و ۱۲ دانش‌آموز پسر (۲۳/۱ درصد) استعاره‌هایی مطرح نموده بودند که به این مقوله اشاره داشت. ۳ نفر (۵/۴ درصد)

درصد) دانش آموز دختر و ۱۱ نفر (۲۱/۲ درصد) دانش آموز پسر، کلاس درس ریاضی را «سودمند و کاربردی» توصیف نمودند. استعاره‌های ۳ نفر (۵/۴ درصد) از دختران و ۴ نفر (۷/۷ درصد) از پسران، به «خسته‌کننده» بودن کلاس درس ریاضی اشاره داشتند. مقوله «دشوار» نیز در استعاره‌های ۷ دانش آموز دختر (۱۲/۵ درصد) و ۳ دانش آموز پسر (۵/۸ درصد) مشاهده گردید. ۱۲ دانش آموز دختر (۲۱/۴ درصد) و ۱۰ دانش آموز پسر (۱۹/۲ درصد) مقوله «آزاردهنده» را در استعاره‌های خود بیان نمودند. لازم به ذکر است که ۵ دانش آموز دختر (۸/۹ درصد) و ۴ دانش آموز پسر (۷/۷ درصد) نیز استعاره‌ای درباره کلاس درس ریاضی بیان نکرده بودند. با مقایسه فراوانی مقوله‌ها در استعاره‌های دانش آموزان دختر و پسر مشخص می‌شود که مقوله‌های «سودمند و کاربردی» و «خسته‌کننده» بین استعاره‌های دانش آموزان دختر پایه چهارم نسبت به سایر مقوله‌ها، فراوانی کمتری داشتند. همچنین، مقوله «دشوار» در بین دانش آموزان پسر پایه چهارم کمتر از سایر مقوله‌ها مشاهده گردید و فراوانی کمتری داشت.

پاسخ دانش آموزان پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی در ۷ دسته تقسیم‌بندی شدند. فراوانی هر یک از این دسته‌ها براساس جنسیت در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: جدول توافقی نوع مقوله‌ها و جنسیت دانش آموزان پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی

متغیر	طبقات	دختر		پسر		مجموع
		فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
مقوله‌ها	آسان	۵	۸/۹	۸	۱۵/۴	۱۳
	لذت‌بخش	۲۱	۳۷/۵	۱۲	۲۳/۱	۳۳
	سودمند و کاربردی	۳	۵/۴	۱۱	۲۱/۲	۱۴
	خسته‌کننده	۳	۵/۴	۴	۷/۷	۷
	دشوار	۷	۱۲/۵	۳	۵/۸	۱۰
	آزاردهنده	۱۲	۲۱/۴	۱۰	۱۹/۲	۲۲
	فاقد استعاره	۵	۸/۹	۴	۷/۷	۹
	مجموع	۵۶	۱۰۰	۵۲	۱۰۰	۱۰۸

برای بررسی ارتباط میان جنسیت و نوع مقوله‌های حاصل از استعاره‌های دانش آموزان پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی که در جدول ۲ ذکر شده است، از آزمون مجذور خی دو بعدی استفاده گردیده است که در جدول ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۳: آزمون مجذور خی برای مقایسه فراوانی جنسیت بر حسب مقوله‌های درباره کلاس درس ریاضی

آزمون مجذور خی	آماره	df	سطح معناداری
	۹/۶۱۹	۶	۰/۱۴۲

نتایج حاصل از جدول ۳ نشان داد که تفاوت معناداری بین فراوانی مقوله‌های حاصل از استعاره‌های دانش آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی وجود ندارد (sig = ۰/۱۴۲ و df = ۶ و $\chi^2 = ۹/۶۱۹$)

پرسش دوم پژوهش: دانش آموزان چه دیدگاه‌هایی درباره مدرسه دارند؟

برای پاسخ به پرسش دوم، استعاره‌های دانش آموزان پایه چهارم درباره مدرسه مورد بررسی قرار گرفت و با توجه به دلایلی که بیان نموده بودند

در چند مقوله دسته‌بندی شدند که در جدول ۴، این مقوله‌ها و نمونه‌ای از استعاره‌ها ارائه شده است.

جدول ۴: توزیع فراوانی مقوله‌ها و مثال‌هایی از استعاره‌های دانش‌آموزان پایه چهارم درباره مدرسه

مقوله‌ها	جنسیت	استعاره	فراوانی	درصد
لذت‌بخش	دختر	مدرسه مانند یک شهر بزرگ شکلاتی است زیرا مدرسه را خیلی دوست دارم. مدرسه مانند بهشت است زیرا با دوستم بازی می‌کنیم و خوشحال هستیم.	۲۰	۳۵/۷
	پسر	مدرسه مانند باغ پر از گل است زیرا با دوستانم که مثل گل هستند، بازی می‌کنم. مدرسه مانند خانه بازی است زیرا در آن بازی می‌کنیم و لذت‌بخش است.	۱۸	۳۴/۶
سودمند و کاربردی	دختر	مدرسه مانند کلاس زبان است زیرا در آن چیز جدید یاد می‌گیریم. مدرسه مانند دانشگاه است زیرا در آن علم یاد می‌گیریم تا بی‌سواد نباشیم.	۵	۸/۹
	پسر	مدرسه مانند کتاب است زیرا چیزهای جالب و مفیدی به ما یاد می‌دهد. مدرسه مانند پدر و مادر است زیرا در آن دانش‌آموزان تربیت می‌شوند.	۱۱	۲۱/۲
مشکل از اجزا	دختر	مدرسه مانند خانه دوم ما است زیرا در آن اتاق‌های زیادی قرار دارد. مدرسه مانند اعضای بدن است زیرا هر عضو یک وظیفه دارد.	۸	۱۴/۳
	پسر	مدرسه مانند کتابخانه است زیرا آدم‌ها، اتاق‌ها و کتاب‌های زیادی دارد. مدرسه مانند یک خانه بزرگ است زیرا از کلاس‌های مختلف تشکیل شده است.	۳	۵/۸
آزاردهنده	دختر	مدرسه مانند یک اتاق وحشتناکتر از جهنم است زیرا همه روز باید درس بخوانیم. مدرسه مانند زندان است زیرا گوشی نداریم و بی‌حوصله می‌شویم.	۱۲	۲۱/۴
	پسر	مدرسه مانند یادگان است زیرا درهای ورودی را می‌بندد و قانون‌های بدی دارد. مدرسه مانند زندان است زیرا باید ساعت ۶ صبح بیدار شوم.	۱۶	۳۰/۸
فاقد استعاره	دختر		۱۱	۱۹/۶
	پسر		۴	۷/۷
تعداد کل	دختر		۵۶	۱۰۰
	پسر		۵۲	۱۰۰

براساس جدول ۴، مقوله «لذت‌بخش» در میان استعاره‌های دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره مدرسه پرتکرارتر از سایر مقوله‌ها بود و ۲۰ دانش‌آموز دختر (۳۵/۷ درصد) و ۱۸ دانش‌آموز پسر (۳۴/۶ درصد) استعاره‌هایی مطرح نموده بودند که به این مقوله اشاره داشت. ۵ نفر (۸/۹ درصد) دانش‌آموز دختر و ۱۱ نفر (۲۱/۲ درصد) دانش‌آموز پسر، مدرسه را «سودمند و کاربردی» توصیف نمودند. استعاره‌های ۸ نفر (۱۴/۳ درصد) از دختران و ۳ نفر (۵/۸ درصد) از پسران، به مقوله «مشکل از اجزا» اشاره داشتند. ۱۲ دانش‌آموز دختر (۲۱/۴ درصد) و ۱۶ دانش‌آموز پسر (۳۰/۸ درصد) مقوله «آزاردهنده» را در استعاره‌های خود بیان نمودند. همچنین، ۱۱ دانش‌آموز دختر (۱۹/۶ درصد) و ۴ دانش‌آموز پسر (۷/۷ درصد) نیز استعاره‌ای درباره مدرسه ذکر نکرده بودند. پاسخ دانش‌آموزان پایه چهارم درباره مدرسه در ۵ دسته تقسیم‌بندی شدند. فراوانی هریک از این دسته‌ها براساس جنسیت در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵: جدول توافقی نوع مقوله‌ها و جنسیت دانش‌آموزان پایه چهارم درباره مدرسه

متغیر	طبقات		پسر		دختر		مجموع
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
مقوله‌ها	۲۰	۳۵/۷	۱۸	۳۴/۶	۳۸	۳۵/۲	لذت‌بخش
	۵	۸/۹	۱۱	۲۱/۲	۱۶	۱۴/۸	سودمند و کاربردی
	۸	۱۴/۳	۳	۵/۸	۱۱	۱۰/۲	مشکل از اجزا
	۱۲	۲۱/۴	۱۶	۳۰/۸	۲۸	۲۵/۹	آزاردهنده
	۱۱	۱۹/۶	۴	۷/۷	۱۵	۱۳/۹	فاقد استعاره
	۵۶	۱۰۰	۵۲	۱۰۰	۱۰۸	۱۰۰	مجموع

برای بررسی ارتباط میان جنسیت و نوع مقوله‌های حاصل از استعاره‌های دانش‌آموزان پایه چهارم درباره مدرسه که در جدول ۵ ذکر شده است، از آزمون مجذورخی دوبعدی استفاده گردیده است که در جدول ۶ مشاهده می‌شود.

جدول ۶: آزمون مجذورخی برای مقایسه فراوانی جنسیت برحسب مقوله‌های درباره مدرسه

آزمون مجذورخی	آماره	df	سطح معناداری
	۸/۳۲۹	۴	۰/۰۸۰

نتایج حاصل از جدول ۶ نشان داد که تفاوت معناداری بین فراوانی مقوله‌های حاصل از استعاره‌های دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره مدرسه وجود ندارد (sig = ۰/۰۸۰ و $\chi^2 = ۸/۳۲۹$ و $df = ۴$).

۴. بحث و نتیجه‌گیری

یکی از چالش‌های آموزش ریاضی، باورها و نگرش‌های فراگیران نسبت به ریاضیات و موارد مرتبط با آن از جمله کلاس درس ریاضی و مدرسه است که عملکرد و فعالیت‌های آن‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. این باورها در برخی موارد موجب دیدگاه‌های منفی افراد می‌گردد و در نتیجه، اعتماد به نفس و خودکارآمدی آن‌ها را نیز کاهش می‌دهند و در بعضی موارد نیز، دیدگاه‌های مثبتی در فراگیران ایجاد می‌کند که باعث افزایش اعتماد به نفس آن‌ها می‌شود و به عنوان یک عامل انگیزشی، فرد را به تلاش بیشتر وادار می‌نماید. همچنین، براساس نتایج پژوهش‌ها، باورهای افراد با میزان اضطراب آن‌ها ارتباط دارد. به طوری که فراگیران با باورها و نگرش‌های منفی، میزان اضطراب بالاتری را تجربه می‌کنند. برای مثال، دانش‌آموزانی که از حضور در کلاس‌های درس ریاضی و مدرسه ترس دارند، سطح یادگیری پایین‌تری دارند و عملکرد ضعیف‌تری از خود به نمایش می‌گذارند.

از آنجایی که باورها، عقاید و دیدگاه‌هایی هستند که در ذهن افراد جریان دارند، شناسایی آن‌ها به کمک استعاره‌ها می‌تواند به پژوهشگران در مسیر بررسی باورها کمک نمایند. هدف از پژوهش حاضر بررسی باورهای دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره «کلاس درس ریاضی» و «مدرسه» بود و به همین منظور، از دانش‌آموزان خواسته شد تا استعاره‌ای درباره هر یک از آن‌ها بیان نمایند. سپس، این استعاره‌ها در مقوله‌هایی دسته‌بندی شدند که بیانگر دیدگاه‌های متنوع دانش‌آموزان درباره آن‌ها است. بررسی مقوله‌هایی که از استعاره‌های دانش‌آموزان استخراج گردید، نشان داد که اغلب افراد کلاس درس ریاضی و مدرسه را «لذت‌بخش» توصیف کرده‌اند و برخی از دانش‌آموزان، کلاس درس ریاضی و مدرسه را «سودمند و کاربردی» توصیف نمودند. مقوله «آزادهنده» نیز که بیانگر باورهای منفی درباره کلاس درس ریاضی و مدرسه بود، در استعاره‌های برخی از دانش‌آموزان وجود داشت. عده‌ای از دانش‌آموزان، کلاس درس ریاضی را «آسان»، «خسته‌کننده» و «دشوار» دانسته‌اند که این مقوله در استعاره‌های افراد درباره مدرسه مشاهده نشد. همچنین، تعدادی از دانش‌آموزان درباره مدرسه به مقوله «متشکل از اجزا» اشاره داشتند که این مقوله در استعاره‌های آن‌ها درباره کلاس درس ریاضی بیان نشده بود. این نتیجه با نتایج برخی از پژوهش‌ها که استعاره‌های دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی را مورد بررسی قرار دادند [۳، ۱۲] و همچنین، پژوهشی که در مقطع متوسطه انجام شده بود، همسو است [۷]. همچنین، نتایج آزمون مجذورخی نشان داد که تفاوت معناداری بین باورهای دانش‌آموزان دختر و پسر پایه چهارم درباره کلاس درس ریاضی و مدرسه وجود ندارد.

با توجه به اینکه، باورها در عملکرد هر فردی نقش کلیدی و قابل توجهی دارند، بررسی آن‌ها و شناسایی عوامل موثر بر آن‌ها نیازمند توجه بیشتری است زیرا شناخت این باورها به برنامه‌ریزان آموزشی، معلمان و مدرسان ریاضیات کمک می‌کنند تا رویکردهای مناسبی اتخاذ نمایند. بنابراین پیشنهاد می‌شود که پژوهشگران به بررسی باورهای دانش‌آموزان درباره ریاضی و موارد مرتبط با آن در مقاطع و پایه‌های تحصیلی مختلف به ویژه دانش‌آموزان دوره ابتدایی اهتمام ورزند.

مراجع

- [1] E. Ertem Akbas and M. Cancan. Metaphors formed by 6th and 7th grade students regarding the difficulties they experienced in the process of learning the subject of circle. *International Online Journal of Education and Teaching*, 7(7):1054–1075, 2020.
 - [2] E. Bahadır. Metaphorical perceptions of geometrical concepts by secondary school students identified as gifted and identified as non-gifted. *International Online Journal of Educational Sciences*, 8(1):118–137, 2016.
 - [3] A. A. Can. İlkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin matematik problemi çözmeye ilişkin algılarının metaforlar yoluyla analizi. *Uşak Üniversitesi Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 7(1):103–118, 2021.
 - [4] G. González. A geometry teacher's use of a metaphor in relation to a prototypical image to help students remember a set of theorems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3):397–414, 2013.
 - [5] A. R. Hakim, M. L. Dewi, W. Zamrudu, H. Dewajani, and U. A. Ro'isatin. How student beliefs related to mathematics are influenced by students' past experiences. *Technium*, 43:97–101, 2023.
 - [6] S. Halverscheid and K. Rolka. Student beliefs about mathematics encoded in pictures and words. in *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, volume 3, pages 233–240, Prague, Czech Republic, 2006.
 - [7] T. Horzum and G. Yıldırım. High school students' metaphors about geometry. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 40: 357–374, 2016.
 - [8] N. Ismail, N. H. M. Abdullah, R. Osman, N. Ramli, and Z. A. G. Hilmi. Primary school pupils' images of mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1988(1):–, 2021.
 - [9] P. Kloosterman. *Beliefs and motivation*. Kluwer Academic Publishers, Netherland, 2002.
 - [10] G. Lakoff and M. Johnson. *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago and London, 1980.
 - [11] Z. Markovits and H. Forgasz. "mathematics is like a lion": Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1):49–64, 2017.
 - [12] A. G. Schinck, H. W. Neale Jr, D. K. Pugalee, and V. V. Cifarelli. Using metaphors to unpack student beliefs about mathematics. *School Science and Mathematics*, 108(7):326–333, 2008.
 - [13] M. Schommer. Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 82(3):498–504, 1990.
- [۱۴] فاطمه احمدپورمبارکه، محمدرضا فدایی و ابوالفضل رفیع‌پور. باورهای معلمان ریاضی دوره متوسطه نسبت به ریاضی و حل مسئله ریاضی. فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران، ۲۴:۲۰۳–۲۲۰، ۱۳۹۱.
- [۱۵] مصطفی شعبانی. بررسی باورهای دانش‌آموزان مقاطع متوسطه درباره ریاضی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۴۰۰.



چهارمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED-259، صص ۲۹۹-۳۰۴

اثربخشی الگوی کلاس معکوس بر میزان پیشرفت تحصیلی فراگیران در درس ریاضی

مریم فضل الهی علمداری*

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
واژه‌های کلیدی: کلاس درس معکوس یادگیری معکوس آموزش ریاضیات	در کنار ظهور فن‌آوری آموزشی، بسیاری از معلمان گام‌های تدریجی اما نوآورانه‌ای برای طراحی مجدد روش‌های تدریس خود با ایجاد مدل جدید، جهت بهبود کیفیت آموزش و یادگیری برداشته‌اند. مدل کلاس درس معکوس یکی از مدل‌های نوآورانه یادگیری ترکیبی است که با استفاده از آن می‌توانند روش تدریس سنتی را به روش تدریس فعال تبدیل کنند، لذا علاقه زیادی را در بین مربیان و محققان برانگیخته است. سازمان‌دهی فرآیند آموزشی کلاس درس معکوس چنین است که محتوای آموزشی، از طریق اینترنت، ویدئوهای معلم ساخته یا دیگر رسانه‌های دیداری خارج از فضای سنتی کلاس درس در اختیار فراگیران قرار می‌گیرد. فراگیران جلسه بعد از فراگیری محتوا از طریق ویدئوهای آموزشی، در کلاس حضور پیدا می‌کنند و با نظارت معلم، در مورد موضوع آن باهم بحث می‌کنند و تکالیف را به صورت گروهی انجام می‌دهند. در این روش جای فعالیت‌های کلاس درس و تکالیف خانه معکوس می‌شوند. مقاله حاضر مروری بر فن‌آوری کلاس درس معکوس می‌کند و با هدف تحلیل ویژگی‌های اصلی آن و تأثیر پتانسیل آن را برای معلمان و فراگیران بررسی می‌کند. این مطالعه نشان می‌دهد که استفاده از فن‌آوری توصیف‌شده در فرآیند یادگیری باعث افزایش انگیزه فراگیران و بهبود نگرش و عملکرد تحصیلی آن‌ها می‌شود زیرا زمان کلاس را می‌توان برای کارهای تعاملی‌تر به کار برد. با افزایش ساعات کلاس درس در این روش، معلمان می‌توانند بر روی موفقیت در پرداختن به همه موضوعات در برنامه درسی تمرکز کنند لذا روش سنتی تدریس که معلم محور می‌باشد را تغییر می‌دهد و به سمت یادگیرنده محوری حرکت می‌دهد و استقلال یادگیرنده و یادگیری مشارکتی را تقویت می‌کند.
2020 MSC: 97D40 97C70 97C10	

۱. مقدمه

آموزش و یادگیری ریاضیات، یا بهتر بگوییم تعلیم و تربیت ریاضیات، مقوله‌ای است که همه ابعاد تربیتی از اهداف آموزش ریاضیات را در برمی‌گیرد. آموزش ریاضیات، هم‌اکنون به‌عنوان یکی از شاخه‌های اصلی ریاضیات تلقی شده و در این حوزه معرفتی، پژوهش‌های مهمی در جریان می‌باشد. هدف این پژوهش‌ها ارتقاء روش‌های یاددهی-یادگیری، بهینه کردن محتوای ریاضیاتی که باید تدریس گردد، کاربردی کردن ریاضیات، پرورش نظم فکری و درست اندیشیدن و توسعه توانایی بالقوه شهروندان به‌عنوان انسان‌هایی منطقی، خلاق، مبتکر و بالنده می‌باشد. از عوامل مؤثر در فرآیند تدریس می‌توان به آمادگی، انگیزه و هدف، شرایط و محیط یادگیری، نگرش، روش تدریس و تمرین و تکرار اشاره نمود. انگیزه، محرکی است که نیروی فعالیت را افزایش می‌دهد و هدف یکی از عوامل ایجاد انگیزه است. هدف به فعالیت انسان جهت و نیرو می‌دهد. تأثیر تمرین و تکرار در کل فرآیند یادگیری نیز غیرقابل انکار است. این نکته غیرقابل انکار است که کیفیت اجرای تمرین، مقدار و زمان آن نقش بسیار مهمی در تثبیت یا عدم تثبیت رفتار دارد. تکرار مهارت‌ها منجر به توسعه توانایی‌ها است. نگرش‌ها و ادراکات، توانایی فراگیران را در یادگیری، تحت تأثیر قرار می‌دهد. معمولاً نگرش منفی نسبت به ریاضیات یک استراتژی دفاعی موفق برای خودپنداری منفی فرد است. چنین

*سخنران

پست الکترونیکی: m_fazlolahi@pnu.ac.ir (مریم فضل الهی علمداری)

فردی برای دفاع از خویش در مقابل ناتوانی در حل مسئله‌های ریاضی و احساس ناخوشایندی که در کلاس درس ریاضی دارد نگرش منفی از خود بروز می‌دهد. معلمان توانای ریاضی به‌خوبی می‌توانند با بالا بردن توانایی فراگیران در حل مسئله‌های ریاضی و شرکت دادن آن‌ها در فعالیت‌های ریاضی کلاس، نگرش‌های مثبت آنان را تا حد چشمگیری رشد و ارتقا دهند. وجود تجارب مثبت در فعالیت ریاضی سبب می‌شود فراگیر زمانی که به‌طور منفرد می‌خواهد به حل مسئله‌های ریاضی بپردازد با تداعی این تجارب مثبت، انگیزه بیشتری برای پرداختن به مسئله‌های ریاضی داشته باشد ولی افزایش ترس و اضطراب نسبت به ریاضی در فراگیران سبب می‌شود تجارب منفی بیشتری در فراگیران شکل بگیرد و بی‌تردید در فرآیند یادگیری آن‌ها تأثیر منفی بگذارد.

روش تدریس از عناصر اصلی برنامه درسی است که در جهت تحقق هدف‌های آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از این رو لازم است روش‌های یاددهی - یادگیری (تدریس) بر اساس مجموعه هدف‌های آموزشی انتخاب شود. برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های روش مناسب و آموزش اثربخش عبارت است از: تناسب با هدف، تناسب با دیگر عناصر برنامه، تناسب با یادگیرنده، برخورداری از تنوع، فعال بودن یادگیرندگان و مشارکت هرچه بیشتر آن‌ها چنانچه از طریق آن بتوان علاوه بر دانش‌افزایی، به دیگر جنبه‌های یادگیری یعنی مهارت‌آموزی و تغییر نگرش نیز پرداخت [۷]. در روش‌های یادگیری سنتی، فعالیت اصلی کلاس درس را معلم خود بر عهده می‌گیرد و فراگیران به فراخور استعداد و حافظه خود قسمتی از مطالب تدریس شده را کسب می‌نمایند و اصولاً به‌ندرت درگیر کار تدریس می‌شوند و این امر باعث می‌شود از خلاقیت فراگیران استفاده نشود و فراگیران نتوانند از توانایی‌های خود استفاده کافی ببرند. لذا فراگیران فعال نیستند، حوصله‌شان سر می‌رود، قدرت خلاقیتشان پرورش نمی‌یابد و صرفاً به‌صورت گیرنده اطلاعات درمی‌آیند [۱]. تمایل و وابستگی آن‌ها به معلم افزایش یافته و منجر به وخیم‌تر شدن مشکلات یادگیری در زمینه محتواهای گوناگون می‌شود [۲۲]. از دست دادن زمان و تکرار مباحثی مشخص در کلاس، اولین چالشی است که معلم با آن روبروست [۲]. زمان محدود کلاس که می‌تواند به بهترین فرصت مباحثه، یادگیری و آموزش تبدیل شود، تأمل برانگیز است. هنگامی که ارزشمندترین دارایی معلم، دقایقی است که با فراگیران در کلاس می‌گذرانند، باید تدبیری اندیشید که از این زمان به بهترین صورت ممکن، استفاده شود [۶].

پایه از نخستین افرادی است که به‌کارگیری روش‌های فعال یادگیری را توصیه نموده است؛ او روش‌های تدریس فعال را عاملی برای ایجاد انضباط درونی می‌داند [۵]. روش تدریس فعال، روشی است که فراگیر در سراسر فعالیت‌های یاددهی - یادگیری یک شرکت فعال داشته باشد و نقش معلم انتقال و ارائه مطالب نیست بلکه نقش راهنما را در فرآیند تدریس ایفا می‌کند. این روش به معلم این امکان را می‌دهد که وقت بیشتری صرف گروه‌های فراگیران و فرد فرد آن‌ها کرده و این امر به‌نوبه خود منجر به قضاوت و ارزیابی کیفی بهتری از فراگیران می‌شود. همچنین یادگیری فعال ارزیابی دبیران از نیازهای خاص فراگیران را توسعه می‌دهد.

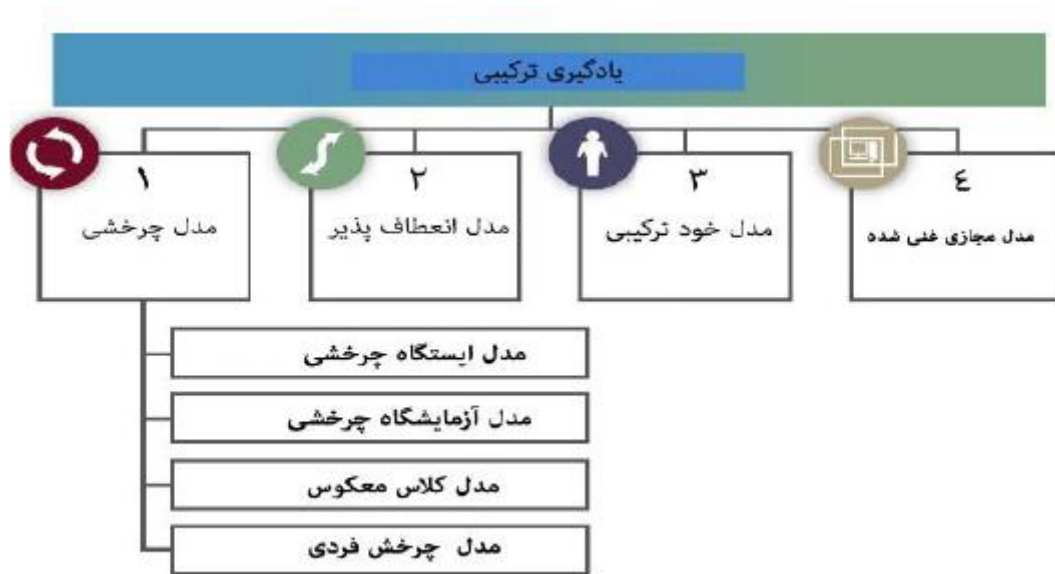
از طرف دیگر، از دید فراگیران، این روش‌ها مشوق یادگیری مهارت‌های حل مسئله و یادگیری مستقل آنان است که این امر هم در کار عملی آتی آنان و هم در امور شغلی‌شان اهمیتی مضاعف دارد. از مزیت دیگر روش تدریس فعال می‌توان به این امر اشاره کرد که مشوق احترام متقابل بوده و نظرات دیگران را ارج می‌گذارد و این یک هدف تربیتی مهمی در همه نظام‌های آموزشی است و حمایت‌کننده یادگیری همکارانه است نه یادگیری رقابت مدارانه.

با ورود به عصر اطلاعات نهادهای آموزشی دستخوش تغییرات اساسی شدند. امروزه شرایط یادگیری با توجه به پیشرفت سریع فن‌آوری، تغییر کرده است. پیشرفت فن‌آوری، فعالیت‌های یاددهی - یادگیری را از حالت سنتی و منفعل به یادگیری فعال و ترکیبی تغییر داده است [۳]. به گفته تورن [۲۷] یادگیری ترکیبی منطقی‌ترین و طبیعی‌ترین تحول دستور کار یادگیری ما است. این یک راه‌حل ظریف برای چالش‌های ایجاد یادگیری و توسعه با نیازهای افراد پیشنهاد می‌کند. این نشان‌دهنده فرصتی برای ادغام پیشرفت‌های نوآورانه و فن‌آورانه ارائه‌شده توسط یادگیری آنلاین با تعامل و مشارکت ارائه‌شده در بهترین یادگیری سنتی است. یادگیری ترکیبی همان‌طور که تورن تعریف‌شده، یادگیری آنلاین را به روش‌های سنتی‌تر یادگیری و توسعه ترکیب می‌کند.

یادگیری ترکیبی به‌عنوان یک محیط یادگیری تعریف می‌شود که فناوری را با یادگیری حضوری ترکیب می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، یادگیری ترکیبی به معنای استفاده از انواع روش‌های ارائه برای رسیدن به بهترین اهداف دوره با ترکیب آموزش حضوری در یک کلاس درس سنتی از جمله آموزش آنلاین است.

پژوهش‌های هورن و استاکر در سال ۲۰۱۱ [۲۵] چهار مدل اصلی آموزش ترکیبی: چرخشی، انعطاف‌پذیر، خودترکیبی و آموزش مجازی غنی شده را معرفی کردند. مدل کلاس معکوس زیرمجموعه مدل آموزش چرخشی در آموزش ترکیبی است (شکل ۱). در مدل آموزش چرخشی، فراگیر یک نوع فعالیت گروهی، پروژه فردی و یا تکالیف نوشتاری را به همراه یک دوره آموزشی آنلاین انتخاب می‌کند. مدل کلاس معکوس، یک استراتژی آموزشی است که با تغییر مسیر کلاس‌های سنتی سعی در افزایش تعامل و یادگیری فراگیران دارد که در آن با جابه‌جایی مکان آموزش و انجام تکالیف می‌توان به نتایج شگرفی دست یافت.

برای درک چگونگی طراحی مؤثر فرصت‌های یادگیری بر اساس فن‌آوری، ابتدا باید به تأثیرات عمیق آن‌ها در جامعه، مدرسه و برنامه‌ریزی‌های آموزشی پی ببریم. فن‌آوری‌های جدید الکترونیکی عامل بسیار مهمی در شکل‌گیری بافت‌های اجتماعی و فرهنگی جدید به شمار می‌رود و بافت‌های جدید، محیط‌های جدید آموزشی و راه‌های جدید طراحی آموزشی را ایجاد می‌کنند. باید به خاطر داشت که هیچ‌گاه یادگیری فراگیران به‌صورت تصادفی اتفاق نمی‌افتد، بلکه نتیجه مستقیم تجارب و فرصت‌های یادگیری آنان است. باید راه‌های جدیدی برای طراحی این‌گونه فرصت‌ها جستجو شود [۴]. می‌توان گفت که فن‌آوری با تغییر شیوه‌های آموزشی، مفهوم سنتی «یادگیری بر اساس حافظه» را به سوی «یادگیری خلاق و پویا» هدایت کرده است [۸]. فراگیران با بهره‌گیری از این فن‌آوری‌ها، درباره اجرای خود بازخورد دریافت کنند، بازتاب افکار و ایده‌های



شکل ۱: یادگیری ترکیبی

خود را ببینند و آن‌ها را مجدداً بررسی کنند [۱۳].

۲. یادگیری معکوس

روش کلاس معکوس، از جمله روش‌های تدریس فعال می‌باشد که کمبودهای روش‌های سنتی را جبران نموده و برای تعامل بیشتر معلم و فراگیر و تعامل فراگیران با یکدیگر توصیه می‌شود [۲۶].

کلاس درس معکوس انقلابی در حوزه آموزش است که توسط معلمان آمریکایی، جان برگمن و آرون سمز [۱۰] در سال ۲۰۱۲ ابداع شد. آن‌ها کلاس درس معکوس را به عنوان محیطی تعریف می‌کنند که در آن هر کاری که به طور سنتی در کلاس انجام می‌شد اکنون در خانه انجام می‌شود و هر آنچه که به طور سنتی به عنوان تکلیف انجام می‌شد اکنون در کلاس انجام می‌شود.

تعریفی که برگمن، اوزمایر و ویلی [۹] برای کلاس درس معکوس ارائه می‌کنند، فرآیند جایگزینی آموزش مستقیم با فیلم و در نتیجه ایجاد انگیزه در فراگیران برای تمرکز بر فعالیت‌های یادگیری اصلی آن‌ها با معلمان خود در کلاس است. این روش به عنوان یک مدل آموزشی توصیف می‌شود که در آن مطالب سخنرانی که معمولاً در کلاس ارائه می‌شود، قبل از زمان کلاس به صورت آنلاین به فراگیران داده می‌شود. کلاس درس معکوس رویکردی است که سخنرانی‌های درون کلاس را با فعالیت‌های عملی مشترک جایگزین می‌کند و این نیاز را دارد که فراگیران مطالب درسی را در زمان خود مرور کنند.

به گفته برگمن، اوزمایر و ویلی، تعریف سنتی کلاس درس معکوس، جایگزین آموزش مستقیم با فیلم‌ها و تشویق فراگیران به تمرکز بر فعالیت‌های مهم یادگیری با معلمان خود در داخل کلاس است.

برگمن و سمز معتقدند که کلاس درس معکوس یک تمرین آموزشی است که سخنرانی را از کل فضای یادگیری به فضای یادگیری فردی انتقال می‌دهد و فضای یادگیری باقیمانده را به یک محیط یادگیری پویا و تعاملی تبدیل می‌کند. علاوه بر این، تأثیرات کاربرد کلاس درس معکوس به جای کلاس درس سنتی بر جنبه‌های روان‌شناختی فراگیران مهم است. تحقیقات مختلف نشان داده است که الگوی کلاس درس معکوس روشی مؤثر در زمینه آموزش است. بارزترین مزیت کلاس درس معکوس، شاید ظرفیت افزایش زمان سپری‌شده برای رابطه چهره به چهره بین معلمان و فراگیران باشد. گودوین و میلر استدلال کرده‌اند که کلاس درس معکوس زمان بیشتری برای بازخورد فعال معلم می‌دهد و می‌تواند تعامل بین معلم و یادگیرنده را افزایش دهد. در مدل کلاس درس معکوس، معلمان روش تدریس و یادگیری را تغییر می‌دهند، به این معنی که آنچه به طور سنتی در مدرسه انجام می‌شود، در خانه انجام می‌شود. فراگیران در خانه از طریق فیلم‌هایی که توسط معلمان ارائه شده است یاد می‌گیرند و کلاس موقعیتی است که فرصت بیشتری برای تعامل و حل مشکلات دارد.

توکر [۲۸] معتقد است که مدل کلاس درس معکوس با تأثیرگذاری بر مشارکت، انگیزه و بهبود عملکرد تحصیلی، یادگیری فراگیران را تقویت می‌کند.

در یادگیری مشارکتی، فراگیران به شیوه‌ای مشارکتی با یکدیگر حداکثر تعامل را دارند که منجر به یادگیری عمیق‌تر می‌شود و فرصت‌هایی را فراهم می‌آورد تا فراگیران مهارت‌های اجتماعی را توسعه دهند. در این مدل کلاس، نقش معلم از یک ارائه‌دهنده دانش به یک راهنما، تسهیل‌کننده و سازمان دهنده تبدیل شده است. برنامه‌ریزی و مسئولیت‌پذیری از الزامات یک کلاس درس معکوس موفق هستند. بیشاپ و ورلگر [۱۱] کلاس درس معکوس را به‌عنوان یک مدل توضیح می‌دهند که یک روش یادگیری دانش‌آموز محور است که شامل دو بخش فعالیت‌های تعاملی در حین یادگیری یک درس و تدریس فردی بر اساس رایانه در خارج از کلاس است. اصول طراحی کلاس درس معکوس توسط کیم [۲۱] به شرح زیر است:

۱. ایجاد فرصتی برای فراگیران به جهت به دست آوردن اطلاعات اولیه قبل از فعالیت
۲. تشویق فراگیران به تماشای سخنرانی‌های آنلاین و آمادگی قبل از فعالیت کلاس
۳. سازمان‌دهی روش‌های ارزیابی
۴. پیوند دادن فعالیت‌های درون کلاس با فعالیت‌های خارج از کلاس
۵. ارائه رهنمودهای واضح و سازمان‌دهی شده
۶. فراهم کردن زمان کافی برای تکمیل تکالیف
۷. ترویج دانش آموزان برای ایجاد یک جامعه یادگیری
۸. ارائه بازخورد فوری در مورد کارهای فردی یا گروهی

مفیدترین استراتژی مطالعه می‌تواند توسط فراگیران انتخاب و استفاده شود درحالی‌که با سرعت خود در آموزش حرکت می‌کنند. هانگ نشان داد که مشارکت، رضایت و عملکرد فراگیران پس از شرکت در این رویکرد آموزشی تغییر مثبتی را نشان می‌دهد. فراگیران مسئولیت فعالیت‌های خارج از کلاس را از طریق تماشای فیلم‌ها، بازدید از وب سایت‌های مربوط به دوره، گوش دادن به فایل‌های صوتی، خواندن منابع مرتبط و غیره بر عهده می‌گیرند. زمان کلاس را برای تکالیف گروهی حل مسئله آزاد می‌کند.

یادگیری معکوس تأثیر عمیقی روی زندگی حرفه‌ای معلمان دارد اما مهم‌تر از آن، تأثیرات مثبتی است که بر زندگی فراگیران دارد. مربیان و اساتید باید سه مورد قابل توجه مرتبط با کلاس معکوس را بپذیرند. اولاً، دانش قبلی برای ایجاد یادگیری عمیق‌تر موردنیاز است. ثانیاً، فراگیران زمانی بهتر یاد می‌گیرند که درگیر چیزی باشند که می‌آموزند. ثالثاً، کلاس‌های معکوس، یک مسیر یادگیری پایدار را امکان‌پذیر می‌کنند که حتی پس از پایان کلاس نیز ادامه می‌یابد. مؤلفه‌های محیط‌های یادگیری معکوس موفق عبارت‌اند از:

۱. همکاری: همکاری در این نوع کلاس به یادگیری فراگیران کمک می‌کند.
۲. یادگیری فراگیر محور: یادگیری کلاس معکوس شامل تغییری از شیوه‌های غالب معلم، مانند ارائه و سخنرانی به یادگیری فراگیر محور است که معلم تسهیل‌کننده یادگیری است.
۳. فضاهای یادگیری بهینه‌شده: تخته‌های سفید، ویدئوها و فن‌آوری جدید باید در مرکز توجه کلاس برای تعامل و پویایی بیشتر قرار گیرد.
۴. زمان کافی برای اجرا: زمان زیادی در این روش برای اجرای فعالیت‌ها، نیاز است.
۵. نیاز به حمایت مدیران: برای ایجاد توسعه حرفه‌ای و منابع برای موفقیت کلاس درس، باید سایر معلمان و مدیران، حمایت لازم را انجام دهند.
۶. دپارتمان‌های فن‌آوری اطلاعات در موسسه: باید موسسه ابزار لازم مانند ویدئوها و وب سایت‌ها را به‌صورت آنلاین و آفلاین ارائه نمایند.

این روش تدریس توانایی خودآموزی را تمرین می‌کند و در فراگیران اعتماد به نفس ایجاد می‌کند. فراگیران می‌توانند در هر زمان و هر مکانی که بخواهند به ویدئوهای سخنرانی دسترسی داشته باشند.

میسون و همکاران [۲۴] دریافتند که فراگیران در کلاس درس معکوس از دروس، رضایت بیشتری داشتند و می‌توانستند مطالب بیشتری را نسبت به فراگیران کلاس سنتی پوشش دهند. هلگولد و موئن [۱۸] اعتقاد دارند که کلاس درس معکوس، تعامل در کلاس را بهبود می‌بخشد که باعث می‌شود فراگیران با فعالیت‌های یادگیری، تعامل بیشتری داشته باشند و با همسالان خود همکاری کنند. حقیقی و همکاران [۱۷] در مطالعه خود ثابت کردند که فراگیرانی که در کلاس درس معکوس شرکت می‌کنند، بیشتر درگیر مطالب و دروس بودند و از یادگیری در این نوع کلاس لذت می‌بردند.

یکی از مشکلات معلمان، کمبود وقت به‌ویژه در درس ریاضی است که کمبود وقت باعث افت تحصیلی و ضعیف شدن فراگیران می‌شود. یکی از این روش‌ها که در تحقیقات به‌ویژه در ریاضیات برای غلبه بر این کمبود شده است، آموزش معکوس است.

پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیدند که یادگیری معکوس بر روی بازده تحصیلی و ایجاد علاقه و نگرش مثبت در درس‌های گوناگون می‌شود. در یادگیری معکوس، فراگیران به‌وسیله منابع و مواد آموزشی، مطالب آموزشی را فراگرفته و محیط کلاس به رفع مشکلات، ابهامات و بحث درباره مطالب آموخته‌شده اختصاص می‌یابد و می‌توان انتظار داشت که یادگیری بیشتری انجام می‌شود. نگرش فراگیران با توجه به بهبود وضعیت یادگیری نسبت به ریاضیات بهبود می‌یابد [۱۹]. نقش معلم در این روش، هدایت یادگیری، تطبیق رویکردهای تدریس با نیازها و تهیه سناریوهای مختلف یادگیری است [۱۴].

این روش شامل سه مرحله یادگیری است: (۱) یادگیری فردی، که با که با ریتم‌های مختلف یادگیری تطبیق داده می‌شود، زیرا محتویات مرحله اول را می‌توان به دفعات لازم تجسم کرد و کار مسئولانه و مستقل را تشویق می‌کند. (۲) یادگیری مشارکتی، که در مرحله دوم کار شده است، جایی که در گروه‌ها اهدافی را دنبال می‌کنیم که تا رسیدن به هدف نهایی بر روی آن‌ها توافق شده است. (۳) یادگیری مبتنی بر مسئله، که در قسمت دوم این روش صورت می‌گیرد.

پژوهشگران [۱۸] استدلال می‌کنند که این روش از یادگیری ریاضیات، سطوح بالاتری از طبقه‌بندی بلوم (تجزیه و تحلیل) که نیاز به بحث بیشتری دارد را نتیجه می‌دهد.

مزایایی که روش کلاس درس معکوس برای تدریس به ارمغان می‌آورد به شرح زیر است [۲۹]: این روش با ریتم‌های یادگیری انعطاف‌پذیر است زیرا توضیحات نظری را می‌توان در هر زمان و مکانی مورد استفاده قرارداد. خودارزیابی با ارائه بازخورد در مورد پیشرفت و کیفیت کار فراگیران امکان‌پذیر می‌سازد که موجب می‌شود فراگیران مسئولیت یادگیری خود را بپذیرند. علاقه و انگیزه فراگیران برای یادگیری را افزایش می‌دهد. خلاقیت و تفکر انتقادی را در فراگیران پرورش می‌دهد. کار گروهی مشارکتی را توسعه می‌دهد [۲۵].

فراگیر در مشاهده تعداد دفعاتی که نیاز دارد ویدئوها را مشاهده نماید تا به درک مفهوم مورد نظر برسد، آزاد است. فراگیران به یادگیرندگان مستقل تبدیل می‌شوند. اعتماد به نفس فراگیران افزایش می‌یابد و ترس و استرس ناشی از عدم یادگیری، کاهش می‌یابد.

برای مؤثر بودن این روش و برای بهره‌مندی از همه این مزیت‌های آموزشی، ضروری است که معلمان شایستگی دیجیتال را کسب کرده باشند که به آن‌ها امکان می‌دهد مطالب سمعی و بصری ایجاد کنند و در بسترهای مدیریت محتوا حرکت کنند و همچنین آموزش روش شناختی کافی داشته باشند.

۳. بحث و نتیجه‌گیری

کلاس‌های درس سنتی عمدتاً معلم محور هستند که با رویکردهای سازنده گرایانه به یادگیری و تدریس در تضاد است. امروزه روش‌های سنتی یاددهی - یادگیری منسوخ شده و پاسخگوی خواسته‌های فراگیران امروزی نیست که منفعلانه و بی‌انگیزه رفتار می‌کنند و تفکر انتقادی را تشویق نمی‌کنند. همچنین روش‌های سنتی با پیشرفت فناوری، سازگاری ندارد. بنابراین، ما به یک انقلاب در نحوه درک و عملکرد فرایند یاددهی - یادگیری نیاز داریم که در آن مهارت‌های مختلف پیشنهاد می‌شود و منابع دیجیتالی گنجانده می‌شود که مشخصه جامعه امروزی است. فن‌آوری اطلاعات و ارتباطات برای این تغییر روش شناختی ضروری است زیرا فراگیران را قادر می‌سازد تا به‌طور مستقل و به شیوه‌ای شخصی شده کار کنند [۱۹].

ورود فناوری به کلاس درس، مفهوم تدریس را به نفع آموزش آنلاین، استقلال فراگیران و ماهیت عملی حضور در کلاس تغییر داده است. پیشنهاد شیوه‌های خوب از این نظر، ایده‌هایی را در اختیار معلمان تمام مقاطع آموزشی در حوزه ریاضیات قرار می‌دهد تا بتوانند در کلاس درس خود انجام دهند و پیشرفت را از طریق فناوری ارتقا دهند.

در نتیجه، پیشرفت تکنولوژی سرسام‌آوری که جامعه و در نتیجه سیستم آموزشی تجربه کرده است، منجر به دگرگونی عمیق در فرایند یاددهی - یادگیری شده است. لذا لازم است معلمان علائق و انگیزه‌های خود را برای برنامه‌ریزی تدریس خود کشف کنند. به همین دلیل، گنجاندن فن‌آوری و کاربرد آن در روش‌های آموزشی به‌عنوان راه‌حلی تلقی می‌شود که باعث ایجاد انگیزه در فراگیران، افزایش علاقه به موضوع و محتوای آن می‌شود و همان‌طور که این تحقیق نشان داده است، باعث کسب دانش بهتر می‌شود.

اجرای کلاس درس معکوس یکی از جدیدترین مرتبط‌ترین نوآوری‌های روش شناختی در سال‌های اخیر محسوب می‌شود. به‌طور خاص، در زمینه ریاضیات، ورود این روش تدریس باعث شده است که معلمان آن را در کار روزانه خود در کلاس درس بگنجانند [۱۲]. هدف از این مطالعه تجزیه و تحلیل تجربیات اصلی با استفاده از این روش شناختی در هنگام تدریس ریاضیات و بررسی تأثیر آن بر فراگیران بود.

بنابراین، یافته‌های اصلی کار نشان می‌دهد که این روش باعث ارتقای میزان انگیزه فراگیران نسبت به ریاضیات شد [۱۶] به‌طور مشابه، بهبود جنبه‌هایی مانند یادگیری مشارکتی در فعالیت کلاس و همچنین یادگیری مستقل نیز باید برجسته شود. یادگیری فعال و مشارکتی باعث ایجاد جو اجتماعی بهتر و همگامی گروهی بهتر می‌شود [۱۳] از طرف دیگر، قرار دادن بخشی از فعالیت روش‌شناسی در خارج از کلاس باعث رشد مهارت‌های خودتنظیمی و خودمختاری نسبت به یادگیری می‌شود. البته نتایج بررسی مشخص کرد که اگرچه اکثر فراگیران این هدف را برآورده کردند، یک گروه اقلیت پیدا شد که ویدئوها را دنبال نمی‌کنند و آن‌ها در گروه خود با مشکل بیشتری روبرو هستند. به‌طور خلاصه، اجرای متدولوژی‌های فعال مانند کلاس درس معکوس در حال تبدیل شدن به یک روش نوظهور است که در چشم‌انداز ریاضی برجسته می‌شود.

کلاس درس معکوس، فرصتی برای تجدید برنامه درسی و توسعه رویکرد فراگیر محور می‌باشد. مدل کلاس معکوس این پتانسیل را دارد که معلمان را قادر می‌سازد تا تفکر انتقادی و مستقل را در فراگیران خود پرورش دهند، ظرفیت مادام‌العمر را ایجاد کنند و در نتیجه فارغ‌التحصیلان آینده را برای زمینه‌های محل کار خود آماده کنند.

مراجع

- [۱] محمد حسن بیژن زاده. آموزش و یادگیری ریاضیات. انتشارات دانش‌پذیر، ۱۳۸۸.
- [۲] رضا خیرآبادی. خلاقیت در آموزش زبان انگلیسی با اجرای کلاس معکوس. اولین کنفرانس ملی نگاهی نو به تحول و نوآوری در آموزش، ۱۳۹۳.

- [۳] نظری دهکردی، سمیه بابایی، میثم فارسانی و سعید اردکانی. بررسی نگرش اعضای هیئت علمی موسسات آموزش عالی به استقرار نظام آموزش الکترونیکی ترکیبی. فصلنامه علوم و فنون مدیریت اطلاعات. سال اول. شماره ۲، ۱۳۹۵.
- [۴] شهناز ذوفن. کاربرد فناوریهای جدید در آموزش. انتشارات سمت، ۱۳۸۳.
- [۵] مرجان عبیری، عباس صادقی، مهناز خسرو جاوید و نادر وافقی. مقایسه تاثیر روش تدریس همیاری، اکتشافی و سخنرانی بر پیشرفت تحصیلی و نگرش نسبت به درس فیزیک. پژوهش در برنامه ریزی درسی، ۱۱ (۴۲)، ۵۵-۶۷، ۱۳۹۳.
- [۶] محمد یاسین کرمی، آیدا امانت، اطهر راسخ جهرمی و عبدالرضا ستوده جهرمی. عوامل موثر بر حضور در کلاس های درس نظری از دیدگاه دانشجویان پزشکی دانشگاه علوم پزشکی جهرم. مجله دانشگاه علوم پزشکی پارس، ۱۱ (۱)، ۱۳۹۲.
- [۷] دکتر علی میرزاییگی. برنامه ریزی درسی و طرح درس در آموزش رسمی و تربیت نیروی انسانی. نشر بسطرون، ۱۳۸۰.
- [۸] معصومه نوروزی، دکتر فرامک زندی، دکتر فریبرز موسی مدنی. رتبه بندی روشهای کاربرد فناوری اطلاعات در فرآیند یاددهی-یادگیری مدارس. فصلنامه نوآوری های آموزشی، شماره ۲۶، ۱۳۸۷.
- [9] J. Bergmann, J. Overmyer, and B. Wilie. The Flipped Class: Maths Vs. Reality-THE DaLLY RIFF-Be Smarter. About Education, 5 January, 2015.
- [10] J. Bergmann, and A. Sams. Flipp Your Classroom: Reach Every student in Every Class Every Day. Eugene, Or: International Society for technology in Education, 2012.
- [11] J.L. Bishop, and M. Verleger. The flipped classroom: A survey of the research. ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings, 2013.
- [12] B. Bognar, M. Sabli'c, and A. Škugor. Flipped Learning and Online Discussion in Higher Education Teaching. In The Flipped Classroom: Practice and Practices in Higher Education. Springer: New York, NY, USA, 371-392, 2019.
- [13] A. Brown, and J. Compoine. Guided discovery in community of learners. In K. McGilly(ED), classroom learns: Integrating Cognitive theory and classroom practice, 1994.
- [14] M.M. Carreño, P.M. Carreño. El aula invertida versus método tradicional: En la calidad del aprendizaje. Rev. Electrón. Sobre Technol. Educ. Soc. 6, 1-17, 2019.
- [15] Y. Chen, Y. Wang, S. Kinshuk, and N. Chen. Is FLIP enough? Or should we use the FLIPPED model instead? Computers and Education, 79(1), 16-27, 2014.
- [16] B. Goodwin, and K. Miller. Evidence on Flipped Classrooms is still coming in. Educational Leadership, 70(6), 78-80, 2013.
- [17] H. Haghghi, M. Jafarigohar, H. Khoshima, and F. Vahdany. Impact of flipped classroom on EFL learners' appropriate use of refusal: Achievement, participation, perception. Computer Assisted Language Learning, 32(3), 261-293, 2019.
- [18] N. Helgevold, and V. Moen. The use of flipped classrooms to stimulate students' participations in an academic course in Initial Teacher Education. Nordic Journal of Digital Literacy, 10(1), 29-42, 2015.
- [19] F.J.Hinojo, M.P. Cáceres, M. Sanz, and G. Gómez. Los entornos virtuales de aprendizaje como medio para favorecer la inclusión educativa en la universidad. In Innovación y Tecnología en Contextos Educativos. Universidad de Málaga: Málaga, Spain, 871-877, 2019.
- [20] M.B. Horn, and H. Staker. The Rise of K-12 Blended learning. Innosight Institute. Public Impact, 2011.
- [21] M. Kim, S. Kim, O. Khera, and J. Getman. The experience of three flipped classrooms in an urban university: an exploration of design principles. The Internet and Higher Education, 22(3), 37-50, 2014.
- [22] A. Lee, and P. Boyle. Quality assurance for learning and teaching: A systemic perspective, Ideas on Teaching, 6, 82-94, 2008.
- [23] J. López, A. Fuentes, J.A. López, and S. Pozo. Formative Transcendence of Flipped Learning in Mathematics Students of Secondary Education. Mathematics , 7, 2019.
- [24] G. S. Mason, T. R. Shuman, and K.E. Cook. Comparing the effectiveness of an inverted classroom to a traditional classroom in an upper-division engineering course. IEEE Transactions on Education, 56(4), 430-435, 2013.
- [25] F. Oromena, and M. Mosimege. Effect of flipped classroom learning approach on mathematics achievement and interest among secondary school students. Education and Information Technologies, 2023.
- [26] M. Prince. Does active learning work? A review of the research. Journal of engineering education, 93(3), 223-231, 2013.
- [27] K. Thoren. Blended learning: How to integrate online and traditional learning. Londin: Kogan Page, 2003.
- [28] B. Tucker. The Flipped Classroom. Education Next, 12(1), 80-83, 2012.
- [29] Z. Zainuddin, H. Habiburrahim, S. Muluk, and C.M. Keumala. How do students become self-directed learners in the EFL flipped-class pedagogy? A study in higher education. Indones. J. Appl. Linguist, 8, 2019.