

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

دانشگاه گنبدکاووس، ۵ اسفند ۱۴۰۰

مجموعه مقالات همایش (فارسی)

دبیر علمی

دکتر نعمت اله تقی نژاد

دبیر اجرایی

دکتر مهدی شاهینی

دکتر راضیه فرخزاد رستمی

تهیه و تنظیم

دکتر مهدی شاهینی

باسمه تعالی

اهمیت ریاضیات و کاربردهای گسترده آن در زمینه‌های مختلف علمی بر همگان روشن است و دانش ریاضی به متخصصان کمک کرده است تا درباره هوا، دریا و کشفیات بشر مانند هوافضا و سایر فناوری‌های پیشرفته اطلاعات بیشتری کسب کنند. از این رو به یاری خداوند متعال و با هدف بسط و گسترش ریاضیات، سومین کنفرانس ملی ریاضی و آمار دانشگاه گنبد کاووس در اسفند ۱۴۰۰ برگزار گردید و افتخار پذیرایی از مهمانان محترم علمی و صنعتی و پژوهشگران گرامی بر عهده دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی دانشگاه گنبد کاووس قرار داشت . امید آنکه این خدمت گامی در جهت توسعه مدیریت علمی برای ساخت ایران عزیز و نزدیک‌سازی زبان علم و عمل باشد.

دبیر علمی

دکتر نعمت اله تقی نژاد

فهرست

بررسی k–قاب‌های پیوسته در هم تنیده در فضاهای هیلبرت ۱
طرح و اثبات یک قضیه پیرامون خاصیت مشترک نقطه تلاقی شعاع و بعضی از وترهای یک دایره ۷
نمایش استوار از نیم گروه های معکوس ۱۰
وجود جواب مسئله تعادل با روش تکراری اصلاح‌شده ایشی‌کاوا ۱۳
ارتباط بین درون جبری(نسبی) و درون توپولوژیکی و قضایای نقاط ثابت ۱۶
معکوس ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز مختلط ۲۰
کاربرد شبکه های عصبی برای حل عددی جریان الکتروهیدرودینامیک در یک کانال استوانه ای ۲۵
عملکرد شبکه عصبی RBF در بررسی بیماری کرونا در کشور ایران ۳۳
مروری بر برآورد نقطه‌ای روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی ۳۸
مروری بر برآورد ناحیه اطمینان روش نمونه‌گیری تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی ۴۳
بررسی ویژگی های توزیع کیبل و توزیع گامای دو متغییره ۴۸
معرفی روش بیزی برای استنباط آماری با مشاهده تکی از توزیع نرمال ۵۴
روش دنباله‌ای محض در برآورد فاصله اطمینان تابعی از پارامترها در مدل خودبازگشتی مرتبه p ۵۸
مدل رگرسیون لوجستیک با متغیر پاسخ تحت پاسخ تصادفی به سؤال سقط جنین عمدی ۶۴
تحلیل دادههای همبسته با روش گشتاورهای تعمیم یافته بیزی ۷۳
بررسی ضریب وابستگی دمی – کرانی توزیع‌های چندمتغیره ۸۲
مطالعه ای بر روی همگرایی کامل متغیرهای وابسته‌ی منفی ۸۸
پیش بینی فروش شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان ۹۸
شاخص های تیل و محاسبه آنها در خانواده توزیع های پارتو ۱۰۷
تابع مطلوبیت و شاخص های نابرابری مبتنی بر آن ۱۱۵
خانواده توزیع های بتای تعمیم یافته نوع ۲ و ارتباط بین آنها ۱۲۳
منحنی و شاخص بونفرونی و ارتباط آنها با منحنی لورنتس و برخی شاخص های مهم نابرابری ۱۳۳
برآورد ناپارامتری تابع رگرسیون همراه با خطای ناهمسان ۱۴۵
برآورد کرنل تابع چگالی تحت داده های دارای وابستگی زبرجمعی منفی ۱۴۸
ارائه مدل جدیدی از توزیع گامبل و کاربردهای آن در فرآیندهای هیدرولوژیکی ۱۵۳
اثربخشی کاربرد نقشه‌های مفهومی بر درک دانشجویان رشته آموزش ریاضی از نمودارهای آماری ۱۶۱
ارزیابی مدل‌های ARMA–GARCH-M برای مدل‌سازی میانگین و نوسانات سرعت باد ۱۷۴
مروری بر خانواده توزیع های احتمال سیستم پیرسن تعمیم یافته ۱۷۹
مدلسازی تعداد تصادفات منجر به فوت در شهر تهران با رویکرد فرایند نقطه ای ۱۸۸
برآورد پارامتر توزیع لیندلی وارون برای داده های سانسور شده ی نوع اول ۲۰۴
تابع مولد اطلاع مبتنی بر مقادیر رکورد ۲۰۹
مطالعه ی رفتار خوشه ای فرایند های نقطه ای زیان و محاسبه ی برخی از معیارهای سنجش ریسک ۲۱۶
روند سری زمانی شاخص های جمعیتی کشور (دوره زمانی ۱۳۹۵-۱۳۶۵) ۲۳۵
خوشه‌بندی با تصویر سازی در راستای کشیدگی اکستریمم ۲۴۳
ارزیابی کارایی شعب شرکت بیمه معلم در سال ۱۳۹۹ با روش تحلیل پوششی داده ها ۲۴۹
مدل افراز ضربی و کاربرد آن در خوشه‌بندی داده‌های دمای ایران ۲۵۶
برآوردیابی خطی پارامترهای مکان و مقیاس و پیش‌بینی خطی در توزیع NH بر اساس k- رکوردها ۲۶۱
کارایی تابع چگالی احتمال پارتو در مدل سازی توزیع قطری درختان در جنگلهای ناهمسال ۲۶۹
مدول‌های دینگ تصویری نسبت به یک دو مدول شبه دوگان ۲۷۴
مدول‌های دینگ C–تصویری و هم‌ارزی فاکسبی ۲۷۸
p–اسکیم‌های با رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف مشخص ۲۸۱
برخی خواص از بعد تصویری گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگان ۲۸۶
مدول‌های دینگ تصویری نسبت به یک مدول شبه دوگان روی حلقه‌های جابجایی ۲۸۹

مطالعه بعد دینگ C–تصویری مدول‌ها ۲۹۲
روشی بزای اثبات قضیه مورلی به کمک دایزه های متناظر و متقارن ۲۹۴
ابرλشبه عملگر کوانتومی دیراک روی ابرهذلولی گون اقلیدسی qتغییر شکل یافته ی فازی ۲۹۸
کنیفلد فازی YF^6 و عملگر دیراک روی کلاف تاری اصلی $XF^5 \to SF^2SF^2$ ۳۱۰
انحنای تصویری در منیفلدهای پارا–ساساکی ۳۱۹
کاربرد تابع نمایی گویا تعمیم یافته برای یافتن جواب های دقیق معادله کسری گرایجکوف– ایوانف ۳۲۳
بهبود عملکرد شبکه عصبی با الگوریتم بهینه سازی وال (WOA) به منظور پیش بینی نرخ ارز ۳۲۹
روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل معادله قدرمطلقی ۳۳۴
روش شبه سکانت اصلاح شده برای بهینه‌سازی سراسری ۳۴۰
ردیابی چند عامله با استفاده از کنترل یادگیری تکراری بهینه ۳۶۰
کاربردی از برنامه‌ریزی خطی فازی در بهینه سازی سبد سهام ۳۶۷
روشی کاربردی برای حل معادله‌ی دوگان فازی ۳۷۴
مقایسه و بررسی سه پروتکل خوشه بندی مبتنی بر منطق فازی در شبکه های حسگر بی‌سیم ۳۷۹
یک رویکرد جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی دوطرفه کاملاً فازی ۳۸۶
توسعه مدل قیمت گذاری و مقایسه ریسک دم ها با استفاده از مونت کارلو شرطی ۳۸۹
نگاهی به نظریه بازی ها در اقتصاد ۴۰۲
مدلسازی ادعاهای خسارت دریافتی در بیمه با استفاده از فرایندهای هاوکس ۴۰۵
بررسی درک ریاضی دانشجویان از مفهوم درخت با استفاده از نظریه پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا ۴۱۳
بررسی تاثیر آموزش خود تنظیمی و باورهای انگیزشی‌با پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش آموزان پایه ششم شهرستان نکا . . . ۴۱۸
بررسی تاثیر یادگیری مشارکتی در بهبود روابط اجتماعی دانش آموزان در درس ریاضی ۴۲۸
تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی بر مبنای طبقه بندی دو بعدی شناختی اندرسون و کراتول ۴۳۵
شناسایی بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی و روش‌هایی برای رفع آن‌ها در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱ . . . . . ۴۴۱
آموزش شیرین ریاضی با معرفی دو بازی ۴۶۵
کج فهمی های رایج در آموزش ریاضی دوره دوم ابتدایی ۴۷۰
بررسی تاثیر مؤلفه های مؤثر بر آموزش و یادگیری ریاضی ۴۷۳
خلاقیت در آموزش ریاضی ۴۷۹
گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی ۴۸۶
مقایسه عملکرد دانش‌آموزان پایه چهارم در مطالعات تیمز ریاضی ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ . . . . . ۴۹۲
چگونه توانستم با استفاده از فضای مجازی و روش های نوین دانش اموزان پایه هفتم به سمت درستی هدایت کنم ۴۹۸
چگونه اضطراب دانش آموزان پایه هشتم را در کلاس درس ریاضی پای تخته و موارد دیگر کاهش دادیم ۵۰۳
پایداری فازی معادله تابعی مربوط به فضاهای حاصل‌ضرب داخلی ۵۱۰
رویکردی هندسی جهت مطالعه‌ی گروه‌های اتومورفیسم ۵۲۷
ر ایزومتری‌های لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در برخی از جهان‌های FRW ۵۳۲

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–108، صص. ۱–۶

بررسی K–قاب‌های پیوسته درهم‌تنیده در فضاهای هیلبرت

غلامرضا رحیم لو*،آ

آگروه علوم پایه –دانشگاه فنی و حرفه ای،تهران ،ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
قاب پیوسته
K–قاب پیوسته
قاب درهم تنیده

چکیده

در این مقاله، قاب‌های پیوسته درهم تنیده برای عملگرها یا به‌اختصار، K–قاب‌های پیوسته درهم تنیده معرفی و مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. در ابتدا یک نتیجه مفید برای تولید این قاب‌ها معرفی می‌کنیم و سپس آنها را با تأثیر یک عملگر کراندار مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدلیل کاربرد اساسی و مفید انواع قاب‌ها در بازگرداندن برخی اطلاعات حذف شده در مباحث مربوط به انتقال داده‌ها، انتهای مقاله را اختصاص به شرایط استقرار قاب تحت حذف عده‌ای از اعضای فضای اندازه قرار داده و خواهیم دید که این موضوع با K–قاب‌های گسسته می‌تواند در ارتباط باشد.

۱. مقدمه

در سرتاسر این مقاله، H فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، μ اندازه مثبت و (X,μ) یک فضای اندازه σ–متناهی و $\mathcal{B}(H)$ مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار از H به‌توی H می‌باشند.
ابتدای کار را به مروری بر چند نتیجه مهم از عملگرها اختصاص داده‌ایم. فرض کنید $U\in\mathcal{B}(H_1,H_2)$ عملگری کراندار از فضای هیلبرت H_1 به‌توی فضای هیلبرت H_2 باشد. شبه معکوس راست عملگر U را با نماد $U^\dagger\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ نشان داده ایم که برای هر $x\in\mathcal{R}(U)$، دارای خاصیت $UU^\dagger x=x$ است. در لم زیر، اطلاعات مورد نیاز این عملگر را گردآوری کرده‌ایم.

لم ۱.۱. [۸] *اگر $U\in\mathcal{B}(H_1,H_2)$ آنگاه نتایج زیر برقرار هستند:*

۱. $(U^\dagger)^*=(U^*)^\dagger$.
۲. $\ker U^\dagger=\mathcal{R}(U)^\perp$ و همچنین $\mathcal{R}(U^\dagger)=\ker U^\perp$.
۳. $UU^\dagger$ *تصویر متعامد یکه از H_2 به‌روی $\mathcal{R}(U)$ می‌باشد.*
۴. $U^\dagger U$ *تصویر متعامد یکه از H_1 به‌روی $\mathcal{R}(U^\dagger)$ می‌باشد.*

۲. قاب‌های پیوسته

نگاشت $F:X\to H$ را **به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر $h\in H$، نگاشت

$$X\longrightarrow\mathbb{C},$$
$$x\longrightarrow\langle h,F(x)\rangle$$

اندازه‌پذیر باشد.

*سخنران
پست الکترونیک: ghrahimlo@tvu.ac.ir (غلامرضا رحیم لو)

تعریف ۱.۲. (K–قاب پیوسته) فرض کنیم $F : X \to H$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر بوده و $K \in \mathcal{B}(H)$ باشد. گوییم F یک K- قاب پیوسته برای H است اگر اعداد $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند که برای هر $h \in H$ داشته باشیم

$$A\|K^*h\|^2 \leq \int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \leq B\|h\|^2. \qquad (1)$$

ثابت‌های A و B را کران‌های قاب می‌نامیم. هرگاه $K = Id_H$ آنگاه F تبدیل به**قاب پیوسته** (معمولی) می‌شود. F را K–قاب تنگ [1] گوییم هرگاه $A = B$ شود. پس دراین حالت داریم

$$\int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) = A\|K^*h\|^2.$$

اگر $A = B = 1$، آنگاه K–قاب پیوسته F، پارسوال نامیده می‌شود. اگر فقط طرف راست نامساوی (۱) برقرار باشد، F را نگاشت بسل پیوسته می‌نامیم. بالاخره، اگر μ اندازه شمارشی و $X = \mathbb{N}$، آنگاه K- قاب پیوسته تبدیل به K- قاب گسسته می‌شود (برای خواص این قاب‌ها، نگاه کنید به [۴، ۱۳]).

مثال ۲.۲. فرض کنیم $H = \ell^2(\mathbb{N})$، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. اگر $a > 0$ عددی ثابت باشد، تعریف می‌کنیم

$$K : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}),$$
$$K\delta_i = \delta_{i+1}$$

و

$$F : X \longrightarrow H,$$
$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i+1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^2(\mathbb{N})$ است. با توجه به‌این‌که $KK^* = Id_H$ و برای هر $h \in H$،

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) = a^2\|h\|^2 = a^2\|K^*h\|^2,$$

پس F یک K–قاب تنگ برای H با کران a^2 می‌شود.

طبق روال همه انواع K–قابها، عملگرهای ترکیب و آنالیز مشابه قاب‌های معمولی هستند و برای K–قاب‌های پیوسته، این‌دو عملگر، به‌ترتیب، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند (برای جزئیات بیشتر، نگاه کنید به [۱۱]):

$$T_F : \mathcal{L}^2(X) \longrightarrow H,$$
$$\langle T_F(G), h\rangle = \int_X G(x)\langle F(x), h\rangle \, d\mu,$$

و

$$T_F^* : H \longrightarrow \mathcal{L}^2(X),$$
$$T^*{}_F(h) = \langle h, F\rangle.$$

که در آنها

$$\mathcal{L}^2(X) = \{F : X \to \mathbb{C} : \ \|F\|_2^2 = \int_X \|F(x)\|^2 \, d\mu < \infty\}.$$

این فضا، با تعریف ضرب داخلی زیر

$$\langle F, G\rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_X \langle F(x), G(x)\rangle \, d\mu(x),$$

[1] tight frame

تبدیل به فضای هیلبرت می‌شود. درنتیجه، عملگر قاب پیوسته را، برای هر $h \in H$، به‌صورت زیر میتوان بدست آورد.

$$S_F(h) := T_F T_F^*(h) = \int_X \langle h, F\rangle F \, d\mu,$$

ونیز

$$\langle S_F h, h\rangle = \|T_F^*(h)\|^2 = \int_X |\langle h, F(x)\rangle|^2 \, d\mu.$$

قضیه زیر، امکان تولید Kـقاب‌های پیوسته را از روی یک قاب پیوسته ایجاد می‌کند.

لم ۳.۲. [۱۶] *فرض کنید $F : X \longrightarrow H$ یک قاب پیوسته برای H باشد. آنگاه KF، که در آن $K \in \mathcal{B}(H)$، یک Kـقاب پیوسته برای H می‌شود.*

مثال ۴.۲. [۸] فرض کنید $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ پذیرفتنی باشد، یعنی:

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\gamma)|}{\gamma} d\gamma < \infty.$$

نگاشت F را برای هر $x \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$F : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$
$$F(a,b)(x) = (T_b D_a)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

که در آن T_b و D_a عملگرهای روی $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ بوده و برابرند با

$$T_b : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \qquad D_a : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$
$$(T_b f)(x) = f(x-b), \qquad (D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

بنا به گزاره ۱.۱.۱۱ ونتیجه ۲.۱.۱۱ از [۸] داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, F(a,b)\rangle \langle F(a,b), g\rangle \frac{dadb}{a^2} = c_\psi(f,g), \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

پس F یک قاب پیوسته برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ وابسته به فضای اندازه $(\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}, \mu)$ می‌باشد که در آن $\mu = \frac{dadb}{a^2}$ است. حال، طبق لم ۳.۲، اگر $K \in \mathcal{B}(H)$ عملگر کراندار دلخواهی باشد، آنگاه نگاشت KF یک Kـقاب پیوسته برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می‌شود.

۳. Kـقاب‌های پیوسته درهم تنیده

در این بخش، ابتدا Kـقاب‌های درهم تنیده را تعریف کرده و سپس برخی نتایج درباره نحوه تولید این قاب‌ها را بررسی می‌کنیم. در سرتاسر این مقاله، نماد $[m]$ به‌معنی $\{1, 2, \cdots, m\}$ برای هر عدد طبیعی m می‌باشد و همچنین، منظور از افرازهای فضای X به‌منزله افرازی از X توسط مجموعه‌های اندازه‌پذیر ازهم جدای آن خواهد بود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} := \{F_i\}_{i\in[m]}$ خانواده‌ای از Kـقاب‌های پیوسته برای H وابسته به اندازه μ باشند. گوییم $\mathcal{F}$ درهم تنیده است هرگاه ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]}$ از X، خانواده $\cup_{i\in[m]}\{F_i\}$ یک Kـقاب پیوسته برای H با کران‌های A, B باشد.

با توجه به گزاره ۴.۳ در [۲۲]، یافتن کران بالا برای قاب‌های پیوسته به‌سادگی میسر می‌شود؛ درواقع اگر

$$\{F_i\}_{i\in[m]}$$

دنباله‌ای از نگاشت‌های بسل پیوسته برای H با کران‌های B_i باشند، آنگاه برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]}$ از X، خانواده $\cup_{i\in[m]}\{F_i\}$ یک دنباله بسل پیوسته برای H با کران $\sum_{i\in[m]} B_i$ می‌شود.
در قضیه زیر، یک شرط لازم و کافی برای تولید Kـقاب‌های پیوسته درهم تنیده معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. [۱۵] *فرض کنیم $F, G : X \to H$ دو Kـقاب پیوسته برای H باشند. شرایط زیر باهم معادل هستند:*

۱. *F و G دو Kـقاب پیوسته درهم تنیده هستند.*

۲. *عدد $\alpha > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر σ از X، عملگر کراندار*

$$\Gamma_\sigma : \mathcal{L}^۲_\sigma(X) \longrightarrow H,$$
$$\langle \Gamma_\sigma \varphi, h\rangle = \int_\sigma \varphi(x)\langle F(x), h\rangle \, d\mu(x) + \int_{\sigma^c} \varphi(x)\langle G(x), h\rangle \, d\mu(x),$$

وجود دارد که $\alpha KK^* \leq \Gamma_\sigma \Gamma^*_\sigma$ و در آن،

$$\mathcal{L}^۲_\sigma(X) = \left\{\varphi \in \mathcal{L}^۲(X), \quad \varphi = F\big|_\sigma \cup G\big|_{\sigma^c}\right\}.$$

مثال ۳.۳. فرض کنیم $H = \ell^۲(\mathbb{N})$، $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشند. با فرض $a, b > ۰$، تعریف می‌کنیم

$$K : H \to H,$$
$$K\delta_i = \delta_{i+۱}$$

و

$$F, G : X \longrightarrow H,$$
$$F(x) = \begin{cases} a\delta_i, & i \leq x < i+۱ \\ ۰, & x < ۱ \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} b\delta_i, & i \leq x < i+۱ \\ ۰, & x < ۱ \end{cases}$$

که در آنها، $\{\delta_i\}_{i=۱}^\infty$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\ell^۲(\mathbb{N})$ است. با توجه مثال ۲.۲، F و G دو Kـقاب تنگ برای H با کران‌های، به‌ترتیب $a^۲$ و $b^۲$ می‌شوند. با فرض $\sigma \subset \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_\sigma : \mathcal{L}^۲(\mathbb{R}) \longrightarrow H,$$
$$\Gamma_\sigma \varphi = \left\{\int_i^{i+۱} a\varphi(x)\, dx\right\}_{i\in\sigma} \cup \left\{\int_i^{i+۱} b\varphi(x)\, dx\right\}_{i\in\sigma^c}.$$

برای هر $\varphi \in \mathcal{L}^۲(\mathbb{R})$ داریم

$$\|\Gamma_\sigma \varphi\|^۲ = a^۲ \sum_{i\in\sigma} \int_i^{i+۱} |\varphi(x)|^۲ dx + b^۲ \sum_{i\in\sigma^c} \int_i^{i+۱} |\varphi(x)|^۲ dx \leq \max\{a^۲, b^۲\}\|\varphi\|^۲_۲$$

که نشان می‌دهد Γ_σ کراندار است. با محاسبه‌ای سرراست، برای هر $h \in H$ داریم

$$\|\Gamma^*_\sigma h\|^۲ \geq \min\{a^۲, b^۲\}\|h\|^۲ = \min\{a^۲, b^۲\}\|K^* h\|^۲.$$

پس شرایط قضیه ۲.۳ برقرار شده و درنتیجه، F و G یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H می‌شوند.

در نتایج بعدی، هدف تولید Kـقاب‌های پیوسته با استفاده از عملگری خطی و کراندار میباشد.

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های Aو B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ عملگری با برد بسته باشد طوری‌که $KU = UK$. آنگاه $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ نیز یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای $\mathcal{R}(U)$ با کران‌های $A\|U^\dagger\|^{-۲}$ و $B\|U\|^۲$ می‌شود.*

اثبات. فرض کنید $i \in [m]$ دلخواه باشد و قرار می‌دهیم

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\phi(x) = \langle h, F_{ix}(x)\rangle \qquad (h \in H).$$

درنتیجه، ϕU^* اندازه‌پذیر شده و UF_i به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر می‌شود. اگر $U^\dagger$ را معکوس راست U بگیریم، آنگاه برای هر $h \in \mathcal{R}(U)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^2 &= A\|(U^\dagger)^*U^*K^*h\|^2 \\ &\le A\|U^\dagger\|^2\|K^*U^*h\|^2 \\ &\le \|U^\dagger\|^2 \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &= \|U^\dagger\|^2 \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle h, UF_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x). \end{aligned}$$

کران بالا نیز بدیهی است. □

قضیه ۵.۳. *فرض کنیم K عملگری با برد بسته بوده، $\{F_i : X \to H\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های Aو B بوده و نیز $U \in \mathcal{B}(H)$ به‌طوری‌که $\mathcal{R}(U^*) \subseteq \mathcal{R}(K)$. آنگاه $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H است اگر و تنها اگر عدد $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $h \in H$ داشته باشیم*

$$\|U^*h\| \ge \delta\|K^*h\|.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید که $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران پایین A باشد. برای هر $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned} A\|K^*h\|^2 &\le \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle h, UF_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &= \sum_{i\in[m]} \int_X |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &\le B\|U^*h\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین $\|U^*h\| \ge \sqrt{\frac{A}{B}}\,\|K^*h\|$. برای حالت عکس، برای $h \in H$ دلخواه داریم

$$\|U^*h\| = \|(K^\dagger)^*K^*U^*h\| \le \|K^\dagger\|\,\|K^*U^*h\|.$$

اکنون فرض کنید $\{\sigma_i\}_{i\in[m]} \subset X$ افرازی دلخواه باشد و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A\delta^2\|K^\dagger\|^{-2}\|K^*h\|^2 &\le A\|K^\dagger\|^{-2}\|U^*h\|^2 \\ &\le A\|K^*U^*h\|^2 \\ &\le \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &= \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, UF_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &\le B\|U\|^2\|h\|^2. \end{aligned}$$

پس $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H با کران‌های $A\delta^2\|K^\dagger\|^{-2}$ و $B\|U\|^2$ می‌شود. □

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\{F_i\}_{i\in[m]}$ خانواده‌ای از Kـقاب‌های پیوسته برای H باشند. احکام زیر باهم معادل‌اند:*

۱. *$\{F_i\}_{i\in[m]}$ یک Kـقاب پیوسته درهم تنیده برای H است.*
۲. *برای هر $U \in \mathcal{B}(H)$، خانواده $\{UF_i\}_{i\in[m]}$ یک UKـقاب پیوسته درهم تنیده برای H است.*

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم A و B کران‌های $\{F_i\}_{i\in[m]}$ باشند. برای هر افراز $\{\sigma_i\}_{i\in[m]} \subset X$ و $h \in H$ داریم

$$\sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, UF_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) = \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \leq B\|U\|^2\|h\|^2.$$

به‌طریق مشابه، برای کران پایین می‌توان نوشت

$$\sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle h, UF_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) = \sum_{i\in[m]} \int_{\sigma_i} |\langle U^*h, F_i(x)\rangle|^2 \, d\mu(x) \geq A\|(UK)^*h\|^2.$$

برای حالت عکس، کافی‌است تا U را عملگر همانی روی H گرفته و حکم بدیهی می‌شود. □

مراجع

[1] S. T. Ali, J. P. Antoine and J. P. Gazeau, *Continuous frames in Hilbert spaces*, Annals. of Physics **222** (1993), 1–37.
[2] E. Alizadeh, V. Sadri, *On Continuous weaving G-frames in Hilbert spaces*, Wavelets and Linear Algebra **7(1)** (2020), 23–36.
[3] F. Arabyani Neyshaburi and A, Arefijamal, *Characterization and Construction of K-Fusion Frames and Their Duals in Hilbert Spaces*, Results in Math., First online:**24 Feb** (2018).
[4] F. Arabyani Neyshaburi and A.Arefijamal, *Some constructions of K-frames and their duals*, Rocky Mountain., **47(6)** (2017), 1749–1764.
[5] P. Balazs, J. P. Antoine and A. Grybo´s, *Weighted and controlled frames: mutual relationship and first numerical properties*, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing **8(1)** (2010), 109–132.
[6] T. Bemrose, P. G. Casazza, K. Gröchenic, M. C Lammers and R. G. Lynch, *Weaving frames*, Operators and Matrices. **10(4)** (2016), 1093–1116.
[7] P. G. Casazza, and G. Kutyniok, *Frames of Subspaces*, Contemp. Math., **345** (2004), 87–114.
[8] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, 2016.
[9] R.J. Duffin, and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., **72**(1) (1952), 341–366.
[10] M. H. Faroughi, and R. Ahmadi, *Some Properties of C-Frames of Subspaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., **1(3)** (2008), 155–168.
[11] Faroughi, M. H. and Osgooei, E. *C-Frames and C-Bessel Mappings*, Bull. Iranian Math. Soc., **38(1)** (2012), 203–222.
[12] H. G. Feichtinger, and T. Werther, *Atomic Systems for Subspaces*, Proceedings SampTA. Orlando, FL., (2001), 163–165.
[13] L. Găvruţa, *Frames for Operators*, Appl. Comp. Harm. Annal., **32** (2012), 139–144.
[14] D. Hua and Y. Huang, *Controlled K-g-frames in Hilbert spaces*, Results. Math., **72** (2017), 1227–1238.
[15] Gh. Rahimlou, V. Sadri, *Continuous of Continuous Weaving K-frames in Hilbert spaces*, accepted in Wala ISSN:2476-3926., DOI:10.22072/WALA.2021.139495.1309
[16] Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M. A. Jafarizadeh, and S. Nami, *Some properties of Continuous K-frames in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **15(1)** (2019), 169–187.
[17] Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, M. A. Jafarizadeh, and S. Nami, *Continuous k-frames and their dual in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **17(3)** (2020), 145–160.
[18] V. Sadri, Gh. Rahimlou, and R. Ahmadi, *Continuous weaving fusion frames in Hilbert spaces*, Int. J. Wavelets Multi. Info. Proc., **18(5)** (2020), 1–17.
[19] V. Sadri, Gh. Rahimlou, R. Ahmadi, R. Zarghami Farfar, *Construction of K-g-fusion frames and their dual in Hilbert spaces*, Bull. Transilvania Un. Braşov, Series III, **13(62) no. 1**, (2020), 17–32.
[20] V. Sadri, R. Ahmadi, M. A. Jafarizadeh, and S. Nami, *Continuous k-fusion frames in Hilbert spaces*, Sahand Comm. Math. Anal., **17(1)** (2020), 39–55.
[21] W. Sun, *G-Frames and G-Riesz bases*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2006), 437–452.
[22] L. K. Vashisht and Deepshikha *On continuous weaving frames*, Adv. Pure Appl. Math. **8(1)** (2017), 15–31.
[23] L. K. Vashisht, S. Garg, Deepshikha and P. K. Das, *On generalized weaving frames in Hilbert spaces*, Rocky Mountain J. Math., **48(2)** (2018), 661–685.
[24] X. Xiao, Y. Zhu and L. Găvruţa, *Some Properties of K-Frames in Hilbert Spaces*, Results. Math. **63 (2013), 1243–1255.**

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–241، صص. ۷–۹

طرح و اثبات یک قضیه پیرامون خاصیت مشترک نقطه تلاقی شعاع و بعضی از وتر های یک دایره

نویسنده: غلامرضا سلطانی ابری پژوهشگر آزاد در حوزه هندسه مسطحه گنبد کاووس استان گلستان ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
قاط ویژه
وترهای ویژه
خواص مشترک نقاط مشترک

چکیده

اگر نقطه ای را روی یک پاره خط انتخاب کنیم در ابتدا نمی دانیم که ایا امکان دارد که این پاره خط را طوری به n قسمت مساوی تقسیم کرد که نقطه انتخابی یکی از نقاط تقسیم کننده پاره خط به n قسمت مساوی باشد. در این مقاله ثابت می کنیم وتر هایی که از یک طرف قطر دایره ترسیم و شعاع عمود بر ان قطر را به n قسمت مساوی تقسیم می کنند نقطه تلاقی انها با شعاع (نقطه مشترک) یکی از نقاط تقسیم کننده وتر به $۲n^{۲}$ قسمت مساوی هم هست.

۱. مقدمه:

بنده در حین تحقیق روی مسئله : ۱ــروشی برای ترسیم زاویه های ۳۶ و ۷۲ درجه با استفاده ازدایره ها منابع (۱) و ۲ ــروشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق هفده ضلعی منتظم منابع (۲) و۳ – روشی برای اثبات قضیه مورلی منابع (۳) متوجه این موضوع و قضیه شدم.

قضیه :

وترهایی که از یک طرف قطر دایره رسم و شعاع عمود بر ان قطر را به n قسمت مساوی تقسیم می کنند. نقاط تلاقی این وترها با ان شعاع یکی از نقاط تقسیم کننده وتر به $n۲^{۲}$ قسمت مساوی است .

این قضیه را در دو حالت می توان طرح واثبات نمود.

الف : درحالتی که وترهای ترسیم شده از یک طرف قطر دایره شعاع عمود بر ان قطر را به n قسمت مساوی تقسیم می کند یعنی وتر های ترسیم شده مقابل به زاویه های مرکزی بزرگتر از ۹۰درجه است.

ب : در حالتی که امتداد وتر های رسم شده از یک طرف قطر دایره امتداد شعاع تقسیم شده به n قسمت را که با همان تقسیم بندی در خارج از دایره ادامه دارد قطع می کند . یعنی وتر های مقابل به زاویه های مرکزی کمتر از ۹۰درجه

در این مقاله ما به طرح و اثبات این قضیه در حالت اول می پردازیم . حالت دوم نیز با همین روش قابل اثبات است. درحالت دوم اگر وتر را به $n۲^{۲}$ قسمت مساوی تقسیم و امتداد انرا به همین شکل تقسیم کنیم تا شعاعی که به قسمتn تقسیم شده و امتدادش هم به همین شکل تقسیم شده را قطع کند نقطه تلاقی امتداد شعاع وامتداد وتر از نقاط مشترک این تقسیم بندی می شود.

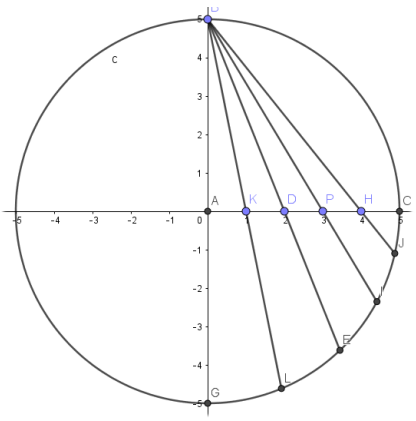
۲. طرح و اثبات هندسی قضیه

با توجه به شکل (۳) در دایره A وتر BE از یک طرف قطر رسمBG و شعاع AC که عمود برقطر BG است را در نقطه D قطع کرده که این نقطه یکی از نقاط تقسیم کننده شعاع AC به n قسمت مساوی است.

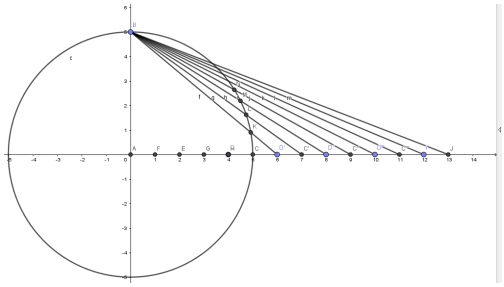
در این حالت فرض می کنیم $\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{P}{n}$ باشد

اگر عمود راAF از مرکز دایره بر وترBEوارد کنیم AF عمود منصف وتر BE نیز می شود و داریم FB=FE

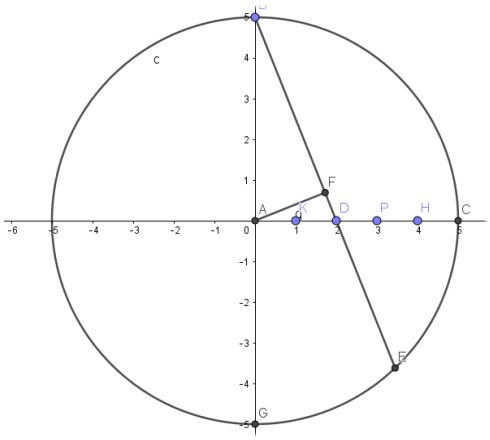
از طرفی عمود مثلثAF قائم الزاویه ABD را به دو مثلث مشابه وAFB AFD تقسیم می کند که نسبت اضلاع مشابه آنها مساوی است یعنی $\frac{AD}{AB}=\frac{FD}{FA}=\frac{FA}{FB}=\frac{P}{n}$ در این حالت داریم. $\frac{FD}{FA}\ \frac{P}{n}\rightarrow FA=\frac{n(FD)}{P}$=



شکل ۱:



شکل ۲:



شکل ۳:

و داریم $\frac{FA}{\mathrm{FB}}\ \frac{P}{n} \rightarrow = \frac{\frac{n(FD)}{P}}{\mathrm{FB}}\ \frac{P}{n} =$ و در نتیجه $\mathrm{FB} = n^{۲}\left(\frac{FD}{P^{۲}}\right) = \frac{n\times n\left(\frac{FD}{P}\right)}{P}$

و $BE = ۲FB = ۲n^{۲}\left(\frac{FD}{P^{۲}}\right)$ می شود. که P در اینجا عددی گویا و نشان دهنده این است که در بین نقاط تقسیم کننده شعاع AC به قسمت های مساوی نقطه D که محل تلاقی وتر مورد نظر با ان شعاع است نسبت به مرکز دایره نقطه چندم است.

مثلا اگر شعاع دایره را ۵ سانت فرض کنیم ۵۰= ۲× ۵ × ۵ =^{۲} ۲می n شود و اگرنقطه D محل تلاقی وتر انتخابی باBE شعاع AC به اندازه ۲سانت با مرکز دایره فاصله داشته باشد در اینجا =۲P است ۴ =۲۲ ^{۲}P=^{۲} می شود و باید راFD به ۴ قسمت تقسییم کرد . یک چهارم پاره خط

FD برابر با یک پنجاهم وتر BE می شود .
دراین حالت داریم $F_{50}=\frac{1}{4}\times D(FD)$.$= 2n^2(\frac{1}{4}FD)$ BE

۳. نتایج اصلی

که این همان اثبات قضیه مورد نظربا روش هندسی است یعنی اگر پاره خط FD به P^2قسمت مساوی تقسیم شود بر این مبنا وتر BE به $n2^2$ قسمت مساوی تقسیم می شود و نقطه D یکی از ان نقاط است . لازم به ذکر است که این قضیه از طریق مثلثاتی نیز اثبات و مورد تایید قرار گرفته است .

سپاسگزاری:
۱- بنده با تقدیر و تشکر فراوان این اثبات را تقدیم می کنم به استاد بزرگوارجناب پروفسور امید علی شهنی کرم زاده چهره ماندگار و مروج ریاضی کشوربه پاس ملاحظه کارهای تحقیقاتی ریاضی اینجانب و بهره گیری از رهنمود های ارزشمند ایشان که از مشوقان و ترغیب کنندگان اصلی اینجانب به ادامه این راه بوده و هستند.
۲- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می کنم از جناب پروفسور مگردیچ تومانیان ریاست محترم بخش ریاضی فرهنگستان علوم ایران که کارهای تحقیقاتی اینجانب را مورد ملاحظه قرار داده و از راهنمائیهای لازم دریغ ننموده و موجبات تشویق و ترغیب اینجانب را فراهم می نمایند.
۳- تقدیر و تشکر و سپاسگزاری می کنم از جناب دکتر پیام سراجی (اصفهان) که این قضیه را با روش مثلثاتی اثبات و مورد تایید قرار داده اند.
۴- با تقدیر وتشکرو سپاسگزاری از همه عوامل و دست اندر کاران بر گزار کننده سومین همایش ملی ریاضی و امار دانشگاه گنبد کاووس از اساتید محترم هیات علمی استدعا دارم با توجه به اینکه بنده پژوهشگر ازاد و فاقد تحصیلات اکادمیک ریاضی و تحصیلات ریاضی بنده در حد دیپلم ریاضی قدیم است و به علت علاقه و ذوق شخصی به هندسه وارد کار های تحقیقاتی در این وادی شده ام .نقائص کلامی و بیانی بنده را تا انجا که به اصل مطلب لطمه ای نمی زند به دیده اغما ض بنگرند.

مراجع

[۱] سلطانی ابری. غلامرضا . روشی برای ترسیم زاویه های ۳۶ و ۷۲ درجه با استفاده از دایره ها . چهل و نهمین کنفرانس ریاضی ایران . ۱۳۹۷
[۲] سلطانی ابری . غلامرضا . روشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق ۱۷ ضلعی منتظم . پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران . ۱۳۹۹
[۳] سلطانی ابری . غلامرضا . روشی برای اثبات قضیه مورلی به کمک دایره های متناظر و متقارن . پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران . ۱۴۰۰

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–285، صص. ۱۰–۱۲

نمایش استوار از نیم گروه‌های معکوس

مجید بابانظری*[آ]، فاطمه دهقان[ب]

[آ] دانشجو دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی شیراز
[ب] کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
نمایش استوار
نیم‌شبکه
نیم‌گروه‌های معکوس

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله، نمایش‌هایی روی نیم‌گروه‌های معکوس بولی به نام نمایش vagner-preston ارائه می‌کنیم که هرگز استوار نیست و در نهایت نمایش استواری به نام نمایش کانونی منظم روی نیم‌گروه‌های معکوس ارائه می‌کنیم. منظور از یک نیم‌گروه بولی معکوس، یک نیم‌گروه معکوس است که نیمه شبکه‌ی عناصر خود توان آن یک جبر بولی است.

۱. مقدمه

تئوری جبرهای نیمه گروهی C سابقه طولانی دارد که مفهوم رشته‌ها در نیم‌گروه‌ها با این فرض که مسیرهای نامتناهی دارای مفهوم باشند که اهمیت زیادی در جبرهای c^* دارند در [۱] مورد بررسی قرار گرفته است. ما در این مقاله، بررسی نمایش‌های استوار روی نیم‌گروه‌های بولی معکوس است. منظور از یک نیم‌گروه بولی معکوس، یک نیم‌گروه معکوس است که شبکه‌ی عناصر خودتوان آن ساختار جبر بولی به خود می‌گیرند. یکی از متداول‌ترین نیم‌گروه‌های بولی معکوس $L(X)$ است. در ادامه نشان می‌دهیم که $E(L(X)) = P(X)$ در واقع $L(X)$ مجموعه همه‌ی توابع دوسویی روی زیرمجموعه‌های X است. در این نوشته همریختی‌های بین نیم‌گروه‌های معکوس بتوی جبرهای بولی به‌طور کامل بررسی می‌شوند. مشهورترین همریختی از نیم‌گروه معکوس S بتوی یک نیم‌گروه بولی معکوس، نمایش vagner-preston نام دارد. این نمایش ویژگی‌های خاصی دارد، از جمله اینکه هرگز استوار نیست و در ضمن بوسیله‌ی آن ثابت می‌شود که هر نیم‌گروه معکوس، زیر نیم‌گروه معکوس، زیرنیم‌گروهی از یک $L(X)$ است.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. گیریم S یک نیم‌گروه معکوس با عنصر صفر باشد و گیریم $e \in E(S)$ به S، نیم‌گروه E-uniyrary گفته می‌شود هرگاه به ازای هر s متعلق به S، اگر $se = e$، آنگاه $s \in E(S)$. برای درک مطلب بیشتر [۴] را ببینید.

تعریف ۲.۲. یک نیم‌گروه معکوس بولی، یک نیم‌گروه معکوس مثل S است به‌طوری‌که شبکه عناصر خودتوان S یعنی $E(S)$ ساختار جبر بولی به خود بگیرد و در ضمن بازای هر s درون S داشته باشیم که $os = so = o$ که در آن o کوچکترین عنصر از $E(S)$ است.

* سخنران
پست الکترونیک: Majidbabanazari@yahoo.com (مجید بابانظری)، second.author@gmail.com (فاطمه دهقان)

رایج‌ترین مثال از نیم‌گروه معکوس بولی همان $L(X)$ است، گیریم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. $L(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع دوسویی روی زیرمجموعه‌هایی از X است.
اگر $F \subseteq X$، نگاشت $\theta : E(L(X)) \longrightarrow P(X)$ با ضابطه‌ی $\theta\,(i_F) = F$ یک ایزومورفیسم ترتیبی است. توجه کنید که طبق گزاره (۱-۲) از مرجع [۳] اعضای $E(L(X))$ عینا توابع همانی روی زیرمجموعه‌های X هستند. می‌دانیم که $P(X)$ با ضربی که اشتراک در نظر گرفته می‌شود و با جمعی که اجتماع در نظر گرفته می‌شود یک جبر بولی است. پس $E(L(X))$ ساختار جبر بولی به خود می‌پذیرد. از طرفی عنصر صفر $E(L(X))$ تابع صفر $\emptyset$ به توی $\emptyset$ است و به‌وضوح به‌ازای هر تابع λ متعلق به $L(X)$ داریم که: $o = o\circ\lambda = \lambda\circ o = o$.
توجه کنید که $L(X)$ نیم‌گروه معکوس است. زیرا عمل دوتایی روی $L(X)$ ترکیب توابع است که عملی است، شرکت‌پذیر، از طرفی برای هر $\theta \in L(X)$. Φ داریم که:

$$\Phi\theta : \theta^{-1}\,(rang\theta \cap Dom\Phi) \longrightarrow \Phi\,(rang\theta \cap Dom\Phi)$$

که $\Phi\theta$ نگاشت دوسویی بین زیرمجموعه‌های X است. پس $\Phi\theta \in L(X)$. بنابراین $L(X)$ یک نیم‌گروه است. حال برای هر $\Phi \in L(X)$ نگاشت $\varphi : Dom\Phi \longrightarrow Rang\Phi$ یک نگاشت دوسویی است. پس نگاشت دوسویی منحصربه‌فرد Φ^{-1} از $Rang\Phi$ به توی $Dom\Phi$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Phi\Phi^{-1} = i_{Rang\Phi}$ و $\Phi^{-1}\Phi = i_{dom\Phi}$. بنابراین $\Phi^{-1} \in L(X)$ و نیز $\Phi\Phi^{-1}\Phi = \Phi$ و $\Phi^{-1}\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}$ در نتیجه $L(X)$ یک نیم‌گروه معکوس است.
حال نمایشی از یک نیم‌گروه معکوس به نام نمایش vagner-preston ارائه می‌کنیم که هیچ‌گاه استوار نیست. گیریم که S یک نیم‌گروه معکوس بولی باشد گیریم که $e \in E(S)$ و هم‌چنین $D(S) = \{t \in s | tt^* \leqslant s^*s\}$ و $R(S) = \{t \in s | tt^* \leqslant ss^*\}$.
حال برای هر $s \in S$ تعریف کنید $\gamma(s) : D(s) \longrightarrow R(s)$ با ضابطه‌ی $\gamma(s)(t) = st$. آنگاه $\gamma(s)$ از $D(s)$ به $R(s)$ دوسویی است و نیز نگاشت γ یک ایزومورفیسم نیم‌گروهی از S بتوی $L(X)$ است. زیرا گیریم $t \in D'(S)$. $t, s \in S$ به‌گونه‌ای باشد که $st = st'$، حال از آنجا که $tt^*, t't'^* \leqslant s^*s$ پس $s^*stt^* = tt^*$. پس

$$t = (s^*s)\,(tt^*)\,t = s^*st = s^*st' = (s^*s)\,\left(t't'^*\right)t' = t'$$

پس اگر $st = \gamma(s)(t) = \gamma(s)\,(t') = st'$، آنگاه نتیجه می‌گیریم که $t = t'$. پس $\gamma(s)$ تابعی یک‌به‌یک است. حال نشان می‌دهیم $\gamma(s)$ پوشا است. گیریم $w \in R(s)$. نشان می‌دهیم وجود دارد tـای درون $D(S)$ به‌طوری‌که $\gamma(s)(t) = w$. چون $w \in R(s)$ پس $ww^*ss^* = ww^*$. طبق اثباتی که برای یک‌به‌یک بودن $\gamma(s)$ ارائه شد باید $w^*ss^* = w^*$. یعنی $w = ss^*w$ یعنی $\gamma(s)\,(s^*w) = w$.
حال کافی است ثابت کنیم که $s^*w \in D(S)$. اگر $t \in D(s)$، آنگاه داریم که

$$(st)(st)^* = stt^*s^* \leqslant ss^*$$

تذکر می‌دهیم که هرگاه $e \in E(S)$ و $s \in S$ آنگاه $ses^* \leqslant ss^*$. لذا $(st)(st)^* \leqslant ss^*$ و این یعنی $st \in R(s)$ پس اگر $t \in D(s)$، آنگاه $st \in R(s)$ حال چون $w \in R(s)$ پس $w \in D\,(s^*) = R\,(s^*)$، طبق مطالب یاد شده $s^*w \in D(s)$ و این یعنی $\gamma(s)$ دو سویی است. حال طبق گزاره (۲-۱-۳) از مرجع [۲] نگاشت $\gamma : S \longrightarrow L(S)$ با ضابطه‌ی $s \longrightarrow \gamma(s)$ یک ایزومورفیسم بین نیم‌گروه‌های S و $L(S)$ است.
در واقع قضیه‌ی vagner-preston بیان می‌کند که هر نیم‌گروه معکوس درون یک $L(X)$ نشانده می‌شود.

قضیه ۳.۲. *گیریم S نیم‌گروه معکوس با عنصر صفر باشد، آنگاه تناظر $s \longrightarrow \lambda_s$ یک نمایش استوار از S به نیم‌گروه بولی $L(\Omega)$ است.*

اثبات. باید نشان داد که تابع $\lambda : S \longrightarrow L(\Omega)$ با ضابطه‌ی $\lambda(S) = \lambda_s$ یک نمایش استوار از $E(S)$ به $P(\Omega) = E(L(\Omega))$ است. اگر فرض شود $s = o$، آنگاه $\Omega_{s^*s} = \Omega_{ss^*} = \emptyset$. پس λ_s در این حالت نگاشتی از $\emptyset$ به $\emptyset$ است. پس λ_s در این حالت تابع تهی است که به آن عنصر صفر $L(\Omega)$ می‌گویند. گیریم که $E(S)$ یک پوشش متناهی مانند Z بپذیرد اولا نشان می‌دهیم که $\Omega = \bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$.
یک طرف شمول بدیهی است زیرا برای هر $z \in Z$ داریم که $\Omega_z \subseteq \Omega$ پس $\bigcup_{z\in Z} \Omega_Z \subseteq \Omega$.
حال برای اثبات عکس شمول از برهان خلف استفاده می‌کنیم. گیریم که Ω زیرمجموعه‌ی $\bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$ نباشد. پس عنصری مثل ξ در Ω وجود دارد که در $\bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$ نیست. پس به‌ازای $z \in Z$ داریم که $\xi \notin \Omega_z$. پس $z\xi \nsubseteq \xi$. توجه کنید که چون z عنصری از Z است و $Z \subseteq E(S)$، پس $z \in E(S)$. پس zهای درون Z همگی خودتوان هستند. به‌ازای هر z درون Z، عنصری همچون t_z متعلق به ξ وجود دارد که $zt_z = o$ چون t_zها عناصر ξ می‌باشند و ξ هم یک فیلتر است و چون Z متناهی است، پس طبق ویژگی فیلترها عنصری همچون t درون ξ موجود است به‌طوری‌که از همه‌ی t_zها کمتر است. به‌عنوان مثال اگر $Z = \{z_1. \cdots . z_n\}$، آنگاه نظیر این z_iها، عناصری همچون t_{zi} در ξ وجود دارند. در واقع چون ξ فیلتر است، پس یک t_1 در ξ هست که از t_{z_1} و t_{z_2} کمتر است. به دلیل مشابه یک یک t_2 در ξ هست که t_{z_2} و t_{z_3} کمتر است. این روند را ادامه دهید. حال مینیمم t_iها را t بنامید. چون Z متناهی است، پس مینیمم این مجموعه‌ی متناهی مفهوم دارد و درون خودش قرار می‌گیرد و به‌وضوح $zt \leqslant zt_z = o$. پس $zt = o$. لذا $ztt^* = o$ و این یعنی $z \perp tt^*$ ولی Z پوششی است برای $E(S)$ و چون $tt^* \in E(S)$، پس tt^* شریکی در Z دارد. پس zـای درون Z موجود است که $z \widehat{\cap} tt^*$. ولی قبلاً نشان داده شد به‌ازای هر $z \leqslant Z$ باید $z \perp tt^*$.

پس الزاماً باید tt^* صفر باشد. پس $t = o$. ولی $t \in \xi$. پس $o \in \xi$ و این هم یک تناقض است. پس $\Omega = \bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$. توجه کنید که $p(\Omega)$ دارای بزرگترین عنصر Ω و کوچکترین عنصر $\emptyset$ است و ضرب در جبر بولی $p(\Omega)$ همان اشتراک و جمع همان اجتماع است. پس بزرگترین عنصر یا عنصر واحد در جبر بولی $p(\Omega)$ همان Ω است. پس در واقع تا اینجا نشان داده شد که $l = \bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$، اگر شرط دوم برای $E(S)$ برقرار نباشد، آنگاه شرط اول برقرار است. در ضمن λ یک نمایش روی $E(S)$ است. به این دلیل که $\mu(o) = o$ و نیز به‌ازای هر s و t متعلق به $E(S)$ داریم که: $\lambda(st) = \lambda_{st} = \lambda_s\lambda_t = \lambda(s)\lambda(t)$. پس λ یک نمایش از $E(S)$ به توی $p(\Omega) = E(L(\Omega))$ است. حال فقط اثبات این نکته باقی‌مانده که λ یک نمایش استوار است، برای اثبات این موضوع باید نشان دهیم که برای هر عنصر ناصفر x درون $E(S)$ و برای هر پوشش متناهی مثل Z برای بازه‌ی $[o.x]$. $\bigcup_{z\in Z} \lambda(Z) \geqslant \lambda(x)$. توجه کنید که می‌خواهیم استواری نگاشت $\lambda : E(S) \longrightarrow E(L(\Omega)) = p(\Omega)$ را بررسی می‌کنیم. پس می‌توان گفت که λ روی $E(S)$ برای هر S را به Ω_s منتقل می‌کند. پس برای اثبات استواری λ کافی است نشان داد که $\bigcup_{z\in Z} \Omega_Z \supseteq \Omega_x$. پس گیریم $\xi \in \Omega_x$. نشان می‌دهیم $\xi \in \bigcup_{z\in Z} \Omega_Z$. فرض خلف کنیم که چنین باشد پس به‌ازای هر $z \in Z$ داریم که $\xi \notin \Omega_Z$ پس $z\xi \not\subseteq \xi$. به‌ازای هر $z \in Z$ یک $t_z \in \xi$ موجود است که $zt_z = o$. چون Z متناهی است و چون t_zها متعلق به ξ هستند و طبق خاصیت فیلترها عنصری همچون t متعلق به ξ وجود دارد که از همه‌ی t_zها کمتر است. پس $zt \leqslant zt_z = o$. بنابراین به‌ازای هر $z \in Z$ داریم که $zt = o$ و چون $\Omega_x \in \xi$، پس $x\xi \subseteq \xi$ و چون $t \in \xi$، پس $xt \in \xi$. حال قرار دهید $e = tt^*x$. به‌روشنی $e \leqslant x$. پس $e \in [o.x]$، به‌علاوه $e \neq o$. زیرا $et = tt^*xt = xtt^* = xt \in \xi$. پس $et \in \xi$. پس $e \neq o$. پس عنصر ناصفری در $[o.x]$ است ولی Z پوششی است برای $[o.x]$. پس e در Z شریکی مثل z دارد. پس $z\widehat{\cap}e$. پس $ze \neq o$. پس $o \neq ze = ztt^*$ ولی $zt = o$ پس $o \neq o$ و این هم تناقض است. در اثبات این قضیه توجه کنید که عناصر خودتوان $E(L(\Omega))$ با دامنه نشان داده می‌شوند، در واقع اگر $s \in E(S) = Dom\left(\lambda|_{E(S)}\right)$، آنگاه $\lambda s = E(L(\Omega))$. پس λ_s خودتوان است و دامنه آن برابر است با Ω_{s^*s} ولی S خودتوان است. پس $s^* = s$. پس $s * s = ss = s^2 = s$. پس $\Omega_{s*s} = \Omega_s$. پس λ_s همان Ω_s است. پس ضابطه‌ی λ روی $E(S)$ به شکل زیر قابل تعریف است:

$$\lambda(S) = \Omega_S.\lambda : E(S) \longrightarrow E(L(S)) = P(\Omega).$$

□

مراجع

[1] R. Exel and B. Steinberg. *Representations of the inverse hull of A o-left cancellative semigroup*. math, 2018.
[2] A. Kumjian. On localizations and simple c^*-algebras. *Pacific J. math.*, 112:141–192, 1984.
[3] M. V. Lawson. *Incerse semigroups, the theory of partial symmetries*. world Scientific, 1998.
[4] M. B. Szendrei. *A generation of McAlisters p-theorem for E-unitary regular semigroups*, volume 51. Acta Sci. Math, 1987.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–290، صص. ۱۳–۱۵

وجود جواب مسئله تعادل با روش تکراری اصلاح‌شده ایشی‌کاوا

سحر رنجبر*، علی فرج‌زاده

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
به‌طور مجانبی شبه‌غیرانبساطی تعمیم‌یافته
مسئله تعادل
الگوریتم تکراری ایشی‌کاوا

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله یک قضیه نقطه ثابت در فضای باناخ با استفاده از دنباله تکراری اصلاح‌شده ایشی‌کاوا ثابت می‌شود، در واقع اگر T به‌طور مجانبی شبه‌غیرانبساطی تعمیم‌یافته باشد، آنگاه دنباله تعریف‌شده در الگوریتم اصلاح‌شده ایشی‌کاوا به نقطه ثابت T در صورت وجود همگرا است و با استفاده از این قضیه نقطه ثابت، وجود جواب برای مسئله تعادل را بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

مسائل تعادل (EP) یکی از کاربردی‌ترین مسائل آنالیز غیرخطی است که شامل مسائلی چون مسائل بهینه‌سازی برداری، نامساوی تغییراتی برداری، مسئله تعادل نش برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار، نقطه ثابت و ... به عنوان موارد خاص است. در سال‌های گذشته مقاله‌های پژوهشی در مورد جنبه‌های مختلف مسائل تعادل برداری منتشر شده است. اگر چه نویسندگان این مقالات معتقدند که مسئله تعادل ابتدا توسط بلوم و اوتلی [۱] در سال ۱۹۹۴ مطرح شد؛ اما در واقع این مسئله دو سال قبل‌تر در مقاله موو و اوتلی [۲] ظاهر شد و در این مقاله سه مثال استاندارد از مسئله تعادل بررسی شده بودند؛ مسائل بهینه‌سازی، نابرابری‌های تغییراتی و مسائل نقطه ثابت. موارد خاص دیگری مانند مسائل نقطه زینی (مینیماکس)، مسائل تعادل نش، بهینه‌سازی مشتق‌پذیر محدب و مسائل مکمل‌سازی در مقاله بلوم و اوتلی مورد مطالعه قرار گرفته است.
فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی، $C \subseteq X$ ناتهی و محدب و $F : C \times C \to \mathbb{R}$ یک نگاشت حقیقی‌مقدار باشد. مسئله تعادل (EP) یعنی پیدا کردن $x^* \in C$ به‌طوری‌که

$$F(x^*, y) \geq o, \forall\, y \in C$$

برای مطالعه وجود جواب‌های (EP)، تعاریف و فرضیات زیر را ارائه می‌دهیم.
الگوریتم تکراری اصلاح‌شده مان و ایشی‌کاوا به صورت زیر تعریف می‌شود:
برای هر $x_۰ \in X$ دنباله $\{x_n\}$ به صورت

$$y_n = (۱ - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n T^n x_n + \delta_n v_n$$

$$x_{n+۱} = (۱ - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + \gamma_n u_n,\ n \geq ۰,$$

*سحر رنجبر
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (سحر رنجبر)، second.author@gmail.com (علی فرج‌زاده)

تعریف می‌شود که دنباله تکراری اصلاح‌شده ایشی‌کاوا نامیده می‌شود، جایی‌که $\{\alpha_n\},\{\gamma_n\},\{\beta_n\}$ و $\{\delta_n\}$ چهار دنباله در $(۰,۱)$ هستند که برای هر $n \geq ۰$، $\alpha_n + \gamma_n \leq ۱$ و $\beta_n + \delta_n \leq ۱$.
در حالت خاص اگر $\beta_n = \delta_n = ۰$ برای هر $n \geq ۰$، می‌توانیم دنباله $\{z_n\}$ را با

$$z_۰ \in X,$$

$$z_{n+۱} = (۱ - \alpha_n - \gamma_n)z_n + \alpha_n T^n z_n + \gamma_n w_n,\ \ n \geq ۰$$

تعریف کنیم که دنباله مان نامیده می‌شود.
ما ثابت می‌کنیم در فضای باناخ، اگر T شبه‌انبساطی مجانبی تعمیم‌یافته باشد، آنگاه الگوریتم اصلاح‌شده ایشی‌کاوا به نقطه ثابت T در صورت وجود همگرا است. آنگاه با استفاده از این قضیه نقطه ثابت، وجود جواب برای مسئله تعادل را بررسی می‌کنیم.

۲. مقدمات

فرض کنید X فضای باناخ حقیقی، C زیرمجموعه ناتهی از X و $T : C \to X$ یک نگاشت باشد که مجموعه نقاط ثابت آن با $F(T)$ نشان داده‌می‌شود.

تعریف ۱.۲. یک زیرمجموعه C از فضای توپولوژیک X، انقباض (Rtract) از X است اگر یک نگاشت پیوسته $R : X \to C$ که انقباض (Retraction) نام دارد وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $c \in C$، $R(c) = c$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی از فضای X و $R : X \to C$ یک انقباض غیرانبساطی از X به توی C باشد.

(۱) نگاشت $T : C \to X$ به‌طور مجانبی غیرانبساطی است اگر یک دنباله $\{r_n\}$ در $[۰,۱)$ با $\lim_{n\to\infty} r_n = ۰$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|T(RT)^{n-۱}x - T(RT)^{n-۱}y\| \leq (۱ + r_n)\|x - y\|,\ \forall x, y \in C, n \in N;$$

(۲) به طور مجانبی شبه‌غیرانبساطی است اگر دو دنباله $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ در $[۰,۱)$ با $\lim_{n\to\infty} r_n = ۰$ و $\lim_{n\to\infty} s_n = ۰$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\|T(RT)^{n-۱}x - p\| \leq (۱ + r_n)\|x - p\|,\ \forall x \in C, p \in F(T), n \in N;$$

(۳) به طور مجانبی شبه غیرانبساطی تعمیم‌یافته است اگر دو دنباله $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ در $[۰,۱)$ با $\lim_{n\to\infty} r_n = ۰$ و $\lim_{n\to\infty} s_n = ۰$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall x \in C, p \in F(T), n \in N, \|T(RT)^{n-۱}x - p\| \leq (۱ + r_n)\|x - p\| + s_n\|x - T(RT)^{n-۱}x\|$$

فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی، C یک زیر مجموعه ناتهی از X و $T : C \to X$ به طور مجانبی شبه غیرانبساطی تعمیم‌یافته نسبت به $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ باشد.
فرض کنید $\{u_n\},\{v_n\} \subset X$ کراندار باشند و $\{\alpha_n\},\{\gamma_n\},\{\beta_n\},\{\delta_n\} \in (۰,۱)$ به طوری که $\gamma_n + \alpha_n \leq ۱$ و $\beta_n + \delta_n \leq ۱$ برای هر $n \geq ۰$. آنگاه با انتخاب $x_۱$ دلخواه در C، دنباله تکراری اصلاح‌شده ایشی‌کاوا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y_n = (۱ - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n(RT)^n x_n + \delta_n v_n,$$

$$x_{n+۱} = (۱ - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n(RT)^n y_n + \gamma_n u_n, n \geq ۰$$

۳. نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. *فرض کنید Xیک فضای باناخ حقیقی، C یک زیرمجموعه بسته و محدب از X، $\{u_n\},\{v_n\}$ دو دنباله کراندار در X، $\{x_n\}$ دنباله تعریف شده در ایشی کاوا اصلاح شده، $R : X \to C$ یک انقباض غیرانبساطی و $T : C \to X$ به طور مجانبی شبه غیرانبساطی تعمیم‌یافته نسبت به $\{r_n\}$ و $\{s_n\}$ است به طوری که $F(T) \neq \emptyset$ بسته باشد . فرض کنید*

(۱) $\Sigma_{n=۱}^{\infty} r_n < \infty$ و $\Sigma_{n=۱}^{\infty} s_n < \infty$
(۲) $\Sigma_{n=۱}^{\infty} \beta_n < \infty$
(۳) $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = ۰$

آنگاه دنباله $\{x_n\}$ تعریف شده در ایشی کاوا اصلاح شده، به طور قوی به نقطه ثابت T همگرا است .

در نهایت با استفاده از این قضیه نقطه ثابت، وجود جواب برای مسئله تعادل را بررسی می‌کنیم.

مراجع

[1] Wolter, W. (1986), Some coverage error models for census data, *Journal of the American Statistical Association,* **81**, 338–346.
[2] Muu, L., & Oettli, W. (1992). Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 18(12), 1159-1166.
[3] R. A. Rashwana and Hammad, Mathematics Interdisciplinary, Research 2(2017) 9-21.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–315، صص. ۱۶–۱۹

ارتباط بین درون جبری (نسبی) و درون توپولوژیکی و قضایای نقاط ثابت

پرستو زنگنه مهر[آ]، علی فرج زاده[ب]، اردشیر کرمیان[*ج]

[آ]گروه ریاضی، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاداسلامی، کرمانشاه، ایران
[ب]گروه ریاضی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران
[ج]آموزش و پرورش استان تهران، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
درون جبری
درون توپولوژیکی
نقطه ثابت

2020 MSC:
49J40
54C40

چکیده

در این مقاله نشان می دهیم درون جبری نسبی جایگزین مناسبی برای درون جبری و درون توپولوژیکی است و خواص آنها را ضمن ارایه مثال هایی مورد بررسی قرار می دهیم و نیز قضیه هایی از نقطه ثابت را ارایه می کنیم که تعمیم و بهبود برخی از قضایای موجود در مقالات است.

۱. مقدمه

تعریف ۱.۱ ([۱]). فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری X باشد. نقاط درونی جبری و درونی جبری نسبی مجموعه S را به ترتیب با $cor(S)$ و $icr(S)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$cor(S) := \{x \in X : \ \forall x' \in X,\ \exists \lambda' > ۰;\ \forall \lambda \in [۰, \lambda'],\ x + \lambda x' \in S\},$$

$$icr(S) := \{x \in X : \ \forall x' \in L(S),\ \exists \lambda' > ۰;\ \forall \lambda \in [۰, \lambda'],\ x + \lambda x' \in S\},$$

که در آن

$$L(S) = span(S - S), \quad S - S = \{s_۱ - s_۲ : s_i \in S,\ i = ۱, ۲\}.$$

اگر S زیرمجموعه ناتهی از یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه

$$intS \subseteq cor(S) \subseteq icr(S) \subseteq S.$$

ملاحظه ۲.۱. با قرار دادن $\lambda = ۰$ در تعاریف مربوط به $cor(S)$ و $icr(S)$ می‌توان نتیجه گرفت که نقاط درونی جبری و نقاط درونی جبری نسبی مجموعه S زیرمجموعه‌های S هستند.

لم ۳.۱. *اگر S زیرمجموعه ناتهی از یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه*

$$intS \subseteq cor(S).$$

[*]سخنران
پست الکترونیک: p.zangenehmehr@gmail.com (پرستو زنگنه مهر)، farajzadehali@gmail.com (علی فرج زاده)،
ar.karamian1979@gmail.com (اردشیر کرمیان)

اثبات . فرض کنید $x_\circ \in intS$ و $x' \in X$. اگر $t \to \circ^+$، بنابه پیوستگی اعمال جمع و ضرب در فضای برداری توپولوژیک داریم

$$x_\circ + tx' \to x_\circ.$$

چون $intS$ باز است، لذا

$$\exists \lambda' > \circ : \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'], \ x_\circ + \lambda x' \in intS \subseteq S.$$

بنابراین $x_\circ \in cor(S)$. □

مثال ۴.۱. اگر $X = C_{\mathbb{R}}[\circ, ۱]$ فضای همه توابع پیوسته و حقیقی مقدار روی بازه بسته $[\circ, ۱]$ با نرم $\|f\|_\infty = \max_{\circ \le t \le ۱} |f(t)|$ و $S = \{f \in X : f(x) \ge \circ, \ \forall x \in [\circ, ۱]\}$ باشد. در این صورت S بسته و محدب است و

$$intS = \{f \in X : f(x) > \circ, \ \forall x \in [\circ, ۱]\} \subseteq cor(S).$$

زیرا اگر $f > \circ$ و $g \in C_{\mathbb{R}}[\circ, ۱]$، قرار دهید $\lambda' = \frac{m}{M_g} > \circ$ که در آن $m = \inf_{t \in [\circ, ۱]} f(t)$ و عدد حقیقی و نامنفی M_g طوری است که $-M_g \le g(x) \le M_g, \ \forall x \in [\circ, ۱]$، درنتیجه $f + \lambda g \ge \circ, \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda']$. لذا $f + \lambda g \in S$.

مثال زیر نشان می‌دهد برداری توپولوژیک بودن فضای توپولوژیک در لم ۳.۱ لازم است.

مثال ۵.۱. فرض کنید $R_۱ = \mathbb{R}$ و $R_۲ = \mathbb{R}$ به ترتیب دو فضای توپولوژیک با توپولوژی‌های استاندارد (توپولوژی تولید شده توسط بازه‌های باز) و گسسته (گردایه همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$) باشند و $X = R_۱ \times R_۲$ و $P = [\circ, \infty) \times \{\circ\} \subseteq R_۱ \times R_۲$. به‌سادگی می‌توان دید $intP = (\circ, \infty) \times \{\circ\}$ اما $cor(P) = \emptyset$، که ظاهراً با لم ۳.۱ در تناقض است. ولی این موضوع به دلیل برداری توپولوژیک نبودن فضای توپولوژیک X است.

مثال‌های زیر نشان می‌دهند درون جبری نسبی می‌تواند جایگزین مناسبی برای درون توپولوژیکی و درون جبری باشد.

مثال ۶.۱. اگر $X = \mathbb{R}^۳$ و $S = \{x = (x_۱, x_۲, x_۳) \in \mathbb{R}^۳ : -۱ \le x_۱ \le ۱, \ -۱ \le x_۲ \le ۱, \ x_۳ = \circ\}$، آنگاه

$$intS = \emptyset, \ cor(S) = \emptyset, \ icr(S) = \{x = (x_۱, x_۲, x_۳) \in \mathbb{R}^۳ : -۱ < x_۱ < ۱, \ -۱ < x_۲ < ۱, \ x_۳ = \circ\}.$$

مثال ۷.۱. فرض کنید فضای باناخ l^∞ شامل همه دنباله‌های کراندار با نرم $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ و مخروط $P = \{(x_۱, x_۲, \dots, x_n, \circ, \circ, \circ, \dots) : x_i \ge \circ, \ ۱ \le i \le n\}$ باشد. می‌توان بررسی کرد که $intP = cor(P) = \emptyset$ و $icr(P) = \{(x_۱, x_۲, \dots, x_n, \circ, \circ, \circ, \dots) : x_i > \circ, \ ۱ \le i \le n\}$.

۲. نتایج اصلی

لم زیر ارتباط بین مخروط و نقاط جبری درونی نسبی را بیان می‌کند که در اثبات قضیه ۳.۲ به‌کار می‌رود.

لم ۱.۲. *فرض کنید P یک مخروط با درون جبری نسبی ناتهی از فضای برداری X باشد . آنگاه*
(الف) $\theta \notin icr(P)$؛
(ب) اگر $x \in icr(P)$ و $y \in P$، آنگاه $[x, y)_c \in icr(P)$؛
(ج) $icr(P) \cup \{\theta\}$ مخروط است؛
(د) $icr(icr(P)) = icr(P)$.

اثبات . (الف) به برهان خلف فرض کنید $\theta \in icr(P)$. بنابراین

$$\forall x' \in L(P), \ \exists \lambda' > \circ : \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'], \ \lambda x' \in P.$$

درنتیجه $L(P) = P$، که با $P \cap -P = \{\theta\}$ در تناقض است.
(ب) فرض کنید $\circ \le t < ۱$، $z = (۱-t)x + ty$ و $v \in L(P)$. چون $x \in icr(P)$، می‌توان $\lambda > \circ$ را طوری انتخاب کرد که $x + \lambda v \in P$. چون $z + (۱-t)\lambda v = (۱-t)(x + \lambda v) + ty$، لذا $z \in P$. درنتیجه $[x, y)_c \in icr(P)$.
(ج) با استفاده از رابطه زیرنتیجه مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\emptyset = icr(P) \cap -icr(P) \subseteq P \cap -P = \{\theta\}.$$

(د) بنابه تعریف $icr(icr(P)) \subseteq icr(P)$. برای اثبات عکس فرض کنید $x \in icr(P)$ و $x' \in L(P)$. می‌توان گفت $\lambda' > ۰$ موجود است به طوری که

$$x + \lambda x' \in P,\ \forall\ \lambda \in [۰, \lambda'].$$

حال با توجه به (ب)، داریم

$$t(x + \lambda x') + (۱ - t)x \in icr(P), \quad \forall\ t,\ ۰ \le t < ۱.$$

بنابراین $x + t\lambda x' \in icr(P),\ \forall\ t\lambda \in [۰, t\lambda']$. درنتیجه $x \in icr(icr(P))$. □

قضیه ۲.۲ ([۲]). *فرض کنید X فضای باناخ حقیقی و P مخروط نرمال و $u_-, u_+ \in X$ با $u_- \prec u_+$ باشد. بعلاوه، $T : [u_-, u_+]_o \longrightarrow X$ نگاشتی صعودی و $h_۰ = u_+ - u_-$ باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*
(الف) T نگاشتی محدب باشد و

$$Tu_+ \preceq u_+ - \varepsilon h_۰,\ u_- \preceq Tu_-,$$

که در آن $\varepsilon \in (۰, ۱)$ ثابت است؛
(ب) T نگاشتی مقعر باشد و

$$u_- + \varepsilon h_۰ \preceq Tu_-,\ Tu_+ \prec u_+,$$

که در آن $\varepsilon \in (۰, ۱)$ ثابت است؛
آنگاه T نقطه ثابت یکتا $x_* \in [u_-, u_+]_o$ دارد. بعلاوه، برای هر $x_۰ \in [u_-, u_+]_o$ و دنباله بازگشتی $\{x_n\}\ (n = ۱, ۲, ...)$ $x_n = Tx_{n-۱}$، داریم

$$\|x_n - x_*\| \to ۰,\ (n \to \infty),$$

$$\|x_n - x_*\| \le M(۱ - r)^n,\ (n = ۱, ۲, ...),$$

که در آن M ثابتی مثبت و مستقل از $x_۰$ است.

قضیه زیر بهبود یافته قضیه ۱ موجود در مرجع [۴] است که در آن از نقطه درونی جبری نسبی به جای درون توپولوژیکی استفاده شده است.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید X فضای باناخ حقیقی و P مخروطی نرمال با درون جبری نسبی ناتهی باشد و همچنین فرض کنید $K = icr(P) \cup \{\theta\}$ و نقاط u_- و u_+ در X موجود باشند به‌طوری‌که $u_- \prec_P u_+$. اگر نگاشت $T : [u_-, u_+]_o \longrightarrow X$ صعودی و $h_۰ = u_+ - u_-$ و یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:*
(الف) T محدب و $Tu_+ \prec_K u_+$، $u_- \preceq Tu_-$؛
(ب) T مقعر و $u_- \preceq_K Tu_-$، $Tu_+ \prec u_+$؛
آنگاه T نقطه ثابت یکتا $x_* \in [u_-, u_+]_o$ دارد. بعلاوه، هردنباله بازگشتی $Tx_n = x_{n-۱}$ به x_* همگرا است و $M > ۰$ و $r \in (۰, ۱)$ موجودند به‌طوری‌که

$$\|x_n - x_*\| \le Mr^n.$$

در ادامه ابتدا با ارائه مثال نقض نشان می‌دهیم که قضیه نقطه ثابت ارائه شده در [۴] که ارجاعات بسیاری نیز به آن‌ها داده شده نادرست می‌باشند. سپس نسخه جدید و درستی برای آن ارائه می‌دهیم.
در سال ۲۰۱۲، کاستری‌کین [۱] آلمانی و اولینک [۲] سوئدی در اثبات قضیه ۱ در [۴]، که تعمیمی از لم ۱.۲ از [۵] است دچار خطا شدند. مقالات زیادی ازجمله مقالات موجود در مراجع [۵، ۶، ۸] به این قضیه نادرست ارجاع داده و قضایای نادرستی را در زمینه‌های کاربردی و معادلات دیفرانسیل به‌دست آورده‌اند.

قضیه ۴.۲ (قضیه ۱، [۴]). *فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی مرتب شده با مخروط P باشد به‌طوری‌که*
(الف) P دارای درون ناتهی باشد؛
(ب) P نرمال و مینی‌هیدرال باشد.
همچنین فرض کنید نقاط $u_- \prec\prec u_+$ در E و نگاشت برداری مقدار $T : [u_-; u_+]_o \longrightarrow E$ پیوسته، فشرده و صعودی باشد به‌طوری‌که u_- یک جواب قوی و u_+ یک جواب ضعیف برای آن باشد، یعنی

$$u_+ \prec\prec Tu_+ \text{ و } Tu_- \prec\prec u_-.$$

[1] Kostrykin
[2] Oleynik

در این صورت T نقطه ثابت $u_* \in [u_-, u_+]_o$ دارد که در آن

$$[u_-, u_+]_o = \{z \in E \mid u_- \preceq z \preceq u_+\}.$$

در اثبات قضیه فوق نویسندگان ادعا کرده‌اند برای عملگر $\hat{T} : [u_-, u_+]_o \to X$ تعریف شده با

$$\hat{T}u := sup\{inf\{Tu, u_+\}, u_-\},$$

هر نقطه ثابت u_* از $\hat{T}$ که در شرط $u_- \prec u_* \prec u_+$ صدق می‌کند یک نقطه ثابت برای عملگر T است. این موضوع در حالت کلی درست نیست، زیرا $inf\{Tu_*, u_+\}$ در حالت کلی موجود نیست.

مثال ۵.۲. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$، $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ و $u_- = (0,0), u_+ = (1,1)$. نگاشت $T : [u_-, u_+]_o \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x,x) + (x,y) + (-1,-3) & y \leq x \\ \frac{1}{2}(y,y) + (x,y) + (-1,-3) & x \leq y. \end{cases}$$

واضح است $[u_-, u_+]_o$ مساوی مربع (توپر) با گوشه‌های $(0,0)$، $(0,1)$، $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ و T در همه فرضیات قضیه ۴.۲ صدق می‌کند، اما T نقطه ثابت ندارد.

حال می‌خواهیم صورت درستی از قضیه ۴.۲ ضمن کاستن شرایط مینی‌هیدرالی مخروط و فشردگی نگاشت T را ارائه کنیم.

قضیه ۶.۲. *فرض کنید X فضایی نرم‌دار، P مخروطی منظم با درون ناتهی و دو نقطه u_- و u_+ در X به‌گونه‌ای باشند که $u_- \prec\prec u_+$. اگر نگاشت صعودی و پیوسته $T : [u_-, u_+]_o \longrightarrow X$ به‌گونه‌ای باشد که $u_- \prec\prec Tu_-$ و $Tu_+ \prec\prec u_+$، آنگاه حداقل یکی از دو مورد زیر برقرار است:*

(الف) عناصر v_0 و $u_0 \in (u_-, u_+)_c$ به‌گونه‌ای موجودند که T نقطه ثابت ماکسیمال v^* و نقطه ثابت مینیمال u_* در بازه $[u_0, v_0]_o$ دارد و $u_* = \lim_{n\to\infty} u_n$، $v^* = \lim_{n\to\infty} v_n$، که $u_n = T^n u_0$، $v_n = T^n v_0$، $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ و

$$u_0 \preceq u_1 \preceq \ldots \preceq u_n \preceq \ldots \preceq u_* \preceq v^* \preceq \ldots \preceq v_n \preceq \ldots \preceq v_1 \preceq v_0. \qquad (1)$$

(ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$ عناصر u_n و v_n متعلق به بازه $[v_{n-1}, u_{n-1}]_c$ موجودند به‌طوری‌که $Tv_n \preceq v_n$ و $u_n \preceq Tu_n$. بعلاوه، $Tv_* \preceq v_* = \lim_{n\to\infty} v_n$ و $u^* = \lim_{n\to\infty} u_n \preceq Tu^*$ و

$$u_- \preceq v_0 \preceq v_1 \preceq \ldots \preceq v_n \preceq \ldots \preceq v_* \preceq u^* \preceq \ldots \preceq u_n \preceq \ldots \preceq u_1 \preceq u_0 \preceq u_+.$$

مراجع

[1] M. Adan, V. Novo, Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone-convexlikeness, European Journal of Operational Research, **149** (2003), 641-653.

[2] Y. Du, Fixed points of some noncompact mapping and its applications, Acta Mathematica Sinica, **32** (1989), 618-627.

[3] D. Guo, Y.J. Cho and J. Zhu, Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems, Nova Science Publishers, Inc, New York, (2004).

[4] V. Kostrykin, A. Oleynik, An intermediate value theorem for monotone operators in ordered Banach spaces, Fixed point theory and applications, (2012), 2012:211.

[5] V. Kostrykin, A. Oleynik, On the existence of unstable bumps in neural, Integral Equations Operator Theory, **75** (2013), 445-458.

[6] Y. Li, S. Huang and T. Zhang, Dynamics of a non-selective harvesting predator–prey model with Hassell–Varley type functional response and impulsive effects, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **39** (2016), 189-201.

[7] X. Li and Z. Wang, Fixed point theorems for decreasing operators in ordered Banach spaces with lattice structure and their applications, Fixed Point Theory Applications, **18** (2013), 1-6.

[8] Y. Liao, L. Xu, Almost periodic solution for a delayed Lotka-Volterra system on time scales, Advances in diference equations, **96** (2014), 1-19.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–110، صص. ۲۰–۲۴

معکوس ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز مختلط و شرح رفتار درایه‌های آن

فاطمه رضائیان*،[آ]

[آ] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز، اهواز

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
معکوس
ماتریس دو توپلیتز
ماتریس قطری بلوکی

چکیده

در جبرخطی یک ماتریس قطر ثابت یا توپلیتز که در آن هر زیر قطر از سمت چپ به راست دارای مقدار ثابت می‌باشد. ماتریس دو توپلیتز نوعی از ماتریس‌های توپلیتز است. در این مقاله ما الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که معکوس ماتریس دو توپلیتز بلوکی مختلط را محاسبه می‌کند و سپس رفتار درایه‌های ماتریس معکوس نسبت به قطر اصلی را بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

در جبر خطی ماتریس‌های توپلیتز ماتریس‌های خاصی هستند که دارای نظم روی قطر اصلی، بالا و پایین قطر اصلی می‌باشند. نمونه‌ای از ماتریس‌های توپلیتز، ماتریس‌های توپلیتز بلوکی هستند. نوعی از ماتریس‌های بلوکی توپلیتز، ماتریس‌های بلوکی دو توپلیتز هستند که نویسندگانی چون گوور[1] روی مقادیر مقادیر ویژه‌ی این ماتریس‌ها کارکرده‌اند و معکوس صریح این ماتریس‌ها توسط دافونسکا[2] و پترونیکا[3] بدست آورده شد. ما نیز در این مقاله سعی داریم معکوس ماتریس‌های بلوکی دو توپلیتز متلط را مانند ماتریس‌های بلوکی توپلیتز بدست بیاوریم و شرح رفتار درایه‌های این ماتریس‌ها نسبت به قطر اصلی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. ماتریس شبه مجزای بلوکی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{j,k}=\begin{cases}U_jS_{j-1}S_{j-2}\cdots S_{k+1}V_k, & \text{اگر } k<j\\ D_j, & \text{اگر } k=j\\ P_jR_{j+1}R_{j+2}\cdots R_{k-1}Q_k, & \text{اگر } k>j\end{cases}$$

جایی که $\{D_j,P_j,Q_j,R_j,S_j,U_j,V_j\}$. مولدهای $M\times M$ از ماتریس T هستند به طوری که $1\le j\le N, 1\le k\le N$ به ترتیب بلوک‌های سطری و ستونی می‌باشند.

تعریف ۲.۱. T نوع خاصی از ماتریس‌های شبه مجزای بلوکی است و دارای سه بلوک A,B,C به طوری که به ترتیب قطر اصلی، پایین قطر اصلی هستند [۱۶].

$$T=\begin{bmatrix}A & C & \circ & \cdots & \circ\\ B & A & C & \cdots & \circ\\ \circ & B & A & \cdots & \circ\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \circ & \circ & \circ & \cdots & A\end{bmatrix}.$$

*سخنران
پست الکترونیک: Rezaeianf@ymail.com (فاطمه رضائیان)

[1] M.J.C. Gover (1994)
[2] C.M. Dafonseca (2001)
[3] J. Petroniko (2001)

تعریف ۳.۱. ماتریس دو توپلیتز مرتبه‌ی n برابر است با $G_n = [a_{ij}]$ جایی که اگر $|i-j| > ۱$ باشد آنگاه $a_{ij} = ۰$ و اگر $(i,j) \equiv (k,l) mod ۲$ آنگاه $a_{ij} = a_{kl}$ [۱۷] به طوری که

$$G = tridiag_n(c_۱, a_۱, b_۱; c_۲, a_۲, b_۲) = \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & & & \\ c_۱ & a_۲ & b_۲ & & \\ & c_۲ & a_۱ & b_۱ & \\ & & c_۱ & a_۲ & b_۲ \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

۲. معکوس ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز

در این بخش به ماتریس‌های سه قطری بلوکی توپلیتز را به عنوان نوع نوعی از ماتریس‌های شبه مجزای بلوکی مانند ماتریس‌های بلوکی توپلیتز می‌آوریم. حال با تعریف دنباله‌های $\{\Delta_j\}$ و $\{\Sigma_j\}$ به‌طوری‌که:

$$\Delta_j = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } j = ۱ \\ T_{j,j-۱}(T_{j-۱,j-۱} - \Delta_{j-۱})^{-۱} T_{j-۱,j}, & \text{اگر } ۱ < j \le N \end{cases} \quad (۱)$$

$$\Sigma_j = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } j = N \\ T_{j,j+۱}(T_{j+۱,j+۱} - \Delta_{j+۱})^{-۱} T_{j+۱,j}, & \text{اگر } ۱ \le j < N \end{cases} \quad (۲)$$

دنباله‌های $\{\Delta_j\}$ و $\{\Sigma_j\}$ مولدهای $T^{-۱}$ هستند.

قضیه ۱.۲. *دنباله‌های $\{\Delta_j\}$ و $\{\Sigma_j\}$ را در نظر می‌گیریم، اگر T یک ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز باشد این دنباله‌ها مولدهای T هستند* [۱۶] *در این صورت*

$$T^{-۱} = \begin{cases} (T^{-۱})_{j,k} = \left[\prod_{p=j}^{k-۱}(\Sigma_p - T_{p,p})^{-۱} T_{p,p-۱}\right](T_{k,k} - \Delta_k - \Sigma_j)^{-۱}, & \text{اگر } j \ge k \\ (T^{-۱})_{j,k} = \left[\prod_{p=j}^{k-۱}(\Delta_p - T_{p,p})^{-۱} T_{p,p+۱}\right](T_{k,k} - \Delta_k - \Sigma_k)^{-۱}, & \text{اگر } j \le k \end{cases}$$

اثبات. طبق [۱، ۱۹] برای T فرض می‌کنیم L بلوک پایین T باشد

$$T = (\Delta + L)\Delta^{-۱}(\Delta + L^T) = (\Sigma + L^T)\Sigma^{-۱}(\Sigma + L)$$

جایی که Δ و Σ بلوک‌های ماتریس هستند به‌طوری‌که

$$\Delta_۱ = T_۱, \quad \Delta_i = T_i - B_{i-۱}^T \Delta_{i-۱}^{-۱} B_{i-۱}, \quad \Sigma_{N_y} = T_{N_y}, \quad \Sigma_i = T_i - B_i \Sigma_{i+۱}^{-۱} B_i^T$$

jامین ستون بلوکی $T^{-۱}$ می‌تواند به صورت زیر اشاره شود:

$$\begin{aligned} T_j^{-۱} &= B_{j-۱}^T \Delta_{j-۱} \dots B_۱^T \Delta_۱ \Sigma_۱^{-۱} B_۱ \dots \Sigma_{j-۱}^{-۱} B_{j-۱} \Sigma_j^{-۱}, \qquad L = ۱, ۲, \dots, j-۱ \\ T_{j-۱}^{-۱} &= (B_{j-۱-۱}^{-۱} \Delta_{j-۱-۱} \dots B_۱^{-۱} \Delta_۱)(\Sigma B_۱ \dots B_{j-۱} \Sigma_j^{-۱}), \qquad L = ۱, ۲, \dots, j-۱ \\ T_{j+۱}^{-۱} &= (B_{j+L}^{-T} \Sigma_{j+L+۱} \dots B_{N_y-۱}^{-T} \Sigma_{N_y})(\Delta_{N_y}^{-۱} B_{N_y-۱} \dots \Delta_{j+۱}^{-۱} B_j^T \Delta_j^{-۱}), \qquad L = ۱, ۲, \dots, N_y - j \end{aligned}$$

با استفاده از تجزیه‌ی چولسکی معکوس ماتریس سه قطری بلوکی دوتوپلیتز تعیین می‌شود. Σ و Δ مولدهای T هستند. برای $T_{j,k} = ۰$ وقتی که $|j-k| > ۱$ مولدهای T همگی از بلوک‌های قطر اصلی، بالا و پایین قطر اصلی انتخاب می‌شوند و معکوس این بلوک‌ها شبه مجزای بلوکی هستند و معکوس T از محاسبه‌ی مولدهای $T^{-۱}$ حاصل می‌شود. □

لم ۲.۲. *فرض کنید $U_\Delta = \begin{pmatrix} ۰ & B \\ -C^{-۱} & C^{-۱}A \end{pmatrix}$ و $L_\Sigma = \begin{pmatrix} ۰ & C \\ -B^{-۱} & B^{-۱}A \end{pmatrix}$ جایی که (۱) و (۲) مولدهای مرتبه‌ی یک هستند.*

اثبات. برای $۱ < j \leqslant N$ باشد خواهیم داشت:

$$\Delta_j = B(A - \Delta_{j-۱})^{-۱} C = B(C^{-۱}A - C^{-۱}\Delta_{j-۱})^{-۱} = U_\Delta . \Delta_{j-۱}$$

جایی‌که $U_\Delta = \begin{pmatrix} ۰ & B \\ -C^{-۱} & C^{-۱}A \end{pmatrix}$ لذا $\Delta_j = U_\Delta^{j-i} . \Delta_۱ = U_\Delta^{j-i} {}_{/۰}$ به وضوح U_Δ مولد دنباله‌ی Δ_j که حاوی مولدهای $T^{-۱}$ است به طور مشابه برای $۱ \leqslant j < N$ دنباله‌ی $\{\Sigma_j\}$ داریم، $\Sigma_j = L_\Sigma^{N-j} . O$ جایی که $L_\Sigma = \begin{pmatrix} ۰ & C \\ -B^{-۱} & B^{-۱}A \end{pmatrix}$ این مولدها، مولدهای $O(۱)$ از $T^{-۱}$ را تشکیل می‌دهند. □

۳. بررسی رفتار عناصر معکوس ماتریس‌های سه قطری بلوکی دو توپلیتز

در این بخش ما رفتار عناصر T^{-1} را نسبت به قطر اصلی وقتی نوسان، افزایش و کاهش دارند را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱.۳. *فرض کنید* $\{\lambda_1^U, \cdots, \lambda_{2m}^U\}$ *مقادیر ویژه* U_Δ *باشد به طوری که* $|\lambda_1^U| \leq |\lambda_2^U| \leq \cdots \leq |\lambda_{2m}^U|$ *لذا خواهیم داشت:*

$$(T^{-1})_{j,k}((T^{-1})_{j,k})^{-1} \approx (c^{-1}\Delta_\infty - c^{-1}A)^{-1}.$$

اثبات.

$$(T^{-1})_{j-1,k}((T^{-1})_{j,k})^{-1} = \left[\prod_{M=j-1}^{k-1}(\Delta_M - A)^{-1}c\right](A - \Delta_k - \Sigma_k)^{-1} \times (\Delta - \Delta_k - \Sigma_k)\left[\prod_{q=k-1}^{'j} c^{-1}(\Delta_q - A)\right]$$
$$= (\Delta_{j-1} - A)^{-1}c = (c^{-1}\Delta_{j-1} - c^{-1}A)^{-1}.$$

و با توجه به مقادیر ویژه‌ی U_Δ با فرض همگرایی دنباله‌ی $\{\Delta_j\}$ به سمت Δ_∞ مرتبط با مقادیر ویژه‌ی U_Δ خواهیم داشت

$$(T^{-1})_{j-1,k}((T^{-1})_{j,k})^{-1} \approx (c^{-1}\Delta_\infty - c^{-1}A)^{-1}.$$

□

قضیه ۲.۳. *فرض کنید* T *یک ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز مختلط باشد به‌طوری‌که* A، B *و* C *به ترتیب بلوک اصلی، بلوک بالا، پایین قطر اصلی باشند که هر کدام از این بلوک‌ها مانند تعریف ۲.۱ * باشد. فرض کنید وقتی* j *بزرگ می‌شود* $\{\Delta_j\}$ *دنباله‌ی همگرای نقطه ثابت* Δ_∞ *باشد. یک* n *دلخواهی را داریم به‌طوری‌که وقتی* $j > n$ *باشد آنگاه* $\Delta_j \approx \Delta_\infty$. *اگر* T^{-1} *در قسمت پایین یا بالا مثلثی کاهش پیدا کند و* $|\lambda_{m+l}^L| > 1$ *یا* $|\lambda_{m+l}^U| > 1$. c_l *و* c_u *وجود دارد به‌طوری‌که:*

$$\|(T^{-1})_{j,k}| \leqslant \begin{cases} c_l|\lambda_{m+l}^L|^{-j} & \text{اگر } j > k, j > n \\ c_u|\lambda_{m+l}^L|^{-k} & \text{اگر } j < k, k > n. \end{cases}$$

اثبات. قسمت پایین مثلثی را در نظر می‌گیریم یعنی $j \geqslant k$، قسمت بالا مثلثی دارای اثبات مشابه است.

$$\|(T^{-1})_{j,k}| \leqslant \left\|(\Delta - \Delta_\infty\Sigma_j)^{-1}\right\| \|[B(\Delta_\infty - A)^{-1}]^{j-n}\|. \left\|\prod_{m=n-1}^{'k} B(\Delta_p - A)^{-1}\right\|$$

$B(\Delta_\infty - A)^{-1}$ قطری است. ($P \wedge P^{-1}$. $\wedge$ قطر است)

$$\|(T^{-1})_{j,k}\| \leqslant \left\|(A - \Delta_\infty - \Sigma_j)^{-1}\right\|.\|P \wedge^{j-n} P^{-1}\|. \left\|\prod_{m=n-1}^{'k} B(\Delta_m - A)^{-1}\right\| \leqslant c_l|\lambda_{m+l}^L|^{-j}$$

برای

$$c_l = \left\|(A - \Delta_\infty - \Sigma_j)^{-1}\right\|.\|P\||\lambda_{m+l}^L|^n\|P^{-1}\| \left\|\prod_{p=n-1}^{'k} B(\Delta_p - A)^{-1}\right\|.$$

□

مثال ۳.۳. فرض می‌کنیم $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ و c_1, c_2 بلوک‌های مختلط ماتریس دو توپلیتز باشند.

$$a_1 = \begin{bmatrix} ۱+۴i & ۲+۵i & ۶ \\ ۴ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} ۳+۲i & ۷+۱i & ۸+۵i \\ ۵ & ۲ & ۷۷ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} ۱۳+i & ۷۷+۱۷i & ۲۸+۲i \\ ۵۷ & ۱۲ & ۷ \\ ۷۱ & ۲۵ & ۲۳ \end{bmatrix}$$
$$b_2 = \begin{bmatrix} ۷+۲i & ۱۷+۱i & ۴+۱i \\ ۷۵ & ۱۲ & ۳۷ \\ ۷۲ & ۵۴ & ۲۳ \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} ۲۳+۲۲i & ۱۷+۳i & ۳+۲i \\ ۵۱ & ۵۲ & ۳۷ \\ ۷۲ & ۵۱ & ۲۳ \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} ۱۳+۵i & ۲+۳i & ۸۲+۵۳i \\ ۲۵ & ۳ & ۵ \\ ۵۴ & ۵۲ & ۳۳ \end{bmatrix}.$$

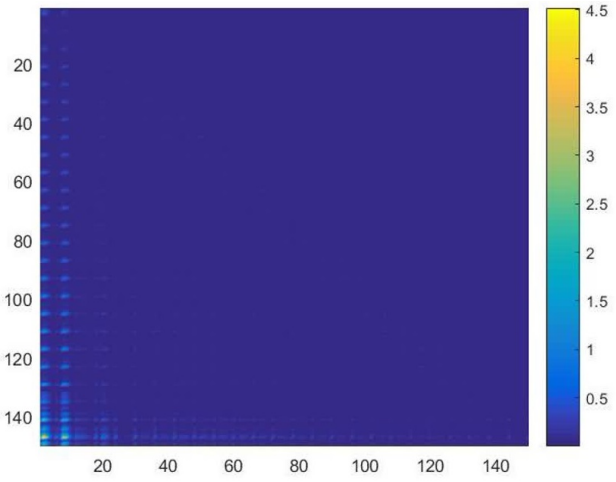
$$T = \begin{bmatrix} ۱+۳i & ۲+۵i & ۶+۰/۰۰i & ۱۳+۱i & ۷۷+۱۷i & ۲۸+۲i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i \\ ۴+۰/۰i & ۵+۰/۰i & ۱+۰/۰i & ۵۷+۰/۰i & ۱۲+۰/۰i & ۷+۰/۰i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i \\ ۲+۰/۰i & ۶+۰/۰i & ۴+۰/۰i & ۷۱+۰/۰i & ۲۵+۰/۰i & ۲۳+۰/۰i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i & ۰+۰/۰i \\ ۲۳+۲۲i & ۱۷+۳i & ۳+۲i & ۳+۲i & ۷+۱i & ۸+۵i & ۷+۲i & ۱۷+۱i & ۴+۱i \\ ۵۱+۰/۰i & ۵۲+۰/۰i & ۳۷+۰/۰i & ۵+۰/۰i & ۲+۰/۰i & ۷۷+۰/۰i & ۷۵+۰/۰i & ۱۲+۰/۰i & ۳۷+۰/۰i \\ ۷۲+۰/۰i & ۵۱+۰/۰i & ۲۳+۰/۰i & ۷+۰/۰i & ۵+۰/۰i & ۳+۰/۰i & ۷۲+۰/۰i & ۵۴+۰/۰i & ۲۳+۰/۰i \\ ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۱۳+۵i & ۲+۱۳i & ۸۲+۵۳i & ۱+۳i & ۲+۵i & ۶+۰/۰i \\ ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۲۵+۰/۰i & ۳+۰/۰i & ۵+۰/۰i & ۴+۰/۰i & ۵+۰/۰i & ۱+۰/۰i \\ ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۰/۰+۰/۰i & ۵۴+۰/۰i & ۵۲+۰/۰i & ۳۳+۰/۰i & ۲+۰/۰i & ۶+۰/۰i & ۴+۰/۰i \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} ۰/۰+۰/۰i \\ ۱۵+۰/۰i \\ ۰/۰۱۴۱+۰/۰i \\ ۰/۳۵-۰/۰۵i \\ ۰/۰۲۱۶+۰/۰i \\ ۰/۳۳۴۷-۰/۲۶۸۱i \\ ۰/۰۵۵۲-۰/۱۳۷۹i \\ ۱/۵+۰/۰i \\ ۰/۰+۰/۰i \end{bmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۴۸ - ۰/۴۵۰۱i & ۰/۱۰۱۲ - ۰/۴۰۹۸i & ۰/۱۰۱۲ - ۰/۴۰۹۸i \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} ۰/۰ + ۰/۰i & ۱/۱۹۵۱ + ۰/۲۸۶۵i & ۰/۶۸۸۹ + ۰/۰۴۷i & ۰/۳۲۹۱ + ۰/۱۸۹۷i & ۰/۳۶۳۰ - ۰/۰۱۱۰i & ۰/۴۷۶۵ + ۰/۰۰۱۷i & ۰/۲۲ + ۰/۱۰۶۸i & ۱/۲۶۴۵ + ۰/۳۰۰۷i & ۰/۷۱۱۶ + ۰/۰۴۹۸i \\ ۰/۱۵۳۲ + ۰/۱۰۲۷i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۰/۰۹۲۹ + ۰/۰۱۰۶i & ۰/۰۴۳۳ + ۰/۰۲۷۷i & ۰/۰۴۹۲ + ۰/۰۰۰۸i & ۰/۰۶۴۵ + ۰/۰۰۳۲i & ۰/۰۲۹۱ + ۰/۰۱۵۸i & ۰/۱۶۶۷ + ۰/۰۴۶۶i & ۰/۰۰۹۴۵ + ۰/۰۰۱۰۴i \\ ۰/۲۰۱۸ + ۰/۱۳۵۲i & ۱/۱۳۶۵ + ۰/۴۴۵۷i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۳/۹۲۴۳ + ۲/۳۷۹۴i & ۴/۳۸۷۶ - ۰/۰۳۶۱i & ۵/۷۵۵۱ + ۰/۱۴۷۹i & ۲/۶۲۸۳ + ۱/۳۴۸۷i & ۱۴/۹۲۹ + ۳/۸۳۶۲i & ۸/۴۲۷۳ + ۰/۷۴۲۵i \\ ۰/۱۵۰۷ + ۰/۰۸۶۳i & ۰/۸۳۲۹ + ۰/۲۶۰۶i & ۰/۴۸۵۸ + ۰/۰۶۶۶i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۰/۴۰۳۹ - ۰/۲i & ۰/۵۳۸۶ - ۰/۲۴۴۳i & ۰/۳۰۳۴ + ۰/۰۰۰۶۹i & ۱/۵۶۶۱ - ۰/۳۱۰i & ۰/۸۲۰۴ - ۰/۳۰۷۹i \\ ۰/۳۳۸۸ + ۰/۲۲۷۰i & ۱/۹۰۸۲ + ۰/۷۴۸۲i & ۱/۱۲۷۱ + ۰/۲۳۶۲i & ۰/۵ + ۰/۳۸۹۱i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۱۲/۶۴۵۴ - ۱/۲۲i & ۶/۱۱۹۳ + ۲/۲۴۷۷i & ۳۳/۳۸۸۸ + ۴/۸۳۱۰i & ۱۸/۵۱۲۶ - ۰/۳۶۹۳i \\ ۰/۲۶۵۷ + ۰/۱۴۱۸i & ۱/۴۵۷۵ + ۰/۴۰۸۸i & ۰/۸۴۵۷ + ۰/۰۹۰۳i & ۰/۳۹۶۲ + ۰/۲۴۹۰i & ۰/۴۴۷۴ + ۰/۰۰۳۵i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۳/۶۵۱۰ + ۱/۶۹۱۷i & ۲۰/۴۴۵۵ + ۴/۴۸۲۲i & ۱۱/۴۷۲۴ + ۰/۵۹۹i \\ ۴/۷۷۶۴ - ۰/۵۴۷۳i & ۲۲/۸۵۲۳ - ۷/۸۴۹۱i & ۱۱/۹۲۷۲ - ۶/۴۸۴۳i & ۷/۴۶۱۹ - ۰/۳۲۲۱i & ۵/۹۰۷۹ - ۴/۰۱۱۰i & ۷/۹۲۵۶ - ۴/۹۹۶۷i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۱/۲۶۴۵ + ۰/۳۰۰۷i & ۰/۷۱۱۶ + ۰/۰۴۹۸i \\ ۰/۱۵۳۲ + ۰/۱۰۲۷i & ۰/۸۶۲۹ + ۰/۳۳۸۴i & ۰/۵۰۹۷ + ۰/۱۰۶۸i & ۰/۲۲۶۱ + ۰/۱۷۶۰i & ۰/۲۷۲۳ + ۰/۰۲۹۶i & ۰/۳۵۵۸ + ۰/۰۵۰۹i & ۰/۱۵۳۲ + ۰/۱۰۲۷i & ۰/۰ + ۰/۰i & ۰/۰۹۴۵ + ۰/۰۱۰۴i \\ ۰/۲۰۱۱ + ۰/۱۳۴۸i & ۱/۱۳۲۵ + ۰/۴۴۴۱i & ۰/۶۶۹۰ + ۰/۱۴۲۰i & ۰/۲۹۶۷ + ۰/۲۳۱۰i & ۰/۳۵۷۴ + ۰/۰۳۸۸i & ۰/۴۶۷۰ + ۰/۰۶۶۸i & ۰/۲۰۱۱ + ۰/۱۳۴۸i & ۱/۱۹۶۵ + ۰/۴۴۵۲i & ۰/۶۸۷۷ + ۰/۱۳۴۱i \end{bmatrix}.$$

با محاسبه‌ی مقادیر ویژه از L_Σ و U_Δ داریم:

$$\lambda^L = ۱/۷۰, \qquad \lambda^U = ۱.$$



شکل ۱: رفتار معکوس ماتریس T نسبت به قطر اصلی

جدول ۱: دقت و زمان انجام روش قضیه‌ی ۱.۲ و مقایسه‌ی آن با متلب

n	زمان محاسبه‌ی متلب	زمان محاسبه‌ی روش قضیه ۱.۲	دقت روش قضیه ۱.۲
۱۰	۰/۰۶۸۲	۰/۰۴۵۷	۵/۷۷۶۶
۱۰۰	۴/۰۱۸۸	۰/۰۸۱۹	۱۰/۰۰۱۹
۵۰۰۰	۱۸/۰۰۱۲	۲/۲۵۴۱	۱/۰۲۵۴۱

نتیجه

اگر $\{\lambda_1^U, \cdots, \lambda_{۲m}^U\}$ و $\{\lambda_1^L, \cdots, \lambda_{۲M}^L\}$ به ترتیب مقادیر ویژه U_Δ و L_Σ باشند رفتار درایه‌های معکوس ماتریس سه قطری بلوکی دو توپلیتز به شرح ذیل است.

الف ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی هردو بیشتر از یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی هر دو نسبت به قطر اصلی کاهش می‌یابند.

ب ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی به ترتیب برابر یک و بیشتر از یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی نسبت به قطر اصلی به ترتیب افزایش و نوسان می‌یابند.

ج ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی به ترتیب کمتر از یک و بیشتر از یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی نسبت به قطر اصلی به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند.

د ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی به ترتیب بیشتر از یک و برابر با یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی نسبت به قطر اصلی به ترتیب نوسان و کاهش می‌یابند.

ه ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی هر دو برابر با یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی نسبت به قطر اصلی هر دو نوسان می‌یابند.

و ـ اگر مقادیر ویژه بالا مثلثی و پایین مثلثی به ترتیب بیشتر از یک و کمتر از یک باشند آنگاه عناصر بالا مثلثی و پایین مثلثی نسبت به قطر اصلی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند.

مراجع

[1] Cauley, S., Jain, J., Koh, C. K., and Balakrishnan, V. A scalable distributed method for quantum-scale device simulation. *Journal of Applied Physics*, 101(12): 123715, 2007.

[2] Chandrasekaran, S., Dewilde, P., Gu, M., Pals, T., and van der Veen A. J. Fast stable solver for sequentially semi-separable linear systems of equations. In *International Conference on High-Performance Computing*, pages 545-554. Springer, 2002.

[3] Chandrasekaran, S., and Gu, M. Fast and stable eigendecomposition of symmetric banded plus semi-separable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 313(1-3):, 107-114, 2000.

[4] Chandrasekaran, S., and Gu, M. A fast and stable solver for recursively semi-separable systems of linear equations. *Contemporary Mathematics*, 281:39-56, 2001.

[5] Chandrasekaran, S., and Gu, M. A divide-and-conquer algorithm for the eigendecomposition of symmetric block-diagonal plus semiseparable matrices. *Numerische Mathematik*, 96(4):723-731, 2004.

[6] Concus, P., and Meurant, G. On computingINV block preconditionings for the conjugate gradient method. *BIT Numerical Mathematic*s, 26(4): 493-504, 1986.

[7] Concus, P., Golub, G. H., and Meurant, G. Block preconditioning for the conjugate gradient method. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6(1): 220-252, 1985.

[8] Demko, S., Moss, W. F., and Smith, P. W. Decay rates for inverses of band matrices. *Mathematics of computation*, 43(168): 491-499, 1984.

[9] Eidelman, Y., and Gohberg, I. Inversion formulas and linear complexity algorithm for diagonal plus semiseparable matrices. *Computers and Mathematics with Applications*, 33(4): 69-79, 1997.

[10] Godfrin, E. M. A method to compute the inverse of an n-block tridiagonal quasi-Hermitian matrix. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 3(40): 7843, 1991.

[11] Gonzales, R. A., Eisert, J., Koltracht, I., Neumann, M., and Rawitscher, G. Integral equation method for the continuous spectrum radial Schrödinger equation. *Journal of computational physics*, 134(1): 134-149, 1997.

[12] Gover, M. J. The eigenproblem of a tridiagonal 2-Toeplitz matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 197, 63-78, 1994.

[13] Greengard, L., and Rokhlin, V. On the numerical solution of two-point boundary value problems. *Communications on pure and applied mathematics*, 44(4): 419-452, 1991.

[14] Mastronardi, N., Chandrasekaran, S., and Van Huffel, S. Fast and stable two-way algorithm for diagonal plus semi-separable systems of linear equations. *Numerical linear algebra with applications*, 8(1): 7-12, 2001.

[15] Meurant, G. (1992). A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13(3), 707-728.

[16] Ng, M. K., Rost, K., and Wen, Y. W. On inversion of Toeplitz matrices. *Linear algebra and its applications*, 348(1-3): 145-151, 2002.

[17] Rimas, J. Explicit expression for powers of tridiagonal 2-Toeplitz matrix of odd order. *Linear algebra and its applications*, 436(9): 3493-3506, 2012.

[18] Vandebril, R., Van Barel, M., and Mastronardi, N. Matrix computations and semiseparable matrices. *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, I, 2008.

[19] Zhang, F. *The schur complement and its Applications*. Springer, New York, 2005.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–255، صص. ۲۵–۳۲

کاربرد شبکه‌های عصبی برای حل عددی جریان الکتروهیدرودینامیک در یک کانال استوانه‌ای

سمانه ستاوند، محسن علی پور*

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، صندوق پستی ۴۷۱۴۸-۷۱۱۶۷

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
شبکه‌های عصبی
توابع پایه‌ای شعاعی
جریان الکتروهیدرودینامیک
کانال استوانه‌ای

چکیده

بسیاری از مدل‌های فیزیکی در علوم مهندسی به صورت معادلات ریاضی مدلسازی می‌شوند. جواب‌هایی که از حل این گونه معادلات بدست می‌آید، درستی رفتار این مدل‌ها را نشان می‌دهد. در اکثر موارد جواب‌های دقیق این مدل‌ها قابل محاسبه نمی‌باشد، بنابراین در سال‌های اخیر روش‌های عددی مختلفی برای حل تقریبی این مسائل مطرح شده‌اند. در این مقاله از الگوریتم شبکه‌های عصبی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای بدست آوردن جواب‌های تقریبی معادله جریان الکتروهیدرودینامیک در یک کانال استوانه‌ای استفاده می‌نمائیم.

۱. مقدمه

ردپای معادلات دیفرانسیل را در زمینه‌های مختلف علوم ریاضی، تجربی، اجتماعی می‌توان یافت زیرا این معادلات تغییرات را به زمان ریاضی بازگو می‌کنند. از آنجا که در این معادلات توابع، مشتقات و دیفرانسیل‌ها به یکدیگر پیوند می‌خورند از آنها می‌توان برای بیان پدیده‌های دینامیکی و تغییر و تحول بهره گرفت.

اساساً گزارش اطلاعات و مغز به صورت موازی و کاملاً پیچیده است، در سال ۱۹۱۱ که سگال اعلام کرد مغز از عناصر اصلی به نام برون ساخته شده کار بر روی تجزیه و تحلیل فعالیت‌های مغز بالا گرفت. هر نرون اجتماعی از مواد آلی است به پیچیدگی یک ریزپردازنده ولی سرعت محاسباتی آن با یک ریزپردازنده برابر نیست.

بعضی از نرون‌ها در هنگام تولد ساخته می‌شوند و بعضی از آنها در طول مسیر حیات به وجود می‌آیند [۲ و ۱].

۲. مدل‌سازی شبکه عصبی

شبکه‌های عصبی مصنوعی ساختارهای محاسباتی هستند که با الهام از سیستم عصبی زیستی شکل گرفتند و به عنوان ابزاری کارا و قدرتمند در نظریه تقریب شناخته می‌شوند. در این بخش از ایده‌ی شبکه عصبی برای مدل‌بندی و حل مساله معادلات دیفرانسیل (۲.۱) با شرایط مرزی (۲.۲) استفاده خواهیم کرد. [۵، ۴، ۳]

$$F\left(y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = ۰ \qquad (۲.۱)$$

$$y^{(i)}(۰) = y_{۰,i}, i = ۰, ۱, \dots, n - ۱. \qquad (۲.۲)$$

*سخنران

پست الکترونیک: m.alipour@nit.ac.ir m.alipour2323@gmail.com, (محسن علی پور)

بدین منظور در حالت کلی یک تقریب برای جواب مجهول معادله دیفرانسیل $f(\gamma)$ به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم.

$$f(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i g(w_i\gamma + \beta_i), \quad (۲.۳)$$

به طوری که در رابطه N نشان‌دهنده تعداد نرون‌ها، g تابع پایه فعال‌سازی و به اندازه کافی هموار می‌باشد.
β, w, δ پارامترهای سازگار با مقادیر حقیقی و کران‌دار می‌باشد به مجموعه‌ی این پارامترها وزن‌های شبکه عصبی می‌نامند که این گونه نشان می‌دهیم.

$$W = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N, w_1, w_2, \dots, w_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$$

با توجه به فرم تقریبی پیشنهادی (۲.۳) مشاهده می‌شود که به ازای هر مقدار n مشتقات آن یعنی $f^{(n)}(\gamma)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$f^{(n)}(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i g^{(n)}(w_i\gamma + \beta_i) \quad (۲.۴)$$

که در رابطه (۲.۴)، g را به عنوان تابع فعال‌سازی سیگموئد تانژانتی g_t، لگاریتمی g_l و پایه‌ای شعاعی g_{rb} که به صورت زیر تعریف می‌شوند می‌تواند به کار گرفته شود.

$$g_t = \frac{2}{1 + e^{-2t}} - 1, \quad (۲.۵)$$

$$g_l(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad (۲.۶)$$

$$g_{rb}(t) = e^{-t^2}. \quad (۲.۷)$$

در ادامه از ایده شبکه‌های عصبی و با استفاده از توابع فعال‌ساز برای تقریب جواب معادله دیفرانسیل (۲.۱) با شرایط مرزی (۲.۲) استفاده خواهد شد.
همان گونه که مشاهده می‌شود با توجه به فرمول‌بندی معادله دیفرانسیل (۲.۱) در روند عددی نیاز به محاسبات مشتقات مرتبه اول و دوم و ... از تابع تقریبی $f(\gamma)$ می‌باشد. بدین منظور در روابط زیر مقادیر این مشتقات متناظر به هر یک از توابع فعال‌ساز مورد نظر، ارائه خواهند شد.
برای تابع فعال‌سازی سیگموئد تانژانتی:

$$f_t(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \left(\frac{2}{1 + e^{-2(w_i\gamma + \beta_i)}} - 1 \right) \quad (۲.۸)$$

$$f_t'(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} 4\delta_i w_i \left(\frac{e^{-2(w_i\gamma + \beta_i)}}{1 + e^{-2(w_i\gamma + \beta_i)^2}} \right)$$

و مشتقات بالاتر به همین صورت.
برای تابع فعال‌سازی سیگموئد لگاریتمی داریم:

$$f_l(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{1}{1 + e^{-(w_i\gamma + \beta_i)}}, \quad (۲.۹)$$

$$f_l'(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i w_i \frac{e^{-(w_i\gamma + \beta_i)}}{\left(1 + e^{-(w_i\gamma + \beta_i)}\right)^2}, \quad (۱)$$

و مشتقات بالاتر به همین صورت.
و در نهایت برای تابع فعال‌سازی پایه‌ای شعاعی داریم:

$$f_{rb}(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i e^{-(w_i\gamma + \beta_i)^2}, \quad (۲.۱۰)$$

$$f_{rb}'(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} -2(w_i\gamma + \beta_i) w_i \delta_i e^{-(w_i\gamma + \beta_i)^2}, \quad (۲)$$

در ادامه تلاش می‌شود که با توجه به الگوریتم‌های عددی مبتنی بر شبکه‌های عصبی مقادیر مجهول وزن‌های ظاهر شده در هر یک از تقریب‌های $f(\gamma)$ محاسبه می‌شوند. بدین منظور از ایده آزمون جواب پیشنهادی استفاده می‌شود که در آن تابع جواب پیشنهادی باید در فرم کلی معادله دیفرانسیل (۲.۱) و همچنین شرایط مرزی (۲.۲) صدق کند. حال اگر فرض کنیم $f(\gamma)$ تقریبی از جواب اصلی معادله باشد (توجه شود این تابع می‌تواند هر یک از پیشنهادهای ارائه شده در روابط (۲.۸) – (۲.۱۰) باشد) لذا با جایگذاری آن در معادله (۲.۱) نتیجه می‌شود:

$$F\left(y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = Res(\gamma) \qquad (۲.۱۱)$$

که در آن تابع $Res(\gamma)$ تابع مانده نامیده می‌شود. هدف ما محاسبه ضرایب وزن‌های مجهول در تابع پیشنهادی است که به ازای این مقادیر تابع مانده به حداقل مقدار خود برسد. در ایده شبکه‌های عصبی تلاش بر آن است که ضرایب وزن‌های مجهول چنان محاسبه شود که نرم دو تابع $Res(\gamma)$ یعنی مقدار،

$$||Res(\gamma)||_۲ = \left(\int_{\omega} |Res(\gamma)|^۲ \, d\gamma\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

مینیم شده و همچنین تابع پیشنهادی $f(\gamma)$ در شرایط مرزی (۲.۲) صدق کند. که در این صورت مسئله حل معادله دیفرانسیل تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی می‌شود با توجه به این که مسئله بهینه‌سازی پیوسته است و کار بر روی مسائل بهینه‌سازی پیوسته دشوار بوده، به منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی از یک فرآیند گسسته‌سازی استفاده می‌کنیم و بعد از روش‌های عددی برای حل مسئله گسسته‌سازی شده به جواب بهینه می‌رسیم. حال برای حل مسئله گسسته‌سازی مسئله بهسازی مورد نظر ابتدا فرضاً دامنه جواب $\omega = [۰,۱]$ به k زیر بازه‌های یکنواخت و با طول گام‌های مساوی h افراز می‌کنیم به طوری که $h = \frac{۱}{k}$ و این گونه یک مجموعه نقاط یکنواخت $\{\gamma_i = ih, i = ۰, \dots, k\}$در بازه $[۰,۱]$ تولید می‌شود. اکنون مقدار $||Res(\gamma)||_۲$به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\|Res(\gamma)\|_۲ \approx \left[\frac{۱}{K+۱}\sum_{i=۰}^{K}\left(F\left(f_i, f_i', f_i'', \dots, f_i^{(n)}\right)^۲\right)\right]^{\frac{۱}{۲}},$$

به طوری که در آن $f_i = f(\gamma_i)$ هدف ما یافتن تابع تقریبی f به گونه‌ای است که مقدار نرم گسسته‌سازی شده فوق را به حداقل برساند. از طرفی رابطه متناظر با شرایط مرزی (۲.۲) به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varepsilon_۲ = \frac{۱}{n}\left[\sum_{i=۰}^{n-۱}\left(y^{(i)}(۰) - y_{۰,i}\right)^۲\right].$$

با توجه به ایده الگوریتم شبکه‌ی عصبی یک تابع خطای کنترل‌کننده کلی و به صورت مجموع میانگین خطاهای مجذور به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\varepsilon = \varepsilon_۱ + \varepsilon_۲,$$

بطوریکه

$$\varepsilon_۱ = \frac{۱}{K+۱}\sum_{i=۰}^{K} F\left(f_i, f_i', f_i'', \dots, f_i^{(n)}\right)^۲.$$

۳. بررسی عددی جریان الکتروهیدرودینامیک در یک کانال استوانه‌ای

سیستم‌های مایعات الکترونیکی در چندین فرآیند صنعتی و مهندسی توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. در سال‌های اخیر، اثرات میدان الکتریکی بر روی مایعات از دیدگاه نظری برای توسعه فرایندهای جدید مورد بررسی قرار گرفته است. تعامل الکتروهیدرودینامیک و هیدرودینامیک اغلب به عنوان الکتروهیدرودینامیک (EHD) نامیده می‌شود و زمانی که یک سیال الکتروهیدرودینامیک (EDH) پدیده‌های حمل و نقل را در مایعات جریان کنترل می‌کند.

جریان (EHD) در بسیاری از زمینه‌های مهندسی شیمی و صنایع، مانند پمپ‌ها و جوهرافشان‌ها [۶]

رسوب‌دهنده‌های الکترواستاتیک [۷] فناوری نانو تکنولوژی [۸] جهت‌گیری ذرات کلوئیدی با یک اتصال متناوب یا میدان الکتریکی جریان مستقیم که به طور معمول یک رابطه اعمال می‌شود [۹]، دستگاه‌های MEMS [۱۰]، طراحی پمپ دی الکتریک [۱۱]، کنترل حرارتی میکروالکترونیک با استفاده از پمپ‌های الکتروپوپ [۱۲]، طراحی میکروالکترودهای هموار فلزی [۱۳]، رسوب‌گزاران الکترواستاتیکی [۱۴] و تنظیم مقادیر ناحیه گرانول ذرات نیکل در پردازش پودر پزشکی [۱۵]، جریان یون در راکتورهای توکاماک دیفرتور [۱۶]، میدان‌های الکتریکی عرضی یا شعاعی از جمله کنترل‌های احتراق [۱۷]، تکه ذرات مایکرو دیو بدون هیچ بخش مکانیکی حرکتی [۱۸]، نیروی دریایی در مقیاس کوچک [۱۹]، مایعات هوشمند الکترولیوژیک [۲۰]، کنترل الکترومغناطیسی رفتار توده و انفجاری ذرات کلوئیدی در نزدیکی الکترودها [۲۱]، اتمیزاسیون مایع

الکترواسپری با استفاده از جت‌های الکتروهیدرودینامیکی مخروطی [۲۲]، کنترل لایه مرزی در جریان‌های هیپرسیونیکی یونیز شده [۲۳].
در این بخش به جایگزینی ریاضیات در جریان نفوذ یون الکتروهیدرودینامیک در یک حلقه استوانه‌ای دایره‌ای می‌پردازیم.
خلاصه‌ای از معادلات حاکم را ارائه می‌دهیم که از [۲۵ ، ۲۴] گرفته شده است. اجازه دهید با سیم مختصات محوری (r،z) را انتخاب کنیم جایی که r هماهنگی شعاعی است و z مختص محوری است.
یک کانال استوانه‌ای دایره‌ای از شعاع a دارای یک دیوار عایق‌روی صفحات $z = ۰$ و$z = L$ [۱۶]، در یک جریان کاملاً توسعه یافته در بدنه یون کشیده شده را در نظر بگیرید که در شکل ۱ نشان داده شده است. ولتاژ V ، یک میدان الکتریکی $\vec{E}_{۰}$ را در طول سیلندر تولید می‌کند. تراکم جاری $\vec{j}$، با فرض اینکه تنها نوعی از ذرات یونیز شده محفظه مایع دی الکتریک است را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{j} = \rho_f \left(k\vec{E}_{۰} + \vec{v} \right), \tag{۱.۳}$$

بطوریکه ρ_f چگالی شارژ آزاد یونی سیالات است و k تحرک یون است. برای یک راه حل کامل توسعه یافته mackee و همکاران [۲۵] تراکم جریان را همانند تراکم شارژ آزاد و بردارهای تعمیم یافته را برای سرعت در فرم زیر کاهش دادند:

$$\vec{j} = (۰, ۰, j(r)), \vec{v} = (۰, ۰, w(r)), \rho_f = \rho(r), \tag{۲.۳}$$

در حالی که گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial z}$ ثابت است.
با استفاده از (۲.۳) معادله Navier-stokes به معادله دیفرانسیل معمولی زیر کاهش می‌یابد:[۲۵]

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_f E_{۰} + \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr} \right), \tag{۳.۳}$$

جایی که μ یک وسیکوزیته پویا مایع دی الکتریک است. دو مقیاس زمانی مختلف برای یک مقیاس سرعت u و طول L وجود دارد که اتصال بین سیال و یون را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$t_c = \frac{\varepsilon_{۰}}{K\rho_{۰}},\ t_f = \frac{L}{U}, \tag{۴.۳}$$

بطوریکه $\varepsilon_{۰}$ ثابت فضای آزاد، $\rho_{۰}$ چگالی شارژ در صفحه ورودی، t_c زمان آرامش شارژ برای یون‌ها و t_f زمان حمل مایع می‌باشد.
نسبت زمان آرامش شارژ t_c به زمان حمل مایع t_f عدد رینولدز الکتریکی می‌باشد. برای مقادیر بزرگ این نسبت، انتقال مایع ρ_f را تعیین می‌کند.
فرض کنید که $j(z = ۰) = j_{۰}$، از معادله (۱.۳) چگالی شارژ می‌تواند بصورت زیر ارزیابی شود:

$$\rho_f(r) = \frac{j_{۰}}{KE_{۰} + w(r)}. \tag{۵.۳}$$

برای تعیین سرعت مایع به طور کامل توسعه یافته ،w(r) با ادغام (۵.۳) تا (۳.۳)، معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را بدست می‌آوریم:[۲۵]

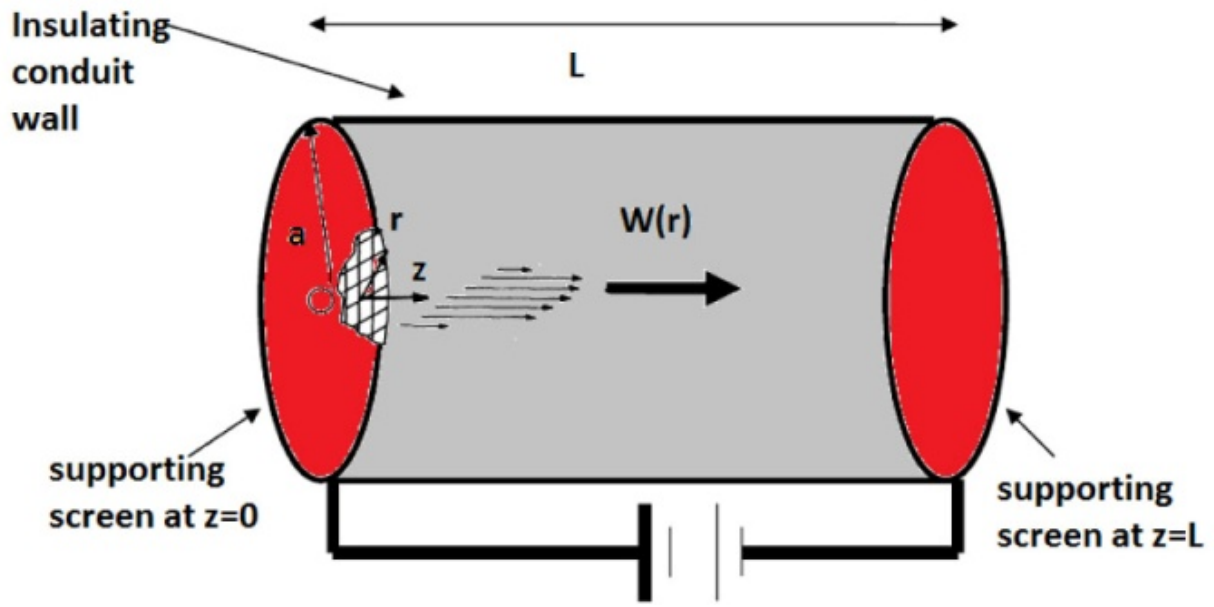
$$\frac{\delta p}{\delta z} = \frac{j_o E_o}{KE_o + w} + \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dw}{dr} \right]. \tag{۶.۳}$$

شرایط مرزی با در نظر گرفتن سرعت و گرادیان سرعت همانطور که در مرکز و دیوار کانال به شرح زیر مشخص شده است:

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=۰} = ۰, w(a) = ۰, \tag{۷.۳}$$

لازم به ذکر است که سرعت سیال $w(r)$ در اطراف $r = ۰$ متقارن و کراندار است. با استفاده از تبدیل‌های $w^* = -\frac{w}{KE_{۰}\alpha}, r^* = \frac{r}{a}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^۲w*}{dr*^۲} + \frac{۱}{r*}\frac{dw*}{dr*} + Ha^۲\left[۱ - \frac{w*}{۱ - \alpha w*} \right] = ۰, \tag{۸.۳}$$



شکل ۱: جریان الکتروهیدرو دینامیک در یک کانال استوانه‌ای [۲۶]

بطوریکه $\alpha = \frac{k}{j_0}\frac{\delta p}{\partial z} - ۱$ اندازه غیرخطی و $Ha = \sqrt{\frac{j_0 a^۲}{\mu K^۲ Eo}}$ اندازه هارتمن الکتریکی است.

$$\left.\frac{dw^*}{dr^*}\right|_{r^*=0} = 0, w(1) = 0, \tag{۹.۳}$$

در این بخش از روش شبکه عصبی با استفاده از تابع فعالیت پایه شعاعی برای حل مسئله مقدار مرزی (۸.۳) با شرایط مرزی (۹.۳) استفاده می‌کنیم. با فرض w*=w معادلات (۸.۳) و (۹.۳) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases}(1-\alpha w(r))[(rw''(r)+w'(r)] + rHa^۲[1-(\alpha+1)w(r)] = 0, 0 < r < 1, \\ w'(0) = 0, w(1) = 0.\end{cases} \tag{۱۰.۳}$$

در ابتدا یک مدل شبکه عصبی با انتخاب N=۱۰ نرون را در نظر می گیریم، لذا یک تقریب از جواب مسئله (۱۰.۳) به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$f(r) = \sum_{i=1}^{10} \delta_i g_{rb}(w_i r + \beta_i),$$

از طرفی برای تولید تابع هدف، دامنه جواب $t \in [0,1]$ را به k=۱۰ قسمت مساوی افراز کرده و تابع ارزیاب گسسته‌سازی شده ε را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\varepsilon = \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10}\left(r_i(1-\alpha f(r_i))f''(r_i) + (1-\alpha f(r_i))f'(r_i) + r_i H^۲(1-(\alpha+1)f(r_i))^۲\right) + \frac{1}{2}\left((f(1)-0)^۲ + (f'(0)-0)^۲\right)$$

بطوریکه $r_i = ih$ برای $h = \frac{1}{10}$.

به وضوح مسئله بهینه‌سازی شده فوق دارای ۳۰ پارامتر مجهول یا بردار وزن‌های (δ, w, β) است که با استفاده از روش نقطه درونی محاسبه شده و نتایج در جدول ۱ و شکل های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

مقدار می نیمم تولید شده برای تابع هدف برابر است با: $\varepsilon = ۷/۹۷۸۱۵۹۸۲۳۱۷۱۶۴۰۲۱ \times ۱۰^{-۹}$

ω_i	δ_i	β_i
$\omega_{\cdot} = -\cdot/۲۲۶۶۹۴۵۳۲۹۰۵۸۰۳۱۵۸$	$\beta_{\cdot} = ۱/۶۶۴۶۸۳۰۳۱۶۵۹۸۷۲۴۰$	$\delta_{\cdot} = -۱/۰۶۶۲۹۹۲۱۸۹۰۵۴۵۰۷۶$
$\omega_۱ = -۱/۳۶۴۵۷۱۱۹۴۰۹۶۹۱۶۹۶$	$\beta_۱ = \cdot/۶۱۲۴۳۶۹۱۴۷۵۷۳۵۴۵۱۱$	$\delta_۱ = \cdot/۳۶۹۴۳۷۳۹۱۳۳۳۳۷۱۰۰۰$
$\omega_۲ = ۱/۰۵۵۰۸۱۹۹۶۲۸۱۹۶۳۰۸$	$\beta_۲ = \cdot/۳۲۳۹۵۶۳۳۷۶۷۷۶۸۷۶۱۲$	$\delta_۲ = ۲/۹۳۶۸۳۴۵۲۴۱۱۳۴۶۷۰۱$
$\omega_۳ = -۱/۷۱۱۶۳۴۶۲۶۳۶۷۶۰۶۷$	$\beta_۳ = -۱/۷۰۵۹۴۸۶۹۷۱۰۲۲۲۳۵۲$	$\delta_۳ = -\cdot/۵۸۸۲۱۲۴۶۸۵۶۱۷۴۶۸۰۴$
$\omega_۴ = ۱/۲۹۶۶۶۱۷۹۱۵۳۷۳۵۹۵۰$	$\beta_۴ = -۱/۶۶۳۰۱۶۵۰۱۱۵۸۷۷۷۴۲$	$\delta_۴ = \cdot/۷۰۵۴۱۷۹۸۵۴۷۷۲۴۸۲۱۰$
$\omega_۵ = -۱/۱۶۷۱۵۳۱۱۵۹۹۲۹۶۶۲۲$	$\beta_۵ = ۲/۸۰۰۱۵۵۸۴۲۸۵۱۲۶۰۹۶$	$\delta_۵ = ۴/۸۴۹۵۹۰۷۲۸۴۸۷۸۰۳۴۸$
$\omega_۶ = \cdot/۸۷۴۴۲۷۴۶۷۲۱۹۶۴۶۲۵۹$	$\beta_۶ = ۳/۷۳۳۱۱۳۶۹۷۲۷۷۰۰۴۰۴$	$\delta_۶ = \cdot/۰۰۵۴۳۱۳۰۱۳۷۰۳۳۸۶۰۶۵۰$
$\omega_۷ = \cdot/۵۹۶۱۸۰۴۲۸۴۰۷۹۶۰۸۱۶$	$\beta_۷ = -\cdot/۹۹۰۲۴۲۲۶۸۹۷۹۵۲۷۰۶۳$	$\delta_۷ = \cdot/۲۱۰۱۷۰۹۶۳۶۱۲۶۶۶۶۲۸$
$\omega_۸ = -\cdot/۳۶۳۷۸۳۶۵۹۶۷۲۸۹۵۴۴۳$	$\beta_۸ = ۱/۵۱۰۱۳۷۱۸۶۱۵۲۲۱۳۴۸$	$\delta_۸ = \cdot/۱۳۰۸۹۲۲۵۶۷۵۲۴۷۵۹۰۰$
$\omega_۹ = \cdot/۸۲۱۵۳۷۱۴۵۷۰۲۴۶۱۳۹۱$	$\beta_۹ = -۱/۴۶۳۰۴۱۲۲۴۱۸۴۹۷۸۸۴$	$\delta_۹ = -\cdot/۶۸۴۷۶۴۶۰۵۰۷۸۲۹۰۰۶۸$
$\omega_{۱۰} = ۱/۰۳۷۳۳۰۷۷۸۰۳۰۴۱۰۴۱$	$\beta_{۱۰} = \cdot/۳۱۸۱۹۲۳۴۰۰۹۶۸۷۵۷۷۴۸$	$\delta_{۱۰} = -۱/۸۹۱۰۹۷۹۹۸۸۶۱۸۶۵۰۲$

جدول ۱: نتایج روش نقطه درونی

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم عددی مبتنی بر شبکه‌های عصبی و ترکیب آن با روش بهینه‌سازی نقطه درونی برای حل عددی مسئله جریان الکتروهیدرودینامیک در یک کانال استوانه‌ای با انتخاب تابع فعالیت پایه ای شعاعی بررسی کردیم و می‌توانیم از این روش به عنوان ابزاری کارا و قدرتمند در نظریه تقریب استفاده نماییم. عملکرد این روش بسیار ساده و در عین حال از دقت کافی برخورد می‌باشد.

مراجع

[۱] محمدباقر منهاج، مبانی شبکه‌های عصبی، هوش محاسباتی، جلد اول، دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران، ۱۳۷۹.

[۲] لوران فاست، مبانی شبکه‌های عصبی، ترجمه هادی ویسی، کبری مفاخری، سعید باقری شکری، تهران، انتشارات نص، ۱۳۸۸.

[3] M. Jalaal, D.D. Ganji, An analytical study on motion of a sphere rolling down an inclined plane submerged in a Newtonian fluid, Power Technology 198 (1) (2010) 82-92.

[4] D.D. Ganji, A.Sadighi, Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations, International journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation 7 (4) (2011) 411-418, http://dx.doi.org/10.1515/IJNSNS.2006.7.4.411. (May).

[5] G. Domairry, A Mohsenzadeh, M. Famouri, The application of Homotopy analysis method to solve nonlinear differential equation governing Jeffery-Hamel flow, Communications in nonlinear Science and Numerical Simulation 14 (2008) 85-95.

[6] K. Edamura and Y. Otsubo, A continuous inkjet device on the basis of electrohydrodynamic mechanism, J. Imaging Sci. Technol., 48 (2004), 148-152.

[7] P. Zamankhan, G. Ahmadi, and F-G. Fan, Coupling effects of the flow and electric fields in electrostatic precipitators, J. Appl. Phys., 96 (2004), 7002-7010.

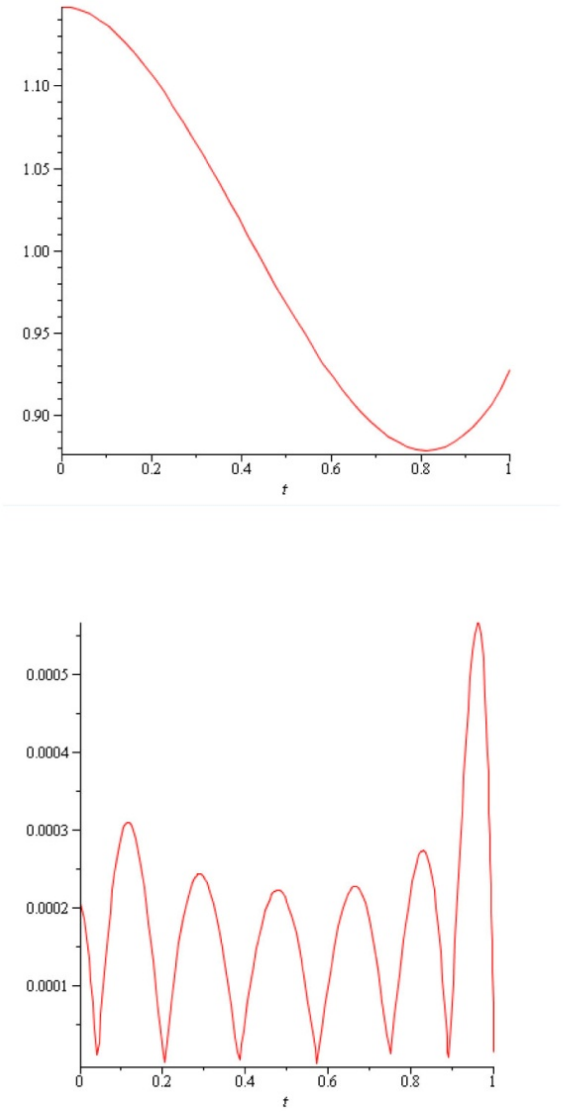
[8] C. H. Park, K. H. Kim, J. C. Lee, and J. Lee, Insitu-nanofabrication via electrohydrodynamic jetting of countercharged nozzles, Polymer Bull., 61 (2008), 521-528.

[9] S-R. Yeh, M. Seul, and B. I. Shraiman, Assembly of ordered colloidal aggregates by electricfield-induced fluid flow, Nature, 386 (1997), 9-57.

[10] H. Sugiyama, H. Ogura, and Y. Otsubo, Fluid devices by the use of electrohydrodynamic effects of water, J. App. Fluid Mechanics., 4 (2011), 27-33.

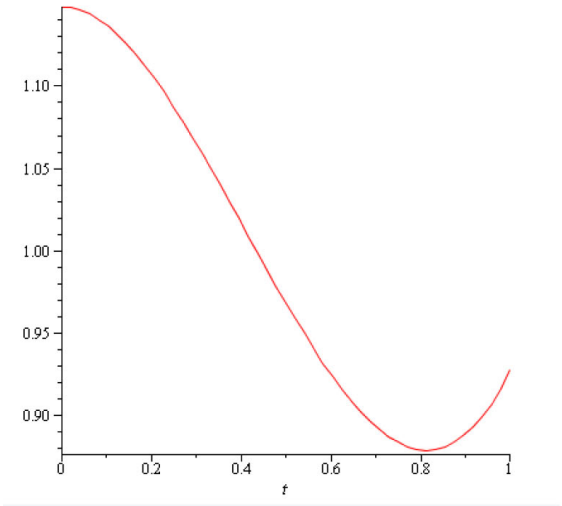
[11] M. Driouich, K. Gueraoui, M. Sammouda, Y. M. Haddad, and I. Aberdane, The effect of electric field on the flow of a compressible ionized fluid in a cylindrical tube, Adv. Studies Theor. Phys., 6 (2012), 687-696.

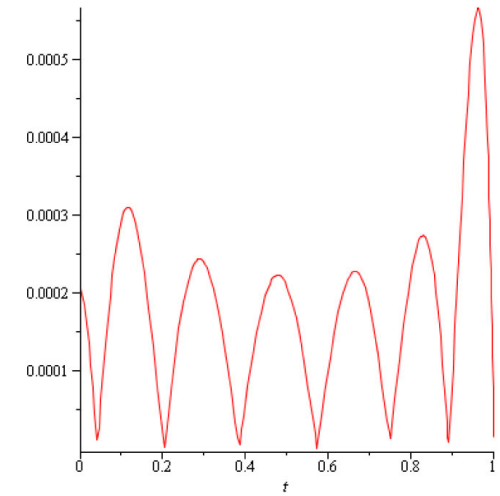
[12] J. S. Chang, H. Tsubone, G. D. Harvel, and K. Urashima, Capillary/Narrow flow channel driven EHD gas pump for an advanced thermal management of micro-electronics, Ind. Appl. Soc. Annu. Meeting., (2008).



شکل ۲: نمودار جواب تقریبی محاسبه شده توسط تابع فعالیت پایه‌ای شعاعی

[13] N. G. Green, A. Ramos, A. Gonzalez, H. Morgan, and A. Castellanos, Fluid flow induced by non-uniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes III: Observation of streamlines and numerical simulation, Phys. Rev. E., 66 (2002).
[14] S. C. Kim and Y. N. Chun,CFD modelling of electrohydrodynamic gas flow in an electrostatic precipitator, Int. J. Environment Pollution., 36 (2009), 337-349.
[15] M. Hou, W. Chen, T. Zhang, and K. Lu , Electric field controlled dilutedense flow transition in granular flow through a vertical pipe, Powder Technol., 135 (2003), 105-111.
[16] A. V. Chankin, D. P. Coster, and N. Asakura, A possible role of radial electric field in driving parallel ion flow in scrape-off layer of divertor tokamaks, Nucl. Fusion., 47 (2007), 762-772.
[17] M. Zake, M. Purmals, and M. Lubane, Enhanced electric field effect on a flame, J. Enhanc. Heat Transf., 5 (1998), 139-163.
[18] D. R. Arifin, L. Y. Yeo, and J. R. Friend, Microfluidic blood plasma separation via bulk electrohydrodynamic flows, Biomicrofluidics., 1 (2007).





شکل ۳: نمودار قدر مطلق خطای مانده تولید شده توسط تابع فعالیت پایه‌ای شعاعی

[19] A. A. Martins and M. J. Pinheiro, Fluidic electrodynamics: Approach to electromagnetic propulsion, Phys. of Fluids., 21 (2009).
[20] J. G. Cao, J. P. Huang, and L.W. Zhou, Structure of electrorheological fluids under an electric field and a shear flow: Experiment and computer simulation, J. Phys. Chem. B., 110 (2006), 11635-11639.
[21] P. J. Sides, Calculation of electrohydrodynamic flow around a single particle on an Electrode, Langmuir., 19 (2003), 2745-2751.
[22] A. A. Naqwi, R. P. A. Hartman, and J. C. M. Marijnissen, Basic studies of electrohydrodynamic atomization process using phase Doppler measurement technique, Part. Part. Syst. Char., 13 (1996), 143-149.
[23] J. R. Roth, H. Sin, R. Madhan, and S. Wilkinson, Flow re-attachment and acceleration by paraelectric and peristaltic electrohydrodynamic effects, 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (2003). DOI 10.2514/6.2003-531.
[24] A.C. Eringen and G.A. Maugin, Electrohydrodynamic of continua II fluids and complex media, Springer-Verlag, 1990.
[25] S. McKee, R. Watson, J. A. Cuminato, J. Caldwell, and M. S. Chen, Calculation of electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit, J. Appl. Math. Mech., 77 (1997), 457-465.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–299، صص. ۳۳–۳۷

عملکرد شبکه عصبی RBF در بررسی بیماری کرونا در کشور ایران

مهدی سروش*[آ]، مژگان صالحی[ب]

[آ]دانشجوی کارشناسی ارشد آنالیز عددی، دانشگاه علم و صنعت
[ب]کارشناسی ریاضات و کاربرد ها، ، دانشگاه صنعتی شاهرود

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
داده کاوی
بیماری کرونا
درون یابی
روش های شبکه عصبی RBF

چکیده

با توجه به وضعیت پیش آمده در دو سال اخیر و کسترش ویروس کرونا، مشکلاتی در پی این رویکرد پیدا شده است که از جمله آنها می توان به بالا رفتن نرخ مرگ و میر بین کشور ها و تاثیر مستقیم و غیر مستقیم اثرات مالی آن در حوزه های گوناگون زندگی مردم اشاره کرد. پیش بینی بیماری های ناشی از عفونت های ویروسی یک کار بسیار پیچیده پزشکی است که در آن باید از بسیاری از داده های واقعی متشکل از متغیرهای مختلف استفاده شود. همانطور که شناخته شده است ، COVID-19 خطرناک ترین بیماری در سراسر جهان تا کنون می باشد که در هیچ کجای دنیا ، هنوز یک داروی موثر جهت کنترل آن یافت نشده است. برای محدود کردن شیوع آن ، یافتن روشی منطقی که گسترش این ویروس را با تکیه بر اطلاعات بسیاری از افراد آلوده نشان دهد ، ضروری است. هدف اصلی این مقاله ، بررسی عملکرد شبکه عصبی RBF برای پیش بینی مرگ و میر ناشی از COVID-19 در کشور ایران و مقایسه ی خطای MSE و RMSE موارد مرگ و میر آینده COVID-19 در ایران است.

۱. مقدمه

با توجه به وضعیت پیش آمده در دو سال اخیر بواسطه بیماری COVID-19 مشکلاتی در پی این رویکرد پیدا شده که از جمله آنها می توان به بالا رفتن مرگ و میر اشاره کرد. برای درک بهتر رفتار عددی اطلاعات خام، تراز اطلاعات را به صورت شبکه عصبی RBF نوشته شده و به صورت تصویری اطلاعات بررسی می شود. این مقاله شامل دو بخش کلی داده کاوی اطلاعات و روشهای عصبی و RBF بکار رفته در فرایند داده کاوی می باشد. لازم به ذکر است که دیدن چندین شاخص آماری و صد ها اطلاعات از داده ها در کنار هم ممکن بود این نتایج را به راحتی القا ننماید. از سوی دیگر با توجه به گسترش COVID-19 در سراسر جهان، در حالی که سرویس های بهداشتی برای مقابله با آن تلاش می کنند ، میلیاردها نفر را درگیر کرده است [۱]. در پایان دسامبر ۲۰۱۹ در ووهان چین ، اولین بار گزارش شد که عفونت انسانی توسط ویروس جدید کرونا یا ویروس ووهان یا COVID-19 ایجاد شده است. یکی از بزرگترین چالش های این اپیدمی انتقال انسان به انسان است از طرفی تعداد مبتلایان به ویروس کرونا COVID-19 به صورت نمایی در سراسر جهان افزایش می یابد[۲]. در ۳۰ ژانویه ۲۰۲۰، سازمان بهداشت جهانی (WHO) یک هشدار اضطراری بهداشتی در سراسر جهان صادر کرد [۳] و برچسب گذاری کرد که COVID-19 یک نگرانی فوری جهانی است. میزان بیماری و مرگ و میر ناشی از COVID-19 در مراحل اولیه نامشخص است [۲] مخصوصاً برای جوانان و افراد مسن. موضوع مهم دیگری که باید مدنظر قرار گیرد این است که WHO ضریب تولید مثل (R0) را ۲/۷ تخمین زده است. به منظور کنترل گسترش گسترده و سریع COVID-19 ، بخش های بهداشت عمومی اقدامات پیشگیرانه قابل اعتمادی را اتخاذ کرده اند و شهرهای آلوده به منع رفت و آمد یا قرنطینه در چین، ایالات متحده، هند، ایران و سایر کشورها نیز اعمال شده است. این امر به منظور محدود کردن فاصله اجتماعی بین افراد و جلوگیری از انتقال این ویروس جدید از طریق انسان به انسان است.

*سخنران
پست الکترونیک: soroush.math@gamil.com (مهدی سروش)

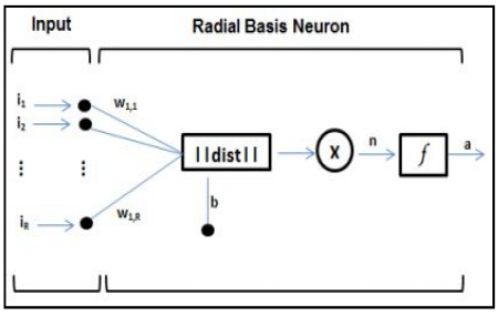
۲. سابقه و هدف داده‌ها

یک مجموعه داده COVID-19 شامل تعداد مرگ و میر از کشور ایران، جهت پیشگیری و کنترل بیماری ،(ECDPC) جمع آوری شده است ، داده های جمعیت از جمعیت فعلی جهان به دست آمده است.

۳. روش انجام پروژه

۱.۳ . *شبکه عصبی بر پایه‌ی RBF*

در مدل‌های شبکه عصبی، نورن های لایه میانی دارای یک تابع غیر خطی به عنوان تابع فعال ساز هستند به طوری که این تابع فعال ساز به مجموعه حاصل ضرب وزنه ها در ورودی ها وابسته می‌باشد. اما در این مقاله به مطالعه شبکه های عصبی دیگری به نام شبکه های عصبی مبتنی بر پایه شعاعی پرداخته می‌شود که در آنها تابع فعال ساز نورون‌های میانی متفاوت با مدل‌های دیگر است این تابع فعال ساز به میزان شباهت بین بردار ورودی به بردار نمونه وابسته است. در این نوع شبکه ها پاسخ هر نورون لایه فعال ساز میانی تابعی از تفاضل بردار ورودی و بردار مرکز دسته یا همان بردار نمونه آن نورون می‌باشد.



شکل ۱: شبکه پایه شعاعی با ورودی

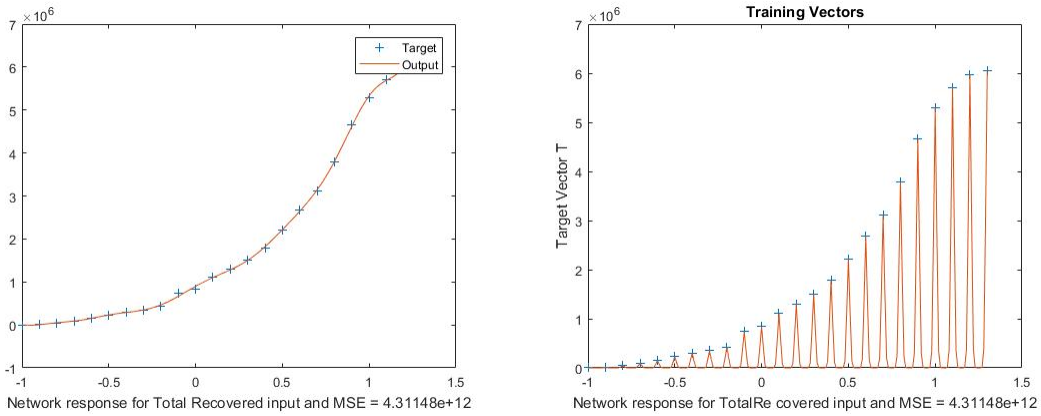
۲.۳ . *متد درونیابی*

به طور کلی روشی که شبکه عصبی RBF برای طبقه‌بندی الگوهای پیچیده استفاده می کند مبتنی بر یک نگاشت غیر خطی از فضای n_0 بعدی ورودی به فضای بزرگتر m بعدی (تعداد نورون های لایه میانی) است. می‌توان با استفاده از لایه میانی شبکه عصبی این مجموعه ورودی‌ها را به فضای بزرگتر m بعدی انتقال داد به طوری که بردار خروجی لایه میانی به ازای هر بردار ورودی ام i به صورت زیر به دست آید

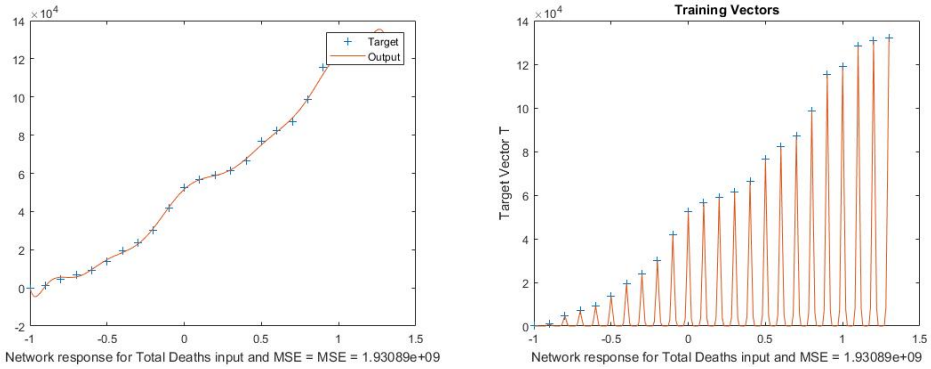
$$\varphi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)]^T$$

که در آن $\varphi_j(x)$ حاصل نگاشت غیرخطی نورون ام j و $\varphi(x)$ بردار m بعدی پس از نگاشت ورودی است. سپس بردار وزن خروجی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مانند صفحه ای بین دو مجموعه داده های نگارش یافته قرار گیرد. به طوری که c_j بردار مرکز دسته، w_jوزن و φ_j تابع فعال ساز غیرخطی نورون jام است. تعداد نورون های میانی برابر است با m و عملگر نرم ||.|| برای محاسبه فاصله میان بردار ورودی و بردار مرکز دسته در هر نورون میانی در نظر گرفته شده است. خطوط ضخیم تر برداری بودن داده ها را نشان می‌دهند. اگر خروجی نورون فعالساز ام j با نماد o_j نشان داده شود داریم

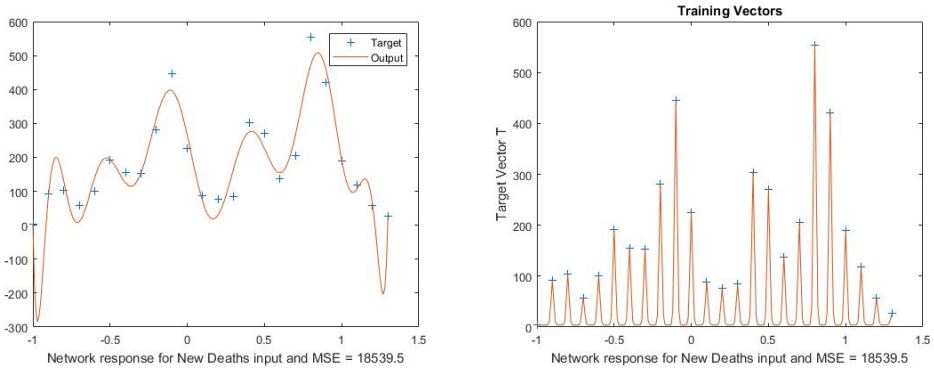
$$net_j = ||x - c_j||$$
$$o_j^1 = \varphi_j(net_j)$$
$$y = \sum_{j=1}^{m} w_j o_j^1 = w^T o^1$$



شکل ۲: پیش‌بینی بهبودیافتگان کل از طریق شبکه عصبی RBF



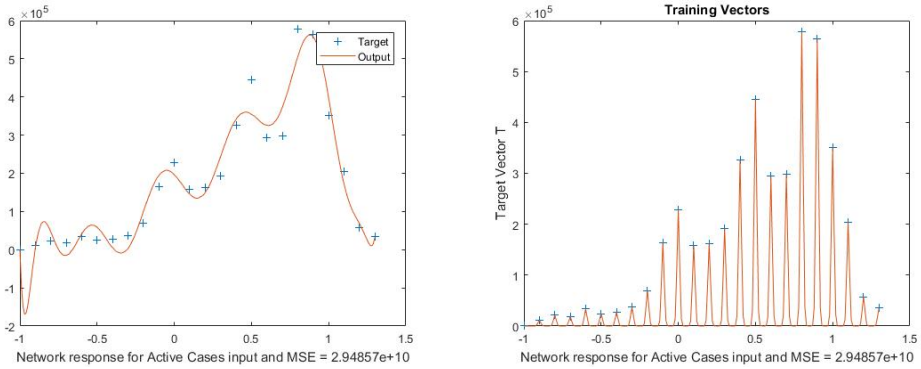
شکل ۳: پیش‌بینی مجموع مرگ‌ها از طریق شبکه عصبی RBF



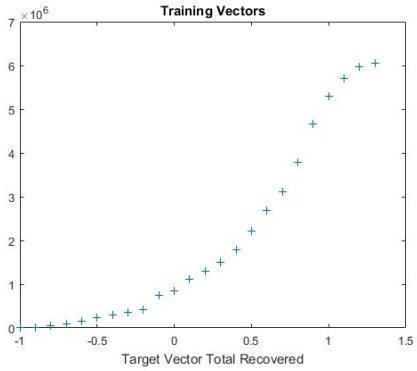
شکل ۴: پیش‌بینی مرگ و میر روزانه از طریق شبکه عصبی RBF

۴. شکل‌ها

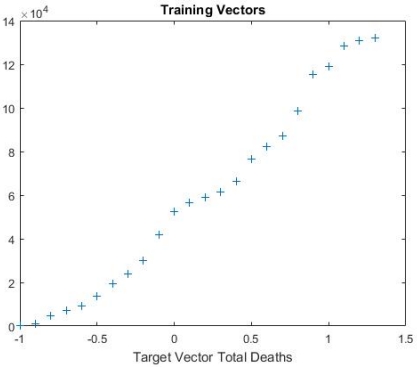
با توجه به توضیحات بیان شده در طول ارایه ی مطالب، به بررسی خروجی های بدست آمده از طریق برنامه‌ی متلب، می پردازیم. در تمامی موارد خطای MSE و RMSE محاسبه شده است.
نورون های تحت پوشش پایه شعاعی



شکل ۵: پیش‌بینی موارد فعال به کرونا از طریق شبکه عصبی RBF



شکل ۶: برآورد نرون های شبکه عصبی RBF تحت داده های بهبودیافتگان کل

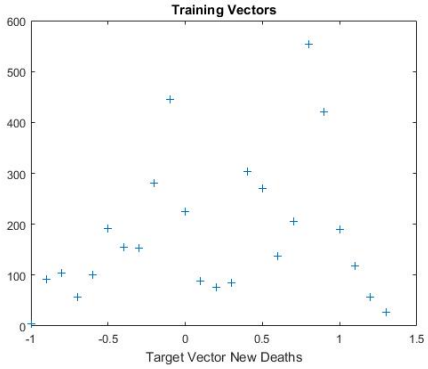


شکل ۷: برآورد نرون های شبکه عصبی RBF تحت داده های مجموع مرگ‌ها

با توجه به عملکرد و تعاریف و متد هایی که توضیح داده شد، می‌توان میزان توانایی بازنمایی داده ها را توسط توابع شبکه عصبی RBF مشاهده کرد.

۵. نتیجه گیری

این مقاله تحقیقی، مدل شبکه عصبی RBF را برای پیش بینی میزان مرگ و میر و بهبود یافتگان و دیگر داده های مهم در COVID-19در کشور ایران را پیشنهاد کرده که عملکرد این مدل از RBF با استفاده از، خروجی های نرم افزار متلب ارزیابی شده است. روش پیشنهادی می تواند



شکل ۸: برآورد نرون های شبکه عصبی RBF تحت داده های مرگ و میر روزانه

یک ابزار پیش بینی کننده برای ارزیابی وضعیت فعلی عفونت ، شدت ، و کمک به دولت و کارکنان مراقبت های بهداشتی برای تصمیم گیری بهتر برای کاهش میزان مرگ و میر در ایران باشد. همچنین ، این مطالعه که شامل بسیاری از عوامل یا متغیرهایی مانند عوامل جمعیت شناختی ، عوامل جغرافیایی و عوامل آب و هوایی (دما ، رطوبت ، سرعت باد و بارندگی) برای مدل سازی مدل پیش بینی بسیار دقیق برای همه گیری مداوم COVID-19 افزایش می یابد. همچنین توسعه مدل های مبتنی بر روش های شبکه عصبی RBF در کاربردهای پزشکی نیاز به توجه بیشتری دارد ، با ضرورت مشارکت کادر فنی و پزشکی در مراحل توسعه و استفاده کارآمد برای استفاده از ابزار بالینی مفیدتر با توجه به شیوع روزافزون بیماری COVID-19 در ایران ، که ممکن است در برخی موارد از کنترل خارج شود، این مطالعه تلاشی برای توسعه راه حل های پیشگیرانه برای مبارزه با این بیماری می باشد. رویه این مطالعه می تواند نتایج دقیق تری را در مطالعات آینده ارائه دهد در صورتی که چندین پارامتر یا اطلاعات مانند سن، جنسیت، قومیت، شغل، شرایط بهداشتی موجود را در نظر بگیریم.

مراجع

[1] Alexandridis A., Chondrodima E., Sarimveis H., Radial Basis Function Network Training using a Nonsymmetric Partition of the Input Space and Particle Swarm Optimization. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 24(2), 219- 230, 2013.
[2] WHO. (2020). Available online at: https://www.who.int/docs/default-source/ coronaviruse/situation-reports/20200123-sitrep-3-2019-ncov.pdf?sfvrsn= d6d23643_8 (accessed February 1, 2020).
[3] Ziyang Z., ZhishengW., Yong H., Mingzhi G., Learning Method of RBF Network Based on FCM and ACO. In Proceedings of Control and Decision Conference (CCDC), 102-105, 2008.
[4] Patrikar A.M., AoximatingGaussian Mixture Model on Radial Basis Function Networks withMultilayer Perceptron. IEEE Transactions on Neural Networks, 24(7), 1161-1166, 2013.
[5] Z.H. Zhou, S.F. Chen, Z.Q. Chen FANNC: A fast adaptive neural network classifier Knowledge and Information Systems (2000), pp. 115-129
[6] G.E. Cook, R.J. Barnett, et al. Modeling and control using artificial neural networks IEEE Transactions of Industry Applications, 31 (1995), pp. 1484-1491

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–114، صص. ۳۸–۴۲

مروری بر برآورد نقطه‌ای روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی

سید محمود میرجلیلی*[آ]، راضیه اسفندیاری[ب]، سودابه سجادی پناه[آ،ب]

[آ] گروه ریاضی و آمار، دانشگاه ولایت ایرانشهر
[ب] کارشناسی ارشد دانشگاه یزد

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی
فرایند خودبازگشتی
شبیه‌سازی مونت کارلو.

2020 MSC:
62L10

چکیده

در این مقاله، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی مرور شده است. عملکرد برآوردگرهای حاصل از روش دنباله‌ای بر اساس برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم با میمنم کردن تابع زیان با ارائه قضیه، مرور شده است. سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل خودبازگشتی مرتبه اول، دستاوردهای نظری بررسی شده است. در این مطالعه متغیر توقف حاصل از روش و اندازه نمونه ثابت بهینه، برآوردگرها، مجذور میانگین توان دوم خطای برآوردگرها، نسبت تابع مخاطره حاصل از روش به مخاطره متناظر با اندازه نمونه ثابت بهینه برآوردگرها محاسبه شده است. سپس با به‌کارگیری داده‌ی واقعی عملکرد روش در عمل مورد بررسی قرار گرفته است.

۱. مقدمه

ایده استفاده از روش‌های دنباله‌ای جهت تعیین اندازه دقیق نمونه با استفاده از قاعده توقف مناسب به منظور برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای به صورت گسترده از مدت‌ها مورد توجه بوده است. در سال ۱۹۴۰ ماهالانوبیس [1] طی فعالیت‌های علمی خود برای برآورد میزان محصول کنف در مزارع بنگال به اهمیت نمونه‌گیری مرحله‌ای پی‌برد و در مطالعات میدانی خود به توسیع طرح‌های نمونه‌ای برای برآورد وسعت مزارع کنف پرداخت. این توسیع بنیادین در سایر پژوهش‌های نمونه‌ای بزرگ–مقیاس توسط برخی از پژوهشگران از جمله آبراهام والد [2] مورد توجه قرار گرفت. آبراهام والد به عنوان پیشتاز تجزیه و تحلیل‌های دنباله‌ای در سال ۱۹۴۰ با همکاری دستیاران خود به توسعه نظری و روش‌شناسی آزمون‌های دنباله‌ای پرداخت. از طرفی تحلیل داده‌های سری زمانی به دلیل فراوانی این مشاهدات در زمینه‌های گوناگون، آنها را به یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های علم آمار تبدیل کرده است. یکی از اهداف مهم در تحلیل مدل‌های سری زمانی، به‌کارگیری مدل برازش شده در پیش‌بینی مقادیر مورد انتظار فرایند است. در برخی شرایط اندازه نمونه مدل‌های سری زمانی از پیش مشخص نیست. در اینگونه حالات، یکی از راهکارها تعیین اندازه‌ی نمونه با استفاده از روش‌های دنباله‌ای است و بدین ترتیب استفاده از روش‌های دنباله‌ای در مدل‌های سری زمانی کاربرد می‌یابد.
مسئله اصلی در تحلیل دنباله‌ای، تعیین بهترین تصمیم یا قاعده برای توقف نمونه‌گیری است. ازینرو چندین روش نمونه‌گیری دنباله‌ای بر اساس تعریف قاعده توقف وجود دارد که یکی از مهمترین و پرکاربردترین آن‌ها، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض است. البته روش‌های دنباله‌ای هر یک دارای معایبی هستند که با توجه به شرایط با استفاده از یکی از این روش‌ها به تعیین اندازه نمونه می‌پردازیم. محققان بسیاری در زمینه مدل‌های

*سید محمود میرجلیلی
پست الکترونیک: velayat.ac.ir@sm.mirjalili (سید محمود میرجلیلی)، r.esfandyari@yahoo.com (راضیه اسفندیاری)، soodabesajadi@yahoo.com (سودابه سجادی پناه)

[1] Mahalanobis
[2] Wald

سری زمانی با رویکرد دنباله‌ای مطالعه و پژوهش انجام داده‌اند که به صورت خلاصه چند مورد ارائه می‌گردد. سیرام [۱۳، ۱۴] روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را برای برآورد پارامتر و میانگین مدل خودبازگشتی مرتبه اول بررسی کرد. باسو و داس [۱] در سال ۱۹۹۷ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را برای برآورد بردار پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه p بررسی کردند. لی و سیرام [۸] در سال ۱۹۹۹ مدل غیرخطی خودبازگشتی آستانه‌ای ایستا را در نظر گرفتند. آن‌ها برآورد پارامترهای مدل بر اساس برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم را با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی کردند. ماخوپادهای و ایبد [۹] در سال ۱۹۹۹ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی را برای مدل رگرسیون خطی چندگانه با فرض نرمال و غیرنرمال بودن خطاها و مدل خودبازگشتی مرتبه p بررسی کردند. سیرام [۱۵] در سال ۲۰۰۱ برآورد فاصله‌ای پارامترهای مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول را با طول ثابت با استفاده از روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی نمود. سپس نتایج را به مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول چندگانه تعمیم داد. گمبی [۲] در سال ۲۰۱۰ برآورد فاصله‌ای پارامتر میانگین فرایند خطی با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض مطالعه نمود.

سیرام و لسی [۱۶] در سال ۲۰۱۴ بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را برای پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه اول مروری داشتند. هم‌چنین آن‌ها ویژگی‌های کارایی مجانبی و کارایی مجانبی ریسک برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر را با استفاده از شبیه‌سازی بررسی کردند. در سال‌های اخیر، کارماکار و ماخوپادهای [۵، ۶] مدل‌های خودبازگشتی با ضرایب تصادفی مرتبه p تک‌متغیره و چندمتغیره در نظر گرفتند و روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را بررسی نمودند. سیرام و صمدی [۱۷] بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض مروری داشتند که توسط سیرام در سال ۱۹۸۸ ارائه شده بود. هم‌چنین، خلیفه و همکاران [۷] در سال ۲۰۲۰ عملکرد روش دومرحله‌ای در برآورد فاصله‌ای در توزیع نمایی بررسی نمودند. هم‌چنین جان و ژانگ [۴] کلاسی از قاعده‌های توقف بر اساس روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای بهبودیافته تحت شرایط مینیمم سازی تابع زیان درجه دوم بررسی کردند. [۱۱] روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای را در مدل خودبازگشتی مرتبه اول در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بررسی کردند. سپس به مقایسه روش پیشنهادی با روش دنباله‌ای محض پرداختند. همان‌گونه که اشاره شد، روش‌های دنباله‌ای بر اساس استراتژی تعریف متغیر توقف متفاوت هستند که یکی از پرکاربردترین این روش‌ها، روش دنباله‌ای محض است. این روش در بین روش‌های دنباله‌ای حداقل مقدار نمونه را ارائه می‌دهد اما دارای معایبی چون هزینه بالای نمونه‌گیری تحت این روش است. هم‌چنین پیاده‌سازی روش دنباله‌ای محض برای مقادیر اندازه‌ی نمونه اولیه کم بسیار زمانبر است، از اینرو محققان برای حل این مشکل روش روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی را ارائه دادند. از اینرو علاقه‌مند به بررسی عملکرد روش پیشنهادی، اجرا و پیاده‌سازی فرایند در عمل برای مدل‌های سری زمانی شده‌ایم.

در این مقاله به مرور عملکرد روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی می‌پردازیم که توسط ماخوپادهای و ایبد [۹] ارائه شده است. در این مقاله ابتدا در بخش ۲ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی مرور می‌شود. در بخش ۳ عملکرد این روش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی می‌شود. سپس در بخش ۴ به بررسی عملکرد روش در داده‌ی واقعی پرداخته می‌شود.

۲. برآورد نقطه‌ای در مدل خودبازگشتی

فرایند خودبازگشتی مرتبه p به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$X_i = \beta_1 X_{i-1} + \ldots + \beta_p X_{i-p} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ها دنباله‌ی مستقل و هم‌توزیع (iid) با توزیع مجهول F، میانگین صفر، واریانس σ^2 و از دنباله‌ی $\{X_j, j < i\}$ ناهمبسته هستند. یکی از روش‌های معمول در برازش مدل‌های آماری روش حداقل مربعات است. در این روش مجموع توان‌های دوم خطا که تابعی از پارامترهای مدل هستند؛ به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود و نقطه مینیمم این تابع برآورد پارامترهای مدل است. پارامتر β توسط برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم با فرض $X_i = (X_i, \ldots, X_{i-p+1})'$ به‌صورت زیر برآورد می‌شود

$$\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{n1}, \ldots, \hat{\beta}_{np})' = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X_{i-1}')^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}' X_i).$$

هم‌چنین برآوردگر واریانس نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\beta}_{n1} X_{i-1} - \ldots - \hat{\beta}_{np} X_{i-p})^2.$$

مقدار اولیه‌ی فرایند $X_0 = (X_0, \ldots, X_{-p+1})'$ نسبت به سیگما میدان $\mathcal{F}_n$ اندازه پذیر، $\mathbf{E}(X_0) = 0$ و $\mathbf{E}(X_i^2) < \infty$ فرض می‌شود. قابل ذکر است، با فرض اینکه سری $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ گاوسی باشد، برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم و درستنمایی ماکزیمم شرطی یکسان حاصل می‌شوند. ماتریس معین مثبت $p \times p$، $\sum$ در نظر می‌گیریم که درایه‌ی (i, j)ام آن تابع خودکواریانس $\gamma(i-j)$ فرایند X_t است. هم‌چنین توزیع مجانبی برآوردگرها را به‌صورت زیر داریم:

$$(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X_{i-1}')^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 I_p),$$

که I_p ماتریس همانی $p \times p$ است. به روشنی با توجه به رابطه‌ی قبل می‌توان نوشت:

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} \sigma^2 \chi^2_p.$$

هم‌چنین $(\hat{\beta}_n - \beta) = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \varepsilon_i)$ است. قابل ذکر است، χ^2_p متغیر تصادفی خی ـدو با p درجه آزادی است. با فرض $\varepsilon_i = (\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-p+1})'$، برای همه nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ $\sum_{i=p}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_i'$ و $\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1}$ ماتریس‌های ناتکین در نظر گرفته می‌شوند. اندازه‌ی زیان ناشی از فرض $\delta(x) = \hat{\beta}_n$، برای نمونه به اندازه‌ی n به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است. در تابع زیر، A مقداری مثبت که نشاندهنده عکس هزینه‌ی هر واحد نمونه است.

$$\begin{aligned} L_n(\hat{\beta}_n, \beta) &= An^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\hat{\beta}_n X_{i-1} - \beta X_{i-1}\right]\left[\hat{\beta}_n X_{i-1} - \beta X_{i-1}\right]' + n \\ &= An^{-1} \left(\hat{\beta}_n - \beta\right)' \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1} \left(\hat{\beta}_n - \beta\right) + n \\ &= An^{-1} Q_n + n, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$Q_n = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \varepsilon_i)' (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \varepsilon_i).$$

هدف یافتن مقدار n کمینه است، به‌طوری‌که تابع مخاطره (R_n) برای زیان تعریف شده مینیمم شود. با توجه به ویژگی انتگرال‌پذیری یکنواخت Q_n، تابع مخاطره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید[۹].

$$\begin{aligned} R_n &= A\mathbf{E}\left[n^{-1} \left(\hat{\beta}_n - \beta\right)' \left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1}\right) \left(\hat{\beta}_n - \beta\right)\right] + \mathbf{E}[n] \\ &= n^{-1} Ap\, \sigma^2 + n + o\,(n^{-1}). \end{aligned}$$

به منظور دستیابی به اندازه‌ی نمونه بهینه از تابع مخاطره نسبت به اندازه نمونه مشتق می‌گیریم که $n_A \simeq (Ap)^{1/2}\sigma$ حاصل می‌شود. سپس با توجه به اندازه‌ی نمونه بهینه تابع مخاطره متناظر با آن را با نادیده گرفتن $o(n^{-1})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R_{n_A} \simeq (Ap)\sigma^2((Ap)^{1/2}\sigma)^{-1} + \sigma(Ap)^{1/2} = 2(Ap)^{1/2}\sigma.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع مخاطره تابعی از پارامترهای مدل است که در صورت مجهول بودن آن دستیابی به اندازه‌ی نمونه بهینه ممکن نیست. در چنین مواقعی راهکار پیشنهادی برای حل مسئله استفاده از روش‌های نمونه‌گیری دنباله‌ای است که در این مقاله روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی را مرور می‌کنیم. در این راستا متغیر توقف نقطه‌ای با توجه به اندازه‌ی نمونه بهینه با فرض $0 < \rho < 1$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$t = \inf\{n \geq m : n \geq (Ap)^{1/2}\hat{\sigma}_n\},$$

با استفاده از متغیر توقف معرفی شده به تعیین اندازه نمونه نهایی می‌پردازیم. اکنون با توجه به متغیر توقف به بیان نتیجه اصلی این بخش پرداخته می‌شود.

قضیه ۱.۲. (کارایی ریسک) فرض کنید برای $s \geq 1$، $\mathbf{E}|\varepsilon_1|^{4s} < \infty$ و $\mathbf{E}|X_j|^{4s} < \infty$ برقرار باشند. هم‌چنین برای $\eta > 0$، $m = o(A^{1/2(1+\eta)}) \leqslant$ در نظر می‌گیریم، آن‌گاه برای هر $0 < \rho < 1$ نتایج زیر حاصل می‌شود

$$\frac{N_p}{n_A} \xrightarrow{\text{a.s}} 1,$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{N_p}{n_A}\right] \to 1,$$

$$\frac{R_{N_p}}{R_{n_A}} \to 1.$$

اثبات. برای مشاهده جزئیات اثبات به [۹] مراجعه شود. □

۳. شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو عملکرد روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی مرتبه اول بررسی می‌شود. توزیع اغتشاش‌ها $\varepsilon_i \sim N(۰,۱)$ در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی در برآورد نقطه‌ای، متغیر توقف روش و نسبت متغیر آن به اندازه نمونه ثابت بهینه، برآورد پارامتر ،مدل ریشه دوم میانگین توان‌های دوم خطای پارامتر، نسبت مخاطره‌های حاصل از روش به مخاطره‌ی اندازه نمونه ثابت بهینه با در نظر گرفتن ۱۰۰۰۰ تکرار برای مقادیر پارامتر مدل ۰٫۹۵ : ۰٫۹۵− با اضافه کردن مقادیر ۰٫۲ محاسبه شده‌اند. در هر تکرار فرایند مقادیر موردنظر محاسبه می‌شوند و در انتها میانگین برآوردگرها به‌دست می‌آید. نتایج برآورد نقطه‌ای در جدول ۱ با فرض دو مقدار هزینه نمونه‌گیری به ترتیب ۱۰۰۰ و ۶۴۰۰ گزارش شده است. همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، متغیر توقف با افزایش هزینه و اندازه نمونه افزایش می‌یابد (ستون اول). نسبت متغیر توقف حاصل از روش به اندازه نمونه ثابت با افزایش هزینه و اندازه نمونه به مقدار یک نزدیک می‌شود که نشان‌دهنده ویژگی کارایی مجانبی است (ستون دوم). برآورگرها برای اندازه نمونه کم میزان اریبی محسوسی دارند که با افزایش اندازه و هزینه اریبی کمتر می‌شود (ستون سوم). ریشه دوم میانگین توان‌های دوم خطای برآوردگرها نیز با افزایش هزینه و نمونه کمتر می‌شود که موید دقت روش پیشنهادی در برآورد نقطه‌ای است (ستون چهارم). نسبت تابع مخاطره‌های روش به اندازه نمونه ثابت بهینه نیز با افزایش هزینه و اندازه نمونه اولیه به مقدار یک نزدیک می‌شود که تایید کننده ویژگی کارایی مجانبی ریسک است (ستون پنجم). در واقع نتایج شبیه‌سازی تایید کننده نتایج ارائه شده در قضیه ۱.۲ هستند.

جدول ۱: برآوردگرهای مدل بر اساس متغیر توقف N_p

(A,m,q,β)	$\hat{N}_p$	$\frac{\hat{N}_P}{n_A}$	$\hat{\beta}$	MSE $(\hat{\beta})$	$R_{\hat{N}_p}/R_{n_A}$
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،−۹۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	−۸۴۶۶.۰	۱۹۸۹.۰	۲۴۳۰.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،−۷۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	−۶۴۷۲.۰	۲۲۲۱.۰	۱۶۵۲.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،−۵۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	−۴۵۶۴.۰	۲۳۲۶.۰	۱۵۹۳.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،−۳۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	−۲۷۴۹.۰	۲۳۲۲.۰	۱۲۴۹.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،−۱۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	−۰۸۶۸.۰	۲۳۵۸.۰	۱۳۵۸.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،۰۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	۰۸۹۷.۰	۲۲۲۱.۰	۰۶۰۲.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،۲۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	۲۷۴۵.۰	۲۱۳۷.۰	۰۶۴۹.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،۴۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	۴۴۹۵.۰	۱۹۷۸.۰	۰۳۰۹.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،۶۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	۶۲۵۱.۰	۱۷۹۸.۰	۰۰۱۱.۱
(۲۰،۱۰۰۰ ،۲۵.۰ ،۸۵.۰)	۲۰	۶۳۲۴.۰	۷۹۶۸.۰	۱۶۰۱.۰	۹۷۹۵.۰
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،−۹۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	−۹۲۲۸.۰	۰۶۰۹.۰	۰۲۱۰.۱
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،−۷۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	−۷۲۲۶.۰	۰۸۷۴.۰	۰۰۶۶.۱
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،−۵۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	−۵۲۵۲.۰	۱۰۳۶.۰	۰۱۵۰.۱
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،−۳۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	−۳۲۸۷.۰	۱۱۳۴.۰	۰۲۰۳.۱
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،−۱۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	−۱۳۴۰.۰	۱۱۴۸.۰	۹۹۵۵.۰
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،۰۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	۰۶۱۴.۰	۱۱۴۹.۰	۹۹۵۸.۰
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،۲۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	۲۵۶۳.۰	۱۱۱۷.۰	۰۰۳۱.۱
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،۴۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	۴۴۷۵.۰	۱۰۲۱.۰	۹۷۹۴.۰
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،۶۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	۶۴۱۶.۰	۰۸۸۴.۰	۹۷۵۱.۰
(۷۵،۶۴۰۰ ،۲۵.۰ ،۸۵.۰)	۷۵	۹۳۷۵.۰	۸۳۱۹.۰	۰۶۹۹.۰	۹۸۲۷.۰

۴. آنالیز داده‌ی واقعی

مجموعه‌ی داده‌های سری زمانی را در نظر می‌گیریم که شامل قرائت ساعتی از گرانروی یک فرآیند شیمیایی است. مجموعه‌ی داده‌ها توسط شرفی و نعمت الهی [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته که مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی اول با میانگین و توزیع اغتشاش‌ها نرمال چوله به آن برازش شده است. در این قسمت عملکرد روش پیشنهادی با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض در برآورد نقطه‌ای در عمل مقایسه می‌شود که بر اساس متغیر توقف، برآوردگرها و واریانس مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین متغیر توقف روش محض با توجه به اندازه‌ی نمونه بهینه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$N_m = \inf\{n \geq m | n \geq (Ap)^{۱/۲}\hat{\sigma}_n\}.$$

نتایج در جدول ۲ برای مقادیر مختلف هزینه و اندازه‌ی نمونه اولیه بر اساس برآوردگر و واریانس مدل بر اساس هر دو متغیر توقف گزارش شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر مختلف هزینه و اندازه‌ی نمونه مقادیر برآوردگرهای حاصل از هر دو روش یکسان هستند که نشان‌دهنده‌ی عملکرد نزدیک دو روش در عمل است.

بحث و نتیجه‌گیری

هنگامی که پارامترهای مدل مجهول باشند، روش اندازه نمونه ثابت بهینه کاربردی ندارد. یکی از روش‌های جایگزین برای تعیین اندازه نمونه، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی است. در این مقاله عملکرد این روش را در مدل خودبازگشتی بررسی شده است. طبق نتایج حاصل،

جدول ۲: برآورد نقطه‌ای بر اساس متغیرهای توقف N_p و N_m.

(m, A)	N_m	N_p	$\widehat{\beta}_{N_m}$	$\widehat{\beta}_{N_p}$	$\widehat{\sigma}_{N_m}$	$\widehat{\sigma}_{N_p}$
$(۳, ۵)$	۷	۷	۰٫۵۲۶۴	۰٫۵۲۶۴	۸٫۰۳۷۷	۸٫۰۳۷۷
$(۸, ۲۰)$	۱۱	۱۱	۰٫۴۷۹۸	۰٫۴۷۹۸	۵٫۸۵۶۴	۵٫۸۵۶۴
$(۲۰, ۳۰)$	۲۰	۲۰	۰٫۳۲۹۸	۰٫۳۲۹۸	۴٫۳۴۰۰	۴٫۳۴۰۰

متغیر توقف روش محض برای دو مقدار هزینه به مقدار اندازه نمونه ثابت بهینه بسیار نزدیک است. ریشه دوم میانگین توان‌های دوم خطای برآوردگرهای حاصل از این روش نیز برای هر دو مقدار هزینه بسیار کم است. هم‌چنین نسبت مخاطره از این روش با افزایش اندازه نمونه نیز به مقدار یك نزدیك است. در واقع نتایج نشان‌دهنده عملکرد خوب این روش نسبت به روش اندازه نمونه ثابت بهینه است. همچنین در بررسی داده‌ی واقعی عملکردی نزدیک به روش دنباله‌ای محض دارد. با توجه به نتایج نظری حاصل و نتایج شبیه‌سازی و کاهش هزینه نمونه‌گیری تحت این روش برای بررسی مدل‌های سری زمانی پیشنهاد مناسبی است.

مراجع

[1] Basu, A. K. and Das, J.K. (1997). Sequential estimation of the autoregressive parameters in AR(p) model. *Sequential Analysis*, **16**, 1-24.

[2] Gombay, E. (2010). Sequential confidence intervals for time series. *Periodica Mathematica Hungarica*, **61**, 183-193.

[3] Fan, J. and Yao, Q. (2008). Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods. *Springer Science and Business Media*.

[4] Jun, H. and Zhuang. Y. (2020). A broader class of modified two-stage minimum risk point estimation procedures for a normal mean.*Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-15.

[5] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2017). Risk efficient estimation of fully dependent random coefficient autoregressive models of general order. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **47**, 4242-4253.

[6] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2019). Risk efficient sequential estimation of multivariate random coefficient autoregressive process. *Sequential Analysis*, **38**, 26-45.

[7] Khalifeh, A., Mahmoudi, E., and Chaturvedi, A. (2020). Sequential Fixed-Accuracy Confidence Intervals for the Stress–Strength Reliability Parameter for the Exponential Distribution: Two-Stage Sampling Procedure. *Computational Statistics*, **35** 1553-1575.

[8] Lee, S. and Sriram,T. N. (1999). Sequential Point Estimation of Parameters in a Threshold AR(1) Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **84**, 343-355.

[9] Mukhopadhyay, Nitis., and Abid, A. (1999). Accelerated sequential sampling for generalized linear and AR (p) models. *Stochastic Modeling and Applications*, **2**, 1-15.

[10] Mukhopadhyay, N. (1995). Sequential estimation of means of linear processes. *Metrika*, **42**, 279-290.

[11] Sajjadipanah, S., Mahmoudi. E., and Zamani. M. (2021). Two-stage procedure in a first-order autoregressive process and comparison with a purely sequential procedure. *Sequential Analysis*, 1-16.

[12] Sharafi, M., and Nematollahi, A. R. (2016). AR(1) Model with Skew-Normal Innovations. *Metrika*, **79**, 1011-1029.

[13] Sriram, T. N. (1987). Sequential estimation of the mean of a first-order stationary autoregressive process. *The Annals of Statistics*, **15**, 1079-1090.

[14] Sriram, T. N. (1988). Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first-order autoregressive process. *Sequential Analysis*, **7**, 53-74.

[15] Sriram, T. N. (2001). Fixed size confidence regions for parameters of threshold ar(1) models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **97**, 293-304.

[16] Sriram, T. N. and Laci, R. (2014). Sequential estimator for time series models. *Sequential Analysis*, **33**, 136-157.

[17] Sriram, T. N. and Samadi, S. Y. (2019). Second-Order Analysis of regret for sequential estimation of the autoregressive parameter in Firat-Order Autoregressive model. *Sequential Analysis*, **38**, 411-435.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–115، صص. ۴۳–۴۷

مروری بر برآورد ناحیه اطمینان روش نمونه‌گیری تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی

سید محمود میرجلیلی *[آ]، سودابه سجادی پناه[ب]

[آ] گروه ریاضی و آمار، دانشگاه ولایت ایرانشهر
[ب] دانشجوی دکتری دانشگاه یزد

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی
فرایند خودبازگشتی
شبیه‌سازی مونت کارلو.

2020 MSC:
62L10

چکیده

در این مقاله، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی برای برآورد ناحیه اطمینان در مدل خودبازگشتی مرور شده است. عملکرد برآوردگرها d فاصله‌ای حاصل از روش بر اساس برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم، مرور شده است. سپس با ارائه شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل خودبازگشتی مرتبه اول و دوم، دستاوردهای نظری بررسی شده است. بدین منظور متغیر توقف حاصل از روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی و نسبت آن به اندازه نمونه ثابت بهینه، برآوردگرها و احتمال پوشش برآوردگرها محاسبه شده و نتایج مورد بررسی قرار گرفته است.

۱. مقدمه

کاربرد فراوان تحلیل داده‌های سری زمانی به دلیل فراوانی این مشاهدات، یکی از مهمترین داده‌های آماری مورد استفاده در تجزیه و تحلیل تجربی هستند که این مدل‌ها اغلب برای پیش‌بینی و بررسی روابط بین متغیرها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سال‌های اخیر تعداد قابل توجهی از مقالات اقتصادسنجی مربوط به گسترش مدل‌های خود بازگشتی خطی و غیرخطی و روشهای برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای این مدل‌ها بوده است. هنگامی که با محدودیت در استفاده از روش با اندازه‌ی نمونه ثابت برای دستیابی به برآورد پارامترهای مدل مواجه هستیم، یکی از راهکارها تعیین اندازه‌ی نمونه با استفاده از روش‌های دنباله‌ای است و بدین ترتیب استفاده از روش‌های دنباله‌ای در مدل‌های سری زمانی نیز کاربرد می‌یابد.

در تحلیل‌های دنباله‌ای، با ارائه بهترین تصمیم یا قاعده برای توقف نمونه‌گیری اندازه‌ی نمونه تعیین می‌شود. ازینرو چندین روش نمونه‌گیری دنباله‌ای بر اساس تعریف قاعده توقف وجود دارد که یکی از مهمترین و پرکاربردترین آن‌ها، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض با ارائه کمترین اندازه‌ی نمونه است. همچنین روش دومرحله‌ای و دومرحله‌ای بهبودیافته که اصلاح شده روش دومرحله‌ای است، به دلیل سادگی در پیاده‌سازی از روش‌های پرکاربرد دنباله‌ای محسوب می‌شوند. البته روش‌های دنباله‌ای هر یک دارای معایبی هستند که با توجه به شرایط با استفاده از یکی از این روش‌ها و توجه به شاخص مدنظر پژوهشگر به تعیین اندازه نمونه پرداخته می‌شود. محققان بسیاری در زمینه مدل‌های سری زمانی با رویکرد دنباله‌ای مطالعه و پژوهش انجام داده‌اند که به صورت خلاصه چند مورد مرور می‌شود. سیرام [۱۳، ۱۴] روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را جهت برآورد پارامتر و میانگین مدل خودبازگشتی مرتبه اول بررسی کرد. باسو و داس [۱] در سال ۱۹۹۷ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض برای برآورد بردار پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه p بررسی کردند. لی و سیرام [۸] در سال ۱۹۹۹ مدل غیرخطی خودبازگشتی آستانه‌ای ایستا در نظر گرفتند. آن‌ها در برآورد پارامترهای مدل بر اساس برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم را با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی کردند.

* سید محمود میرجلیلی
پست الکترونیک: velayat.ac.ir@sm.mirjalili (سید محمود میرجلیلی)، soodabesajadi@yahoo.com (سودابه سجادی پناه)

ماخوپادهای و ایبید [۱۰] در سال ۱۹۹۹ برای مدل رگرسیون خطی چندگانه با فرض نرمال و غیرنرمال بودن خطاها و مدل خودبازگشتی مرتبه p با استفاده از روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی بررسی کردند. سیرام [۱۵] در سال ۲۰۰۱ برآورد فاصله‌ای پارامترهای مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول با طول ثابت با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی نمود و نتایج را به مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول چندگانه تعمیم داد. گمبی [۲] در سال ۲۰۱۰ برآورد فاصله‌ای پارامتر میانگین فرایند خطی با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی نمود.
سیرام و لسی [۱۶] در سال ۲۰۱۴ بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را برای پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه اول مروری داشتند. هم‌چنین آن‌ها ویژگی‌های کارایی مجانبی و کارایی مجانبی ریسک برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر را با استفاده از شبیه‌سازی بررسی کردند. در سال‌های اخیر، کارماکار و ماخوپادهای [۵، ۶] مدل‌های خودبازگشتی با ضرایب تصادفی از مرتبه p تک‌متغیره و چندمتغیره در نظر گرفتند و روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را بررسی نمودند. سیرام و صمدی [۱۷] بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض مروری داشتند که توسط سیرام در سال ۱۹۸۸ ارائه شده بود. هم‌چنین، خلیفه و همکاران [۷] در سال ۲۰۲۰ عملکرد روش دومرحله‌ای در برآورد فاصله‌ای در توزیع نمایی بررسی نمودند. هم‌چنین جان و ژانگ [۴] در سال ۲۰۲۰ کلاسی از قاعده‌های توقف بر اساس روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای بهبودیافته تحت شرایط مینیمم سازی تابع زیان درجه دوم بررسی کردند. اخیرا [۱۱] روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای را در مدل خودبازگشتی مرتبه اول در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بررسی کردند و به مقایسه روش پیشنهادی با روش دنباله‌ای محض پرداختند.
همانطور که اشاره شد، روش‌های دنباله‌ای بر اساس شیوه‌ی تعریف متغیر توقف متفاوت هستند که یکی از پرکاربردترین این روش‌ها، روش دنباله‌ای محض است اما این روش نیز معایبی دارد. برای کاهش معایب روش (هزینه نمونه‌گیری تحت این روش)، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی پیشنهاد شده است. متغیر توقف تحت این روش ترکیبی از متغیر توقف محض و روش دومرحله‌ای است. عملکرد برآورد نقطه‌ای این روش در مقاله دیگری از همین نویسندگان بررسی شده است و اکنون علاقه‌مند به بررسی عملکرد روش پیشنهادی در برآورد فاصله‌ای شده‌ایم.
بدین منظور در این مقاله ابتدا در بخش ۲ به مرور عملکرد برآورد ناحیه اطمینان روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در مدل خودبازگشتی مرور می‌شود که توسط ماخوپادهای و ایبید [۱۰] ارائه شده است. سپس در بخش ۳ عملکرد این روش را با توجه به نتایج تئوری با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای مدل‌های خودبازگشتی مرتبه‌ی اول و دوم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. برآورد ناحیه اطمینان در مدل خودبازگشتی

فرایند خودبازگشتی مرتبه p به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$X_i = \beta_1 X_{i-1} + \ldots + \beta_p X_{i-p} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ها دنباله‌ی مستقل و هم‌توزیع (iid) با توزیع مجهول F، میانگین صفر، واریانس σ^2 و از دنباله‌ی $\{X_j, j < i\}$ ناهمبسته هستند. یکی از روش‌های معمول در برازش مدل‌های آماری روش کمترین توان‌های دوم است. در این روش مجموع توان‌های دوم خطا که تابعی از پارامترهای مدل هستند؛ به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود و نقطه مینیمم این تابع برآورد پارامترهای مدل است. پارامتر β توسط برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم با فرض $X_i = (X_i, \ldots, X_{i-p+1})'$ به‌صورت

$$\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{n1}, \ldots, \hat{\beta}_{np})' = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X'_{i-1} X_i).$$

و

$$\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\beta}_{n1} X_{i-1} - \ldots - \hat{\beta}_{np} X_{i-p})^2.$$

برآورد می‌شوند. مقدار اولیه‌ی فرایند $X_0 = (X_0, \ldots, X_{-p+1})'$ نسبت به سیگما میدان $\mathcal{F}_n$ اندازه پذیر، $\mathbf{E}(X_0) = 0$ و $\mathbf{E}(X_i^2) < \infty$ فرض می‌شود. قابل ذکر است، با فرض اینکه سری $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ گاوسی باشد، برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم و درستنمایی ماکزیمم شرطی یکسان حاصل می‌شوند. ماتریس معین مثبت Σ ،$p \times p$ در نظر می‌گیریم که درایه‌ی (i,j)ام آن تابع خودکواریانس $(i-j)\gamma$ فرایند X_t است. هم‌چنین $(\hat{\beta}_n - \beta) = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \varepsilon_i)$ است. با فرض $\varepsilon_i = (\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-p+1})'$، برای همه nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ $\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1}$ و $\sum_{i=p}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_i'$ ماتریس‌های ناتکین در نظر گرفته می‌شوند. در این بخش ناحیه اطمینان توأم β با طول ثابت $2d$ و ضریب اطمینان $1 - \alpha$ است. بدین منظور، ناحیه اطمینان β به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$R_n = \{\beta : (\hat{\beta}_n - \beta)' \left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1}\right) (\hat{\beta}_n - \beta) \leq d^2 \lambda_{min} \left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1}\right)\},$$

برای یک ماتریس $p \times p$ همچون C، $\lambda_{min}(C)$ بر کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس C دلالت می‌کند. مکان هندسی مجموعه نقاطی مانند β در ناحیه فوق، یک ابر بیضی توپر به مرکز $\hat{\beta}_n$ است. احتمال پوشش ناحیه اطمینان هنگامی که d به اندازه کافی کوچک باشد، $P\ (\beta \in R_n) \simeq 1-\alpha$ است. حجم نمونه بهینه که با k_d نشان داده و به صورت

$$k_d = [d^{-2}\lambda_{min}^{-1}(\Sigma)\sigma^2\chi_p^2\ (1-\alpha)]$$

حاصل می‌شود. هرگاه یکی از مقادیر k_d مجهول باشند، روش اندازه نمونه ثابت بهینه کاربرد ندارد. در این شرایط اندازه نمونه را با ارائه قاعده‌ی توقف با فرض $\rho \in (0,1)$ محاسبه می‌کنیم که با توجه به اندازه نمونه بهینه صورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$t = \inf\left\{n \geq m \,\middle|\, n \geq d^{-2}\ \rho\ \hat{\sigma}_n^2\lambda_{min}^{-1}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X'_{i-1}\right)\chi_p^2\ (1-\alpha)\right\},$$

$$N_1 = [d^{-2}\ \rho\ \hat{\sigma}_t^2\lambda_{min}^{-1}\left(t^{-1}\sum_{i=1}^{t} X_{i-1}X'_{i-1}\right)\chi_p^2\ (1-\alpha)],$$

که اندازه‌ی نمونه N_1 تابعی از t است. اکنون اندازه‌ی نمونه نهایی به‌صورت زیر تعیین می‌شود،

$$N = \max\{t, N_1\}.$$

در واقع اندازه‌ی نمونه نهایی با استفاده از پیاده‌سازی روش محض و روش دومرحله‌ای مشخص می‌شود [۴]. در ادامه قضیه اصلی این بخش ارائه می‌شود که نشان‌دهنده ویژگی‌های کارایی مجانبی و سازگاری مجانبی روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی است.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید برای* $s > 1$ $\mathbf{E}[|\varepsilon_1|^{4s}] < \infty$ و $\mathbf{E}[|X_0|^{4s}] < \infty$ *برقرار است. آن‌گاه هنگامی‌که* $d \to 0$

$$\frac{N}{k_d} \xrightarrow{a.s} 1,$$
$$\mathbf{E}\left(\frac{N}{k_d}\right) \to 1,$$
$$P\ (\beta \in R_N) \to 1-\alpha.$$

اثبات: برای مشاهده جزئیات اثبات به [۱۰] مراجعه شود. □

۳. شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو عملکرد روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی در برآورد ناحیه اطمینان و فاصله‌ای مدل خودبازگشتی مرتبه اول و دوم بررسی می‌شود. توزیع اغتشاش‌ها $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی متغیر توقف حاصل از روش و نسبت متغیر به اندازه نمونه ثابت بهینه، احتمال پوشش ناحیه اطمینان و فاصله‌ی اطمینان آن را با در نظر گرفتن ۱۰۰۰۰ تکرار محاسبه شده‌اند که مقادیر پارامترهای مدل مفروض در جدول‌ها و $\rho = 0.8$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج برآوردها در جدول‌های ۱ و ۲ با فرض مقادیر مختلف برای طول فاصله گزارش شده است. همانطور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود، متغیر توقف با کاهش طول فاصله افزایش می‌یابد که با توجه به قاعده‌ی توقف ارائه شده مورد انتظار است (ستون اول). نسبت متغیر توقف حاصل به اندازه نمونه ثابت بهینه با کاهش طول فاصله برای مقادیر پارامتر $0.7 : -0.7$ نزدیک به یک است و برای مقادیر نزدیک به یک پارامتر نرخ همگرایی ملایم‌تری به یک دارد. نتایج نسبت نیز مورد انتظار است و نشاندهنده ویژگی کارایی مجانبی است (ستون دوم). هم‌چنین احتمال پوشش برای مقادیر پارامتر $0.7 : -0.7$ با کاهش طول فاصله به مقدار ۰٫۹۵ همگرا می‌شود و برای مقادیر نزدیک به یک پارامتر نرخ همگرایی ملایم‌تری دارد. نتایج این ستون نیز موید دستاوردهای نظری و نشان‌دهنده‌ی ویژگی سازگاری مجانبی است (ستون سوم). در جدول ۲ عملکرد روش برای مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با در نظر گرفتن همزمان شروط ایستایی $\beta_1 + \beta_2 < 1$، $\beta_2 - \beta_1 < 1$ و $|\beta_2| < 1$ مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برای مقادیر گوناگون پارامترهای مدل گزارش شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، متغیر توقف با کاهش طول فاصله چندان تغییر نمی‌کند که با توجه به متغیر توقف ارائه شده در این حالت قابل انتظار است (ستون اول). نسبت متغیر توقف به اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه با کاهش طول فاصله به مقدار یک همگرا می‌شود که تایید کننده‌ی نتایج نظری است (ستون دوم). احتمال پوشش ناحیه اطمینان نیز با کاهش طول فاصله به مقدار ۰٫۹۵ همگرا می‌شود که انتظار داشتیم (ستون سوم). همان‌گونه که مشاهده شد، نتایج حاصل از شبیه‌سازی تایید کننده ویژگی‌های روش هستند که در قضیه ۱.۲ ارائه شده است.

جدول ۱: برآورد فاصله‌ای بر اساس متغیر توقف N در مدل خودبازگشتی مرتبه اول

(m, d, k_d, β)	$\widehat{EN}$	$E\left[\widehat{\frac{N}{k_d}}\right]$	CP
(۲۰, ۰/۵, ۲/۹۱۹۵, −۰/۹)	۲۰/۵۴۳۲	۶/۸۶۹۰	۰/۹۷۷۸
(۲۰, ۰/۵, ۷/۸۳۶۵, −۰/۷)	۲۰/۰۵۷۲	۲/۵۵۹۴	۰/۹۷۴۴
(۲۰, ۰/۵, ۱۱/۵۲۴۳, −۰/۵)	۲۰/۰۵۶۷	۱/۷۴۰۳	۰/۹۷۴۲
(۲۰, ۰/۵, ۱۱/۵۲۴۳, ۰/۵)	۲۰/۰۵۶۵	۱/۷۴۰۳	۰/۹۷۶۲
(۲۰, ۰/۵, ۷/۸۳۶۵, ۰/۷)	۲۰/۰۵۷۴	۲/۵۵۹۴	۰/۹۷۸۴
(۲۰, ۰/۵, ۲/۹۱۹۵, ۰/۹)	۲۰/۰۵۰۵	۶/۸۶۷۷	۰/۹۷۷۴
(۲۰, ۰/۲, ۱۸/۲۴۶۹, −۰/۹)	۷۴/۲۶۵۴	۴/۰۷۰۰	۰/۹۷۷۴
(۲۰, ۰/۲, ۴۸/۹۷۸۶, −۰/۷)	۷۴/۲۵۲۹	۱/۵۱۶۰	۰/۹۶۱۶
(۲۰, ۰/۲, ۷۲/۰۲۷۳, −۰/۵)	۷۴/۲۵۶۴	۱/۰۳۰۹	۰/۹۴۰۰
(۲۰, ۰/۲, ۷۲/۰۲۷۳, ۰/۵)	۷۴/۱۷۶۷	۱/۰۲۹۸	۰/۹۴۱۲
(۲۰, ۰/۲, ۴۸/۹۷۸۶, ۰/۷)	۷۴/۳۶۶۱	۱/۵۱۸۳	۰/۹۵۸۷
(۲۰, ۰/۲, ۱۸/۲۴۶۹, ۰/۹)	۷۴/۲۱۷۲	۴/۰۶۷۳	۰/۹۷۶۷

جدول ۲: برآورد فاصله‌ای بر اساس متغیر توقف N در مدل خودبازگشتی مرتبه دوم

$(m, d, k_d, \beta_1, \beta_2)$	$\widehat{EN}$	$E\left[\widehat{\frac{N}{k_d}}\right]$	CP
(۲۰, ۱/۲, ۵/۰۲۰۹, −۰/۱, −۰/۳)	۲۰	۳/۹۸۳۲	۰/۹۹۸۱
(۲۰, ۱/۲, ۴/۶۱۱۰, −۰/۱, −۰/۴)	۲۰	۴/۳۳۷۳	۰/۹۹۸۶
(۲۰, ۱/۲, ۲/۷۶۶۶, −۰/۱, −۰/۷)	۲۰	۷/۲۲۸۹	۰/۹۹۹۶
(۲۰, ۰/۱, ۵/۳۷۹۶, ۰/۲, −۰/۳)	۲۰	۳/۷۱۷۷	۰/۹۹۵۲
(۲۰, ۱/۲, ۴/۳۵۴۹, ۰/۲, −۰/۵)	۲۰	۴/۵۹۲۴	۰/۹۹۷۷
(۲۰, ۱/۲, ۳/۸۹۳۸, ۰/۳, −۰/۶)	۲۰	۵/۱۳۶۳	۰/۹۹۶۷
(۲۰, ۰/۶, ۲۰/۰۸۳۹, −۰/۱, −۰/۳)	۲۰/۱۲۶۶	۱/۰۰۲۱	۰/۹۵۱۱
(۲۰, ۰/۶, ۱۸/۴۴۴۴, −۰/۱, −۰/۴)	۲۰/۵۶۸	۱/۰۸۷۴	۰/۹۵۳۶
(۲۰, ۰/۶, ۱۱/۰۶۶۶, −۰/۱, −۰/۷)	۲۰/۰۰۶۱	۱/۸۰۷۷	۰/۹۶۲۸
(۲۰, ۰/۶, ۲۱/۵۱۸۴, ۰/۲, −۰/۳)	۲۰/۳۸۷۹	۰/۹۴۷۴	۰/۹۴۳۴
(۲۰, ۰/۶, ۱۷/۴۱۹۷, ۰/۲, −۰/۵)	۲۰/۰۸۴۴	۱/۱۵۲۹	۰/۹۵۰۱
(۲۰, ۰/۶, ۱۵/۵۷۵۲, ۰/۳, −۰/۶)	۲۰/۶۸۲	۱/۲۸۸۴	۰/۹۴۳۴

بحث و نتیجه‌گیری

روش‌های دنباله‌ای به عنوان روش‌های جایگزین در نظر گرفته می‌شوند هنگامی که در پیاده‌سازی و استفاده از روش اندازه‌ی نمونه ثابت دچار محدودیت هستیم. در میان روش‌های دنباله‌ای سادگی در پیاده‌سازی و کاهش هزینه نمونه‌گیری خود یکی از معیارهای انتخاب روش برای پژوهشگران محسوب می‌شود و عامل ترغیب کننده‌ای برای معرفی روش‌های جدید در قیاس با روش‌های مشهور و قدیمی است. روش نمونه‌گیری دنباله‌ای تسریع یافته کلی نیز از روش‌های معرفی شده برای کاهش هزینه در پیاده‌سازی روش نمونه‌گیری محض است. همانطور که مشاهده می‌شود، عملکرد این روش در مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی اول و دوم مطابق با نتایج تئوری ارائه شده بود. طبق نتایج حاصل، نسبت متغیر توقف روش با کاهش طول فاصله به مقدار یک و احتمال پوشش نیز به مقدار ۰/۹۵ همگرا شدند. در واقع نتایج نشان‌دهنده عملکرد خوب این روش در برآورد فاصله‌ای نسبت به روش اندازه نمونه ثابت بهینه است و برای بررسی عملکرد مدل‌ها با ساختار وابسته با توجه به کاهش هزینه نمونه‌گیری تحت این روش پیشنهاد مناسبی است.

مراجع

[1] Basu, A. K. and Das, J.K. (1997). Sequential estimation of the autoregressive parameters in AR(p) model. *Sequential Analysis*, **16**, 1-24.

[2] Gombay, E. (2010). Sequential confidence intervals for time series. *Periodica Mathematica Hungarica*, **61**, 183-193.

[3] Fan, J. and Yao, Q. (2008). Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods. *Springer Science and Business Media*.

[4] Jun, H. and Zhuang. Y. (2020). A broader class of modified two-stage minimum risk point estimation procedures for a normal mean.*Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-15.

[5] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2017). Risk efficient estimation of fully dependent random coefficient autoregressive models of general order. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **47**, 4242-4253.

[6] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2019). Risk efficient sequential estimation of multivariate random coefficient autoregressive process. *Sequential Analysis*, **38**, 26-45.

[7] Khalifeh, A., Mahmoudi, E., and Chaturvedi, A. (2020). Sequential Fixed-Accuracy Confidence Intervals for the Stress–Strength Reliability Parameter for the Exponential Distribution: Two-Stage Sampling Procedure. *Computational Statistics*, **35** 1553-1575.

[8] Lee, S. and Sriram,T. N. (1999). Sequential Point Estimation of Parameters in a Threshold AR(1) Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **84**, 343-355.
[9] Mukhopadhyay, N. (1995). Sequential estimation of means of linear processes. *Metrika*, **42**, 279-290.
[10] Mukhopadhyay, Nitis., and Abid, A. (1999). Accelerated sequential sampling for generalized linear and AR (p) models. *Stochastic Modeling and Applications*, **2**, 1-15.
[11] Sajjadipanah, S., Mahmoudi. E., and Zamani. M. (2021). Two-stage procedure in a first-order autoregressive process and comparison with a purely sequential procedure. *Sequential Analysis*, 1-16.
[12] Sharafi, M., and Nematollahi, A. R. (2016). AR(1) Model with Skew-Normal Innovations. *Metrika*, **79**, 1011-1029.
[13] Sriram, T. N. (1987). Sequential estimation of the mean of a first-order stationary autoregressive process. *The Annals of Statistics*, **15**, 1079-1090.
[14] Sriram, T. N. (1988). Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first-order autoregressive process. *Sequential Analysis*, **7**, 53-74.
[15] Sriram, T. N. (2001). Fixed size confidence regions for parameters of threshold ar(1) models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **97**, 293-304.
[16] Sriram, T. N. and Laci, R. (2014). Sequential estimator for time series models. *Sequential Analysis*, **33**, 136-157.
[17] Sriram, T. N. and Samadi, S. Y. (2019). Second-Order Analysis of regret for sequential estimation of the autoregressive parameter in Firat-Order Autoregressive model. *Sequential Analysis*, **38**, 411-435.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–116، صص. ۴۸–۵۳

بررسی ویژگی های توزیع کیبل و توزیع گامای دو متغییره

لیدر نوایی *،آ

آگروه آمار، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
توزیع گامای دومتغیره
روش گشتاوری
استنباط برای توزیع کناری.

2020 MSC:
62E10
62E99

چکیده

در این مقاله نوع جدیدی از توزیع گامای دومتغیره تعمیم یافته (BGG[۱]) که از توزیع گامای دومتغیره کیبل استنتاج شده است ارائه می گردد. کیبل [۲] بسط صریح و آشکاری از آمار و احتمالات توزیع گامای دومتغیره تعمیم یافته ارائه داده است. برآورد توزیع های کناری و استفاده از پارامترهای آماری از طریق روش گشتاوری و درستنمایی ماکزیمم استنباط برای توزیع های کناری بحث شده و انجام تمامی آنها با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو مطالعه و تعیین گردیده است. سرانجام با یک مثال توزیع ارائه شده در اینجا قابلیت اجرا پیدا کرده است.

۱. مقدمه

توزیع گامای تعمیم یافته برای اولین بار توسط استاسی [۱] مطرح شد [۱]. بولانگا [۲] در ادامه کارخود ویژگی‌های احتمالی و شیوه‌های برآورد توزیع گامای تعمیم یافته دومتغیره (BGG) را توسعه داد. [۲]. وی توزیع گامای تعمیم یافته از یک توزیع نرمال دومتغیره با استفاده از یک تبدیل توانی را بررسی کرد ونشان داد که چگونه می‌توان از مدل برای برازش کردن متغیرهای بارش باران در آزمایش باران‌گیری استفاده کرد. در مراجع [۳]، [۴]، [۵]

بر روی توزیع گامای تعمیم دومتغیره و توزیع‌های تعمیم یافته چند متغیره مطالعه شده است. در این مقاله فرض می‌شود برای تبدیل متغیرهای تصادفی کناری گامای همبسته در تابع چگالی احتمال (pdf) از توزیع گامای دومتغیره تعمیم یافته کیبل یک فرم جدیدی از توزیع (BGG) استخراج کرد [۶]. این روش دربرگیرنده تمامی توزیع‌های (BGG) می‌باشد.قابل ذکر است که مرجع [۷] جزئیات را در فرم‌ها یا اشکال مختلف و ویژگی‌هایی از توزیع گامای دومتغیره [۶]، [۸] - [۱۴] و ویژگی کلیدی مرتبط با توزیع ارائه می‌دهد. این نشان می‌دهد که بسیاری از توزیع‌های گامای دومتغیره را می‌توان از نرمال دومتغیره با استفاده از تبدیلات کناری و اشکال توزیع‌های گامای دومتغیره پیشنهاد شده توسط مراجع [۸]، [۹]، [۱۲] - [۱۶]

که ارتباط نزدیکی با توزیع گامای دومتغیره کیبل دارند [۶]. در بخش ۲ تابع چگالی احتمال از توزیع گامای دومتغیره از لحاظ چند جمله‌ای لاگر تعمیم یافته محاسبه می‌شود. در بخش ۳ یک شکل جدید از توزیع BGG استخراج شده و نشان می دهیم که یک مورد خاص از این توزیع BGG پیشنهادی دیگر نیز می‌تواند از توزیع گامای دومتغیره مرجع [۱۳] استخراج کنیم. در بخش ۴ برآورد پارامتر با استفاده از روش

*لیدر نوایی
پست الکترونیک: leadernavaei@Yahoo.com (لیدر نوایی)

[۱] Stacy
[۲] Bolanga

گشتاوری (MM[۳]) و روش درستنمایی ماکزیمم کناری (IFM[۴]) به ترتیب مورد بحث قرار گرفته اند. در بخش ۵ ارزیابی عملکرد برآورد از روش (MM) و روش (IFM) از طریق مطالعه عددی توصیف می‌شود.

۲. توزیع گامای دومتغیره کیبل تعمیم یافته

فرض کنید که $(W_۱, W_۲)$ بردار تصادفی گامای دومتغیره با پارامترهای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و و پارامترهای مقیاس $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و و پارامترهای γ و ρ و که همبستگی $W_۱$ و $W_۲$ و را مشخص می‌کند. کیبل تابع مولد گشتاور از توزیع گامای دومتغیره را با $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۱$ تحت شرایط $\rho^۲\gamma \le \min(\alpha_۱, \alpha_۲)$ به صورت رابطه زیر ارائه داده است.

$$M_{w_۱w_۲}(t_۱, t_۲) = (۱ - t_۱)^{-\alpha_۱}(۱ - t_۲)^{-\alpha_۲}\left(۱ - \frac{\rho^۲ t_۱ t_۲}{(۱ - t_۱)(۱ - t_۲)}\right)^{-\gamma} \qquad (۱)$$

که در رابطه (۱)

$$\rho^۲ t_۱ t_۲ < (\lambda_۱ - t_۱)(\lambda_۲ - t_۲)\ ,\ t_۱ < \lambda_۱\ ,\ t_۲ < \lambda_۲$$

می‌باشند.

۳. توزیع BGG

ویژگی‌های توزیع بنیادی برای این سه توزیع BGG در ذیل ارائه شده است.

قضیه ۱.۳. *تبدیل* $X_i = W_i^{\frac{۱}{\beta_i}}$ ، $i = ۱, ۲$ *با* β_i *را در نظر بگیرید. تحت شرایط* $\rho^۲\gamma \le \min(\alpha_۱, \alpha_۲)$ ، pdf *توام از یک* BGG *بردار تصادفی* $(X_۱, X_۲)$ *با استفاده از رابطه* (۲) *می توان نوشت.*

$$f_{x_۱x_۲}(x_۱, x_۲) = f_{x_۱}(x_۱) f_{x_۲}(x_۲) \sum_{i=۰}^{\infty} \rho^۲ \prod_{k=۲}^{۲} \binom{\alpha_k + i - ۱}{\alpha_k - ۱}^{-۱} L_i^{(\alpha_k - ۱)}(\lambda_k x_k^{\beta^k}) \qquad (۲)$$

که

$$f_{x_i}(x_i) = (\beta_i \lambda_i^{\alpha_i} / \Gamma(\alpha_i)) x_i^{\alpha_i \beta_i - ۱} \exp(-\lambda_i x_i^{\beta_i})$$

تابع چگالی احتمال از X_i *را برای* $i = ۱, ۲$ *تعریف می‌کند.*

فرض کنید $BGG_۱(\lambda_۱, \beta_۱, \alpha_۱, \lambda_۲, \beta_۲, \alpha_۲, \gamma, \rho^۲)$ یک توزیع BGG با تابع چگالی احتمال توام به دست آمده در رابطه (۲) را تعریف کند. شکلهای ۱ و ۲ نشان دهنده دو چگالی توام مختلف از توزیع $BGG_۱$ به ترتیب با پارامترهای $\lambda_۱ = ۱, \beta_۱ = ۱, \alpha_۱ = ۷, \lambda_۲ = ۱/۲, \beta_۲ = ۱/۳, \alpha_۲ = ۹, \gamma = ۵, \rho^۲ = ۰/۸, ۰/۲$ وقتی که می باشد.

نتیجه ۲.۳. *فرض کنید* $(X_۱, X_۲)$ *بردار تصادفی دومتغیره با یک توزیع* $BGG_۱(\lambda_۱, \beta_۱, \alpha_۱, \lambda_۲, \beta_۲, \alpha_۲, \gamma, \rho^۲)$ *باشد.*

الف. تابع توزیع تجمعی توام $(X_۱, X_۲)$ *برابر است با:*

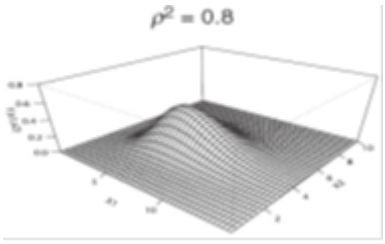
$$F(x_۱, x_۲) = \sum_{i=۰}^{\infty} \binom{\gamma + i - ۱}{i} \rho^{۲i} \prod_{k=۱}^{۲} \sum_{j_k=۰}^{i} (-۱)^{j_k} \binom{i}{j_k} IG(\alpha_k + j_k, \lambda j_k x_k^{\beta^k})\ ,\ x_۱, x_۲ > ۰ \qquad (۳)$$

ب. تابع مولد گشتاور $(X_۱, X_۲)$ *برابر است با:*

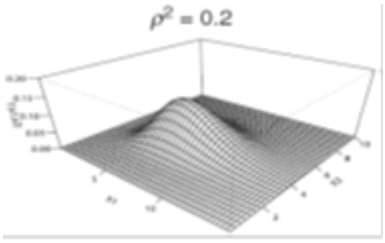
$$\sum_{i=۰}^{\infty} \binom{\gamma + i - ۱}{i} \rho^{۲i} \prod_{k=۱}^{۲} \lambda_k^{m_۱^{j\beta_k}} \sum_{m_k=۰}^{\infty} \frac{t_k^{\beta^{m_k}}}{m_k!} \sum_{j_k=۰}^{i} (-۱)^{j_k} \binom{i}{j_k} \frac{\Gamma(\frac{\alpha_k + j_k + m_k}{\beta_k})}{\Gamma(\alpha_k + j_k)} \qquad (۴)$$

---

[۳] Moments of Method
[۴] Margins for Functions Inference



شکل ۱: چگالی توام BGG برای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲: چگالی توام BGG

۴. برآورد پارامتر

در این بخش برآورد پارامترهای روش های MM و IMF بر اساس نمونه‌های تصادفی جفت شده $(X_{11}, X_{21}), \dots, (X_{11}, X_{21})$ از توزیع BGG بحث شده بخش قبلی می پردازیم.

۴. ۱. روش گشتاوری

فرض کنید $\mu_{ik} = E(X_i^k)$ برای $i = ۱, ۲$ ، k امین گشتاور برای i امین متغیر و $\overline{X_۱X_۲} = \sum_{j=۱}^{n}(X_{۱j}X_{۲j})/n$ ، $\mu_{ik} = r_{X_۱X_۲}$ و $\sum_{j=۱}^{n}(x_{ij}^k)/n$ به ترتیب k امین نمونه گشتاور توام، ضریب همبستگی و گشتاور باشد. برآوردگرهای MM $(MMEs)$ پارامترهای کناری $(\alpha_۱, \beta_۱, \lambda_۱)$ توسط معادلات همگن بر مبنای m_{ik} $(k = ۱, ۲, ۳)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$m_{ik} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_i + k}{\beta_k})}{\lambda_i^{k/\beta_i}\Gamma(\alpha_i)} \ , \ i = ۱, ۲ \qquad (۵)$$

که می‌توان به طور ساده برای توزیع $BGG_۳$ با قرار دادن $\alpha_۱ = \alpha_۲ \equiv \alpha$ به دست آورد. $MMES$ (میانگین مربعات خطا) $\rho^۲$ از توزیع $BGG_۲$ به صورت رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$۲F_۱\left(-\frac{۱}{\hat{\beta}_۱}, -\frac{۱}{\hat{\beta}_۲}, \hat{\alpha}_۲; \rho^۲\right) = \frac{r_{X_۱,X_۲}\prod_{i=۱}^{۲}\sqrt{\Gamma(\hat{\alpha}_i)\Gamma(\frac{۲}{\hat{\beta}_i} + \hat{\alpha}_i) - \Gamma^۲(\frac{۱}{\hat{\beta}_i} + \hat{\alpha}_i)}}{\Gamma(\frac{۱}{\hat{\beta}_۱} + \hat{\alpha}_۱)\Gamma(\frac{۱}{\hat{\beta}_۲} + \hat{\alpha}_۲)} + ۱ \qquad (۶)$$

بجای $\hat{\alpha}_۱$ و $\hat{\alpha}_۲$ در حل رابطه بالا در توزیع $BGG_۳$ برای برآوردگر $\rho^۲$ جایگذاری $\hat{\alpha}$ ضروری است.

۴. ۲. روش IMF

این روش محاسباتی از برآورد تمامی پارامترها به طور همزمان با درستنمایی توام امکان‌پذیر است. فرض کنید $(\lambda_i, \beta_i, \alpha_i)$ که برای $i = ۱, ۲$ درستنمایی لگاریتم کناری برای متغیر iام بوده و $(\hat{\lambda}_۱, \hat{\beta}_۱, \hat{\alpha}_۱, \hat{\lambda}_۲, \hat{\beta}_۲, \hat{\alpha}_۲, \gamma, \rho^۲)$ تابع درستنمایی توام باشد زمانیکه $= (\lambda_۱, \beta_۱, \alpha_۱, \lambda_۲, \beta_۲, \alpha_۲, \gamma, \rho^۲)$

$(\hat{\lambda}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\alpha}_2, \gamma, \rho^2)$. در این مرحله از روش IMF ، برآوردهای $(MMEs)$ IMF از پارامترهای کناری توزیع‌های $\hat{\lambda}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\alpha}_i$ برای $i = 1, 2$ از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_i} = \frac{n}{\beta_i} + \sum_{j=1}^{n} \log x_{ij} - \lambda_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta_i} \log x_{ij} = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial \lambda_i} = \frac{n\alpha_i}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta_i} = 0 \quad (۸)$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial \alpha_i} = -\frac{n}{\Gamma(\alpha_i)} \frac{d\Gamma(\alpha_i)}{d\alpha_i} + n \log \lambda_i + \beta_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta_i} \sum_{j=1}^{n} \log x_{ij} = 0 \quad (۹)$$

در دومین مرحله از فرایند $FMEs\ IMF$ از ρ^2 و γ برای یک توزیع BGG_1 از حل معادلات لاگ درستنمایی $\tilde{\gamma}$ و $\tilde{\rho}^2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{d}{d\lambda}) [(\gamma + i - 1)! / \gamma!] \rho^{2i} \prod_{k=1}^{2} \beta_k \sum_{jk=0}^{i} \left[(-1)^{j_k} \lambda_k^{\alpha_k + j_k} x_{ks}^{\beta_k(\alpha_k + j_k) - 1} \exp(-\lambda_k x_{ks}^{\beta_k}) / \left(j_k! (i - j_k)! \Gamma(\alpha_k + j_k) \right) \right]}{\sum_{i=1}^{\infty} [(\gamma + i - 1)! / \gamma!] \rho^{2i} \prod_{k=1}^{2} \beta_k \sum_{jk=0}^{i} \left[\lambda_k^{\alpha_k + j_k} x_{ks}^{\beta_k(\alpha_k + j_k) - 1} \exp(-\lambda_k x_{ks}^{\beta_k}) / \left(j_k! (i - j_k)! \Gamma(\alpha_k + j_k) \right) \right]} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \rho^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} [(\gamma + i - 1)! / \gamma!] \rho^{2(i-1)} \prod_{k=1}^{2} \beta_k \sum_{jk=0}^{i} \left[(-1)^{j_k} \lambda_k^{\alpha_k + j_k} x_{ks}^{\beta_k(\alpha_k + j_k) - 1} \exp(-\lambda_k x_{ks}^{\beta_k}) / \left(j_k! (i - j_k)! \Gamma(\alpha_k + j_k) \right) \right]}{\sum_{i=1}^{\infty} [(\gamma + i - 1)! / \gamma!] \rho^{2i} \prod_{k=1}^{2} \beta_k \sum_{jk=0}^{i} \left[\lambda_k^{\alpha_k + j_k} x_{ks}^{\beta_k(\alpha_k + j_k) - 1} \exp(-\lambda_k x_{ks}^{\beta_k}) / \left(j_k! (i - j_k)! \Gamma(\alpha_k + j_k) \right) \right]} = 0 \quad (۱۱)$$

۵. مطالعه عددی و کاربردی

۱.۵ . *الگوریتم پیشنهاد شده*

کاتلین و تورنت روشی کلیبیان کرده اند که در آن یک نمونه برای BGG_1 در حالتی که $\alpha_1 \geq \gamma$ ، $\alpha_2 \geq \gamma$ و $2\alpha_1, 2\alpha_2, \gamma$ که همگی مثبت بزرگتر از صفر هستند می‌تواند تولید گردد [۲۰] .

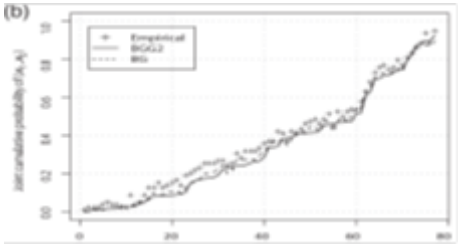
۲.۵ . *کاربرد*

دراین بخش کاربرد مدل BBG برای تحلیل پیوستگی ویژگی‌های آماری حجم سالانه سیل (X_1) و پیک سیل (X_2) از سال ۱۹۱۹ تا سال ۱۹۹۵ درحوزه رود $MadawakQuebec$ کانادا ارائه می‌شود. این مجموعه داده‌ها قبلا توسط Yue [۱۹] با استفاده از توزیع دومتغیره گاما Smith [۱۳] در معادله (۳) آنالیز شده است. آزمون‌های آماری کولموگروف اسمیرنوف (KS) برای حجم سیل ۰۶۴۹/۰ با $p-$ مقدار ۹۹۷۳/۰ بوده و برای پیک سیل این آزمون ۰۷۷۹/۰ با $p-$ مقدار ۹۷۳۵/۰ می‌باشد.بنابراین واضح است که برازش توزیع انتخاب شده برای هر دو از ویژگی‌های سیل (حجم سیل و پیک سیل) از تطابق خوبی برخوردارند. بر اساس روش IMF ،روش $IFMEs$ برای پارامترهای کناری $\hat{\alpha}_1 = 3/813$ و $\hat{\beta}_1 = 1/502$ و $\hat{\lambda}_1 = 0/000000241$ برای حجم سیل X_1 می‌باشد و $\hat{\alpha}_2 = 11/635$ و $\hat{\lambda}_2 = 0/045068$ برای پیک سیل X_2 می‌باشد. ظاهرا توزیع BGG_3 مدل مطلوبی برای $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_1$ نیست.با استفاده از مدل BGG_2 ، مقایسه فراوانی تجمعی نسبی توام با توزیع احتمال تجمعی نظری حجم سیل و پیک سیل از روش پیشنهادی ارائه شده توسط Yue ارزیابی می‌گردد [۲۱] . شکل ۳ فراوانی تجمعی نسبی توام و تئوری احتمالات تجمعی را نشان می‌دهد. در این جا فروانی تجمعی نسبی طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

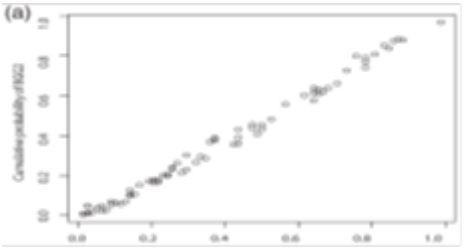
$$F_{n(x_{1i}, x_{2i})} = \sum_{j=1}^{n} \frac{I(X_{1j} \leq x_{1i}, X_{2j} \leq x_{2i})}{n + 1} \quad (۱۲)$$

که در رابطه فوق $I(.)$ تابع نشانگر (x_{1i}, x_{2i}) های مقادیر مشاهده شده از حجم و پیک سیل برای امین i سال بوده و مجموع اعداد از سال‌های n مشاهده در این مجموع داده ها ۷۷ است. شواهد بیشتر احتمالات توام نظری و تجربی در شکل ۴ نشان داده شده است که خط توپر، احتمالات

تجمعی توام نظری از حجم و پیک سیل توزیع BGG_2 بوده که به صورت صعودی افزایش می‌یابد. محور X ترکیبی از x_{1i}, x_{2i} است که به وسیله احتمال تجمعی BGG_2 مرتب شده است.مشاهده می‌شود که احتمال نظری برازش خوبی برای احتمال تجربی می‌باشد. حداکثر تفاوت مطلق بین احتمال تجمعی توام تجربی و احتمال تجمعی توام BGG_2 رابر با ۰۸۶۴/۰ بوده که کمتر از ناحیه بحرانی KS (۱۵۴۹/۰) با ضریب اطمینان ۰۵/۰ می‌باشد.به منظور مقایسه احتمال تجمعی توام نظری تحت توزیع BG مجدداً به صورت خط تیره در شکل ۴ نمایش داده شده است.هیچ تفاوت قابل توجهی بین این خطوط وجود ندارد. از این رو نتیجه می‌شودکه مدل BGG_2 برای نمایش توزیع توام حجم و پیک سیل مناسب است.



شکل ۳: توزیع های احتمال تجمعی نظری و عملی



شکل ۴: توزیع های احتمال تجمعی نظری و عملی

۶. نتیجه‌گیری

توزیع‌های BGG را می‌توان با تبدیل از توزیع‌های دومتغیره گاما استخراج کرد. بنابراین تابع چگالی احتمال توزیع دومتغیره گاما منحصر به فرد نمی‌باشد که این منجر به وجود آمدن انواع مختلف از توزیع‌های BGG در این مقاله شده است. با استفاده از توزیع گامای دومتغیره کیبل و تبدیلات توانی یک فرم جدیدی از توزیع BGG که شامل بسیاری از توزیع‌های BGG مشخص می‌باشد در این مقاله ارائه شده است. برخی از ویژگی‌های آماری از توزیع‌های پیشنهاد شده استخراج شده است. برآورد کناری و پارامترهای مستقل استفاده شده در روش‌های MM و IFM بررسی شده است. با وجود این که مدل BGG می‌تواند به مدل چند متغیره گسترش یابد، این مساله به صورت نظری سخت بوده و محاسبات آن پیچیده می‌باشد. علی الخصوص زمانی که پارامترهای شکل نامتقارن باشند. امید است که این موضوع در کارهای آتی در نظر گرفته شود.

مراجع

[1] E. W. Stacy , *A generalization of the gamma distribution*. Ann. Math. Stat. 1962;33:1187–1192.

[2] S. Bologna, *On a bivariate generalized gamma distribution*, Statistica 1987;47:543–548.

[3] T. Piboongungon, V. A. Aalo, C. D. Iskander and G. P. Efthymoglou, *Bivariate generalized gamma distribution with arbitrary fading parameters*, Electron. Lett. 2005;41:709–710.

[4] V. A. Aalo and T. Piboongungon, *On the multivariate generalized gamma distribution with exponential correlation*, In:Global Telecommunications Conference, GLOBECOM '05, 2005 November 28–December 2, IEEE. Vol. 3. 2005;p. 1229–1233.

[5] P. S. Bithas, N. C. Sagias, T. A. Tsiftsis and G. K. Karagiannidis, *Distributions involving correlated generalized gamma variables*, In: Proceedings of the 12th International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007), 2007 May 29–June 1; Crete Chania, Greece.

[6] W. F. Kibble, *Two-variate gamma-type distribution*, Sankhy¯a 1941;5:137–150.

[7] N. Balakrishnan and C. D. Lai, Continuous bivariate distributions, 2nd ed. NewYork: Springer-Verlag; 2009.

[8] R. f. Gunst and J. T. Webster, *Density functions of the bivariate chi-square distribution*, J. Statist. Comput. Simul. 1973;2:275–288.

[9] T. Izawa, *The bivariate gamma distribution*, Clim. Stat. 1953;4:9–15.
[10] D. R. Jensen, *The joint distribution of quadratic forms and related distributions*, Aust. J. Stat. 1970;12:13–22.
[11] T. Royen, *Expansions for the multivariate chi-square distributions*, J. Multivariate Anal. 1991;38:213–232.
[12] I. O. Sarmanov, *Gamma correlation process and its properties*, Doklady Akademii Nauk, SSSR 1970;191:30–32.
[13] O. E. Smith, S. I. Aldelfang and J. D. Tubb, *A bivariate gamma probability distribution with application to gust modeling*, NASA Technical Menorandum 82483. Huntsville, AL: Marshall Space Flight Center; 1982.
[14] I. O. Sarmanov, *An approximate calculation of correlation coefficient between functions of dependent random variables*, MatematicheskieZametki 1970;7:617–625 (in Russian). English translation in Mathematical Notes, Academy of Sciences of USSR 7:373–377.
[15] P. R. Krishnaiah, *Simultaneous tests and the efficiency of balanced incomplete block designs*, Report No.ARL 63-174. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio; 1963.
[16] P. R. Krishnaiah, *Multivariate gamma distributions and their applications in reliability*, Technical Report No. 83-09. Center for Multivariate Analysis, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA; 1983.
[17] I. O. Sarmanov, *New forms of correlation relationships between positive quantities applied in hydrology*, In: Mathematical Models in Hydrology Symposium, IAHS Publication No. 100, p. 104–109. International Association of Hydrological Sciences; 1974.
[18] I. O. Sarmanov, *Non-symmetric gamma-correlation*, Ann. State Hydrol. Inst. (Trudy Gosundarstvennogo Gidrologicheskogo Instituta) 1969;162:37–61.
[19] S. Yue, *A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis*, Hydrol. Process. 2001;15:1033–1045.
[20] F. Chatelain and J. Y. Tourneret, *Bivariate gamma distributions for multisensor SAR images*, Proceeding of: Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASS 2007.Vol. III, 2007; p. 1237–1240; Publisher ICASSP; IEEE Signal Processing Society, Cold Spring Harbor Laboratory Press.
[21] S. Yue, *The bivariate lognormal distribution to model a multivariate flood episode*, Hydrol. Process. 2000; 14:2575–2588.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–117، صص. ۱–۴

معرفی روش بیزی برای استنباط آماری با مشاهده تکی از توزیع نرمال

لیدر نوایی *،آ

آگروه آمار، دانشگاه پیام نور،ص. پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
استنباط آماری محدود
استنباط معتبر
نظریه دپستر–شفر.

2020 MSC:
62F15
62F30

چکیده

برخی از مسائل اساسی در آمار استنباطی را با تمرکز بر استنباط در مورد میانگین ناشناخته θ از مدل گوسی مدل با واریانس واحد از یک مشاهده داده تکی X فرض می‌کنیم . نگاهی دقیقتر به این مسئله استنباط به ظاهر ساده، پسین بیزی هدف را نشان می‌دهد که در آن نمی‌توان به عنوان اعتبار پسین ترکیب انواع خاص از اطلاعات را تفسیر کرد. راه حل جدید استنباط درمورد θ از X ارائه شده است.

۱. مقدمه

فرض کنید $F(X|\theta)$ تابع توزیع احتمال از توزیع نمونه‌گیری برای داده مشاهده شده X در فضای نمونه آن X با پارامتر θ در فضای پارامتر Θ باشد. تابع توزیع احتمال $F(X|\theta)$ بوسیله $f(X|\theta)$ نشان داده می‌شود. برای پرداختن به برخی از مسائل اساسی در آمار استنباطی، این مقاله بر یک مثال ساده گاوسی، تمرکز دارد. مدل نمونه برای داده مشاهده شده نقطه‌ای X نرمال تک متغییره با واریانس واحد و میانگین نامعلوم θ در $\Theta = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ می‌باشد. برای cdf و pdf توزیع نمونه داریم:

$$F(x|\theta) = \phi(x-\theta) \qquad (x \in X = \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R})$$

$$F(x|\theta) = \phi(x-\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \qquad (x \in X = \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R})$$

که در آن $\Phi(.)$ و $\phi(.)$ دلالت بر cdf و pdf از توزیع نرمال استاندارد دارد. در این مقاله بر استنباط در مورد θ از مشاهده نقطه‌ای X بدون اطلاع از θ تمرکز می‌شود.
با فرض θ یک راه حل اتکایی برای استنباط θ به صورت

$$\theta|X \sim N(X, 1)\ ,\ (\theta \in \mathbb{R})$$

توسط فیشر اثبات شده است. کاربرد قضیه بیزی با پیشین $\pi(\theta) \propto 1$ برای θ، بدون سوالی در مورد میانگین قضیه بیزی، توزیع پسین $N(X, 1)$ برای استنباط درمورد θ داده می‌شود. به عنوان مثال،

$$\pi(x|\theta) = \phi(\theta - X) \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

*لیدر نوایی
پست الکترونیک: leadernavaei@Yahoo.com (لیدر نوایی)

که همان توزیع اتکایی است. این به عنوان هدف استنتاج بیزی شناخته شده است. در این راستا، نتایج حاصل از لیندی [۱] (۱۹۵۸) را می‌توان برای شناسایی یک کلاس از مدل‌های پارامتر تکی که توزیع بیزی موجود دقیقا برای تکثیر توزیع اتکایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه، هدف بیزی و روش اتکایی رویکرد خواص مطلوب،مانند تجزیه و تحلیل داده، و همچنین به عنوان ویژگی نامطلوب که پسین‌ها با تفسیر متفاوت از پسین بیزی معتبر (غیر هدف) به اشتراک گذاشته شده است. از همه مهمتر، باید هنگامی که ترکیب انواع خاصی از اطلاعات را به اتکایی و هدف بیزی پسین گرفته شود. در مقایسه با استنتاج بیزی معتبر در زمینه وضعیت خاص استنباط، بیزی پسین نمی‌تواند به عنوان پسین معتبر تفسیر کند زمانی‌که که برای ترکیب اطلاعات از نوع محدودیت مورد استفاده قرار گرفته است.

۲. استنتاج بیزی

۲ .۱ . *استنتاج بیزی معتبر*

با توزیع پیشین معتبر $\pi(\theta)$، که $\int_\Theta \pi(\theta)d\theta = 1$، توزیع شرطی θ با مشاهده داده X،

$$\pi(\theta|X) = \int_\Theta \pi(\theta) f(X|\theta) d\theta \qquad (1)$$

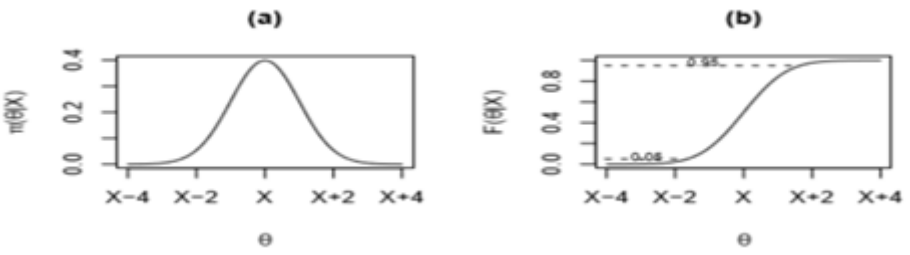
توسط قضیه بیز داده شده است. هنگامی که $\pi(\theta)$ توزیع پیشین معتبر می‌باشد، $\pi(\theta|X)$ یک توزیع پسین معتبر نامیده می‌شود. برای ساخت یک مثال از پسین معتبر مشابه از بیزی پیشین هدف داریم

$$\theta \sim N\left(0, \begin{pmatrix} c & \\ c-1 & \end{pmatrix}\right) \text{ and } Y|\theta \sim N(\theta, c) \qquad (2)$$

که در آن $Y = cX$ و $c > 1$.که از (۱) گرفته شده و پسین معتبر $\theta|X \cong N(X, 1)$ است. به عنوان مثال

$$\pi(\theta|X) = \phi(\theta - X) \quad (\theta \in \mathbb{R}) \qquad (3)$$

یک توزیع گاوسی شناخته شده که تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی احتمال آن در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱: pdf(a) و cdf (b)

با استفاده از (۳) به عنوان DSM، احتمال مقابل $\theta^* = 0$ (و یا هر نقطه دیگر ادعا، برای ماده) همیشه یکی است. بدیهی است، آماردانان با استفاده از احساس راحتی یک چنین (p, q, r) خروجی برای استنتاج صدق یا کذب A می‌باشد. به طور معمول، اعمال آماردانان تفسیر می‌کند پسین را به عنوان الف) بعید است که θ^* در خارج از $[X-2, X+2]$ قرار گیرد و ب) بسیار محتمل است که $\theta^* = 0$ در فاصله $[X-2, X+2]$ باشد.

۲ .۲ . *وضعیت خاص استنتاج*

در پژوهش حاضراستنتاج در مورد θ از مشاهده تکی $Y = cX \sim N(\theta, c)$ با توزیع پیشین $\theta \sim N\left(0, \left(\begin{smallmatrix} c \\ c-1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ را بدست می‌آوریم، واضح است که توزیع پسین $\theta|X \sim N(X, 1)$ به عنوان DSM برای نشان عدم قطعیت شخصی درباره تحقق خاص θ^* استفاده نمی‌شود. همانطور که قبلا بحث شد، آماردانان و دانشمندان استفاده از بازه‌ها بر اساس $\theta|X \sim N(X, 1)$ عدم اطمینان در مورد θ^* را نشان می‌دهند. فواصل از این

[۱] Lindley

نوع شخصی و اشکال مختلف در عمل برای اظهارات مختلف از علاقه هستند. در ادامه ژانگ [۲] و لیو [۳] (۲۰۰۹)، از فواصل تصادفی و DSM ها، برای درمان منظم استفاده می‌کند.با استفاده از این DSM، برای A به شرح زیر است:

$$p(A) = ۰ \ , \ q(A) = Pr(\theta < ۰|X) = \Phi(-X) \ \text{and} \ r(A) = \Phi(X)$$

به طور مشابه، اگر DSM خاص را توسط فاصله تصادفی $C(\theta)$ انتخاب کنید، سپس (p,q,r) برای A می‌شود

$$p(A) = ۰ \ , \ q(A) = Pr(|X| > |\theta - X| \ |X) = ۲\Phi(|X|) - ۱ \ \text{and} \ r(A) = ۲ - ۲\Phi(|X|)$$

۲.۳ . *دو ویژگی از پسین معتبر*

در اینجا خواص بیزی پسین معتبر را برای استنتاج در نظر بگیرید. به طور خاص، در بلندمدت توزیع فراوانی

$$Q_L(X,\theta^*) = Pr(\theta^* \notin L(\theta)|X) \quad (۴)$$

$$Q_R(X,\theta^*) = Pr(\theta^* \notin R(\theta)|X) \quad (۵)$$

مطابق احتمالات دم آشنا، مطلوب هستند. به ویژگی نتیجه استنباطی، خلاصه به طور رسمی به قضیه زیر، به عنوان خواص وضعیت خاص اشاره می‌کند.

قضیه ۱.۲. [۳] (*وضعیت خاص*) *فرض کنید که* $\theta \sim N\left(۰, \binom{c}{c-۱}\right)$ *و* $(cX)|\theta \sim N(\theta, c)$ *با* $c > ۱$ *پس*

$$Q_L(X,\theta^*) \sim Unif(۰,۱) \quad (۶)$$

$$Q_R(X,\theta^*) \sim Unif(۰,۱) \quad (۷)$$

قضیه ۲.۲. [۳] (*ترکیب اطلاعات*) *فرض کنید که مفروضات قضیه ۲ .۱ برقرار باشد، وعلاوه بر این، که* θ^* *در قیود* (۶) *و* (۷) *صدق می‌کند . پس* $Q_L(X,\theta^*) \sim Unif(۰,۱)$ *و* $Q_R(X,\theta^*) \sim Unif(۰,۱)$ *می‌باشد، که در آن* $Q_L(X,\theta^*)$ *و* $Q_R(X,\theta^*)$ *در* (۴) *و* (۵) *داده شده است .*

۲.۴ . *استنباط اتکایی وضعیت خاص با استفاده از قانون ضعیف*

هدف از استنتاج برای عدم قطعیت مشخص در مورد θ^* و یا، به طور رسمی، برای مشخص کردن یک DSM برای تولید (p,q,r) برای اظهارات مورد علاقه داده شده. برای انجام این کار یک مجموعه تصادفی پیش‌بینی $S(Z)(PRS)$ برای Z^* را در نظر می‌گیریم. برای خاص شدن بیشتر بگیرید:

$$S(Z) = Z^* : |Z^* \leq |Z| \ , \ (Z|X \sim N(۰,۱)) \quad (۸)$$

که یک تعریف می‌شود (ژانگ و لیو، ۲۰۰۹ را ببینید). به راحتی ثابت می‌کنیم که

$$Pr(Z^* \notin S(Z)|Z^*) \sim Unif(۰,۱) \quad (۹)$$

به طوریکه $Z^* \sim N(۰,۱)$ در آزمایش‌های تکرار شونده است. که با توجه به ژانگ و لیو (۲۰۰۹)، $S(Z)$ برای استنتاج در مورد Z^* معتبر است. توجه داشته باشید که PRS همیشه شامل نقطه Z^* و رفتار $Z^* = -\infty$ و $Z^* = +\infty$ به عنوان نقاط فوق العاده، به این معنی که داشتن مقادیر از Z^* دور از صفر تعجب‌آور خواهد بود.

یک راه برای اجتناب از موارد تضعیف DSM (۸) توسط حداقل گسترش مجموعه تصادفی $S(Z)$ به طوری که در تقاطع نتیجه با

$$Z^* : X - b \leq Z^* \leq X - a$$

خالی نمی‌باشد. بیشتر به طور خاص، یک قانون ضعیف ترکیبی برای مشکل حاضر (در جاهای دیگر در نظر گرفته شود تعریف کلیتر خواهد شد) معرفی می‌کنیم،

$$S(Z) \bigcap C_X = c \in C_X : \min_{s \in S(Z)} |c - s| = \min_{t \in C(X)} \min_{s \in S(Z)} |t - s| \quad (۱۰)$$

که C_X مجموعه‌ای به نمایندگی از قید در Z^* برای مشاهده X است. هنگامی که $S(Z) \cap C_X \neq \emptyset$، پس $S(Z) \cap C_X$ به سادگی تقاطع SZ با C_X است. در مواردی که $S(Z) \cap C_X = \emptyset$ پس $S(Z) \cap C_X$ مجموعه‌ای از نقاط در C_X است که نزدیک به نقطه در SZ می‌باشد.

قضیه ۳.۲. [۲] *فرض کنید که* $X = \theta^* + z^*$ *با* $Z^* \sim N(۰,۱)$ *و با توجه به مشاهده* X *، باشد . پس* DSM *، تعریف شده در* (۱۰) *، معتبر برای استنباط در مورد* Z^* *است .*

---

[۲] Zhang
[۳] Liu

۳. نتیجه گیری

در این مقاله، بررسی دقیقتر در مورد استنتاج θ در $N(\theta,1)$ از یک داده نقطه‌ای X وجود دارد. که اگر تفسیر فراوانی از احتمال گرفته شده باشد، مسائل مختلف بوجود می‌آیند که اطلاعات ترکیب نوع محدودیت به روش استنتاج موجود است.
مشکل مربوط به پیش‌بینی از مشاهدات بعدی، توسط Y از $N(\theta,1)$ بر اساس مشاهده X که θ نامعلوم است. به طور کلی، استفاده از مقادیر روش حداکثر برآورد با در نظر گرفتن دو تحقق مستقل،

$$Z_1^* = X - \theta^* \quad و \quad Z_2^* = Y - \theta^*$$

از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ ، با عدم اطلاع کامل در مورد θ^* می‌باشد. یک روش ساده برای در نظر گرفتن $Y - X \sim N(0,1)$ ، که به طور موثر θ^* ادغام شده است. که $Y|X \sim N(X,1)$ می‌باشد. یک DSM می‌تواند برای استنتاج در مورد Y گرفته شده از X در روش مشابه به عنوان استنتاج در مورد θ^* بر اساس $\theta|X \sim N(X,1)$ داده شود. با این حال این روش زمانی که θ قید است ممکن نیست کارآمد باشد. برای مثال اگر $\theta \in a,b$ با $b \geq a$ ، پس مشاهده X تقریبا با مشاهده θ معادل است. در نتیجه، استنتاج در مورد Y می‌تواند بر پایه $Y|X \sim N(a,1)$ یا $N(b,1)$ وابسته به این باشد که مشاهده مقادیر X به a و b نزدیک باشد.

مراجع

[1] A. P. Dawid and M. Stone, (1982). *The functional-modelbasis of fiducial inference*, Ann. Statist., 10 (1982), 1054–1074.
[2] A. P. Dempster, *Dempster-Shafer calculus for statisticians*, Internat. J. of Approx. Reason., 48 (2008), 265–377.
[3] R. A. Fisher, *On the mathematical foundations of theoretical statistics*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A., 222 (1922), 309–368.
[4] D. V. Lindley, D. V, *Fiducial distributions and Bayes' theorem*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 20 (1958), 102–107.
[5] K. Pearson, *The fundamental problem of practical statistics*, Biometrika, 13 (1920), 1–16.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–122، صص. ۵۸–۶۳

روش دنباله‌ای محض در برآورد فاصله اطمینان تابعی از پارامترها در مدل خودبازگشتی مرتبه p

سودابه سجادی پناه*[آ]، سید محمود میرجلیلی[ب]

[آ] دانشجوی دکتری دانشگاه یزد
[ب] گروه آمار دانشگاه ولایت

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
روش دنباله‌ای محض
فرایند خودبازگشتی
شبیه سازی مونت کارلو.

2020 MSC:
62L12
62M10
62L15

چکیده

در این مقاله، روش دنباله‌ای محض در برآورد فاصله‌ای تابعی خطی در مدل خودبازگشتی مرتبه p بررسی شده است. عملکرد برآورد فاصله‌ای حاصل از روش دنباله‌ای محض بر اساس برآوردگرهای حداقل مربعات تحت قضیه مطالعه و ارائه شده است. سپس شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل خودبازگشتی مرتبه دوم، به جهت تایید نتایج ارائه شده است که متغیر توقف حاصل از روش نمونه‌گیری محض، نسبت متغیر به اندازه نمونه بهینه و احتمال پوشش فاصله اطمینان محاسبه شده است. در انتها کاربرد روش در داده‌های واقعی نشان داده شده است.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۴۰ ماهالانوبیس [1] طی فعالیت‌های علمی خود برای برآورد میزان محصول کنف در مزارع بنگال به اهمیت نمونه‌گیری مرحله‌ای پی‌برد و در مطالعات میدانی خود به توسیع طرح‌های نمونه‌ای برای برآورد وسعت مزارع کنف پرداخت. این توسیع بنیادین در سایر پژوهش‌های نمونه‌ای بزرگ–مقیاس توسط برخی از پژوهشگران از جمله آبراهام والد [2] مورد توجه قرار گرفت. آبراهام والد به عنوان پیشتاز تجزیه و تحلیل‌های دنباله‌ای در سال ۱۹۴۰ با همکاری دستیاران خود به توسعه نظری و روش‌شناسی آزمون‌های دنباله‌ای پرداخت. از طرفی تحلیل داده‌های سری زمانی به دلیل فراوانی این مشاهدات در زمینه‌های گوناگون، آنها را به یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های علم آمار تبدیل کرده است. یکی از اهداف مهم در تجزیه و تحلیل مدل‌های سری زمانی، به‌کارگیری مدل برازش شده در پیشبینی مقادیر مورد انتظار فرایند است. در برخی شرایط اندازه نمونه مدل‌های سری زمانی از پیش مشخص نیست. در اینگونه حالات، یکی از راهکارها تعیین اندازه‌ی نمونه با استفاده از روش‌های دنباله‌ای است و بدین ترتیب استفاده از روش‌های دنباله‌ای در مدل‌های سری زمانی کاربرد می‌یابد. مسئله اصلی در تحلیل دنباله‌ای، تعیین بهترین تصمیم یا قاعده برای توقف نمونه‌گیری است. از این‌رو چندین روش نمونه‌گیری دنباله‌ای بر اساس تعریف قاعده توقف وجود دارد که یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین آنها، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض است. البته روش‌های دنباله‌ای هر یک دارای معایبی هستند که با توجه به شرایط با استفاده از یکی از این روش‌ها به تعیین اندازه نمونه می‌پردازیم. محققان بسیاری در زمینه مدل‌های سری زمانی با رویکرد دنباله‌ای مطالعه و پژوهش انجام داده‌اند که به صورت خلاصه چند مورد مرور می‌شود.

*سودابه سجادی پناه
پست الکترونیک: yahoo.com@soodabesajadi (سودابه سجادی پناه)، velayat.ac.ir@sm.mirjalili (سید محمود میرجلیلی)

[1] Mahalanobis
[2] Wald

عملکرد روش دنباله‌ای محض برای دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع در قالب تئوری با جزیئات بسیار برای اولین بار توسط محققانی چون چون وودروف [۱۸]، مارتینسک [۱۱] و گوش و همکاران [۴] مطرح و بررسی شده است. در ادامه استفاده از روش‌های دنباله‌ای و به‌طور خاص روش دنباله‌ای محض به داده‌های وابسته تعمیم داده شد. سیرام [۱۳، ۱۴] روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را جهت برآورد پارامتر و میانگین مدل خودبازگشتی مرتبه اول بررسی کرد. باسو و داس [۱] در سال ۱۹۹۷ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض برای برآورد بردار پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه p بررسی کردند. لی و سیرام [۱۰] در سال ۱۹۹۹ مدل غیرخطی خودبازگشتی آستانه‌ای [۳] ایستا در نظر گرفتند. آن‌ها در مدل فوق برآورد پارامترهای مدل بر اساس برآوردگرهای حداقل مربعات را با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی کردند.
سیرام [۱۵] در سال ۲۰۰۱ برآورد فاصله‌ای پارامترهای مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول با طول ثابت با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی نمود. سپس نتایج را به مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول چندگانه تعمیم داد. گمبی [۲] در سال ۲۰۱۰ برآورد فاصله‌ای پارامتر میانگین فرایند خطی با روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض بررسی نمود. سیرام و لسی [۱۶] در سال ۲۰۱۴ بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را برای پارامتر مدل خودبازگشتی مرتبه اول مروری داشتند. هم‌چنین آن‌ها ویژگی‌های کارایی مجانبی مرتبه اول و کارایی مجانبی مرتبه اول ریسک برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر را با استفاده از شبیه‌سازی بررسی کردند. در سال‌های اخیر، کارماکار و ماخوپادهای [۶، ۷] مدل‌های خودبازگشتی با ضرایب تصادفی از مرتبه p تک‌متغیره و چندمتغیره در نظر گرفتند و روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض را بررسی نمودند. سیرام و صمدی [۱۷] بر روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض مروری داشتند که توسط سیرام در سال ۱۹۸۸ ارائه شده بود. هم‌چنین، خلیفه و همکاران [۹] در سال ۲۰۲۰ عملکرد روش دومرحله‌ای در برآورد فاصله‌ای در توزیع نمایی بررسی نمودند. اخیرا جان و ژانگ [۵] کلاسی از قاعده‌های توقف بر اساس روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای بهبودیافته تحت شرایط مینیمم سازی تابع زیان درجه دوم بررسی کردند. [۱۲] روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای را در مدل خودبازگشتی مرتبه اول در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بررسی کردند. سپس به مقایسه روش پیشنهادی با روش دنباله‌ای محض پرداختند.
در این مقاله روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض در مدل خودبازگشتی مرتبه p در برآورد فاصله‌ای تابعی از پارامترهای مدل مورد مطالعه قرار گرفته است. ویژگی‌های روش در برآورد پارمترها از جمله کارایی مجانبی مرتبه اول، کارایی مجانبی مرتبه اول ریسک اثبات شده است. در واقع این ویژگی‌ها، کارایی روش پیشنهادی را در مقایسه با روش اندازه نمونه ثابت بهینه مورد ارزیابی قرار می‌دهند که نتایج در بخش ۲ ارائه شده است. سپس با استفاده از شبیه سازی در برآورد تابعی از پارامترهای مدل خودبازگشتی مرتبه دوم نتایج تئوری مشاهده شده است که نتایج در بخش‌های ۳ و ۴ به ترتیب ارائه شده است.

۲. برآورد فاصله اطمینان تابعی از پارامترها

فرایند خودبازگشتی مرتبه p ($\mathrm{AR}(p)$) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$X_i = \beta_1 X_{i-1} + \cdots + \beta_p X_{i-p} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

$\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ها دنباله‌ی مستقل و هم‌توزیع (iid) با توزیع مجهول F، میانگین صفر، واریانس σ^2 است و از دنباله $\{X_j, j < i\}$ ناهمبسته هستند. پارامتر β توسط برآوردگرهای حداقل مربعات با فرض $X_i = (X_i, \ldots, X_{i-p+1})'$ به‌صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p)' = (\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} X'_{i-1})^{-1} (\sum_{i=1}^{n} X'_{i-1} X_i).$$

$X_0 = (X_0, \ldots, X_{-p+1})'$ نسبت به سیگما میدان $\mathcal{F}_n$ اندازه پذیر، $\mathbf{E}(X_0) = 0$ و $\mathbf{E}(X_i^2) < \infty$ فرض می‌شود. فاصله اطمینان برای ترکیب خطی از β با طول ثابت $(2d)$ و ضریب اطمینان $1 - \alpha$ با استفاده از روش دنباله‌ای محض بررسی می‌گردد. همانطور که می‌دانیم، $\sum_{i=1}^{p} a_i \hat{\beta}_i$ به‌طور مجانبی دارای توزیع زیر است

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \hat{\beta}_i \sim N\left(a'\beta, a' \sum a\right).$$

[3] Threshold Autoregressive Process

احتمال پوشش $\sum_{i=1}^{p} a_i\beta_i$، هنگامی که d به اندازه کافی کوچک باشد،

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\hat{\beta}_i - d < \sum_{i=1}^{p} a_i\beta_i \right. &< \left. \sum_{i=1}^{p} a_i\hat{\beta}_i + d\right) \\ &= P\left(\left|\sum_{i=1}^{p} a_i\hat{\beta}_i - \sum_{i=1}^{p} a_i\beta_i\right| < d\right) \\ &= P\left(\frac{n\left|\sum_{i=1}^{p} a_i\hat{\beta}_i - \sum_{i=1}^{p} a_i\beta_i\right|^2}{\sigma^{*2}} < \frac{nd^2}{\sigma^{*2}}\right) \\ &\to 1-\alpha, \end{aligned}$$

که $\sum$ ماتریس واریانس–کواریانس و $\sigma^{*2} = a'\sum a$ است. اندازه نمونه ثابت بهینه نیز تقریبا برابر با $d^{-2}\sigma^{*2}z^2_{(1-\alpha)/2}$ به‌دست می‌آید. حجم نمونه‌ی بهینه با k_0 نشان داده و $[d^{-2}\sigma^{*2}z^2_{(1-\alpha)/2}]$ در نظر گرفته می‌شود. اگر σ^{*2} مجهول باشد، k_0 یک مقدار مجهول است. اندازه نمونه با استفاده از روش نمونه‌گیری محض تعیین و قاعده‌ی توقف مورد نظر با توجه به اندازه نمونه ثابت بهینه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$N_d = \inf\{\, n \geq m \,|\, n \geq z^2_{(1-\alpha)/2}\, d^{-2}\hat{\sigma}^{*2}_n \,\},$$

که m در قاعده‌ی توقف اندازه نمونه اولیه است. با توجه به قاعده‌ی توقف ارائه شده در بالا، اگر نمونه مقدماتی $X_1, \ldots, X_m$ از توزیع مورد نظر استخراج شده و با استفاده از آن $\widehat{n^*}$ (برآورد n^* به کمک نمونه مقدماتی) محاسبه می‌شود. اگر رابطه $m > \widehat{n^*}$ برقرار باشد، در این صورت فرآیند نمونه‌گیری خاتمه یافته و پارامتر مجهول θ توسط آماره‌ی $T_m = t(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ برآورد می‌شود؛ در غیر این صورت یک داده جدید X_{m+1} از توزیع مشاهده و به مشاهدات قبلی افزوده می‌شود. سپس با استفاده از نمونه $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}$ مقدار n^* برآورد می‌گردد. فاصله اطمینان برآوردگرها بر اساس روش نمونه گیری محض با I_{N_d} نشان داده و در ادامه قضیه اصلی این بخش ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۲. (برآورد فاصله‌ای ترکیب خطی با طول ثابت): فرض کنید به ازای $s > 2$ ، $\mathbf{E}[|\varepsilon_1|^{4s}] < \infty$ و $\mathbf{E}[|X_0|^{4s}] < \infty$ برقرار باشند. آنگاه هنگامی‌که $d \to 0$ نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\frac{N_d}{k_0} \xrightarrow{a.s} 1, \\ &\mathbf{E}\left(\frac{N_d}{k_0}\right) \to 1, \\ &P\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\beta_i \in I_{N_d}\right) \to 1-\alpha. \end{aligned}$$

اثبات. استدلال اثبات مشابه قضیه ۳ مقاله [۱] است، لذا از ذکر آن خودداری می‌شود. □

۳. شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو عملکرد روش دنباله‌ای محض در مدل خودبازگشتی مرتبه دوم با فرض توزیع اغتشاش‌ها $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ بررسی می‌شود. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، برآورد متغیرهای توقف حاصل از روش محض، نسبت متغیر پیشنهادی به اندازه نمونه ثابت بهینه و احتمال پوشش فاصله اطمینان باضریب اطمینان ٪۹۵ محاسبه شده است. در این بررسی، مقادیر مفروض جهت محاسبات $\beta_1 = 0.1, 0.2$ ، $\beta_2 = 0.1, 0.3, 0.5$ و اندازه نمونه اولیه ۲۰ با ۱۰۰۰۰ تکرار در نظر گرفته شده است. در این مطالعه با توجه به مفروضات مسئله ابتدا از مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با انتخاب و تعیین اندازه‌ی نمونه اولیه شبیه‌سازی می‌کنیم. سپس با استفاده از قاعده‌ی توقف پیشنهادی به تعیین اندازه نمونه‌ی نهایی می‌پردازیم. هنگامی‌که اندازه نمونه نهایی تعیین شد، با توجه به اختلاف اندازه نمونه اولیه و نهایی از مدل خودبازگشتی نمونه باز تولید می‌شود. سپس با برآورد پارامترها براساس برآوردگرهای حداقل مربعات معرفی شده در بخش قبل بر اساس اندازه‌ی نمونه نهایی، به محاسبه‌ی احتمال پوشش، متوسط متغیر توقف و نسبت متغیر توقف به اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه پرداخته می‌شود. اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه نیز در بخش قبل معرفی شده که با توجه به مفروضات مدل خودبازگشتی محاسبه می‌شود. قابل ذکر است فرایند تعیین اندازه‌ی نمونه نهایی و برآورد پارامترها با ۱۰۰۰۰ تکرار انجام می‌شود و متوسط مقادیر محاسباتی به عنوان برآورد نهایی آن‌ها ارائه

می‌گردد. نتایج مطالعه به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ برای بردارهای $c = (۰/۵, -۰/۷۵)$ و $c' = (۰/۰۵, -۰/۵)$ با فواصل $d = ۰/۹, ۰/۲$ و $d = ۰/۵, ۰/۱$ گزارش شده است.

همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، احتمال پوشش فاصله اطمینان با کاهش طول فاصله کاهش کمی را دارد. در واقع برای این بردار فاصله احتمال پوشش طبق قضیه ارائه شده، نرخ همگرایی ملایمی به سمت مقدار ۰/۹۵ دارد. هم‌چنین متغیر توقف با کاهش طول فاصله افزایش و نسبت آن نیز کاهش ملایمی می‌یابد. طبق نتایج تئوری انتظار داشتیم که با کاهش طول فاصله نسبت متغیر توقف به اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه به سمت ۱ همگرا می‌شود که در این حالت با نرخ بسیار ملایمی کاهش می‌یابد. در جدول ۲ برای احتمال پوشش روند مشابه جدول قبل مشاهده می‌شود که تایید کننده نرخ ملایم همگرایی احتمال پوشش به سمت مقدار ۰/۹۵ است. متغیر توقف نیز همچون نتیجه‌ی قبل با کاهش طول فاصله افزایش می‌یابد اما نسبت متغیر توقف به اندازه‌ی نمونه نرخ همگرایی با سرعت بیشتری دارد که نتایج تئوری در این حالت بیشتر محسوس است. در واقع با کاهش بیشتر طول فاصله با توجه به بردار انتخابی احتمال پوشش نرخ همگرایی با سرعت بیشتری را به سمت خواهد داشت. همین نتیجه برای متغیر توقف نیز برقرار است.

جدول ۱: برآورد فاصله اطمینان روش محض برای بردار $c = (۰/۵, -۰/۷۵)$

$(m, d, \beta_۱, \beta_۲)$	$\widehat{EN_d}$	$\widehat{EN_d}/k_۰$	CPI_{N_d}
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۳.۰)	۸۶۹۷.۲۷	۴۷۲۲.۵	۹۹۹۸.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۱.۰)	۳۱۶۱.۲۸	۱۸۷۲.۵	۹۹۹۱.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۱.۰)	۳۴۲۸.۳۰	۱۱۷۹.۵	۹۹۹۲.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۲.۰)	۳۱۴۹.۳۰	۲۲۱۸.۵	۹۹۹۵.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۳.۰)	۱۸۶۴.۳۰	۳۹۰۴.۵	۹۹۹۵.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۵.۰)	۱۳۰۵.۳۰	۰۹۶۲.۶	۹۹۹۸.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۵.۰)	۲۹۶۶.۲۷	۲۵۹۲.۶	۹۹۱۶.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۱.۰، ۳.۰)	۷۳۴۴.۵۳۷	۱۹۴۷.۵	۹۸۹۸.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۱.۰، ۱.۰)	۸۶۶۱.۵۵۹	۰۶۴۷.۵	۹۸۹۴.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۲.۰، ۱.۰)	۵۹۶۶.۶۰۹	۰۷۷۶.۵	۹۹۸۹.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۲.۰، ۲.۰)	۳۹۷۸.۶۰۶	۱۵۸۲.۵	۹۹۸۵.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۲.۰، ۳.۰)	۷۱۰۱۴.۵۹۹	۲۸۸۵.۵	۹۹۹۱.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۲.۰، ۵.۰)	۱۶۶۸.۵۹۱	۹۰۶۶.۵	۹۹۲۸.۰
(۲۰ ،۲.۰ ، ۱.۰، ۵.۰)	۵۱۷۲.۴۸۷	۵۲۰۴.۵	۹۸۱۶.۰

جدول ۲: برآورد فاصله اطمینان روش محض برای بردار $c' = (۰/۰۵, -۰/۵)$

$(m, d, \beta_۱, \beta_۲)$	$\widehat{EN_d}$	$\widehat{EN_d}/k_۰$	CPI_{N_d}
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۳.۰)	۰۱۴۷.۲۰	۷۰۸۵.۱۳	۹۹۹۸.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۱.۰)	۰۱۱۱.۲۰	۶۴۴۲.۱۲	۹۹۹۱.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۱.۰)	۰۰۳۶.۲۰	۳۹۸۷.۱۲	۹۹۹۲.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۲.۰)	۰۰۱.۲۰	۷۵۵۵.۱۲	۹۹۹۵.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۳.۰)	۳۳۶.۲۰	۳۹۸۱.۱۳	۹۹۹۵.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۲.۰، ۵.۰)	۲۱۳۶.۲۰	۹۷۳۲.۱۵	۹۹۹۸.۰
(۲۰ ،۹.۰ ، ۱.۰، ۵.۰)	۸۸۹۱.۲۰	۴۸۳۵.۱۶	۹۹۱۶.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۱.۰، ۳.۰)	۸۵۱۶.۲۳	۰۴۵۸.۵	۹۸۹۸.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۱.۰، ۱.۰)	۳۸۵۸.۲۵	۹۵۳۴.۴	۹۸۹۴.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۲.۰، ۱.۰)	۶۰۱۵.۲۵	۸۹۸۵.۴	۹۸۸۹.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۲.۰، ۲.۰)	۸۴۳۸.۲۴	۸۹۰۳.۴	۹۸۸۵.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۲.۰، ۳.۰)	۸۵۸.۲۳	۹۳۲۹.۴	۹۸۹۱.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۲.۰، ۵.۰)	۷۹۲۴.۲۱	۳۷۱۸.۵	۹۹۲۸.۰
(۲۰ ،۵.۰ ، ۱.۰، ۵.۰)	۹۳۲۱.۲۱	۵۷۸۹.۵	۹۸۱۶.۰

۴. آنالیز داده‌ی واقعی

مجموعه داده‌های $lynx$ در نرم‌افزار R را در نظر می‌گیریم که مدل خودبازگشتی مرتبه دوم به آن برازش شده است[۳]. با استفاده از این داده‌ها برآورد پارامترهای مدل، متغیر توقف و واریانس را به‌دست آورده‌ایم. نتایج در جدول ۳ برای بردار $c = (۰/۰۵, -۰/۵)$ گزارش شده است.برای بررسی عملکرد روش در برآورد پارامترها، برآورد را با به‌کارگیری روش دنباله‌ای دومرحله‌ای مقایسه شده است. در میان روش‌های دنباله‌ای روش دنباله‌ای دومرحله‌ای و روش دنباله‌ای محض از روش‌های پرکابرد و مشهور دنباله‌ای هستند. روش دومرحله ای در اجرا نسبت به

روش محض از سرعت بیشتری برخوردار است اما اندازه‌ی نمونه مورد استفاده در این روش در قیاس با روش محض با توجه به قاعده‌ی توقف پیشنهادی بیشتر است. ابتدا قاعده ی توقف تحت این روش را با توجه به اندازه نمونه ثابت بهینه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T_m^d = \max\{m, \lfloor z^2_{(1-\alpha)/2}\, d^{-2} \hat{\sigma}^{*2}_m \rfloor + 1\}.$$

که m نشان‌دهنده اندازه نمونه اولیه است. با توجه به اندازه‌ی نمونه اولیه و برآورد واریانس مدل براساس اندازه‌ی نمونه اولیه به تعیین اندازه نمونه نهایی پرداخته می‌شود. قابل ذکر است نتایج تئوری ارائه شده در روش دومرحله‌ای نیز با استدلالی مشابه به‌سادگی نتیجه می‌شود. در واقع علاوه بر کارا بودن این روش، داشتن نتایج تئوری یکسان در برآورد فاصله‌ای تابعی خطی از پارامترها ما را ترغیب به مقایسه این دو روش برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی کرد. نتایج برآوردها حاصل از هر دو روش در جدول ۳ برای مقادیر اندازه‌ی نمونه اولیه با فرض طول فاصله ۰/۳ گزارش شده است که ردیف‌های اول و دوم نشان‌دهنده مقادیر مربوط به روش محض و مقادیر برآوردهای حاصل از روش دومرحله‌ای به ترتیب هستند. در این روش نیز بعد از برآورد مقادیر در هر روش اگر نمونه‌ی در دسترس کافی نباشد، به باز تولید نمونه با استفاده از برآورد پارامترها بر مبنای اندازه‌ی نمونه اولیه می‌پردازیم. قابل ذکر است در تولید نمونه‌ی جدید برای برآورد نهایی پارامترها، توزیع اغتشاش‌ها در این حالت با توجه به بررسی‌های انجام شده در [۳] نرمال در نظر گرفته شده است . با توجه به نتایج حاصل شده، برای اندازه نمونه اولیه ۵ مقادیر برآوردگرها اختلاف کمی باهم دارند. با افزایش اندازه‌ی نمونه اولیه به مقدار ۳۰ نتایج دقیقا یکسان در هر دو روش حاصل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نه چندان زیاد اندازه نمونه عملکرد هر دو روش بسیار بهم نزدیک است. نزدیکی عملکرد دو روش پرکابرد و کارای دنباله‌ای حاکی از مناسب بودن روش و قاعده‌ی توقف پیشنهادی در تعیین اندازه نمونه نهایی است. برآورد پارامترهای مدل با به‌کارگیری داده‌ها کاربرد روش پیشنهادی برای برآورد تابعی خطی از پارامترها نشان می‌دهد. هم‌چنین نزدیکی نتایج حاکی از عملکرد خوب روش در برآورد پارامترها است.

جدول ۳: مقادیر برآوردگرها برای بردار $c = (۰/۰۵, -۰/۵)$.

برآوردگرها	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	N_d	$\hat{\sigma}_n$
$m = ۵$	۰/۸۶۷۰	۰/۶۴۱۵	۲۷	۰/۲۰۹۷
$m = ۵$	۰/۸۸۲۶	۰/۶۴۱۶	۲۵	۰/۲۱۰۷
$m = ۳۰$	۰/۸۸۰۹	۰/۶۵۰۰	۳۰	۰/۲۰۸۴
$m = ۳۰$	۰/۸۸۰۹	۰/۶۵۰۰	۳۰	۰/۲۰۸۴

بحث و نتیجه‌گیری

هنگامی که پارامترهای مدل مجهول باشند، روش اندازه نمونه ثابت بهینه کاربردی ندارد. یکی از روش‌های جایگزین برای تعیین اندازه نمونه روش‌های دنباله‌ای به‌خصوص نمونه‌گیری دنباله‌ای محض است. طبق نتایج حاصل، نسبت متغیر توقف روش محض با کاهش طول فاصله به مقدار اندازه نمونه ثابت بهینه با نرخ ملایمی نزدیک می‌شود. همچنین احتمال پوشش فاصله اطمینان حاصل از این روش با کاهش طول فاصله کاهش ملایمی می‌یابد که برای مقادیر خیلی کم طول فاصله نرخ همگرایی به مقدار ۰/۹۵ بیشتر می‌شود. کاربرد روش را برای تابعی از بردارها با توجه به استراتژی مورد استفاده در روش دنباله‌ای محض (تعیین کمترین اندازه نمونه نهایی) ارائه شد. این روش با وجود نرخ همگرایی ملایم در شرایطی که اندازه‌ی نمونه از قبل مشخص نیست، برای بردارهای مختلف می‌توان به عنوان روش جایگزین با کارایی نزدیک به حالت اندازه نمونه ثابت مدنظر قرار گیرد.

مراجع

[1] Basu, A. K. and Das, J.K. (1997). Sequential estimation of the autoregressive parameters in AR(p) model. *Sequential Analysis*, **16**, 1-24.

[2] Gombay, E. (2010). Sequential confidence intervals for time series. *Periodica Mathematica Hungarica*, **61**, 183-193.

[3] Fan, J. and Yao, Q. (2008). Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods. *Springer Science and Business Media*.

[4] Ghosh, M., Mukhopadhyay, N., Sen, P.K. (1997). Sequential Estimation. *Wiley*, New York.

[5] Jun, H. and Zhuang. Y. (2020). A broader class of modified two-stage minimum risk point estimation procedures for a normal mean.*Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-15.

[6] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2017). Risk efficient estimation of fully dependent random coefficient autoregressive models of general order. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **47**, 4242-4253.

[7] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2019). Risk efficient sequential estimation of multivariate random coefficient autoregressive process. *Sequential Analysis*, **38**, 26-45.

[8] Mukhopadhyay, N. (1995). Sequential estimation of means of linear processes. *Metrika*, **42**, 279-290.

[9] Khalifeh, A., Mahmoudi, E., and Chaturvedi, A. (2020). Sequential Fixed-Accuracy Confidence Intervals for the Stress–Strength Reliability Parameter for the Exponential Distribution: Two-Stage Sampling Procedure. *Computational Statistics*, **35** 1553–1575.
[10] Lee, S. and Sriram,T. N. (1999). Sequential Point Estimation of Parameters in a Threshold AR(1) Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **84(2)**, 343-355.
[11] Martinsek, A.T. (1983). Second order approximation to the risk of a sequential procedure. *The Annals of Statistics*, **11**, 827-836.
[12] Sajjadipanah, S., Mahmoudi. E., and Zamani. M. (2021). Two-stage procedure in a first-order autoregressive process and comparison with a purely sequential procedure. *Sequential Analysis*, 1-16.
[13] Sriram, T. N. (1987). Sequential estimation of the mean of a first-order stationary autoregressive process. *The Annals of Statistics*, **15**, 1079-1090.
[14] Sriram, T. N. (1988). Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first-order autoregressive process. *Sequential Analysis*, **7**, 53-74.
[15] Sriram, T. N. (2001). Fixed size confidence regions for parameters of threshold ar(1) models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **97**, 293-304.
[16] Sriram, T. N. and Laci, R. (2014). Sequential estimator for time series models. *Sequential Analysis*, **33**, 136-157.
[17] Sriram, T. N. and Samadi, S. Y. (2019). Second-Order Analysis of regret for sequential estimation of the autoregressive parameter in Firat-Order Autoregressive model. *Sequential Analysis*, **38(3)**, 411-435.
[18] Woodroofe, M. (1982). Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. *SIAM, Philadelphia*.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–126، صص. ۶۴–۷۲

مدل رگرسیون لوجستیک با متغیر پاسخ تحت پاسخ تصادفی به سؤال سقط جنین عمدی

صفدر قصمی شهواری[۱]

گروه ریاضی وآمار،واحدبندر جاسک،دانشگاه ازاد اسلامی ،بندرجاسک ،ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
رگرسیون لوجستیک یک متغیره
پاسخ تصادفی،رده بندی نادرست، سؤالات حساس
سقط جنین عمدی
مدل خطی تعمیم یافته

چکیده

در این پژوهش ابتدا مدل رگرسیون لوجستیک یک متغیره را برای متغیرهای پاسخ RR دوتایی در نظر می گیریم و این مدل را به صورت یک مدل خطی تعمیم یافته (GLM) ارایه می هیم. با ارایه مدل به صورت (GLM) دو جنبه از این مدل روشن خواهد شد که قبلا مورد توجه قرار نگرفته اند: ۱- این مدل حاوی خواص مفیدی از GLM استاندارد است مانند خواص براوردهای پارامتری. ۲- این مدل را می توان با تنظیم نرم افزار استاندارد برای GLM ارزیابی کرد. این پژوهش نشان می دهد که چگونه تنظیمات متداول در نرم افزارهای R و GLIM امکان پذیرند و این عمل ارزیابی مدل های رگرسیون لوجستیک برای متغیرهای پاسخ RR را اعتماد پذیر می سازد، سپس تخمین نسبت سقط جنین عمدی در خانمهای ۴۹-۱۵ ساله با استفاده از روش پاسخ تصادفی به عنوان کاربردی از طرح اولیه وارنر معرفی می گردد .

۱. مقدمه

پاسخ تصادفی (RR) یکی از روش های مصاحبه است ،در عمل هنگامی که سوالات حساس پرسیده می شود و پاسخ دهندگان تمایل ندارند مستقیما جواب دهند از این روش مصاحبه می توان استفاده کرد.
سوال درباره مصرف الکل ،رفتار جنسی یا کلاهبرداری و سقط جنین عمدی سوالاتی از این دسته اند.متغیر RR را به صورت متغیر رسته ای که درست رده بندی نشده در جایی که احتمالات شرطی مربوط به رده بندی نادرست معلوم هستند می توان توصیف کرد .رده بندی نادرست از محرمانگی فرد پاسخگو حفاظت می کند . ماهیت سؤالهای حساس و نگرانیهای اساسی موجود در درستی پاسخهایی که به این نوع سؤالها داده میشود، باعث شده همواره پژوهشگران به دنبال یافتن تکنیکهایی باشند که آنها را به سمت واقعیت سوق دهد. بنابراین وقتی نخستین تکنیک برخورد با چنین سؤالهایی با وجود تمام محدودیتها توسط وارنر مطرح شد، مسیری پیش روی پژوهشگران باز شد تا در طول زمان بتوانند با اصلاح محدودیتها و اضافه نمودن بخشهایی به آن باعث افزایش جذابیت و قابلیت انجام، هم بین پاسخ دهندگان و هم بین پژوهشگران این حیطه شود و البته این مسیر همچنان تداوم دارد. اولین بار وارنر در سال ۱۹۶۵ تکنیك پاسخ تصادفی شده را مطرح کرد. بعد از آن مدل های زیادی بر اساس تکنیك وارنر معرفی شدند که برخی با افزایش کارایی براوردگر و برخی دیگر با افزایش اعتماد افراد، سعی در بهبود تکنیك وارنر داشتند. رگرسیون لجستیک ابزاری تحلیلی است که عموما در تحقیقات پزشکی و اپیدمیولوژی مورد استفاده زیادی دارد. استوارت و همکاران در سال ۱۹۹۸ از رگرسیون لجستیک در علم پزشکی استفاده کرده اند. لنزولت و همکاران در سال ۲۰۰۵ نشان دادند که RR برآوردهای معتبرتری نسبت به سایر روش ها برای سوالات حساس ارائه می دهند. تنتایج آمارگیری، وقتی براوردهای به دست آمده از روش پاسخ تصادفی شده با مقدار واقعی پارامتر جامعه و یا سایر روش های جمع آوری داده مقایسه می شود معتبر ترند. –

پست الکترونیک : safdar.ghasami@gmail.com (صفدر قصمی شهواری)

گارت در سال ۲۰۱۵ بر روی مدل های رگرسیون برای پاسخ باینری(دودویی) تمرکز کرده است. در بسیاری از زمینه های کاربردی، رگرسیون لجستیک روش استاندارد برای ارتباط یک پاسخ باینری به مجموعه ای از متغیرها تبدیل شده است. در این مقاله، ویژگی های اصلی رگرسیون لجستیک شرح داده شده است و برخی از جنبه های تفسیر رگرسیون لجستیک با مثال نشان داده شده است. تاکید اصلی این مقاله بر روی نحوه استفاده از رگرسیون منطقی در عمل و نحوه تفسیر ضرایب رگرسیون لجستیک است.
کابکوسکی و همکاران در سال ۲۰۱۸ پیش بینی یک مدل باینری عمومی بر رگرسیون لجستیک را انجام داده است.
در جمع آوری داده های انبوه بویژه در بررسی سلامت و بیماری بعضی از متغیرها با عدم پاسخ روبرو می شوند که به اینها داده های گم شده می گویند. این داده های گم شده می تواند در متغیر پاسخ یا در متغیرهای کمکی بوجود آید و نتایج گمراه کننده ای به دنبال داشته باشد، برای پرهیز از این مشکل روش پاسخ تصادفی شده Response (Randomized) مورد استفاده قرار می گیرد. لذا بحث و بررسی و پژوهش در این زمینه دارای اهمیت است. این پژوهش درباره مدل رگرسیون لوجستیک یک متغیره هنگامی که متغیرهای پاسخ وابسته به پاسخ تصادفی هستند بحث می کند ، در این پژوهش مدل رگرسیون لوجستیک یک متغیره را برای متغیرهای پاسخ RR دودویی در نظر می گیریم و این مدل را به صورت یک مدل خطی تعمیم یافته (GLM) ارایه می دهیم که حاوی خواص مفیدی از (GLM) استاندارد است به عنوان مثال خواص برآوردهای پارامتر. مزیت این کاراین است که مدل رگرسیون لوجستیک بصورت یک مدل خطی تعمیم یافته (GLM) ارایه می شود و پارامترهای مدل برآورد می شود. نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده ها بیان گر این است که مدل پیشنهادی، پیش بینی صحیح تری نسبت به روش قبلی دارد. در حالتی که نتوان از روشهای مستقیم جواب را محاسبه نمود، از الگوریتم های عددی استفاده می شود. روش تکراری نیوتن، یکی از این الگوریتم ها می باشد که جواب تقریبی بدست آمده با این روش با جواب اصلی دارای خطای بسیار کوچکی است.

۲. رگرسیون لوجستیک

اغلب برای بیان شدت رابطه خطی بین دو متغیر کمی از ضریب همبستگی استفاده می‌کنیم. همچنین برای نمایش مدل رابطه بین آن دو نیز از مدل رگرسیونی کمک می‌گیریم. در این میان یک الگو برای پیش‌بینی متغیر وابسته (Y) براساس متغیر مستقل (X) ایجاد می‌شود. ولی باید توجه داشت که در مدل ایجاد شده، هر دو متغیر مستقل و وابسته، کمی هستند. همچنین شرط پیوسته بودن این مقدارها نیز در روش رگرسیون نهفته است. ولی ممکن است بخواهیم رابطه بین یک متغیر مستقل (با مقدارهای پیوسته) را با یک متغیر وابسته با مقدارهای کیفی بسنجیم. در این حالت روش عادی رگرسیون خطی جوابگو نخواهد بود و باید از "حرگرسیون لوجستیک"> استفاده کرد.

۲.۱. *برآورد پارامترهای رگرسیون لجستیک*

از آنجایی که مقدار پیش‌بینی برای متغیر وابسته، با احتمال انجام p(x) می شود، برای مشخص کردن مدل رابطه بین متغیر وابسته و مستقل به جای رابطه خطی، به تابعی احتیاج داریم که در حدود ۰ تا ۱ تغییر کند. در روش رگرسیون لجستیک از تابعی به نام "حتابع لجستیک [1]"> استفاده می‌شود. به همین علت این روش رگرسیونی را رگرسیون لجستیک می‌نامند. در ادامه این تابع معرفی و نمودار مربوط به آن براساس پارامترهایa=۰ و ۱ =b در تصویر دیده می‌شود.

$$p\,(x) = \frac{e^{a+bx}}{۱ + e^{a+bx}}$$

همانطور که دیده می‌شود با افزایش مقدار x (x→∞) تابع لجستیک به ۱ نزدیک خواهد شد. همچنین با کاهش مقدار x (x→−∞) مقدارx تابع به سمت صفر میل می‌کند. حال فرض کنید برای رگرسیون لجستیک از این تابع برای بیان احتمال متغیر وابسته استفاده شود. پس خواهیم داشت:

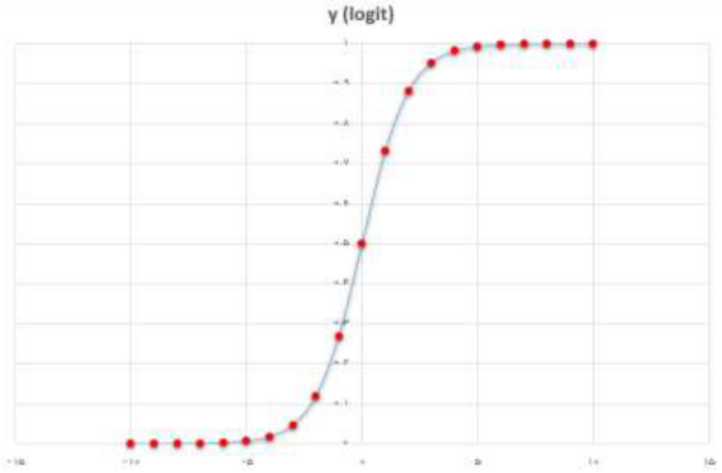
$$p\,(x) = \overline{Y} = E\,(Y = y|X = x) = \frac{e^{a+bx}}{۱ + e^{a+bx}}$$

به منظور برآورد پارامترهای این مدل، می‌توان از تبدیل لوجیت [2] استفاده کرد. این تبدیل را روی بخت ،اجرا می‌کنیم. در این صورت رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$g\,(x) = \ln\left(\frac{p\,(x)}{۱ - p\,(x)}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^{a+bx}}{۱+e^{a+bx}}}{۱ - \frac{e^{a+bx}}{۱+e^{a+bx}}}\right) = \ln\left(e^{a+bx}\right) = a + bx$$

با استفاده از تابع درستنمایی ماکزیمم میتوان برآورد پارامترها بدست آورد. با این کار به یک دستگاه معادلات می‌رسیم که متاسفانه برای حل آن روش تحلیلی وجود ندارد و باید به کمک روش‌های عددی برآورد را انجام داد.

[1] Logistic Function
[2] Logit Transformation



شکل ۱: نمودار تابع لوجستیک

۲.۲. *پیش فرض های رگرسیون لجستیک*

با این که رگرسیون لجستیک در مقایسه با رگرسیون خطی پیش فرض های کمتری دارد (به عنوان مثال پیش فرض های همگنی واریانس و نرمال بودن خطاها وجود ندارد)، رگرسیون لجستیک نیازمند موارد زیر است:

۱) هم خطی چندگانه کامل وجود نداشته باشد.

۲) خطاهای خاص نباید وجود داشته باشد (یعنی، همه متغیرهای پیشبین مرتبط وارد شوند و پیشبین های نامربوط کنار گذاشته شوند).

۳) متغیرهای مستقل باید در مقیاس پاسخ تراکمی یا جمع پذیر [۳] فاصله ای یا سطح نسبی اندازه گیری شده باشند (هر چند که متغیرهای دو مقوله ای نیز می توانند مورد استفاده قرار گیرند).

برای تفسیر درست نتایج، رگرسیون لجستیک در مقایسه با رگرسیون خطی نیازمند نمونه های بزرگتری است. با این که آماردان ها در خصوص شرایط دقیق نمونه توافق ندارند. بسیاری پیشنهاد می کنند تعداد افراد نمونه حداقل باید ۳۰ برابر تعداد پارامترهایی باشند که برآورد می شوند.

۳. روش پاسخ تصادفی

پاسخ تصادفی (RR) یکی از روش های مصاحبه است .در عمل هنگامی که سوالات حساس پرسیده می شود و پاسخ دهندگان تمایل ندارند مستقیما جواب دهند از این روش می توان استفاده کرد.این روش را وارنر [۴] در سال ۱۹۶۵برای اولین بارمعرفی کرد .سوال در باره مصرف الکل ،رفتار جنسی ،کلاهبرداری و سقط جنین عمدی سوالاتی از این دسته اند.به دست اوردن اطلاعات واقعی در زمینه های فوق دشواریهای زیادی دارد .اگر سوالات مزبور به صورت پرسشنامه مطرح شوند توده مردم به علت ترس ، عدم اعتماد، احساس گناه و... از ارایه پاسخ صحیح طفزه می روند یا دچار تردید می شوند .همچنین مصاحبه مستقیم با افراد نیز ممکن است چنین اشکالاتی به دنبال داشته باشد و در نتیجه میزان پاسخ های صحیح و دقت جمع اوری اطلاعات کاهش یابد ،خصوصا در برنامه ریزی های بهداشتی شرایط مشابه فراوانی پیش می آید که محقق احتیاج به دانستن اطلاعات دقیق دارد ولی روش های معمولی جمع اوری اطلاعات نمی تواند در این زمینه دقت و صحت کافی به دست دهد .حتی ممکن است از نظر پرسشگر و پاسخگو پرسش مستقیم امری غیر اخلاقی تلقی شود .برای براورد کردن این نیازمندی ها روش پاسخ تصادفی پدید امده و بسط یافته است ،این روش در بررسی های آماری با هدف کاهش یا حذف خطاهای پاسخ به کار می رود.

۱.۳. *طرح پاسخ تحمیلی*

این طرح توسط بروچ [۵] در سال ۱۹۷۱ معرفی شد .در زیر نشان می دهیم که چگونه می توان این طرح را به عنوان یک طرح رده بندی نادرست به کار برد .فرض کنید سوال حساس به دنبال پاسخ بلی یا خیر است ،طرح پاسخ تحمیلی به صورت زیر است بعد از اینکه سوال حساس پرسیده شد پاسخگو دو تاس می اندازد و نتیجه را از پرسشگر پنهان می کند .اگر مجموع اعداد ظاهر شده ۳،۲ یا ۴ باشد پاسخگو پاسخ بلی می دهد

[3] cumulative response scale
[4] warner
[5] Boruch

.اگر نتیجه ۹،۸،۷، ۶،۵ یا ۱۰ باشد پاسخگو بر اساس حقیقت پاسخ می دهد .اگر نتیجه۱۱یا ۱۲ باشد پاسخگو پاسخ خیر می دهد .این طرح از محرمانگی حفاظت می کند زیرا یک بلی لزوما به معنای تصمیم بلی نیست به بیان دیگر پرسشگر نمی داند که پاسخگو پاسخ بلی خواهد داد زیرا او سوال را درست پاسخ میدهد همچنین ممکن است پاسخگو پاسخ بلی دهد زیرا توسط طرح به او تحمیل شده است که این طور پاسخ دهد.فرض کنید Y متغیر RR دوتایی تصمیم باشد که مورد حساس را مدل سازی می کند .Y^*متغیر دوتایی است که پاسخ مشاهده شده را مدل سازی می کند .قرار دهید بلی =۱ و خیر=۰ بنابراین طرح RR مربوط به طرح پاسخ تحمیلی عبارتست از
(۱)

$$p\,(Y^* = ۱) = p\,(Y^* = ۱|Y = ۰)\,p\,(Y = ۰) + p\,(Y^* = ۱|Y = ۰)\,p\,(Y = ۱) = \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۴}p\,(Y = ۱)$$

توجه کنید که احتمالات $p\,(Y^* = j|Y = k)$ به ازای $j,k \in \{۰,۱\}$ توسط توزیع معلوم مجموع دو تاس تثبیت شده اند.معادله (۱) نشان می دهد که متغیر های RR را می توان به صورت متغیر هایی که درست طبقه بندی نشده اند انهم در جایی که احتمالات مربوط به رده بندی نادرست به صورت $p\,(Y^* = j|Y = k)$ داده می شوند مشاهده کرد .فرض می کنیم پاسخ دهندگان از دستورات داده شده در مصاحبه پیروی می کنند با این فرض توزیع خطای رده بندی نادرست توسط محقق تحت کنترل است .اگر بنویسیم
$p\,(Y^* = ۱) = c + dp(Y = ۱)$، انگاه می توان سایر طرح های RR را به همین روش توصیف کرد.

۲.۳ . *طرح اولیه وارنر*

در طرح اولیه وارنر (۱۹۶۵) هر شخص درجامعه متعلق به گروه A یا B است. با احتمال p، $p\epsilon\left(\frac{۱}{۲},۱\right)$،
سؤال این است: آیا شما متعلق به گروه A هستید؟ و با احتمال $p - ۱$سؤال این است:آیا شما متعلق به گروه B هستید؟
در این حالت داریم $c = ۱ - p, d = ۲p - ۱$

۳.۳ . *طرح کاک*

در طرح کاک[۶] (۱۹۹۰)، یک سؤال بلی خیر با استفاده از دسته کارت ها پرسیده می شود. به عنوان مثال فرض کنید دو دسته کارت حاوی کارت های مشکی و قرمز باشند در دسته سمت راست نسبت کارت های قرمز $\frac{۸}{۱۰}$ است و در دسته سمت چپ $\frac{۲}{۱۰}$ است. از پاسخ گو خواسته می شود تا یک کارت از هر دسته بکشد و رنگ کارت را از پرسشگر مخفی نگه دارد. سپس سؤال پرسیده می شود به جای پاسخ مستقیم به سؤال پاسخ گو رنگ کارت مربوط به دسته مربوطه را می گوید. یعنی اگر پاسخ بلی باشد پاسخ گو رنگ کارت دسته راست و اگر پاسخ خیر باشد پاسخ گو رنگ کارت دسته سمت چپ را می گوید در این حالت داریم

$$c = \frac{۱}{۵}, d = \frac{۳}{۵}$$

با کمی دقت متوجه می شویم که اگر در طرح وارنر p را $\frac{۸}{۱۰}$ اختیار کنیم نتایج فوق حاصل می شود.

۴. مدل خطی تعمیم یافته (GLM)

یک مدل خطی تعمیم یافته (GLM) با یک مولفه تصادفی، یک مولفه سیستمایک و یک تابع پیوند توصیف می شود.
۱. مولفه تصادفی: متغیر پاسخ Y و توزیع احتمال آن را مشخص نمایید.
۲. مولفه سیستماتیک: متغیرهای توضیحی مورد استفاده در یک تابع خطی پیشگو را تعیین می کند.
۳. تابع پیوند: تابعی است از میانگین پاسخ، E(Y) ، که ارتباط بین مولفه های تصادفی و سیستماتیک را بیان می کند.
در اینجا دو مدل خطی تعمیم یافته برای داده های دودوئی شرح می دهیم:
۴-۱ مدل احتمال خطی
مدل خطی با یک متغیر کمکی xاینگونه بیان می شود:

$$\pi(x) = \alpha + \beta x$$

در اینجا $\pi(x)$لزوماً احتمال نیست. در این GLM مؤلفه تصادفی دارای توزیع دو جمله ای و تابع پیوند از نوع همانی است. از ایرادهای مدل فوق این است که برای بعضی از متغیرها $\pi(x) < ۱, x$یا $\pi(x) > ۱$ به ازاء هر واحد افزایش x در $\pi(x)$تغییر ایجاد می کند. البته مزیت این مدل سهولت تفسیر آن است.

[۶] Kuk

۲-۴مدل رگرسیون لوجستیک

در این مدل یک رابطه غیر خطی بین $\pi(x)$ و xوجود دارد که معمولاً یک رابطه یکنوای S شکل ایجاد می شود و فرم کلی این مدل به شرح زیر است:

$$\pi(x) = \frac{e^{\alpha+\beta x}}{۱ + e^{\alpha+\beta x}}$$

وقتی که $\beta < ۰$، اگر $x \to \infty$ آنگاه $\pi(x) \to ۰$
وقتی که $\beta > ۰$، اگر $x \to \infty$ آنگاه $\pi(x) \to ۱$
نسبت بختی (OR) برابر است با:

$$OR = \frac{\pi(x)}{۱ - \pi(x)} = e^{\alpha+\beta x}$$

زیرا با جایگذاری بجای $\pi(x)$، داریم:

$$OR = \frac{\frac{e^{\alpha+\beta x}}{۱+e^{\alpha+\beta x}}}{۱ - \frac{e^{\alpha+\beta x}}{۱+e^{\alpha+\beta x}}} = \frac{\frac{e^{\alpha+\beta x}}{۱+e^{\alpha+\beta x}}}{\frac{۱}{۱+e^{\alpha+\beta x}}} = e^{\alpha+\beta x}$$

از اینرو اگر از رابطه فوق لگاریتم بگیریم رابطه خطی زیر بدست می آید.

$$\log it\,(\pi\,(x)) = \ln\,(OR) = \ln\left[\frac{\pi(x)}{۱ - \pi(x)}\right] = \alpha + \beta x$$

این عمل تبدیل لوجیت نامیده می شود. مدل رگرسیون لوجستیک با مؤلفه های تصادی و پیوند لوجیت GLM هستند که گاهی اوقات به آنها مدل های لوجیت هم گفته می شود.
تفسیری از β برای مدل لوجیت وقتی که xدودوئی است به شرح زیر می باشد:
اگر $x = ۰$باشد، آنگاه

$$Logit(\pi(۰) = \alpha$$

و در $x = ۱$داریم:

$$Logit(\pi(۱) = \alpha + \beta$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\beta = Logit\,(\pi\,(۱)) - a = Log\,(\pi\,(۱)) - Logit\,(\pi\,(۰))$$

$$\beta = \ln\left[\frac{\pi(۱)}{۱ - \pi(۱)}\right] - \ln\left[\frac{\pi(۰)}{۱ - \pi(۰)}\right] = \ln\left[\frac{\frac{\pi(۱)}{۱-\pi(۱)}}{\frac{\pi(۰)}{۱-\pi(۰)}}\right]$$

۵. مدل رگرسیون لوجستیک تک متغیره دودویی RR پیشنهادی (مدل خطی تعمیم یافته پیشنهادی)

تشخیص الگوها و طبقه‌بندی یکی از مهمترین کاربردهای روشهای آماری در علوم مختلف است. از جمله اهداف عمده مدل سازی در علوم آمار، پیشبینی بر اساس شواهد، متغیرها و داده های موجود از یک موضوع خاص است. این امر در علوم آماری توسط روشهایی مانند، رگرسیون، سریهای زمانی، و سایر روشها انجام میشود. در نظر گرفتن یک توزیع پیش فرض مانند توزیع نرمال برای متغیرهای پاسخ، خطی بودن رابطه پیشنهادی، یکسان بودن واریانس خطاها،... از جمله محدودیتهای بعضی روشهای کالسیک هستند که هنگام استفاده علمی از این روشها، اگر داده ـهای واقعی شرایط مفروض مدل را نداشته باشند امکانپذیر نبوده یا با خطای قابل توجه همراه است [۲۶]
در بین این روشها رگرسیون لجستیک فرضیات زیادی را لازم ندارد و از جمله روشهای آماری چند متغیره ای است که میتواند برای ارزیابی ارتباط بین متغیرهای مستقل و متغیر وابسته د ر مدل مورد استفاده قرار گیرد رگرسیون لجستیک زمانی مورد استفاده قرار میگیرد که متغیر وابسته به صورت دوتایی، اسمی یا ترتیبی باشد و برای متغیرهای مستقل هیچ محدودیتی وجود ندارد .
فرض کنید Y نشان دهنده متغیر پاسخ دودوئی در یک مدل با متغیر کمکی xباشد. احتمالات زیر را داریم:

$$P(Y = ۱) = \pi(x), P(Y = ۰) = ۱ - \pi(x)$$

بنابراین

$$E(Y) = \pi(x), \text{var}(Y) = \pi(x)(۱ - \pi(x))$$

یادآور می شود که Y یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $P(Y = ۱) = \pi(x)$می باشد.
با توجه به تعریف مؤلفه تصادفی، متغیر پاسخ دودوئی Y با مقادیر {۱و۰} یک آزمون برنولی است. در رگرسیون لوجستیک RR ، Y^* یا نسخه طبقه بندی نادرست Y نیز یک آزمون برنولی است.
بنابراین

$$Y^* \sim Bernoulli(c + dP\,(Y = ۱))$$

۱.۵ . مؤلفه سیستماتیک
اگر داده ها به صورت $(x_i, y_i)\,, i\epsilon\,\{۱, \dots n\}$داده شوند. مؤلفه سیستماتیک رگرسیون لوجستیک استاندارد عبارتست از:

$$\mu_i = E\,[Y_i|x_i] = ۰ \times P\,(Y_i = ۱|x_i) + ۱ \times P\,(Y_i = ۱|x_i) = P\,(Y_i = ۱|x_i)$$
$$= \frac{\exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + \exp\left(\beta^t x_i\right)}$$

با استفاده از این رابطه می توان نوشت :

$$g\,(\mu_i) = \ln\left[\frac{\mu_i}{۱ - \mu_i}\right] = \beta^t x_i$$

که در آن β بردار پارامتری است و تابع پیوند g یک تابع یکنوا و مشتق پذیر روی (۱و۰) است.
در مدل رگرسیون لوجستیک RR داریم.

$$\mu^*{}_i = E\left[Y_i^*|x_i\right] = c + dP\,(Y_i = ۱|x_i) = c + d\frac{\exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + \exp\left(\beta^t x_i\right)} \qquad (۲)$$

بنابـراین g^* یا به عبارت دیگر تابع پیوند مدل رگرسیون لوجستیک RR برابر است با

$$g^*\left(\mu_i^*\right) = \ln\left[\frac{\mu_i^* - c}{c + d - \mu_i^*}\right] = \beta^t x_i$$

تابع g^*یک تابع مشتق پذیر و یکنوا روی (۱و۰) است.
از اینرو

$$۰ < c < \mu_i^* = c + d \times P\,(Y_i = ۱|x_i) < c + d$$

چونکه $۰ < P\,(Y_i = ۱|x_i) < ۱$

$$۰ < \mu_i^* < c + d = P\,(Y^* = ۱|Y = ۱) < ۱$$

بنابر این

$$۰ < \mu_i^* < ۱$$

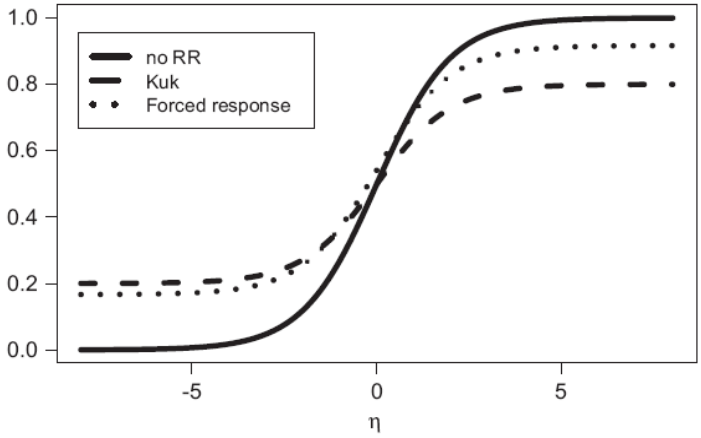
توجه: معکوس g^* در رابطه (۲) داده شده است.
شکل (۲) این معکوس را برای GLM استاندارد به ازاء $c = ۰, d = ۱$ نشان میدهد، که در آن برای GLM با طرح کاک $d = \frac{۳}{۵}$و $c = \frac{۱}{۵}$ است و برای GLM با طرح پاسخ تحمیلی داریم

$$d = \frac{۳}{۵}, c = \frac{۱}{۵}$$

با معلوم بودن $\mu^*\epsilon\,(c, c + d)$ و dو c اگر رده بندی نادرست وجود نداشته باشد خواهیم داشت :

$$(c, c + d) \equiv (۰, ۱)$$

شکل (۲) همچنین نشان می دهد که طرح پاسخ تحمیلی، مقادیر $\eta = \beta^t x$ را از مقادیر طرح کوك با $d = \frac{۳}{۵}$و $c = \frac{۱}{۵}$ بهتر متمایز می کند .



شکل ۲: شکل ۲ : معکوس تابع پیوند(نمودار $(\mu_i^* = g^{*^{-1}}(\beta^t x_i) = g^{*^{-1}}(\eta)$

۲.۵ . *برآورد درستنمایی ماکزیمم*

برای برآورد بردار پارامتر β در مدل رگرسیون لوجستیك RR تابع درستنمایی ماکزیمم بصورت زیر محاسبه می شود.

$$L\left(\beta|\left(x_i, Y_i^*\right), i\epsilon\{۱,\dots,n\}, c, d\right)$$
$$= \prod_{i=۱}^{n} P\left(Y_i^* = ۱|x_i\right)^{y_i^*}\left[۱ - P\left(Y_i^* = ۱|x_i\right)\right]^{۱-y_i^*}$$
$$= \prod_{\substack{i=۱\\ y_i^*=۰}}^{n}\left[۱ - P\left(Y_i^* = ۱|x_i\right)\right]\prod_{\substack{i=۱\\ y_i^*=۱}}^{n} P\left(Y_i^* = ۱|x_i\right)$$
$$= \prod_{\substack{i=۱\\ y_i^*=۰}}^{n}\left[۱ - \left(c + \frac{d \times exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + exp\left(\beta^t x_i\right)}\right)\right]\prod_{\substack{i=۱\\ y_i^*=۱}}^{n}\left[c + \frac{d \times exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + exp\left(\beta^t x_i\right)}\right]$$

تابع درستنمایی را می توان بوسیله روشهای عددی مانند روش نیوتون–رفسون ماکزیمم سازی کرد .

کاربرد

در مهرماه ۱۳۸۰ آقای دکتر نجف زارع ودکتر پریسا دستوری مطالعه ای را تحت عنوان تخمین نسبت سقط جنین عمدی در خانمهای ۴۹-۱۵ ساله با استفاده از روش پاسخ تصادفی انجام دادند.روش پاسخ تصادفی به کار رفته در تحقیق فوق منطبق با طرح اولیه وارنر به ازای $p = ۰/۶۳۶۳$ است.حجم نمونه مورد نیاز تحقیق $n = ۵۵۰$ نفر وجمعیت مورد مطالعه :خانمهای متاهل ۴۹-۱۵ ساله مراجعه کننده به درمانگاه های شهید فقیهی وشهید مطهری شیراز به صورت بیمار یا همراه بیمار بودند.طبق تحقیق ایشان احتمال اینکه خانمی در طول مدت زندگی زناشویی خود ، اقدام به سقط جنین عمدی کرده باشد،معادل ۰/۰۲۸۶ برآورد شد این برآورد نااریب است.

به عبارت دیگر

$$P\left(Y = ۱\right) = /۰۲۸۶$$

طبق طرح اولیه وارنر :

$$P\left(Y^* = ۱\right) = c + dP\left(Y = ۱\right)$$
$$C = ۱ - p, d = ۲p - ۱$$

بنابر این

$$P\left(Y^* = ۱\right) = ۰/۳۶۳۷ + ۰/۲۷۲۶ \times ۰/۰۲۸۶ = ۰/۳۷۱۴$$

یعنی احتمال اینکه خانمی که سقط جنین عمدی کرده باشد پاسخ بلی دهد برابر۳۷/۱۴ درصد است. به عبارت دیگر

$$Y^* \sim Bernoulli(p = ۰/۳۷۱۴)$$

و

$$\mu_i^* = ۰/۳۶۳۷ + ۰/۲۷۲۶\frac{\exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + \exp\left(\beta^t x_i\right)}$$

تابع درست نمایی ماکزیمم به فرم زیر ارائه می شود.

$$L\left(\beta|\left(x_i, Y_i^*\right), i\epsilon\{۱, \dots, n\}, ۰/۳۶۳۷, ۰/۲۷۲۶\right)$$
$$= \prod^{n}_{\substack{i=۱ \\ y_i^*=۰}} \left[۱ - \left(./۳۶۳۷ + \frac{۰/۲۷۲۶ \times exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + exp\left(\beta^t x_i\right)}\right)\right] \prod^{n}_{\substack{i=۱ \\ y_i^*=۱}} \left[۰/۳۶۳۷ + \frac{۰/۲۷۲۶ \times exp\left(\beta^t x_i\right)}{۱ + exp\left(\beta^t x_i\right)}\right]$$

تابع فوق را می توان بوسیله روش های عددی،مانند روش نیوتون – رفسون ماکزیمم سازی کرد.

۶. نتیجه گیری

این مطالعه مدل برآورد رگرسیون لوجستیک یک متغیره را معرفی می کند که درآن متغیر پاسخ وابسته به پاسخ تصادفی RR است .
این چارچوب کاملا کلی است از این لحاظ که مدل می تواند با طرح های مختلف RR کارکند و مدل رگرسیون RR دارای همان انعطاف پذیری مدل های رگرسیون استاندارد است.
یک فرضیه مهم در این نوشته این است که پاسخ دهندگان از دستورات طرح RR پیروی می کنند.این فرضیه همیشه توجیه پذیر نیست، به عنوان مثال ممکن است بعضی از پاسخ دهندگان به حفاظت محرمانگی ارائه شده توسط طرح RR اعتماد نکنند ویک پاسخ عامه پسند ارائه دهند .با وجود این، ایده کلی این است که RR نسبتاً خوب عمل می کند.

مراجع

[۱] زارع، نجف.دستوری،پریسا.تخمین نسبت سقط جنین عمدی در خانمهای ۴۹-۱۵ ساله با استفاده از روش پاسخ تصادفی.مجله پزشکی دانشگاه علوم پزشکی و خدمات بهداشتی درمانی تبریز.سال بیست و ششم، شماره ۱(پیاپی ۶۱)، بهار ۱۳۸۳،ص ۳۶.

[2] Yu JW, Tian GL, Tang ML. Two new models for survey sampling with sensitive characteristic: design and analysis. Metrika 2008; 67: 251-63.

[3] Tian GL, Yuen KC, Tang ML, Tan MT. Bayesian nonrandomized response models for surveys with sensitive questions. Statistics and Its Interface 2009; 2: 13 -25.

[4] Tourangeau R, Yan T. Sensitive questions in surveys. Psychological bulletin 2007; 133: 859-83.

[5] Warner SL. Randomized-response: A survey technique for eliminating evasive answer bias. Journal of the American Statistical Association 1965; 60: 63-9.

[6] Houston J, Tran A. A Survey of Tax Evasion Using the Randomized Response. Advances in Taxation 2001;13: 69-94..

[7] Horvitz DG, Shah BV, Simmons WR. The unrelated question randomized response model, In: proceedings of the Social Statistics Section. American Statistical Association 1967;72 65–.

[8] Lensvelt-Mulders GJLM, Hox JJ, Van Der Heijden PGM. How to Improve the Efficiency of Randomised Response Designs. Quality and Quantity 2005; 39: 253-65.

[9] Greenberg BG, Abul-Ela AA, Simmons WR, Horvitz DG. The unrelated question randomized response model: theoretical framework. Journal of the American Statistical Association 1969.; 64: 520–39

[10] Boruch RF. Assuring confidentiality of responses in social research: A note on strategies. The American Sociologist 1971; 6: 308–11.

[11] Moors JJA. Optimization of the unrelated questionrandomised response model. Journal of the American Statistical Association 1971; 66: 627–9.

[12] Mangat NS. An improved randomised response strategy. Journal of the Royal Statistic society of Britain 1994; 56: 93–5.

[13] Cruyff MJLF, Van Den Hout A, Van Der Heijden PGM, Böckenholt U. Log-linear randomized-response models taking self-protective response behavior into account. Sociological Methods and Research 2007; 36: 266-82.

[14] Lensvelt-Mulders GJLM, Boeije HR. Evaluating compliance with a computer assisted randomized response technique: a qualitative study into the origins of lying and cheating. Computers in Human Behavior 2007; 23: 591-608.

[15] Jann B, Jerke J, Krumpal I. Asking Sensitive Questions Using the Crosswise Model: An Experimental Survey Measuring Plagiarism. Public Opinion Quarterly 2012; 76: 32-49..

[16] Lensvelt, G.J.; Hox, J.J.; Van der Heijden, P.G.M. and Maas, C.J.M. (2005). Meta-analysis of randomized response research: thirty-five years of validation. Sociological Methods Research 33, 319-348.

[17] Greenberg, B.G.; Abul-Ela, A.L.A.; Simmons, W.R. and Horvitz, D.G. (1969). The unrelated question RR model: theoretical framework, Journal of the American Statistical Association 64, 520–539.

[18] Yu, J.W.; Tian, G.L. and Tang, M.L. (2008). Two new models for survey sampling with sensitive characteristic: design and analysis. Metrika 67, 251–263.
[19] Warner, S.L. (1965). Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias. Journal of the American Statistical Association 60, 63–69.
[20] Banayejeddi M. Prevalence estimation of “Iron tablets intake” and “Nutrition Education” in the weekly Iron supplementation programs conducted by the Ministry of Health, using crosswise method and its comparison with direct method in Chalderan high school girl students in 90-91[dissertation]. Tehran (Iran): Tehran University of MedicalSciences; 2013.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–127، صص. ۷۳–۸۱

تحلیل داده‌های همبسته با روش گشتاورهای تعمیم‌یافته بیزی

بهرام حاجی جودکی[آ]، جواد اطمینان[ب]

[آ] دانشجوی دکتری دانشگاه رازی کرمانشاه
[ب] هیئت علمی گروه آمار دانشگاه بیرجند

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
استنباط بیزی
داده‌های همبسته
رگرسیون خطی
روش گشتاورهای تعمیم‌یافته
روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکف

2020 MSC:
62C10
62J05

چکیده

ین (۲۰۰۹) روش گشتاورهای تعمیم‌یافته بیزی را برای وضعیت‌های پیشنهاد می‌کند که تابع درستنمایی وجود ندارد، اما در مقابل دستیابی به شرط‌های گشتاوری نسبتاً آسان است. ین پیشنهاد می‌کند با بدست آوردن گشتاورها و الحاق نمودن آنها با همدیگر، تابع هدفی درجه دو وزنی در چارچوب روش گشتاورهای تعمیم‌یافته بسازیم و به منظور بکارگیری آن به عنوان تابع درستنمایی معمولی، منهای تابع درجه دوم گشتاورهای تعمیم‌یافته که تقسیم بر دو شده است را به توان e برسانیم. پس از تقریب تابع درستنمایی و تعیین توزیع پیشین پارامترها آنگاه برای نمونه‌گیری از توزیع‌های پسین از روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکف استفاده کنیم. آفراد مختلفی روش ین را نقد و بررسی کرده و ایراداتی نیز به این روش وارد کرده‌اند. در این مقاله به منظور رفع این ایرادات، اصلاحاتی را برای روش ین (۲۰۰۹) ارائه می‌دهیم و برای بررسی عملکرد روش اصلاح شده ین، یک مطالعه شبیه‌سازی در مدل رگرسیون خطی با خطاهای همبسته طراحی می‌کنیم.

۱. مقدمه

در مطالعه‌های طولی متغیر یا متغیرهای مورد بررسی در طول زمان چندین بار اندازه‌گیری می‌شوند و مجموعه‌ای از پاسخ‌های مربوط به هر نمونه خوشه‌ای از نتایج را تشکیل می‌دهد. در این مطالعه‌ها گرچه فرض می‌شود افراد نمونه مستقل هستند، ولی با توجه به این‌که داده‌های مربوطه از اندازه‌گیری‌های متوالی در طول زمان بدست می‌آیند، همبستگی‌هایی‌در بین داده‌های مربوط به هر فرد ایجاد می‌شود که نوعاً بدست آوردن تابع درستنمایی برای چنین داده‌هایی به دلیل ناشناخته بودن ساختار همبستگی مورد مطالعه مشکل است، در چنین وضعیت‌های می‌توان مدل اثرات تصادفی را در نظر گرفت هرچند که برآوردهای پسین بیزی ممکن است نسبت به توزیع پارامتری اثرات تصادفی حساس باشند. معادله برآورد تعمیم‌یافته (GEE)[1] حتی با وجود نامشخص بودن ماتریس همبستگی برآوردگرهای را تولید می‌کند که به طور مجانبی نرمال و سازگار هستند و اگر ساختار همبستگی دقیقاً مشخص شده باشد آنگاه برآوردگرهای GEE در خانواده توابع برآوردگرهای خطی کارا نیز می‌باشند.

هنسن (۱۹۸۲) برای وضعیت‌های که فرمول‌بندی تابع درستنمایی مشکل اما در عوض دستیابی به شرط‌های گشتاوری نسبتاً آسان است، روش گشتاورهای تعمیم‌یافته (GMM)[2] را پیشنهاد داد و ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای تولید شده با استفاده از این روش را بررسی کرد. پیشرفت‌های به وجود آمده در تکنولوژی محاسبات باعث افزایش بکارگیری روش‌های شبیه‌سازی برای برآورد پارامترها بر پایه شرط‌های گشتاوری جامعه شده است.

پست الکترونیک: Bahram600631@gmail.com (بهرام حاجی جودکی)

[1] Generalized Estimating Equation
[2] Generalized Method of Moment

در استنباط بیزی با فرض این که $L(y|\beta)$ تابع درستنمایی و $\pi(\beta)$ پیشین پارامتر β باشد آنگاه توزیع پسین پارامتر β به صورت

$$\pi(\beta|y) \propto \pi(\beta) L(y|\beta) \quad (۱)$$

است، حال اگر اطلاع کافی درباره تابع درستنمایی وجود نداشته باشد آنگاه دستیابی به استنباط‌های بیزی چالش برانگیز است. زلنر[۳](۱۹۹۷)، کیم[۴](۲۰۰۲) و چرنوزیوکوف و هانگ[۵] (۲۰۰۳) مسئله دستیابی به استنباط‌های بیزی را برای وضعیت‌های بحث کردند که در آن تابع درستنمایی وجود ندارد ولی در عوض یک سری اطلاعات محدود در مورد توزیع جامعه وجود دارد.

برای بیشتر داده‌های طولی یا خوشه‌ای بدون دانستن ساختار همبستگی تحت مطالعه نوعاً بدست آوردن تابع درستنمایی مشکل است. با توجه به اینکه گشتاورهای نمونه‌ای نوعاً به توزیع نرمال همگرا هستند، بر این اساس ین (۲۰۰۹) به دنبال جایگزینی مجانبی برای تابع درستنمایی منهای تابع درجه دوم GMM را که بر دو تقسیم شده به توان e رساند و با این تابع درستنمایی مجانبی تحلیل بیزی را انجام داد. البته اگر اطلاع خاصی درباره ساختار همبستگی موجود باشد می‌توانیم شرط‌های اضافی را نیز در تابع درجه دو GMM الحاق کرده تا کارایی برآورد را بهبود بخشیم و آنگاه با استفاده از الگوریتم‌های مونت کارلوی زنجیر مارکف (MCMC)[۶] به آسانی می‌توانیم برآوردهای پسین را بدست آوریم.

۲. روش گشتاورهای تعمیم‌یافته در مدل با داده‌های همبسته

فرض کنید $y_1, \dots, y_n$ بردارهای مستقل از متغیرهای پاسخ با میانگین‌های به ترتیب $\mu_1, \dots, \mu_n$ باشند که $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ik_i})$ متناظر با خوشه iام با اندازه K_i، $i = 1, \dots, n$ است. همچنین فرض می‌شود که $\mu_i = E(y_i|Z_i)$ و واریانس y_i به صورت $V_i = \phi h(\mu_i)$ باشند که $h(.)$ تابع واریانس و ϕ پارامتر مقیاس است. μ_{ik} از طریق رابطه زیر با بردارهای کمکی Z_{ik} مرتبط است،

$$\eta(\mu_{ik}) = \beta^T Z_{ik}, k = 1, \dots, K_i, i = 1, \dots, n$$

که T نشان دهنده ترانهاده یک ماتریس (بردار) است. فرض کنید A_i ماتریس قطری که عناصر آن واریانس حاشیه‌ای مولفه‌های y_i، R_i ماتریس همبستگی واقعی و C_i نیز ماتریس همبستگی تجربی است که در صورت نداشتن R_i از آن استفاده می‌شود. معادله برآورد تعمیم‌یافته عبارت است از،

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^T V_i^{-1}(y_i - \mu_i) = 0 \quad (۲)$$

که $V_i = A_i^{\frac{1}{2}}(C_i) A_i^{\frac{1}{2}}$ ماتریس واریانس ـ کواریانس تجربی بردار y_i، $A_i^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\left(h^{\frac{1}{2}}(\mu_i)\right)$ و $D_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta}$ و برآوردگر تعمیم‌یافته پارامتر β از حل معادله (۲) بدست می‌آید. لیانگ و زگر [۷](۱۹۸۶) نشان دادند اگر خودهمبستگی بین مشاهده‌های درون خوشه‌ها خیلی بزرگ نباشد، آنگاه برآوردگر بدست آمده بر اساس فرض مستقل بودن مشاهده‌ها، سازگار و کارا است، اما اگر خودهمبستگی‌ها بزرگ باشند آنگاه برآوردگر بدست آمده اگر چه هنوز سازگار است ولی ممکن است کارا نباشد، زیرا از اطلاعات همبستگی به طور کامل چشم پوشی شده‌است. یک روش طبیعی برای افزایش کارایی برآوردگر در نظر گرفتن ماتریسی وزنی برای لحاظ کردن همبستگی داخل خوشه‌ای است. ماتریس همبستگی واقعی R اغلب ساختار پیچیده‌ای دارد و نوعاً در کاربردهای واقعی نامعلوم است. بنابراین به عوض برآورد مستقیم R، کوا و همکارانش (۲۰۰۰) روش GMM را برای مدل رگرسیون حاشیه‌ای پیشنهاد کردند. با پیروی از همان راهکار می‌توانیم معکوس R را به طور خطی به صورت زیر بسط دهیم،

$$R^{-1}(\alpha) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j C_j \quad (۳)$$

که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_J)$ برداری از ثابت‌های نامعلوم و $C_J, \dots, C_1$ مجموعه‌ای از ماتریس‌های پایه‌ای معلوم هستند. برای مثال اگر اندازه خوشه $K = 4$ باشد آنگاه C_j می‌تواند ماتریس همانی I یا ماتریسی به یکی از فرم‌های زیر باشد،

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

[3] Zellner
[4] Kim
[5] Chernozhukov and Hong
[6] Markov Chain Monte Carlo
[7] Liang and Zeger

با در نظر گرفتن رابطه (۴) معادله برآورد تعمیم‌یافته به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^T A_i^{-\frac{1}{2}} \{\alpha_1 C(1) + ... + \alpha_J C(J)\} A_i^{-\frac{1}{2}} (y_i - \mu_i) = 0 \qquad (۴)$$

علیرغم پیچیده‌گی ماتریس همبستگی می‌توان وارون $R^{-1}(\alpha)$آن را به صورت ترکیب خطی از برخی ماتریس‌های پایه‌ای متداول ارائه داد. برای مثال اگر $R(\alpha)$ ماتریسی تعویض پذیر باشد آنگاه،

$$R^{-1}(\alpha) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$$

که در آن $C_1 = I$ و C_2 ماتریسی با درایه‌های قطری صفر و درایه‌های خارج قطری یک است. از طرفی اگر ماتریس همبستگی اتورگرسیو مرتبه اول،R_1A ، باشد، برای هر i و j رابطه $R_{ij} = \rho^{|i-j|}$ برقرار است. در این حالت داریم،

$$R^{-1}(\alpha) = \alpha_1 C(1) + \alpha_2 C(2) + \alpha_3 C \qquad (۵)$$

که در آن $C_1 = I$ ، C_2 ماتریسی است که دو تا از درایه‌های خارج قطری آن یک و بقیه درایه‌های آن صفر هستند و C_3 ماتریسی است که اولین و k امین درایه قطری آن یک و بقیه درایه‌های آن صفر هستند. ضریب α_j نقش وزنی دارد که هر C_j با توجه به اهمیت و سهمی که در ساختار همبستگی واقعی دارد برای آن در نظر گرفته می‌شود. متناظر با هر C_j شرط‌های گشتاوری تفکیک می‌شود. در این صورت برای $J > 1$، تعداد معادله‌های برآورد $J \times p$، از تعداد پارامترهای نامعلوم p بیشتر است و لذا می‌توان از روش گشتاورهای تعمیم یافته استفاده کرد که در آن p بُعد بردار β است. با الحاق کردن J شرط گشتاوری، شرط گشتاوری جامعه به صورت

$$E[U_i(\beta)] = E\begin{pmatrix} D_i^T A_i^{-\frac{1}{2}} C(1) A_i^{-\frac{1}{2}} (y_i - \mu_i) \\ \vdots \\ D_i^T A_i^{-\frac{1}{2}} C(J) A_i^{-\frac{1}{2}} (y_i - \mu_i) \end{pmatrix} = 0$$

و در نتیجه شرط گشتاور نمونه‌ای متناظر با آن که برداری به طول $J \times p$ است عبارت است از ،

$$U_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i(\beta) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} D_i^T A_i^{-\frac{1}{2}} C(1) A_i^{-\frac{1}{2}} (y_i - \mu_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} D_i^T A_i^{-\frac{1}{2}} C(J) A_i^{-\frac{1}{2}} (y_i - \mu_i) \end{pmatrix} \qquad (۶)$$

اکنون با مینیمم کردن تابع هدف درجه دوم،

$$Q_n(\beta) = U_n^T(\beta)\, \sigma_n^{-1}(\beta)\, U_n(\beta) \qquad (۷)$$

برآوردGMM پارامتر β بدست می‌آید که در آن $\sum_n(\beta)$ ماتریس واریانس ـ کواریانس تجربی بردار $U_n(\beta)$ به صورت

$$\Sigma_n(\beta) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} U_i(\beta)\, U_i^T(\beta) - \frac{1}{n} U_n(\beta)\, U_n^T(\beta) \qquad (۸)$$

است. توجه کنید چنانچه مولفه‌های از بردار $U_n(\beta)$ مضربی از هم باشند چون اطلاع یکسانی را انتقال می‌دهند لذا تنها یکی از آنها در نظر گرفته می‌شود. ین (۲۰۰۹) پیشنهاد می‌کند که تابع درستنمایی را به صورت زیر تقریب بزنیم،

$$\hat{L}(y|\beta) \propto exp\left\{-\frac{1}{2} Q_n(\beta) = -\frac{1}{2}[U_n(\beta)]^T \left[\sum_n(\beta)\right]^{-1} U_n(\beta)\right\} \qquad (۷)$$

و با استفاده از این تابع درستنمایی استنباط(بیزی) را انجام دهیم. انتقاداتی به روش ین (۲۰۰۹) وارد شده‌است که در ادامه ضمن ارائه این انتقادات اصلاحاتی را برای روش ین ارائه می‌دهیم. اول اینکه در روش ین(۲۰۰۹) ضرایب α_j در برآورد نادیده گرفته می‌شوند، دومین ایرادی که به روش ین وارد شده این است که هم معرفی $\sum_n(\beta)$ به دلیل پیچیده بودن این ماتریس و هم معرفی تابع درستنمایی فوق به نرم‌افزارهای آماری مشکل یا غیر ممکن است. بنابراین اصلاحاتی که برای روش ین پیشنهاد می‌کنیم به ترتیب به این صورت است که ضرایب α_j را در بردار $U_n(\beta)$ و در نتیجه در $Q_n(\beta)$ لحاظ می‌کنیم، بجای $\sum_n(\beta)$، ماتریس واریانس ـ کواریانس بردار $U_n(\beta)$ را در نظر می‌گیریم و بجای اینکه تابع درستنمایی را متناسب با یک نرمال چند متغیره بگیریم آن را دقیقاً یک نرمال چند متغیره به صورت $U_n(\beta) \sim N(0, Cov(U_n(\beta)))$ در نظر می‌گیریم.

۳. شبیه‌سازی‌ها

در بخش دوم چارچوب روش گشتاورهای تعمیم‌یافته را در تحلیل داده‌های همبسته ارائه کردیم. در این بخش هدف این است که نتایج مطالعه‌های شبیه‌سازی را در مدل رگرسیون خطی با خطاهای همبسته ارائه دهیم. در ادامه روش‌های درستنمایی بیزی، GMM و GMM بیزی را برای برآورد پارامترهای این مدل به کار برده و نتایج بدست آمده با استفاده از این سه روش را تحت دو مقدار ۰/۲۵ و ۰/۵ برای ρ با هم مقایسه می‌کنیم. مدل رگرسیون خطی با خطاهای همبسته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$Y_{ik} = \beta_0 + \beta_1 Z_{1ik} + \beta_2 Z_{2ik} + \varepsilon_{ik}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, K \qquad (۸)$$

فرض کنید که $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{iK})^T$ دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس ـ کواریانس $\sigma^2 R$ است که ماتریس همبستگی به فرم $R = (1-\rho) I + \rho 11^T$ است. β_0، β_1 و β_2 ضرایب رگرسیونی مدل و Z_1 و Z_2 که متغیرهای کمکی هستند فرض می‌شود به ترتیب از توزیع نرمال استاندارد و توزیع برنولی با پارامتر ۰/۵ تولید می‌شوند. همچنین ρ ضریب همبستگی مشترک مولفه‌های ε_i، σ^2 واریانس کناری مولفه‌های ε_i، I ماتریس همانی و ۱ برداری k بعدی با عناصر یک است. با توجه به رابطه (۸) داریم،

$$\varepsilon_i \sim N_K(0, \sigma^2 R) \Rightarrow y_i \sim N_K(\mu_i, \sigma^2 R), \mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{in})^T$$

که $\mu_{ik} = \beta_0 + \beta_1 Z_{1ik} + \beta_2 Z_{2ik}$. فرض کنید مقادیر واقعی پارامترهای مدل به صورت $\beta_0 = 0/2$ ، $\beta_1 = 0/5$، $\beta_2 = -0/5$، $\sigma = 1$ و همچنین برای ρ دو مقدار ۰/۲۵ و ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. توزیع پیشین پارامترها نیز به صورت زیر است که در آن $a = 100$ و تعداد خوشه‌ها $K = 100$ در نظر گرفته می‌شود،

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \sim N_3(0, a^2 I), \tau = \frac{1}{\sigma^2} \sim Gamma(0/0001, 0/0001)$$

۳.۱ . روش درستنمایی بیزی

در این روش با فرض داشتن تابع درستنمایی واقعی دو حالت را در نظر می‌گیریم، در حالت اول برای ρ و σ^2 توزیع پیشینی در نظر نگرفته و به این پارامترها به عنوان کمیت‌های ثابت نگاه می‌کنیم و از این حالت به عنوان درستنمایی بیزی با ρ و σ^2 ثابت یاد می‌کنیم. با توجه به رابطه

$$y_i | \beta, \sigma^2 \sim N_4(Z_i \beta, \sigma^2 R), i = 1, 2, .., n \qquad (۹)$$

تابع درستنمایی عبارت است از،

$$L(y|\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{2n} |\sigma^2 R|^{\frac{n}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (y_i - Z_i\beta)^T (\sigma^2 R)^{-1} (y_i - Z_i\beta)\right\}$$

و در نتیجه با توجه به توزیع پیشین $\beta \sim N_3(0, a^2 I)$ و رابطه (۱) توزیع پسین توام پارامتر β عبارت است از،

$$\pi(\beta|y) \propto exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (y_i - Z_i\beta)^T (\sigma^2 R)^{-1} (y_i - Z_i\beta) - \frac{1}{2}\beta^T (a^2 I)^{-1} \beta\right\}$$

با بازنویسی این رابطه بر حسب β داریم،

$$\pi(\beta|y) \propto exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^T \left((a^2 I)^{-1} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^T (\sigma^2 R)^{-1} Z_i\right)\beta + \sum_{i=1}^{n} Z_i^T (\sigma^2 R)^{-1} y_i \sigma\sigma^{-1}\beta\right\}$$

که هسته یک توزیع نرمال سه متغیره با بردار میانگین و ماتریس واریانس ـ کواریانس به صورت زیر است،

$$E(\beta|y) = \sigma\sum_{i=1}^{n} y_i^T (\sigma^2 R)^{-1} Z_i, V(\beta|y) = \sigma = \left((a^2 I)^{-1} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^T (\sigma^2 R)^{-1} Z_i\right)^{-1}$$

در نتیجه توزیع پسین کناری پارامترها نرمال است و با توجه به اینکه تابع زیان مربع خطا است میانگین توزیع‌های پسینی پارامترها به عنوان برآورد بیزی انتخاب می‌شود. همچنین Z_i نیز به صورت

$$Z_i = \begin{pmatrix} ۱ & Z_{۱i۱} & Z_{۲i۱} \\ ۱ & Z_{۱i۲} & Z_{۲i۲} \\ ۱ & Z_{۱i۳} & Z_{۲i۳} \\ ۱ & Z_{۱i۴} & Z_{۲i۴} \end{pmatrix}$$

است. در حالت دوم برای ρ پیشین یکنواخت روی بازه $(-۱, ۱)$ و برای $\tau = \frac{۱}{\sigma^۲}$ توزیع پیشین گاما با پارامترهای شکل و مقیاس ۰٫۰۰۰۱ در نظر گرفته شده‌است که از این حالت به عنوان درستنمایی بیزی کامل یاد می‌کنیم، در این حالت فرم بسته‌ای برای توزیع پسین کناری پارامترهای مدل بدست نمی‌آید، بنابراین برای دستیابی به استنباط‌های بیزی باید از روش‌های شبیه‌سازی استفاده کرد. یکی از مهمترین روش‌های شبیه‌سازی نمونه‌گیری گیبز است که برای اجرای آن باید توزیع‌های شرطی کامل را محاسبه کرد که این توزیع‌ها پس از انجام محاسبات تحلیلی به صورت

$$\beta \left| \tau, \rho \sim N_۳ \left(\tau\sigma \sum_{i=۱}^{n} y_i^T R^{-۱} Z_i, \left\{ a^{-۲} I + \tau \sum_{i=۱}^{n} Z_i^T R^{-۱} Z_i \right\}^{-۱} \right) \right.$$

$$\tau \left| \beta, \rho \sim Gamma \left(\frac{n}{۲} + ۱۰^{-۴}, ۱۰^{-۴} + \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \left(y_i - Z_i\beta\right)^T R^{-۱} \left(y_i - Z_i\beta\right) \right) \right.$$

$$\rho \left| \tau, \beta \propto |R|^{-\frac{n}{۲}} exp \left\{ -\frac{\tau}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \left(y_i - Z_i\beta\right)^T \left(\alpha_۱ I + \alpha_۲ L\right) \left(y_i - Z_i\beta\right) \right\} \right.$$

بدست می‌آیند که در آن I ماتریس همانی و L ماتریسی با درایه‌های قطری صفر و درایه‌های غیر قطری یک است. همچنین $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $|R|$ (دترمینان ماتریس همبستگی) نیز به صورت

$$|R| = -۳\rho^۴ + ۸\rho^۳ - ۶\rho^۲ + ۱, \alpha_۱ = \frac{۲\rho^۲ - \rho - ۱}{-۳\rho^۳ + ۵\rho^۲ - \rho - ۱}, \alpha_۲ = \frac{\rho - \rho^۲}{-۳\rho^۳ + ۵\rho^۲ - \rho - ۱}$$

هستند. چون توزیع شرطی پارامتر ρ فرم شناخته شده‌ای ندارد بنابراین قادر به اجرای نمونه‌گیری گیبز نیستیم، در چنین شرایطی از الگوریتم MCMC دو رگه (الگوریتم متروپولیس هستینگز داخل گیبز) استفاده می‌شود که برای این منظور کافی است یک توزیع شرطی اختیاری برای پارامتر ρ در نظر گرفت.

۲.۳ . *روش گشتاورهای تعمیم‌یافته*

با توجه به معادله (۲) رابطه $u_i(\beta) = D_i^T V_i^{-۱} (y_i - \mu_i)$ را داریم که در آن μ_i بردار میانگین، $V_i = A_i^{\frac{۱}{۲}} R_i A_i^{\frac{۱}{۲}}$ ماتریس واریانس ـ کواریانس خوشه iام، A_i ماتریس قطری که عناصر آن واریانس حاشیه‌ای مولفه‌های y_i یعنی ماتریسی به فرم $A_i = \sigma^۲ I$ و R_i ماتریس همبستگی خوشه iام است. همچنین D_i عبارت است از،

$$D_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_{i۱}}{\partial \beta_۰} & \frac{\partial \mu_{i۱}}{\partial \beta_۱} & \frac{\partial \mu_{i۱}}{\partial \beta_۲} \\ \frac{\partial \mu_{i۲}}{\partial \beta_۰} & \frac{\partial \mu_{i۲}}{\partial \beta_۱} & \frac{\partial \mu_{i۲}}{\partial \beta_۲} \\ \frac{\partial \mu_{i۳}}{\partial \beta_۰} & \frac{\partial \mu_{i۳}}{\partial \beta_۱} & \frac{\partial \mu_{i۳}}{\partial \beta_۲} \\ \frac{\partial \mu_{i۴}}{\partial \beta_۰} & \frac{\partial \mu_{i۴}}{\partial \beta_۱} & \frac{\partial \mu_{i۴}}{\partial \beta_۲} \end{pmatrix}$$

که با توجه به رابطه $\mu_{ik} = \beta_۰ + \beta_۱ Z_{۱ik} + \beta_۲ Z_{۲ik}$، ماتریس D_i به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$D_i = \begin{pmatrix} ۱ & Z_{۱i۱} & Z_{۲i۱} \\ ۱ & Z_{۱i۲} & Z_{۲i۲} \\ ۱ & Z_{۱i۳} & Z_{۲i۳} \\ ۱ & Z_{۱i۴} & Z_{۲i۴} \end{pmatrix}$$

و در نتیجه $u_i(\beta)$ به صورت

$$u_i(\beta)=\begin{pmatrix}\alpha_1\sum_{k=1}^{4}(Y_{ik}-\mu_{ik})\\ \alpha_1\sum_{k=1}^{4}(Y_{ik}-\mu_{ik})Z_{1ik}\\ \alpha_1\sum_{k=1}^{4}(Y_{ik}-\mu_{ik})Z_{2ik}\\ \alpha_2\sum_{k=1}^{4}(Y_{ik}-\mu_{ik})(Z_{1i.}-Z_{1ik})\\ \alpha_2\sum_{k=1}^{4}(Y_{ik}-\mu_{ik})(Z_{2i.}-Z_{2ik})\end{pmatrix} \quad (10)$$

است و شرط گشتاور نمونه‌ای نیز با توجه به رابطه $U_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i(\beta)$ بدست می‌آید. همچنین ماتریس گرادیان یک ماتریس 3×5 به صورت $G=\begin{pmatrix}\alpha_1 G_0\\ \alpha_2 G_1\end{pmatrix}$ است که در آن ماتریس‌های G_0 و G_1 به صورت

$$G_0=-4\begin{bmatrix}1 & \overline{Z_1} & \overline{Z_2}\\ \overline{Z_1} & \overline{Z_1^2} & \overline{Z_1Z_2}\\ \overline{Z_2} & \overline{Z_1Z_2} & \overline{Z_2^2}\end{bmatrix}$$

$$G_1=\begin{bmatrix}-12\overline{Z_1} & -\frac{1}{n}\sum_i Z_{1i.}^2+4\overline{Z_1^2} & -\frac{1}{n}\sum_i Z_{1i.}Z_{2i.}+4\overline{Z_1Z_2}\\ -12\overline{Z_2} & -\frac{1}{n}\sum_i Z_{1i.}Z_{2i.}+4\overline{Z_1Z_2} & -\frac{1}{n}\sum_i Z_{2i.}^2+4\overline{Z_2^2}\end{bmatrix}$$

هستند. برای دستیابی به برآوردهای GMM پارامترها کافی است ابتدا بسته‌های zoo ،gmm و sandwich را روی نرم‌افزار R نصب کرده آنگاه با معرفی بردار $u_i(\beta)$ یعنی رابطه (۱۱) و ماتریس گرادیان بردار $U_n(\beta)$ یعنی ماتریس G به نرم‌افزار برآورد GMM پارامترها را بدست آوریم که در آن

$$\overline{Z_1}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik},\overline{Z_2}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{2\,\mathrm{ik}},\overline{Z_1^2}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}^2$$

$$\overline{Z_2^2}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{2ik}^2,\overline{Z_1Z_2}=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}Z_{2\,\mathrm{ik}},Z_{1i.}=\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik},Z_{2i.}=\sum_{k=1}^{4}Z_{2ik}$$

۳.۳ . *روش گشتاورهای تعمیم‌یافته بیزی*

در روش GMM بیزی ابتدا با توجه به رابطه (۱۱) شرط گشتاور نمونه‌ای $U_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i(\beta)$ را بدست آورده آنگاه رابطه

$$U_n(\beta)\approx N(0,S=Cov(U_n(\beta)))$$

را به فرم زیر می‌نویسیم،

$$U\sim N_5(D\beta,S),D=-G \quad (11)$$

که در آن G ماتریس گرادیان روش GMM است که قبلاً تعریف شده و بردار U نیز به صورت

$$U=\begin{pmatrix}4\alpha_1\overline{Y}\\ 4\alpha_1\overline{YZ_1}\\ 4\alpha_1\overline{YZ_2}\\ \frac{\alpha_2}{n}\sum_i\sum_k(Z_{1i.}-Z_{1\,\mathrm{ik}})Y_{\mathrm{ik}}\\ \frac{\alpha_2^2}{n}\sum_i\sum_k(Z_{2i.}-Z_{2\,\mathrm{ik}})Y_{ik}\end{pmatrix}$$

است، همچنین مولفه‌های S (ماتریس واریانس ـ کواریانس بردار $U_n(\beta)$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_{11}=\frac{4\sigma^2 r_1}{n}(1+3\rho),S_{12}=\frac{4\sigma^2 r_1}{n}\overline{Z_1}(1+3\rho),S_{13}=\frac{4\sigma^2 r_1}{n}\overline{Z_2}(1+3\rho)$$
$$S_{14}=\frac{3\sigma^2 r_{12}}{n^2}(1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.},S_{15}=\frac{3\sigma^2 r_{12}}{n^2}(1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{2i.}$$
$$S_{22}=r_1\frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}^2+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{1\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{23}=r_1\frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}Z_{2\,\mathrm{ik}}+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{24}=\frac{r_{12}\sigma^2}{n^2}\left((1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.}^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}^2-\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{1\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{25}=\frac{r_{12}\sigma^2}{n^2}\left((1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.}Z_{2i.}-(1+\rho)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{33}=\frac{\sigma^2 r_1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{2ik}^2+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{2\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{34}=\frac{\sigma^2 r_{12}}{n^2}\left((1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.}Z_{2i.}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}Z_{2\,\mathrm{ik}}-\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{2\,\mathrm{ik}}Z_{1\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{35}=\frac{\sigma^2 r_{12}}{n^2}\left((1+3\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{2i.}^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{2ik}^2-\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{2\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{44}=\frac{\sigma^2 r_2}{n^2}\left((2+6\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}^2+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{1\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{45}=\frac{r_2\sigma^2}{n^2}\left((2+6\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{1i.}Z_{2i.}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{1ik}Z_{2\,\mathrm{ik}}+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{1\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$
$$S_{55}=\frac{\sigma^2 r_2}{n^2}\left((2+6\rho)\sum_{i=1}^{n}Z_{2i.}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{4}Z_{2ik}^2+\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq m}^{4}Z_{2\,\mathrm{ik}}Z_{2\,\mathrm{im}}\right)$$

که در آن $\sigma^2=1$، $r_1=\alpha_1^2$، $r_2=\alpha_2^2$ و $r_{12}=\alpha_1\times\alpha_2$ است و با توجه به ویژگی تقارن ماتریس واریانس ـ کواریانس بقیه مولفه‌های ماتریس S مشخص می‌شوند. برای دستیابی به برآوردهای بیزی پارامترها ابتدا با توجه به رابطه (۱۲) و پیشین $\beta\sim N_3\left(0,a^2I\right)$ توزیع پسین توام پارامترها را به صورت

$$\pi(\beta|u,D,S)\propto exp\left\{-\frac{1}{2}(u-D\beta)^T S^{-1}(u-D\beta)-\frac{1}{2}\beta^T\left(a^2I\right)^{-1}\beta\right\}$$

بدست می‌آوریم که می‌توان آن را به فرم

$$\pi(\beta|u,D,S)\propto exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^T\sigma^{-1}\beta+\beta^T\sigma^{-1}\sigma D^T S^{-1}u\right\}$$

نوشت و عبارت فوق هسته توزیع نرمال سه متغیره‌ای با بردار میانگین $\sigma D^T S^{-1}u$ و ماتریس واریانس ـ کواریانس σ است به عبارتی توزیع پسین توام بردار پارامتری β نرمال سه متغیره‌ای به صورت

$$\beta\,|u,D,S\sim N_3\left(\sigma D^T S^{-1}u,\sigma\right),\sigma=\left(a^{-2}I+D^T S^{-1}D\right)^{-1}$$

است. حال با توجه به اینکه توزیع‌های پسین کناری پارامترها نرمال می‌باشند، میانگین توزیع‌های پسینی پارامترها به عنوان برآورد بیزی انتخاب می‌شود. توجه کنید در روش گشتاورهای تعمیم‌یافته بیزی با σ^2 و ρ به عنوان کمیت‌های ثابت رفتار شده و برای آنها توزیع پیشین تعریف نشده‌است.

در جدول‌های زیر نتایج مربوط به ۵۰۰ شبیه‌سازی ارائه شده‌است که در این جدول‌ها روش‌های درستنمایی بیزی با ρ و σ^2 ثابت، درستنمایی بیزی کامل، GMM بیزی ین و GMM بیزی ین اصلاح شده به ترتیب با نمادهای $BL(fix)$، BL(Full)، BGMM(adj) و BGMM(yin)

، همچنین میانگین و انحراف معیار ۵۰۰ برآورد بیزی به ترتیب با نمادهایAve و ،Esd میانگین ۵۰۰ انحراف استاندارد پسینی با Asd و درصد احتمال پوشش ۹۵ درصد را با نمادCp نشان می‌دهیم. با توجه به نتایج جدول۱ می‌بینیم که روش‌های درستنمایی بیزی $BL(fix)$ و $BL(\text{Full})$ برآوردهای بهتری را نسبت به روش GMM تولید کرده‌اند که نتیجه‌ای قابل پیش‌بینی است. بر مبنای اعداد و ارقام جدول۲ می‌بینیم نتایج تولید شده با استفاده از روش‌های GMM بیزی اصلاح شده و GMM بیزی ین (۲۰۰۹) خیلی بهم نزدیک هستند و با توجه به سهولت اجرای روش GMM بیزی اصلاح شده نسبت به روش بیزیGMM ین، لذا روش GMM بیزی اصلاح شده را به روشGMM بیزی ین ترجیح می‌دهیم.

جدول ۱: نتایج روش‌های GMM و درستنمایی بیزی

روش ین	β_0				β_1				β_2			
	Ave	Esd	Asd	Cp	Ave	Esd	Asd	Cp	Ave	Esd	Asd	Cp
$\rho = ۰/۲۵$												
GMM	۰/۱۹۲	۰/۰۸۸	۰/۰۷۹	۹۱/۸	۰/۵۰۱	۰/۰۴۸	۰/۰۴۶	۹۲/۶	−۰/۴۹۵	۰/۱۰۱	۰/۰۹۲	۹۲/۴
BL(Full)	۰/۱۹۸	۰/۰۸۰	۰/۰۸۲	۹۵/۴	۰/۴۹۸	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	۹۳/۶	−۰/۴۹۸	۰/۰۹۳	۰/۰۹۴	۹۴/۶
BL(Fix)	۰/۱۹۷	۰/۰۸۰	۰/۰۸۱	۹۳/۶	۰/۴۹۷	۰/۰۴۸	۰/۰۴۶	۹۳/۴	−۰/۴۹۷	۰/۰۹۳	۰/۰۹۴	۹۵/۴
$\rho = ۰/۵$												
GMM	۰/۱۹۸	۰/۰۹۱	۰/۰۸۶	۹۲/۸	۰/۵۰۱	۰/۰۴۰	۰/۰۳۹	۹۴/۲	−۰/۵۰۱	۰/۰۸۳	۰/۰۷۸	۹۲/۸
BL(Full)	۰/۲۰۳	۰/۰۸۹	۰/۰۹۰	۹۴/۱	۰/۵۰۲	۰/۰۴۲	۰/۰۴۰	۹۴/۱	−۰/۵۰۴	۰/۰۷۸	۰/۰۸۰	۹۵/۳
BL(Fix)	۰/۲۰۰	۰/۰۸۷	۰/۰۸۹	۹۴/۶	۰/۵۰۱	۰/۰۴۱	۰/۰۴۰	۹۲/۲	−۰/۴۹۴	۰/۰۷۹	۰/۰۸۰	۹۵/۴

جدول ۲: نتایج روش‌های ین و اصلاح شده ین

روش ین	β_0				β_1				β_2			
	Ave	Esd	Asd	Cp	Ave	Esd	Asd	Cp	Ave	Esd	Asd	Cp
$\rho = ۰/۲۵$												
BGMM(yin)	۰/۱۹۷	۰/۰۸۱	۰/۰۸۲	۹۴/۴	۰/۴۹۸	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	۹۲/۸	−۰/۴۹۷	۰/۰۹۳	۰/۰۹۴	۹۴/۶
BGMM(adj)	۰/۲۰۱	۰/۰۸۱	۰/۰۸۱	۹۵	۰/۴۹۷	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	۹۴/۲	−۰/۵۰۱	۰/۰۹۴	۰/۰۹۴	۹۴/۸
$\rho = ۰/۵$												
BGMM(yin)	۰/۱۹۷	۰/۰۸۹	۰/۰۸۹	۹۴/۲	۰/۴۹۸	۰/۰۴۱	۰/۰۴۰	۹۳/۲	−۰/۴۹۸	۰/۰۸۰	۰/۰۷۹	۹۴/۲
BGMM(adj)	۰/۲۰۲	۰/۰۸۸	۰/۰۸۹	۹۵	۰/۵۰۰	۰/۰۳۸	۰/۰۴۰	۹۶/۶	−۰/۵۰۲	۰/۰۸۱	۰/۰۸۰	۹۵/۲

مثال کاربردی: بخش سرطان مدرسه پرستاری دانشگاه کارولینای شمالی به منظور بررسی توانایی اثرگذاری مشاوره‌های پرستاران در افزایش اگاهی از بیماری سرطان و ارتقای کیفیت زندگی بیماران مبتلا به سرطان سینه مطالعه‌ای طراحی کردند. در این مطالعه بیماران مبتلا به سرطان سینه به طور تصادفی به دو گروه کنترل و آزمایش تقسیم می‌شوند. یکی از نتایج مورد علاقه دانش سرطانی بوده که به عنوان دانش بیماران درباره سرطانشان از طریق تاثیرگذاری تعریف شده‌است. دانش سرطانی بیماران در سه نقطه زمانی، شروع کار، چهار ماه بعد از شروع کار و در هفت ماه بعد از شروع کار اندازه‌گیری می‌شوند. در طی این مدت پرستاران تنها با بیماران گروه آزمایشی بوسیله تلفن در تماس هستند. به منظور ارزیابی اثر نفوذ پرستاری، از بیماران هر دو گروه در سه نقطه زمانی مذکور سوالات یکسانی پرسیده می‌شود. متغیر مورد علاقه (متغیر پاسخ) تفاوت دانش سرطانی بیماران در ماه‌های چهارم و هفتم در مقایسه با اندازه‌های اولیه بیماران در شروع کار بوده است. ۲۷۹ نفر بیمار مبتلا به سرطان سینه در این مطالعه شرکت داشتند. مدل رگرسیون خطی با خطاهای همبسته به صورت

$$Y_{ik} = \beta_0 + \beta_1 Z_{1ik} + \beta_2 Z_{2ik} + \varepsilon_{ik}, i = 1, 2, \dots, 279; k = 1, 2, \varepsilon_{i\sim N_2(O,\sigma^2 R)}$$

بکار برده می‌شود که در آن ساختار ماتریس همبستگی Rتعویض‌پذیر است. همچنین متغیرهای کمکی مجازی مورد مطالعه Z_1 نفوذ پرستاری (گروه آزمایشی=۱ و گروه کنترل=۰) و Z_2 اثر نژادی (سفید ۱= و غیر سفید۰=) هستند. برای دستیابی به استنباط‌های بیزی از نرم افزار Winbugs استفاده می‌کنیم که پس از اجرای الگوریتم گیبز و کنار گذاشتن ۱۰۰۰ تکرار اولیه۵۰۰۰۰ نمونه پسینی را بدست آورده آنگاه میانگین و انحراف استاندارد پسینی پارامترهای عرض از مبدا (β_0)، اثر مداخله پرستاری (β_1) و اثر نژادی (β_2) برای سه روش درستنمایی بیزی کامل، وGMM GMM بیزی در جدول زیر ارائه می‌شوند. روش درستنمایی بیزی کامل نسبت به روش GMM بیزی دو پارامتر بیشتر دارد، ضریب همبستگی ρ و واریانس σ^2، میانگین و استاندارد پسینی برای ρ، ۶۳۷.۰ و ۰۳۶.۰ و برای $\tau = \frac{1}{\sigma^2}$ به ترتیب ۱۰۹.۰ و ۰۰۸.۰ هستند.
ملاحظه می‌شود که دو روش درستنمایی بیزی و GMM بیزی نتایج مشابهی را تولید کرده‌اند. تحلیل اخیر نشان می‌دهد که تماس پرستار با بیمار به وضوح دانش سرطانی بیماران را افزایش می‌دهد ولی نوع نژاد تاثیری روی افزایش دانش سرطانی بیماران ندارد.

جدول ۳: نتایج روش‌های درستنمایی بیزی، GMM و GMM بیزی برای مطالعه پرستاری

پارامترها	درستنمایی بیزی کامل		GMM		GMM بیزی	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
β_0	۰/۶۱۵	۰/۲۶۵	۰/۶۱۵	۰/۶۱۵	۰/۶۱۱	۰/۲۶۷
β_1	۱/۰۶۲	۰/۳۲۹	۱/۰۶۳	۰/۳۲۸	۱/۰۶۲	۰/۳۳۲
β_2	۰/۳۰۸	۰/۳۴۰	۰/۳۰۷	۰/۳۲۸	۰/۳۱۳	۰/۳۳۳

نتیجه‌گیری: در کاربردهای عملی اغلب اطلاعات محدودی در مورد تابع درستنمایی داریم و بنابراین انجام استنباط (بیزی) چالش برانگیز است و ممکن است استنباط نسبت به برخی فرض‌های اضافی نیز حساس باشد. در چنین مواردی می‌توان از روش GMM بیزی ین استفاده کرد. اما چون ایراداتی به روش ین وارد شده‌است لذا برای رفع این ایرادات اصلاحاتی را پیشنهاد کردیم. مقایسه نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که روش اصلاح شده GMM بیزی ین تقریباً نتایجی مشابه روش GMM بیزی ین (۲۰۰۹) را تولید کرده و چون اجرای روش اصلاح شده ین خیلی ساده‌تر است لذا روش اصلاح شده را به روش ین ترجیح می‌دهیم.

مراجع

[1] Bickel, P. J.,Klaassen, C. A.J., Ritov, Y., and Wellner, J.A. (1993). Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models. Baltimore: Johns Hopkins University press.

[2] - Chernozhukov, V. and Hong, H. (2003). An MCMC approach to classical estimation.Journal of Econometrics, 115: 293-346.

[3] - Cowles, M. K. and Carlin, B. P. (1996). Markov Chain Monte Carlo convergence diagnostics. Journal of the American Statistical Association, 91: 883-904

[4] - Gilks, W. R., Best, N. G. and Tan, K. K. C. (1995). Adaptive rejection metropolis sampling within Gibbs sampling. Applied Statistics, 44: 455-472.

[5] - Hall, A. R. (2005). Generalized Method of Moments. Oxford university press, New York.

[6] - Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. Econometrica, 50: 1029-1054.

[7] - Kim, J. Y. (2002). Limited information likelihood and Bayesian analysis. Jornal of Econometrics,107;175-193.

[8] - Lai, T. L,. and Small,D.(2007). “Marginal Regression Analysis of Longitudinal Data With Time-dependent Covariates: Generalised Method of Moment Approach. Jornal of the Royal Statistical Society, Series B, 69: 79-99.

[9] - Liang, K. Y and Zeger,S.L. (1986). “Longitudinal data analysis using generalized linear models. Biometrika,73;13-22.

[10] -Yin, G. (2009). Bayesian generalized method of moments. International Society for Bayesian Analysis, 2: 191-208.

[11] -Zellner, A. (1997). The Bayesian method of moments(BMOM): theory and applications. Advances in Econometrics, 12:85-105.

[12] -Qu, A.,Lindsay, B.G., and Li, B. (2000). Improving Generalized Estimating Equations Using Quadratic Inference Functions. Biometrika,87: 823-836.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–130، صص. ۸۲–۸۷

بررسی ضریب وابستگی دمی – کرانی توزیع‌های چندمتغیره

محمد جریره[آ]

[آ] اصفهان، گروه آمار، دانشگاه اصفهان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تابع مفصل
وابستگی دمی
وابستگی کرانی
بردار تصادفی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

ضریب وابستگی کرانی برای ساختار وابستگی مجانبیِ ماکزیمم و مینیمم یک متغیرتصادفی معرفی شده است. در این مقاله، ضریب وابستگی دم بالایی (پایینی) و ضریب وابستگی کرانی بالایی (پایینی) و برخی از ویژگی های کلی ضریب وابستگی کرانی را بدست اورده شده است. رابطه بین ضریب وابستگی کرانی با ضریب وابستگی دمی نیز مشخص شده است.

۱. مقدمه

دو متغیر تصادفی یکنواخت $X_۱$ و $X_۲$ با مفصل C را در نظر بگیرید. به طور شهودی، همبستگی دمی بالایی (پایینی) میان این دو متغیر بدان معناست که همواره با مقادیر بزرگ (کوچک) برای $X_۱$، انتظار مقادیر بزرگ (کوچک) برای $X_۲$ را نیز داشته باشیم. بطور دقیق تر، احتمال آنکه $X_۱$ بزرگتر از مقدار حدی داده شده‌ی q باشد به شرط آن که $X_۲$ نیز از همان سطح یعنی q بیشتر باشد، زمانی که q به یک میل می کند، مورد بررسی قرار می گیرد. اگر این احتمال کوچک باشد، آنگاه مانند حالت استقلال، متغیرهای تصادفی همبستگی دمی ندارند اما در غیر این صورت دارای همبستگی دمی هستند. شاخص وابستگی دمی بوسیله مفصل‌های بردارهای تصادفی بیان می‌شوند.
فرمول های متنوع می تواند برای توصیف کردن میزان وابستگی دم بالایی (پایینی) برای یک توزیع چندمتغیره استفاده شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $X = (X_۱, ..., X_d)$ یک بردار تصادفی با تابع توزیع چندمتغیره F و توابع حاشیه ای پیوسته $F_۱, .., F_d$ باشد. مفصل X (یا تابع توزیع F)، تابع توزیع چندمتغیره C بردار تصادفی زیر می باشد:

$$U = (F_۱(X_۱), ..., F_d(X_d))$$

هریک از مؤلفه های بردار تصادفی U دارای توزیع یکنواخت پیوسته می باشند یعنی $F_i(X_i) \sim U(۰, ۱)$ برای $i = ۱, ..., d$ توابع مفصل و مفصل بقاء بردار تصادفی d- بُعدی X به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C(\underbrace{t, ..., t}_{d}) = \mathbb{P}(F_۱(X_۱) \leq t, ..., F_d(X_d) \leq t)$$

$$\overline{C}(\underbrace{۱ - t, ..., ۱ - t}_{d}) = ۱ - ۲t + C(t, t)$$

پست الکترونیک: mohamadjarire122@gmail.com (محمد جریره)

۲. ضریب وابستگی دمی و کرانی

ضریب وابستگی دم پایینی متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{t\searrow ۰} \mathbb{P}(F_Y(Y) \le t | F_X(X) \le t) \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_Y(Y) \le t, F_X(X)) \le t)}{\mathbb{P}(F_X(X) \le t)} \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{c(t,t)}{t} \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن C تابع مفصل، [۱] F_X تابع توزیع حاشیه ای X و F_Y تابع توزیع حاشیه ای Y می‌باشد. برای تعاریف و مفاهیم توابع مفصل به نلسن [۲] ۱۹۹۹ [۷] و جو [۳] ۱۹۹۷ [۵] مراجعه کنید.
بطور مشابه، ضریب وابستگی دم بالایی

$$\begin{aligned}\lambda_U &:= \lim_{t\nearrow ۱} \mathbb{P}(F_Y(Y) > t | F_X(X) > t) \\ &= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_Y(Y) > t, F_X(X) > t)}{\mathbb{P}(F_X(X) > t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{C}(۱-t, ۱-t)}{۱ - \mathbb{P}(F_X(X) \le t)} \\ &= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{۱ - ۲t - C(t,t)}{۱-t} \end{aligned} \quad (۲)$$

ملاحظه می شود که حد متناظر ضرایب بالا و پایین وجود دارد. اگر ضریب وابستگی دم بالایی (پایینی) مثبت باشد، آنگاه گفته می‌شود که بین X و Y وابستگی دمی وجود دارد.

تعریف ۱.۲. ضریب وابستگی کرانی [۴]: فرض کنید X یک بردار d- بُعدی با تابع چگالی تجمعی توأم و توابع توزیع حاشیه ای $F_۱, ..., F_d$. بعلاوه، فرض کنید $F_{\min} := \{F_۱(X_۱), ..., F_d(X_d)\}$؛ $F_{\max} := \{F_۱(X_۱), ..., F_d(X_d)\}$. ضریب وابستگی کرانی پایینی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &:= \lim_{t\searrow ۰} \mathbb{P}(F_{\max} \le t | F_{\min} \le t) \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_{\max} \le t, F_{\min} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min} \le t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_{\max} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min} \le t)} \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_۱(X_۱) \le t, ..., F_d(X_d) \le t)}{۱ - \mathbb{P}(F_{\min} > t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{C(t, ..., t)}{۱ - \mathbb{P}(F_۱(X_۱) > t, ..., F_d(X_d) > t)} \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{C(t, ..., t)}{۱ - \overline{C}(۱-t, ..., ۱-t)} \end{aligned} \quad (۳)$$

همچنین ضریب وابستگی کرانی بالایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_U &:= \lim_{\nearrow ۱} \mathbb{P}(F_{\min} > t | F_{\max} > t) \\ &= \lim_{\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_{\min} > t, F_{\max} > t)}{\mathbb{P}(F_{\max} > t)} \\ &= \lim_{\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_{\min} > t)}{\mathbb{P}(F_{\max} > t)} = \lim_{\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_۱(X_۱) > t, ..., F_d(X_d) > t)}{۱ - \mathbb{P}(F_۱(X_۱) \le t, ..., F_d(X_d) \le t)} \\ &= \lim_{\nearrow ۱} \frac{\overline{C}(۱-t, ..., ۱-t)}{۱ - C(t, ..., t)} \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن C تابع مفصل X، $\overline{C}$ تابع بقاء مفصل متعلق به C می‌باشد.

[1] Copula Function
[2] Nelson
[3] Joe
[4] Extremal Dependent Coeficient

۳. ویژگی های وابستگی کرانی

گزاره ۱.۳. *فرض کنید λ_L و λ_U ضرایب وابستگی دمی یک جفت از متغیرهای تصادفی باشند. فرض کنید ε_L و ε_U ضرایب وابستگی کرانی متناظر آنها باشد. آنگاه:*

$$\varepsilon_L = \frac{\lambda_L}{۲-\lambda_L}, \qquad \varepsilon_U = \frac{\lambda_U}{۲-\lambda_U}$$

اثبات.

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_{\max} \le t, F_{\min} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min} \le t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_{\max} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min} \le t)} \\ &= \lim_{t\searrow ۰} \frac{\mathbb{P}(F_۱(X_۱) \le t, F_۲(X_۲) \le t)}{۱ - \mathbb{P}(F_۱(X_۱) > t, F_۲(X_۲) > t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{C(t,t)}{۱ - [۱ - ۲t + c(t,t)]}\end{aligned}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر t نتیجه حاصل می‌شود:

$$\frac{\frac{C(t,t)}{t}}{\frac{۲t - C(t,t)}{t}} = \frac{\lambda_L}{۲ - \lambda_L}$$

بطور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}\varepsilon_U &= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_{\max} > t, F_{\min} > t)}{\mathbb{P}(F_{\max} > t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_{\min} > t)}{\mathbb{P}(F_{\max} > t)} \\ &= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\mathbb{P}(F_۱(X_۱) > t, F_۲(X_۲) > t)}{۱ - \mathbb{P}(F_۱(X_۱) \le t, F_۲(X_۲) \le t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{۱ - ۲t + C(t,t)}{۱ - C(t,t)}\end{aligned}$$

با تقسیم صورت مخرج کسر آخری نتیجه حاصل می‌شود :

$$\begin{aligned}&\lim_{t\nearrow ۱} \frac{\frac{۱ - ۲t + C(t,t)}{۱ - t}}{\frac{۱ - C(t,t)}{۱ - t}} \\ &= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\frac{۱ - ۲t + C(t,t)}{۱ - t}}{\frac{۱ - C(t,t) + (۱ - ۲t) - (۱ - ۲t)}{۱ - t}} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\frac{۱ - ۲t + C(t,t)}{۱ - t}}{\frac{۲ - ۲t - [۱ - ۲t + C(t,t)]}{۱ - t}} \\ &= \frac{\lambda_U}{۲ - \lambda_U}\end{aligned}$$

□

بنابراین ضرایب وابستگی کرانی یک تابع محدب از ضرایب وابستگی دمی است.

گزاره ۲.۳. *اگر $\varepsilon_L(X)$ یک ضریب کرانی پایینی یک بردار d- بُعدی X و $\overline{X}$ یک بردار d- بُعدی زیر بردار X باشد. آنگاه $\varepsilon_L(\overline{X}) \ge \varepsilon_L(X)$. همین درباره ضریب وابستگی کرانی بالایی برقرار است؛ یعنی $\varepsilon_U(\overline{X}) \ge \varepsilon_U(X)$.*

اثبات. فرض کنید $F_{\min}^{(d)}$ مینیمم $F_۱(X_۱), \dots, F_d(X_d)$ و $F_{\min}^{(d-۱)}$ مینیمم $F_۱(X_۱), \dots, F_{d-۱}(X_{d-۱})$ باشد. بطور مشابه $F_{\max}^{(d)}$ و $F_{\max}^{(d-۱)}$ را تعریف کنیم. توجه داشته باشید که

$$\mathbb{P}(F_{\max}^{(d-۱)} \le t) \ge \mathbb{P}(F_{\max}^{(d)} \le t)$$
$$\mathbb{P}(F_{\min}^{(d-۱)} \le t) \le \mathbb{P}(F_{\min}^{(d)} \le t)$$

از اینرو

$$\mathbb{P}(F_{\max}^{(d)} \le t | F_{\min}^{(d)} \le t) = \frac{\mathbb{P}(F_{\max}^{(d)} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min}^{(d)} \le t)}$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_{\max}^{(d-1)} \le t | F_{\min}^{(d-1)} \le t) &= \frac{\mathbb{P}(F_{\max}^{(d-1)} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min}^{(d-1)} \le t)} \\ &\ge \frac{\mathbb{P}(F_{\max}^{(d)} \le t)}{\mathbb{P}(F_{\min}^{(d)} \le t)} = \mathbb{P}(F_{\max}^{(d)} \le t | F_{\min}^{(d)} \le t)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\varepsilon_L(\overline{X}) \ge \varepsilon_L(X).$$

همین استدلال برای ضریب وابستگی کرانی بالایی برقرار است. □

گزاره ۳.۳. *فرض کنید $X = (X_1, ..., X_d)$ یک بردار تصادفی با ضرایب وابستگی کرانی پایینی باشد؛ بنابراین برای مؤلفه‌ی دلخواه X، مثلاً X_i و X_j؛*

$$\lambda_L(X_i, X_j) \ge \varepsilon_L;$$

که در آن $\lambda_L(X_i, X_j)$ نمایش دهنده ضریب وابستگی دمی پایینی X_i و X_j است. بطور مشابه اگر ε_U ضریب وابستگی کرانی X باشد، آنگاه $\lambda_U(X_i, X_j) \ge \varepsilon_U$ برای همه $i, j = 1, ..., d$.

اثبات. از گزاره (۱.۳) می توان نتیجه گرفت:

$$\lambda_L(X_i, X_j) = 2.\frac{\varepsilon(X_i, X_j)}{1 + \varepsilon_L(X_i, X_j)}$$

بنابراین، $\lambda_L(X_i, X_j)$ یک تابع مقعر از $\varepsilon_L(X_i, X_j)$ می باشد. یعنی $\lambda_L(X_i, X_j) \ge \varepsilon_L(X_i, X_j)$ از طرفی با توجه به گزاره (۲.۳) می دانیم که $\varepsilon_L(X_i, X_j)$ یک کران بالا برای ε_L می باشد یعنی

$$\lambda_L(X_i, X_j) \ge \varepsilon_L(X_i, X_j) \ge \varepsilon_L.$$

همین استدلال برای ضریب وابستگی دم بالایی برقرار است. □

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید $X = (X_1, ..., X_d)$ یک بردار تصادفی با ضریب وابستگی کرانی پایینی $\varepsilon_L > 0$ باشد. آنگاه برای دو مؤلفه‌ی دلخواه X، مثلاً X_i و X_J؛ $\lambda_L(X_i, X_j) > 0$. بطور مشابه اگر $\varepsilon_U > 0$ باشد، آنگاه $\lambda_U(X_i, X_j) > 0$.*

اثبات. این نتیجه صریحاً از گزاره (۳.۳) برقرار است. □

بنابراین اگر یک بردار تصادفی وابسته کرانی باشد، آنگاه مؤلفه های آن وابستگی دمی دارند. مخصوصاً اگر مؤلفه های بردار X وابستگی کرانی بالا (پایین) باشند، آنگاه هر دو مؤلفه‌ی دلخواه X، وابستگی دمی دارند.

قضیه ۵.۳. *اگر مؤلفه های یک بردار تصادفی متقابلاً مستقل باشند؛ آنگاه $\varepsilon = 0$.*

اثبات.

$$\begin{aligned}\lambda_L(X, Y) &= \lim_{t \to 0} P(F_Y(Y) \le t | F_X(X) \le t) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{P(F_Y(Y) \le t, F_X(X) \le t)}{P(F_X(X) \le t)}\end{aligned}$$

چون X و Y مستقل می باشند، لذا هر تابع از X از هر تابع از Y مستقل می باشد. بنابراین

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{t \to 0} \frac{P(F_Y(Y) \le t).P(F_X(X) \le t)}{P(F_X(X) \le t)} = \lim_{t \to 0} P(F_Y(Y) \le t) = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

بنابراین $\varepsilon_L = 0$. همین استدلال برای $\varepsilon_U = 0$ نیز برقرار است. □

نتیجه این قضیه را می توان به بردارهای d بُعدی نیز تعمیم داد .

نتیجه ۶.۳. *اگر مؤلفه های یک بردار تصادفی دو به دو (متقابلاً) مستقل باشند، آنگاه ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایینی برابر با صفر است .*

اثبات . با بکار بردن قاعده هوپیتال ، ضریب وابستگی کرانی پایینی به صورت زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_L = \lim_{t\searrow ۰} \frac{C_d(t,...,t)}{۱ - \overline{C_d}(۱-t,...,۱-t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{t^d}{۱-(۱-t)^d} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{t^{d-۱}}{(۱-t)^{d-۱}} = ۰$$

همچنین ضریب وابستگی کرانی بالایی به شرح زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_U = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{C_d}(۱-t,...,۱-t)}{۱ - C_d(۱-t,...,۱-t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{(۱-t)^d}{۱-t^d} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{(۱-t)^{d-۱}}{t^{d-۱}} = ۰.$$

هرچند اگر هر دو مؤلفه‌ی X و Y فقط ناهمبسته باشند؛ لزوماً هر دو ε_L و ε_U مساوی صفر نمی باشند. □

ملاحظه ۷.۳. توجه داشته باشید که C_d جابجاگر متقارن است هرگاه $C_d = \overline{C_d}$.

گزاره ۸.۳. *فرض کنید X بردار تصادفی d- بُعدی که دارای مفصل جابجاگر متقارن [۵] باشد، آنگاه ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایینی با هم برابر هستند .*

اثبات . اگر C جابجاگر متقارن باشد می توان نتیجه گرفت که $C = \overline{C}$، بنابراین داریم:

$$\varepsilon_L = \lim_{t\searrow ۰} \frac{C(t,...,t)}{۱ - \overline{C}(۱-t,...,۱-t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{C(۱-t,...,۱-t)}{۱ - \overline{C}(t,...,t)}$$
$$= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{C}(۱-t,...,۱-t)}{۱ - C(t,..,t)} = \varepsilon_U.$$

□

نتیجه ۹.۳. *در گزاره‌ی قبل، اگر $d = ۱$ ، باشد، آنگاه ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایین برابر با یک می باشند .*

$$\varepsilon_L = \lim_{t\searrow ۰} \frac{C(t)}{۱ - \overline{C}(۱-t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{t}{۱-(۱-t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{t}{t} = ۱.$$

به طور مشابه برای وابستگی کرانی بالا داریم:

$$\varepsilon_U = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{C}(۱-t)}{۱ - C(t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{۱-t}{۱-t} = ۱.$$

تعریف ۱۰.۳. هم یکنواختی [۶]: مؤلفه های بردار تصادفی $X = (X_۱,...,X_d)$ را هم یکنواخت گویند اگر وجود داشته باشد متغیر تصادفی Z و توابع اکیداً صعودی $f_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ بطوریکه $X_i =_{a.s} f_i(Z)$ برای $i = ۱,..,d$. (برای تعاریف جامعتر و ویژگی های $a.s$ (تقریباً همه جا) به کتاب شاکید و شانتی کومار[۸] مراجعه کنید).

تعریف ۱۱.۳. نایکنواختی [۷]: دو متغیر تصادفی X و Y نایکنواخت گفته می شوند اگر یک متغیر تصادفی Z، و یک تابع اکیداً صعودی $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ و یک تابع اکیداً نزولی $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوریکه $X =_{a.s} f(Z)$، و $Y =_{a.s} g(Z)$.
مفصل دو متغیر تصادفی هم یکنواخت برابر با کران بالا کلاس فرشه ـ هافدینگ [۸]، $M = \min\{u, v\}$ می باشد. همچنین مفصل متغیرهای تصادفی نایکنواخت X و Y برابر با کران پایین کلاس فرشه - هافدینگ، $W = \max\{u + v - ۱, ۰\}$ می باشد(برای جزئیات بیشتر در مورد کران های بالا و پایین فرشه - هافدینگ به نلسن ۱۹۹۹[۷] مراجعه کنید).

---
[5] Transpositionlly Symmetric
[6] Comonotonicity
[7] Countermonotonicity
[8] Frechet- Hoeffding

گزاره ۱۲.۳. *الف) اگر دو متغیر تصادفی نایکنواخت باشند، آنگاه هر دو ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایینی برابر صفر می باشد .*
ب) اگر دو متغیر تصادفی هم یکنواخت باشند، آنگاه ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایینی برابر یک می باشد .

اثبات . توجه داشته باشید که $M = \overline{M}$ و $W = \overline{W}$،

$$W(۱-t,۱-t) = \max\{۱-t+۱-t-۱,۰\} = \max\{۱-۲t,۰\}$$
$$M(۱-t,۱-t) = \min\{۱-t,۱-t\} = ۱-t$$

بنابراین با بکار بردن قاعده هوپیتال، ضریب وابستگی کرانی بالایی و پایینی به شرح زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_L = \lim_{t\searrow ۰} \frac{W(t,t)}{۱-W(۱-t,۱-t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{\max\{۲t-۱,۰\}}{۱-\max\{۱-۲t,۰\}}$$
$$= \lim_{t\searrow ۰} \frac{۲\max(۲t-۱,۰)}{-(-۲)\max(۱-۲t,۰)} = \frac{۲\times ۰}{۲\times ۱} = \frac{۰}{۲} = ۰$$
$$\varepsilon_U = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{W}(۱-t,۱-t)}{۱-W(t,t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\max\{۱-۲t,۰\}}{۱-\max\{۲t-۱,۰\}}$$
$$= \lim_{t\nearrow ۱} \frac{-۲\max(۱-۲t,۰)}{-۲\max(۲t-۱,۰)} = \frac{-۲\times ۰}{-۲\times ۱} = \frac{۰}{-۲} = ۰.$$

در حالتی که دو متغیر هم یکنواخت باشند، داریم:

$$\varepsilon_L = \lim_{t\searrow ۰} \frac{M(t,t)}{۱-\overline{M}(۱-t,۱-t)} = \lim_{t\searrow ۰} \frac{t}{۱-(۱-t)} = ۱.$$
$$\varepsilon_U = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{\overline{M}(۱-t,۱-t)}{۱-M(t,t)} = \lim_{t\nearrow ۱} \frac{۱-t}{۱-t} = ۱.$$

□

نتیجه ۱۳.۳. *اگر دو متغیر تصادفی X و Y هم یکنواخت باشند، آنگاه $\lambda_L = ۱$. و $\lambda_U = ۱$ همچنین اگر دو متغیر تصادفی X و Y نایکنواخت باشند، آنگاه $\lambda_L = ۰$ $\lambda_U = ۰$.*

اثبات . نتیجه با استفاده از گزاره (۱.۳) و گزاره (۱۲.۳) برقرار می باشد. □

بنابراین ضریب وابستگی کرانی نمی تواند وجه تمایزی بین استقلال و نایکنواختی باشد . این به این دلیل می باشد که ضریب وابستگی کرانی احتمال کرانهای متقارن را اندازه گیری می کند و اگر کرانهای متقارن به هیچ وجه دارای احتمال نباشند (در حالت نایکنواختی و استقلال)، آنگاه ضریب وابستگی کرانی به صفر میل می کند .

مراجع

[1] Basrak, B., Davis, R.A., Mikosch, T., 2002. A characterization of multivariate regular variation. Ann. Appl. Probab. 12, 908–920.
[2] Bilodeau, M., Brenner, D., 1999. Theory of Multivariate Statistics. Springer, Berlin.
[3] G. Frahm, On the extremal dependence coefficient of multivariate distributions. Statistics & Probability Letters 76 (2006) 1470–1481
[4] Fang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W., 1990. Symmetric Multivariate and Related Distributions. Chapman & Hall, New York.
[5] Joe, H., 1997. Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman & Hall, New York.
[6] Nelsen, R.B., 1997. Dependence and order in families of Archimedean copulas. J. Multivariate Anal. 60, 111–122.
[7] Nelsen, R.B., 1999. An Introduction to Copulas. Springer, Berlin..
[8] Shaked, M., and J.G. Shanthikumar. 2007. Stochastic orders. Springer, New York.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–131، صص. ۸۸–۹۷

مطالعه ای بر روی همگرایی کامل متغیرهای وابسته‌ی منفی

محمد جریره [آ]

[آ] اصفهان، گروه آمار، دانشگاه اصفهان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
متغیر تصادفی
وابستگی منفی
کران نمایی
همگرایی کامل

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

اخیراً توجه محققان آماری به سمت مدلهای آماری با فرض وابستگی متغیرها معطوف که عمدتاً به بررسی متغیرهای وابسته منفی پرداخته شده است. در این مقاله همگرایی کامل دنباله ای از متغیرهای وابسته منفی تحت شرایط معینی بوسیله کرانهای نمایی نشان داده شده است.

۱. مقدمه

در بسیاری از مدلهای آماری، فرض استقلال متغیرهای تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است که در جهان واقع ممکن است داده ها از مستقل نباشد بنابراین رده ی بزرگی از داده ها در این طبقه قرار نمی گیرند. چنین مدلهایی باید فرض وابستگی متغیرهای تصادفی مورد مطالعه قرار گیرد. افزایش در برخی از متغیرهای تصادفی به کاهش در دیگر متغیرهای تصادفی مرتبط می شود، بنابراین فرض وابستگی مناسب تر از فرض استقلال می باشد.
لهمن [۱] [۱۴] تعاریف مختلفی از وابستگی مثبت و منفی را در حالت دو متغیره بررسی کرده است. تعمیم های تعاریف چندمتغیره بوسیله هریس [۲] [۷]، براندلی [۳] و تامپسون [۴] [۴] ارائه داده شده است و در ادامه بوسیله ابراهیمی و گوش [۶]، کارلین [۵]، [۹] بُلاک [۶] و تانگ [۷] [۵] گسترش داده شد. بعلاوه متیولا [۸] [۱۰] همگرایی تقریبا همه جا [۹] مجموع متغیرهای تصادفی وابسته منفی را مطالعه کرد. بزرگ نیا [۱۰]، پترسون [۱۱] و تیلر

پست الکترونیک: mohamadjarire122@gmail.com (محمد جریره)

[1] Lehmann
[2] Harris
[3] Brindley
[4] Thompson
[5] Karlin
[6] Block
[7] Tong
[8] Matula
[9] Almost Surely
[10] Bozorgnia
[11] Patterson

[۱۲] [] قضایای حدی را برای متغیرهای وابسته مطالعه نمودند همچنین امینی و بزرگنیا []، رفتار مجانبی چارک ها را برای متغیرهای وابسته منفی مورد بررسی قرار دادند. کو [۱۳] و کیم [۱۴] []، همگرایی تقریباً همه جا را برای مجموع وزن دار متغیرهای تصادفی وابسته منفی و همچنین هانگ [۱۵] و همکاران []، همگرایی کامل را برای این مجموع نشان دادند.

فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، رابینس و هسیو [۵] تحت شرایط $E(X) = ۰$ و $E(X^۲) < \infty$ نشان دادند دنباله ی $\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i\}$ بطور کامل به صفر همگراست عبارت دیگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $\sum_{n=۱}^{\infty} P(S_n > n\varepsilon)$ همگراست.

فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی باشند، در این مقاله همگرایی کامل دنباله ی $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i$ بوسیله کرانهای نمایی اثبات می شود. بعلاوه اگر $\{X_{n,k}, ۱ \leq k \leq n, n \geq ۱\}$ متغیرهای تصادفی سطری دو به دو وابسته منفی باشند، همگرایی کامل $\{\frac{۱}{n^{\alpha}}\sum_{k=۱}^{n} X_{n,k}, n \geq ۱\}$، نشان داده شده است.

تعریف ۱.۱. متغیرهای تصادفی $X_۱$،...، X_n متقابلاً(دو به دو) دارای وابستگی منفی می باشند هرگاه

$$P(X_i \leq x_i, X_j \leq x_j) \leq P(X_i \leq x_i)P(X_j \leq x_j). \quad (۱)$$

برای همه $x_i, x_j \in IR$ ،$x_i \neq x_j$. میتوان نشان داد که رابطه (۱) معادل با

$$P(X_i > x_i, X_j > x_j) \leq P(X_i > x_i)P(X_j > x_j). \quad (۲)$$

برای همه $x_i, x_j \in IR$ ،$x_i \neq x_j$.

تعریف ۲.۱. متغیرهای تصادفی $X_۱$،...، X_n دارای وابستگی منفی می باشند اگر داشته باشیم:

$$P\left(\bigcup_{j=۱}^{n}(X_j \leq x_j)\right) \leq \prod_{j=۱}^{n} P(X_j \leq x_j). \quad (۳)$$

$$P\left(\bigcup_{j=۱}^{n}(X_j > x_j)\right) \leq \prod_{j=۱}^{n} P(X_j > x_j). \quad (۴)$$

برای همه $x_۱, x_۲, ..., x_n \in IR$.

یک دنباله ی نامتناهی $\{X_n, n \geq ۱\}$ دارای وابستگی منفی است هرگاه هر زیرمجموعه متناهی $\{X_۱, ..., X_n\}$ دارای وابستگی منفی باشد.

روابط (۳) و (۴) برای $n = ۲$ معادل هستند اما ابراهیمی و گوش [۱۶] [۶] برای $n \geq ۳$ نشان دادند که روابط (۳) و (۴) معادل نیستند.

تعریف ۳.۱. دنباله ای از متغیرهای $\{X_n, n \geq ۱\}$ بطور کامل همگرا به صفر می باشد (با $\lim_{n\to\infty} X_n = ۰$ نشان داده می شود) هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، داشته باشیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P\left(|X_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

لم ۴.۱. *فرض کنید X متغیرتصادفی با میانگین $E(X) = ۰$، $E(X^۲) < \infty$ و همچنین فرض کنید H مثبتی وجود داشته باشد بطوریکه برای همه $m \geq ۲$*

$$E\left[|X^m|\right[\leq \frac{۱}{۲}m!\sigma^۲H^{m-۲},$$

آنگاه برای $|t| \leq \frac{۱}{۲H}$،

$$E\left(exp\{tx\}\right) \leq exp\{t^۲\sigma^۲\}$$

برای اثبات به مرجع [۱۱] مراجعه نمایید.

[12] Taylor
[13] Ko
[14] Kim
[15] Wang
[16] Gosh

لم ۵.۱. *فرض کنید X یک متغیرتصادفی با میانگین $E(X)=\mu$. اگر $P(a\le X\le b)=1$، برای هر عدد حقیقی $t>0$، داریم*

$$E\left(e^{t(X-\mu)}\right)\le e^{\left\{\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right\}}$$
$$E\left(e^{t|X-\mu|}\right)\le 2e^{\left\{\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right\}}$$

برای اثبات به مرجع [۱۲] *مراجعه نمایید.*

لم ۶.۱. *فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهایی دارای وابستگی منفی* [۱۷] *باشند، $f_1,\dots,f_n$ دنباله ای از توابع بورل یکنوا صعودی (یا یکنوا نزولی) باشند، آنگاه $f_1,\dots,f_n$ دارای وابستگی منفی می باشند.*

اثبات. طبق یکنوا بودن $f_1,\dots,f_n$ و خاصیت وابستگی منفی متغیرهای تصادفی $X_1,\dots,X_n$؛ داریم:

$$\begin{aligned}&P\left(f_1(X_1)\le x_1,\dots,f_n(X_n)\le x_n\right)\\&=P\left(X_1\le f_1(x_1),..,X_n\le f_n(x_n)\right)\\&\le P\left(X_1\le f^{-1}(x_1)\right)....P\left(X_n\le f_n^{-1}(x_n)\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}P\left(f_i(X_i\le x_i)\right)\end{aligned}$$

لم ۷.۱. *فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی که دو به دو متقابلاً دارای وابستگی منفی باشند، آنگاه*

$$E(X_iX_j)\le E(X_i).E(X_j)(\forall i\ne j)$$

لم ۸.۱. *فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی نامنفی دارای وابستگی منفی باشند، آنگاه*

$$E(\prod_{j=1}^{n}X_j)\le\prod_{j=1}^{n}E(X_j)$$

[17] Negative dependent

اثبات . در حالت گسسته: طبق خاصیت وابستگی منفی متغیرهای تصادفی X_1،...، X_n؛ داریم:

$$
\begin{aligned}
&E(\prod_{j=1}^{n} X_j)\\
&= \sum_{x_n} \dots \sum_{x_2} \sum_{x_1} \prod_{j=1}^{n} x_j P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)\\
&\le \sum_{x_n} \dots \sum_{x_2} \sum_{x_1} \prod_{j=1}^{n} x_j \prod_{j=1}^{n} P(X_j = x_j)\\
&= \left[\sum_{x_n} P(X_n = x_n)\right] \dots \left[\sum_{x_2} P(X_2 = x_2)\right] . \left[\sum_{x_1} P(X_1 = x_1)\right]\\
&= \prod_{j=1}^{n} \sum_{x_j} P(X_j = x_j)\\
&= \prod_{j=1}^{n} E(X_j).
\end{aligned}
$$

در حالت پیوسته: از آنجایی که $X_i > 0$، داریم:

$$E(X_i) = \int_0^{\infty} x_i F_i(x_i) dx_i$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
&E\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)\\
&= \int_{x_n} \dots \int_{x_2} \int_{x_1} \prod_{j=1}^{n} x_j P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned}
$$

با توجه به خاصیت انتگرال های برای توابع نامنفی؛ (اگر $0 \le f \le g$؛ آنگاه $\int f \le \int g$). و خاصیت وابستگی منفی متغیرهای تصادفی

$X_1 ... X_n$، دارایم:

$$\int_{x_n} ... \int_{x_2} \int_{x_1} \prod_{j=1}^{n} x_j P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

$$\le \int_{x_n} ... \int_{x_2} \int_{x_1} \prod_{j=1}^{n} x_j P(X_1 \le x_1).P(X_2 \le x_2)....P(X_n \le x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

$$= \left[\int_{x_n} x_n P(X_n \le x_n) dx_n\right].\left[\int_{x_2} x_2 P(X_2 \le x_2) dx_2\right]....\left[\int_{x_1} P(X_1 \le x_1) dx_1\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{x_j} x_j P(X_j \le x_j) dx_j$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E(X_j).$$

۲. کرانهای نمایی و همگرایی کامل

در این بخش برخی از کران های نمایی برای احتمال های $P(|S_n| > x)$ و $P(|S_n'| > x)$ بدست آورده شده است و در ادامه همگرایی کامل دنباله‌ی $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\}$ را نشان می دهیم.
دنباله ای از متغیرهای تصادفی را دارای وابستگی منفی، $\{X_n, n \ge 1\}$ را با میانگین صفر و واریانس متناهی در نظر بگیرید و قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad s_n' = \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

در ادامه ، در راستای اثبات همگرایی کامل $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\}$، یک کران بالای نمایی برای احتمال $P(S_n \ge x)$ بدست آورده می شود که نیازمند قضیه زیر می باشیم:

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $X_1 .. ، X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین m باشند و همچنین $M_X(t) < \infty$ و $-a < t < b$ که $0 < a < b$، آنگاه داریم:*

$$P\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \ge m + \varepsilon\right) \le \rho^n \qquad (۵)$$

که در آن $\rho = \inf_{0<t<b} \left(e^{-t(m+\varepsilon)}\right) M_{X_1}(t)$.

اثبات . برای هر $0 < t < b$، چون تابع $x \mapsto e^{tx}$ تابعی صعودی است؛ بنابراین نامساوی مارکوف نتیجه می‌دهد:

$$P(Z \ge 0) = P(e^{tZ} \ge e^0) = P(e^{tZ} \ge 1) \le \frac{E(e^{tZ})}{1} = M_Z(t)$$

با گرفتن اینفیمم بر روی $0 < t < b$، داریم:

$$P(Z \ge 0) \le \inf_{0<t<b} M_Z(t)$$

اکنون فرض کنید $Y_k = X_k - m - \varepsilon$. بنابراین $E(Y_k) = -\varepsilon < 0$. لذا برای $-a < t < b$، داریم:

$$M_{Y_k}(t) = E(e^{tY_k}) = e^{-t(m+\varepsilon)} E(e^{tX_k})$$
$$= e^{-t(m+\varepsilon)} M_{X_k}(t) < \infty$$

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\geq m+\varepsilon\right)=P\left(\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}\geq 0\right)$$
$$=P(Y_1+\ldots+Y_n\geq 0)\leq \inf_{0<t<b} M_{Y_1+\ldots+Y_n}(t)$$
$$=\inf_{0<t<b}\left[M_{Y_1}(t)\right]^n=\rho^n. \qquad (۶)$$

که در آن

$$\rho=\inf_{0<t<b} M_{Y_1}(t)=\inf_{0<t<b} E\left(e^{t(X_1-m-\varepsilon)}\right)=\inf_{0<t<b} e^{-t(m+\varepsilon)}M_{X_1}(t).$$

بنابراین با قرار دادن مساوی ρ در رابطه (۶) نتیجه حاصل میگردد.

ملاحظه ۲.۲. در حالت خاص، اگر $m=0$، داریم

$$P(S_n\geq n\varepsilon)\leq \rho^n=\inf_{0<t<b} e^{-nt\varepsilon}E(e^{tX_1})^n$$

نتیجه ۳.۲. *اگر X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی با میانگین صفر باشند، آنگاه*

$$P(S_n\geq n\varepsilon)\leq e^{-nt\varepsilon}\prod_{k=1}^{n}E(e^{tX_k})$$

اثبات. با استفاده از قضیه (۱.۲) و لم (۵.۱) می توان نوشت:

$$P(S_n\geq n\varepsilon)\leq e^{-nt\varepsilon}E(e^{t\sum_{k=1}^{n}X_k})$$
$$=e^{-nt\varepsilon}E(\prod_{k=1}^{n}e^{tX_k})$$
$$\leq e^{-nt\varepsilon}\prod_{k=1}^{n}E(e^{tX_k}) \qquad (۷)$$

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی باشند و همچنین فرض کنید H ثابت مثبتی وجود دارد بطوریکه برای $m\geq 2$، $1\leq k\leq n$ داریم:*

$$|E(X_k^m)|\leq \frac{1}{2}m!\sigma_k^2H^{m-1}$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{-n^2\varepsilon^2}{4B_n}\right\}<\infty$ برای هر $\varepsilon>0$، آنگاه $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ بطور کامل به صفر همگراست.

اثبات . بوسیله لم (۱.۱)، لم (۱.۳)، لم (۱.۵) و نامساوی مارکف، برای $|t| \leq \frac{۱}{۲H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&P(|s_n| \geq x) \\
&\quad = P(s_n \geq x) \cup P(s_n \leq -x) \\
&\quad = P(s_n \geq x) + P(s_n \leq -x) - P(s_n \geq x, s_n \leq -x) \\
&\quad \leq P(s_n \geq x) + P(-s_n \geq x) \\
&\quad \leq e^{-tx}\left[Ee^{ts_n} + Ee^{-ts_n}\right] \\
&\quad = e^{-tx}\left[Ee^{t\sum_{k=۱}^{n} X_k} + Ee^{-t\sum_{k=۱}^{n} X_k}\right] \\
&\quad = e^{-tx}\left[E\prod_{k=۱}^{n} e^{tX_k} + E\prod_{k=۱}^{n} e^{-tX_k}\right] \\
&\quad \leq e^{-tx}\left[\prod_{k=۱}^{n} Ee^{tX_k} + \prod_{k=۱}^{n} Ee^{-tX_k}\right] \\
&\quad \leq e^{-tx}\left[\prod_{k=۱}^{n} e^{t^{۲}\sigma_k^{۲}} + \prod_{k=۱}^{n} e^{t^{۲}\sigma_k^{۲}}\right] \\
&\quad = e^{-tx}\left[۲e^{t^{۲}\sum_{k=۱}^{n}\sigma_k^{۲}}\right] \\
&\quad = e^{-tx+t^{۲}B_n}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$P(|s_n \geq x) \leq e^{-tx+t^{۲}B_n}$$

با فرض کردن $h(t) = -tx + t^{۲}B_n$ و $۰ \leq x \leq \frac{B_n}{H}$، معادله $h'(t) = ۰$ دارای جواب یکتا $t_۰ = \frac{x}{۲B_n}$ می باشد که تابع $h(t)$ را مینمم می کند. بنابراین با جایگذاری کردن $t_۰$ در تابع $h(t)$ داریم:

$$P(|S_n| \geq x) \leq ۲\exp\{-\frac{x^{۲}}{۴B_n}\}$$

اگر $۰ \leq x \leq \frac{B_n}{H}$.
اکنون برای هر $۰ < \varepsilon$، داریم:

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\left[\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right] \leq \sum_{n=۱}^{\infty} ۲\exp\left[-\frac{n^{۲}\varepsilon^{۲}}{۴B_n}\right] < \infty,$$

و بنابه خاصیت تابع توزیع برای هر $۰ < \varepsilon \geq \varepsilon'$، داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P\left[|S_n|n \geq \varepsilon'\right] \leq \sum_{n=۱}^{\infty} P\left[|S_n|n \geq \varepsilon\right] < \infty$$

بنابر تعریف (۱.۳) اثبات تکمیل می شود.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید* $\{X_n, n \geq ۱\}$ *دنباله ای از متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی و* $e_n = \max\left\{\text{ess sup}_{۱\leq k\leq n} \frac{|X_k|}{\sqrt{B_n}}\right\}$ *اگر* $\sum_{n=۱}^{\infty} \exp\left\{\frac{-۲n\varepsilon^{۲}}{c_n^{۲}B_n}\right\} < \infty$، *آنگاه برای هر* $\varepsilon > ۰$، $\frac{۱}{n}\sum_{k=۱} nX_k$ *بطور کامل به صفر همگراست* .

اثبات . با استفاده از لم (۲.۱)، (۳.۱) و (۵.۱) و نامساوی مارکف داریم:

$$\begin{aligned}
&P(|S_n| \geq \varepsilon) \\
&\leq P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon) \\
&\leq e^{-t\frac{\varepsilon}{\sqrt{B_n}}}\left[E(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}}) + E(e^{-t\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}})\right] \\
&= e^{-t\frac{\varepsilon}{\sqrt{B_n}}}\left[E(e^{t\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{B_n}}}) + E(e^{-t\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{B_n}}})\right] \\
&= e^{-t\frac{\varepsilon}{\sqrt{B_n}}}\left[E\prod_{k=1}^{n}(e^{tX_k} + e^{-tX_k})\right] \\
&\leq e^{-t\frac{\varepsilon}{\sqrt{B_n}}}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(Ee^{tX_k} + Ee^{-tX_k}\right)\right] \\
&\leq 2\exp[-\frac{t\varepsilon}{\sqrt{B_n}} + \frac{nt^2c_n^2}{2}].
\end{aligned}$$

بنابراین برای $t_0 = \frac{\varepsilon}{nc_n^2\sqrt{B_n}}$، داریم:

$$P(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp[-\frac{\varepsilon^2}{2nc_n^2B_n}],$$

و بوسیله فرض داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon] \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\frac{n\varepsilon^2}{2c_n^2B_n}] < \infty$$

که این اثبات را تکمیل می کند.

۳. قضیه حدی قوی برای متغیرهای تصادفی سطری

فرض کنید $\{X_n, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ یک آرایش از متغیرهای تصادفی سطری دو به دو دارای وابستگی منفی با میانگین $E(X_{n,k}) = 0$ و $\sigma_{n,k}^2 = E(X_{n,k}^2)$ همچنین فرض کنید $\xi_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$ که در آن α عددی مثبت حقیقی می باشد.
آز آنجایی که $\{X_{n,k}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی دو به دو دارای وابستگی منفی می باشند، داریم:

$$E(\xi_n^2) \leq \frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}^2, \tag{۸}$$

زیرا که

$$\begin{aligned}
E(\xi_n^2) &= \frac{1}{n^{2\alpha}}E\left[\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}\right]^2 \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}E\left[\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}^2 + 2\sum_{k\neq j} X_{n,k}X_{n,j}\right] \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\left[\sum_{k=1}^{n} E(X_{n,k}^2) + 2\sum_{k\neq j} E(X_{n,k}X_{n,j})\right]
\end{aligned}$$

از آنجایی که متغیرها تصادفی دو به دو دارای وابستگی منفی می باشند لذا

$$\mathrm{Cov}(X_{n,k}, X_{n,j}) = E(X_{n,k}X_{n,j}) < ۰$$

بنابراین

$$E(\xi_n^۲) = \frac{۱}{n^{۲\alpha}}\left[\sum_{k=۱}^{n} E(X_{n,k}^۲) + ۲\sum_{k\neq j} E(X_{n,k}X_{n,j})\right] \leq \frac{۱}{n^{۲\alpha}}\sum_{k=۱}^{n}\sigma_{nk}^۲$$

قضیه ۱.۳. *فرض کنید* $\{X_n, ۱ \leq k \leq n, n \geq ۱\}$ *یک آرایش از متغیرهای تصادفی سطری دو به دو دارای وابستگی منفی با میانگین* $E(X_{n,k}) = ۰$ *باشند. اگر برای برخی* $\alpha > ۰$، *داشته باشیم:*

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲\alpha}}\sum_{k=۱}^{n}\sigma_{nk}^۲ < \infty$$

آنگاه $\frac{۱}{n^{\alpha}}\sum_{k=۱}^{n} X_{n,k}$ *بطور کامل همگراست.*

اثبات. بوسیله نامساوی چپیشف و رابطه (۸) داریم:

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) \leq \frac{۱}{\varepsilon^۲}E(\xi_n^۲) \leq \frac{۱}{n^{۲\alpha}}\sum_{k=۱}^{n}\sigma_{n,k}^۲$$

بنابه فرض برای برخی $\alpha > ۰$، داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(|\xi_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲\alpha}}\sum_{k=۱}^{n}\sigma_{n,k}^۲ < \infty$$

بنابر تعریف همگرایی کامل، $\frac{۱}{n^{\alpha}}\sum_{k=۱}^{n} X_{n,k}$ همگرای کامل می باشد.

۴. تعمیم قضیه‌ی هافدینگ برای متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی

در این بخش قضیه‌ی هافدینگ (قضیه (۴.۱)) برای حالتی که متغیرهای تصادفی وابسته منفی باشند، تعیمم داده می شود.

لم ۱.۴. *فرض کنید* X *یک متغیرتصادفی باشد بطوریکه* $E(X) = ۰$ *و* $P(|X| \leq c) = ۱$؛ *بنابراین برای هر عدد حقیقی* t *داریم:*

$$Ee^{tX} \leq e^{t^۲c^۲}. \qquad (۹)$$

اثبات. بوسیله فرض داریم:

$$|X| \leq c \longrightarrow X^۲ = |X|^۲ \leq c^۲ \longrightarrow E(X^۲) \leq E(c^۲) \longrightarrow \sigma^۲ \leq c^۲ \longrightarrow e^{\sigma^۲} \leq e^{c^۲}$$

همچنین طبق لم (۱.۱)، داریم:

$$Ee^{tX} \leq e^{t^۲\sigma^۲} \leq e^{t^۲c^۲}$$

که این اثبات را تکمیل می کند.

قضیه ۲.۴. قضیه هافدیدینگ: *فرض کنید* $X_۱$، ...، X_n *متغیرهای تصادفی مستقل باشند بطوریکه* $P(a \leq X_i \leq b) = ۱$ *برای هر* i *که* $a < b$ *و همچنین* $S_n' = \sum_{k=۱}^{n}(X_k - E(X_k))$. *بنابراین برای هر* $\varepsilon > ۰$، $c = b - a$ *داریم:*

$$P(S_n' \geq n\varepsilon) \leq \exp\left[-\frac{۲n\varepsilon^۲}{c^۲}\right] \qquad (۱۰)$$

قضیه ۳.۴. *فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی دارای وابستگی منفی باشند بطوریکه $P(a \le X_i \le b) = 1$ برای هر i که $a < b$ و همچنین $S'_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))$. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، $c = b - a$ داریم:*

$$P(S'_n \ge n\varepsilon) \le \exp\left[\frac{-n\varepsilon^2}{4c^2}\right] \qquad (11)$$

اثبات. تعریف کنید $Y_k = X_k - E(X_k)$ برای $k = 1, \ldots, n$. بنابراین داریم، $E(Y_k) = 0$ و $|Y_k| \le c$. بنابراین بوسیله لم (۱.۱) و (۵.۱) داریم:

$$\begin{aligned} P(S_n \ge \varepsilon) &\le \exp(-nt\varepsilon) E e^{hS_n} \\ &\le \exp[-nt\varepsilon] \prod_{k=1}^{n} E e^{tY_k} \\ &\le \exp[-nt\varepsilon + nt^2c^2]. \end{aligned}$$

اگر $h(t) = -nt\varepsilon + nt^2c^2$، آنگاه $t_0 = \frac{\varepsilon}{2c^2}$ تابع $h(t)$ را مینیمم می کند. بنابراین برای $\varepsilon > 0$، داریم:

$$P(S'_n \ge n\varepsilon) \le \exp\left[\frac{-n\varepsilon^2}{4c^2}\right]$$

نتیجه ۴.۴. *برای هر $\varepsilon > 0$، داریم: تحت شرایط قضیه (۳.۴)*

$$P(|S'_n| \ge n\varepsilon) \le 2\exp\left[\frac{-n\varepsilon^2}{4c^2}\right]$$

اثبات.

$$P(|S'_n| \ge n\varepsilon) = P(S'_n \ge n\varepsilon) + P(-S'_n \ge n\varepsilon)$$

$$P(S'_n \ge n\varepsilon) + P(S''_n \ge n\varepsilon) \le 2\exp\left[\frac{-n\varepsilon^2}{4c^2}\right]$$

مراجع

[1] Amini, D.M. and Bozorgnia,A., Negatively dependent bounded random variables, probability inequalities and the strong law of large numbers, J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 13:3 (2000), 261–267.
[2] Amini, D.M., Azarnoosh,H.A., and Bozorgnia,A., The almost sure convergence of weighted sums of ND uniformly bounded random variables, J. of Sci. Islamic Republic of Iran 10:2 (1999), 112–116.
[3] Bozorgnia, A., Patterson, R.F, and Taylor, R.L., Limit theorems for dependent random variables, In: World Congress Nonl. Anal. '92 (ed. by V. Lakshmikantham), Walter de Gruyter Publ., Berlin (1996), 1639–1650.
[4] Brindley, E. and Thompson, W., Dependent and aging aspects of multivariate survival, J. Amer. Star. Assoc. 67 (1972), 822-830.
[5] Block, H.W. and Ting, M.L., Some concepts of multivariate dependence, Comm. Star. Theor. Math. A10:8 (1981), 762.
[6] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., Multivariate negative dependence, Commun. Stat. Theory. Math. 4 (1981), 307–337.
[7] Harris, R., A multivariate definition for increasing hazard rate distributions, Ann. Math. Star. 41 (1970), 713-717.
[8] Hsu, P.L. and Robbins, H., Complete convergence and the law of large numbers, Proc.Nat.Acad. Sci. 33 (1947), 25–31.
[9] Karlin, S., Classes of orderings of measures and related correlation inequalities, J. Mull. Analysis 10 (1980), 499-516.
[10] Matula, P., A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables, Slat. Probab. Letters 15 (1992), 209-213.
[11] Petrov, V.V., Limit Theorems of Probability Theory, Oxford, New York 1995.
[12] Serfling, R.J., Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York 1980.
[13] Jeffery.S. Rosenthal, A first look at rigorous probability theory, Second Edition, World Scicntific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.
[14] Lehmann, E., Some concepts of dependence, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1137-1153.
[15] Wang, Xu., Deng, Xi., Liu, Y., Zhou, Yu., (2014). Complete Convergence forWeighted Sums of a Class of Random Variables,Filomat 28:3, 509–522.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–140، صص. ۹۸–۱۰۶

پیش بینی فروش شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان

عبدالسعید توماج *[آ]

[آ] عضو هیئت علمی گروه آمار و ریاضی دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران .

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
سری زمانی
پیش بینی
ARIMA فصلی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

پیش بینی میزان فروش، نقش بسیار مهمی را در مدیریت تولید و تامین موثر شرکت‌های تولیدی برعهده دارد. نیازمندی‌ها و محدودیت‌های ویژه‌ی نگهداری از مواد اولیه و محصولات این نقش را به مراتب پررنگ تر کرده است. جذب بیش از نیاز مواد اضافی برای تولید محصول یا به عبارتی دپوی بیش از اندازه مواد مورد نیاز هزینه های بسیار بالا و رکود سرمایه را موجب می‌گردد که البته با پیش بینی صحیح تقاضا و در نتیجه‌ی آن برنامه‌ریزی موثر تولید و تامین، می‌توان این تهدیدات را به حداقل رساند. در این راستا به سبب اهمیت بالای این موضوع، استفاده از توابع قدرتمند و کارا برای پیش‌بینی فروش مرسوم شده است. در این پژوهش با استفاده از مدل آریما (ARIMA) فصلی به مدل سازی و پیش بینی میزان فروش شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان در روزهای آتی پرداخته شده و سپس با بررسی شرایط متفاوت پیش‌بینی‌شده‌ی تقاضا در بازار، به مدیران در تدوین استراتژی فروش و بازاریابی کمک شده است.

۱. مقدمه

با توجه به تحولات و تغییرات به وجود آمده در فضای کسب‌وکار بین‌المللی و تاثیر آن بر اقتصاد ملی کشورها، به خصوص بر بخش صنعت، رقابت سنگینی بین قدرتهای موجود در بازار جهانی شکل گرفته است [۷]. اقتصاد جهانی و به تبع آن اقتصاد ایران دوران رکود و نزول شاخص‌های اقتصادی را طی می‌کنند. با این وجود شاید بتوان این دوران رکود را برای حوزه بازاریابی و تبلیغات به مثابه یک فرصت و دوران طلایی تلقی کرد چرا که در چنین شرایطی بنگاه‌های اقتصادی تلاش‌های بیشتری را معطوف فعالیت‌های بازاریابی می‌نمایند و دانش و تخصص بازاریابی اهمیت و جایگاه رفیع‌تری در استمرار فعالیت و بقای کسب‌وکارها می‌یابد [۸]. بازاریابی، وسیله شناسایی و برآورده ساختن نیازهای مشتریان به روشی سودمند است و نقشی حیاتی را در حفظ مشتریان موجود و در جذب و به دست آوردن مشتریان جدید ایفا می‌کند. سودآورترین شرکتها در بحران اقتصادی نوعاً شرکتهایی هستند که با موفقیت استراتژیهای بازاریابی را ترسیم و اجرا می‌کنند؛ اما تعیین اینکه چه استراتژی بازاریابی باید اتخاذ شود کار چندان ساده‌ای نیست. بنابراین اگر شرکتی خواهان فعالیت در محیط متلاطم امروزی است، باید با برنامه‌ریزی و تعیین استراتژی‌های مناسب، خود را برای مبارزه با چالش‌های محیطی آماده ساخته و به بقای خویش ادامه دهد. در هنگام برنامه‌ریزی، مدیران اقداماتی که در آینده انجام خواهند داد را تعیین می‌کنند؛ بنابراین اولین قدم در برنامه‌ریزی، پیش‌بینی یا برآورد تقاضای آینده برای کالاها و خدمات و منابع مورد نیاز برای تولید آن‌هاست. برآورد تقاضای آینده کالاها و خدمات که «پیش‌بینی فروش» نامیده می‌شود نقطه شروع همه پیش‌بینی‌ها در مدیریت تولید و فروش است [۱۰]. پیش‌بینی فروش، به دلیل رقابت بسیار زیاد در صنایع مختلف، نقش بسیار مهمی درسیستم‌های حمایت از تصمیمات مدیران دارد. پیش–بینی باعث می‌شود سازمان سطح مطلوبی از موجودی داشته باشد، تصمیم مناسبی برای خرید اتخاذ کند و اقدامات و فعالیت‌های کارایی داشته باشد. همه اینها بر سودآوری سازمان تأثیرگذارند؛ بنابراین پیش‌بینی برای رسیدن به سودآوری، امری مهم تلقی می‌شود [۳]. شایان ذکر است که هر روزه مدیران بدون آگاهی از اتفاقات آتی تصمیم‌گیری می‌نمایند. نیازمندی‌های انبار بدون داشتن قطعیت

*سخنران
پست الکترونیک : ab.toomaj@gmail.com (عبدالسعید توماج)

از اوضـاع آینده سفارش داده می‌شود، تجهیزات بدون آگاهی از روند تقاضا خریداری می‌شوند و سرمایه‌گذاری‌ها بدون آگاهی از وضعیت سوددهی آتی آنها انجام می‌پذیرد. با توجه به مطالب بیان شده، مدیران همیشه برآن بوده‌اند که تخمین بهتری از آینده داشته باشند. تخمین صحیح و درست، هدف اصلی پیش‌بینی می‌باشد. شروع به کار همه بخش‌های مختلف خودرو نیاز به یک نیروی اولیه دارد. این نیروی اولیه که از ابتدای ساخت خودروهای احتراق داخلی بنزین‌سوز (خودروهای مدرن) از یک انرژی الکتریکی اولیه تامین می‌شد اکنون نیروی بخش‌های بسیاری از قسمت‌های خودرو را تامین می‌کند. صنعت خودروسازی در ابتدای راه خود از الکتریسیته تنها برای آتش زدن سوخت درون موتور استفاده می‌کرد، اما به مرور زمان استارت، چراغ‌ها، بوق‌ها و بخش‌های دیگری به سیستم‌های برقی خودروها اضافه شدند که برای فعالیت خود نیاز به جریان برق دارند. در خودروهای امروزی سیستمی پیچیده از مدارهای الکتریکی دیده می‌شود که انرژی مورد نیاز بخش‌های مختلف آن‌ها را تامین، ذخیره و تقسیم می‌کند. باتری خودرو اولین و اصلی‌ترین بخش این سیستم پیچیده است. باتری ذخیره‌کننده الکتریسیته مورد نیاز خودرو است و سرمنشاء سیستم برقی خودروها. باتری اتومبیل که گونه‌ای از باتری‌های قابل‌شارژ است در انواع مختلف و با ولتاژهای متفاوت بسته به نیاز خودروها استفاده می‌شود. باتری از قطعات کم استهلاک و کم دردسر خودرو است که در هر شرایط آب و هوایی‌ای کار می‌کند، اما در هر حال طول عمر مفیدی حدود ۴ سال (در بهترین حالت) دارد. البته طول عمر انواع مختلف باتری متفاوت است و هر یک پس از گذشت زمانی سولفاته خواهند شد اما می‌توان با رفتارهای درست این طول عمر مفید را تا حد زیادی افزایش داد. نکته مهم درباره سلامت خودرو این است که بر سلامت سایر بخش‌های آن تاثیر مستقیم دارد و درصورت خوب کار نکردن به قطعات دیگر نیز آسیب وارد می‌کند. باتری طی دهه های آینده کالا و قطعه‌ای کاملا استراتژیک محسوب می‌شود و در این میان باتری خودرو و اشیای دیگر از جایگاه خاصی برخوردار خواهند شد. بنابراین، پیش‌بینی فروش این محصول در تعیین سیاست بهره‌برداری از منابع و بالابردن پتانسیل شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان در استفاده از روشهای نوین و کسب مزیت رقابتی و سودآوری بیشتر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. علی‌رغم افزایش اهمیت محصولات ملی و نیاز به بهبود توانایی مدیران بازاریابی به پیش‌بینی فروش دقیق‌تر این محصولات، توجه کافی به روش‌های جدید پیش‌بینی برای این نوع محصولات نشده است. امروزه روشهای کمی، به یکی از مهمترین ابزارهای پیش‌بینی برای اخذ تصمیمات و سرمایه‌گذاریهای کلان در بازارها تبدیل شده‌اند. دقت پیش‌بینی، یکی از مهمترین فاکتورهای انتخاب روش پیش‌بینی است. هدف از انجام این پژوهش، پیش بینی فروش شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان با استفاده از روش سری های زمانی است و بر مبنای آن استراتژی بازاریابی مناسبی را به این شرکت ارائه دهد. برای روشن شدن فرآیند پیش بینی اشاره به این موضوع ضرورت دارد که روشهای پیش‌بینی می‌تواند کاملاً ساده یا پیچیده کوتاه مدت یا بلند مدت کمّی یا کیفی و... باشد. اما علی رغم تنوع در روش‌های موجود می‌توان آنها را به دو گروه اصلی روشهای کیفی و کمّی، طبقه‌بندی نمود ([۹] و [۵]). در روشهای کیفی پیش بینی مبتنی بر قضاوت ذهنی است و پیش‌بینی کننده با استفاده از تجارب خود و در نظر گرفتن شرایط کنونی و تغییرات قابل پیش‌بینی، داده‌های آینده را پیش‌بینی می‌کنند. در این فرآیند بعضاً فقدان یا عدم دسترسی به داده های تاریخی یا عدم کفایت حجم آن، استفاده از روشهای قضاوتی را ضروری می سازد. در روشهای کمّی با استفاده از تجزیه و تحلیل داده‌های گذشته، ارزش متغیر مورد نظر پیش‌بینی می‌شود. روشهای رگرسیون و سری‌های زمانی نمونه‌ای از آن است. سری زمانی خود به مدل‌های یک متغیره و چند متغیره تقسیم می‌شود. در مدل های یک متغیره تنها براساس ارزش مقادیر گذشته یک سری زمانی، ارزش و مقادیر آتی متغیر وابسته پیش‌بینی می‌شود در حالی که در مدل‌های چند متغیره با شناسایی و تشخیص متغیرهایی که با متغیر مورد مورد نظر برای پیش‌بینی درارتباط است، مدل آماری مربوط طراحی می‌شود و برای پیش بینی بکار می‌رود. دراین مدل‌ها با شناسایی روابط بین متغیرها می‌توان نتیجه پیش‌بینی را بهبود بخشید. با توجه به دسترسی به داده‌های تاریخی و در نظر گرفتن مزایای روش کمّی، در این تحقیق از مدل‌های مبتنی بر داده‌های تاریخی در چارچوب سری زمانی استفاده خواهد شد. سری زمانی، مشاهدات متوالی زمانی مربوط به یک متغیر معین است و معمولاً برای دستیابی به یک الگوی تاریخی که برای پیش‌بینی مورد نظر مفید باشد، از سری زمانی استفاده می شود. به عبارت دیگر در تجزیه و تحلیل سری زمانی تلاش می‌شود با استفاده از مقادیر گذشته مقادیر آینده یک متغیر پیش بینی شود. هر چند در پیش بینی هایی که مبتنی بر روند گذشته است فرض می شود که گذشته آینه‌ای برای آینده است و روندهای گذشته در آینده ادامه می یابد ولی باید توجه داشت که تمامی پیش بینی ها با مقداری عدم قطعیت همراه است. بنابراین نباید امیدوار بود که هر پیش بینی کاملاً دقیق باشد ولی باید انتظار داشت که منافع حاصل از پیش بینی، بیشتر از هزینه فرصت ناشی ازعدم پیش بینی باشد. به هرحال، محقق در این پژوهش بر آن است که دقت پیش بینی فروش بوسیلهٔ مدل‌های کمّی سری های زمانی با استفاده از متدولوژی باکس– جنکینز را مورد آزمون قرار دهد. در این تحقیق برای تحلیل آماری پیش‌بینی فروش از روش سری‌های زمانی و برای محاسبات آن از نرم‌افزار MINITAB استفاده است.

۲. روش تحقیق

قلمرو زمانی تحقیق، از فروردین سال ۱۳۹۹ تا مرداد سال ۱۴۰۰ می‌باشد و قلمرو مکانی تحقیق، شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان می‌باشد. در حالت کلی می توان روش های معمول پیش بینی را به دو دسته رگرسیونی و غیر رگرسیونی تقسیم بندی نمود. روش های غیر رگرسیونی شامل روش میانگین متحرک و انواع روش‌های تعدیل نمایی است. روش‌های رگرسیونی نیز به دو گروه علی و غیرعلی تقسیم بندی می شوند. از جمله روش های رگرسیون علی می توان به مدل خود رگرسیو با واریانس ناهمسان شرطی و از جمله روش های رگرسیون غیر علی می توان به فرآیند ARMA و ARIMA فصلی اشاره نمود (بریم نژاد و بکشلو، ۴۹۳۲.) در بسیاری از مطالعات انجام شده، روش برARIMA دیگر روش های خطی پیش بینی برتری داشته است. لذا در این مطالعه به بررسی روش خطی ARIMA فصلی پرداخته می شود.

۳. مدل سری زمانی

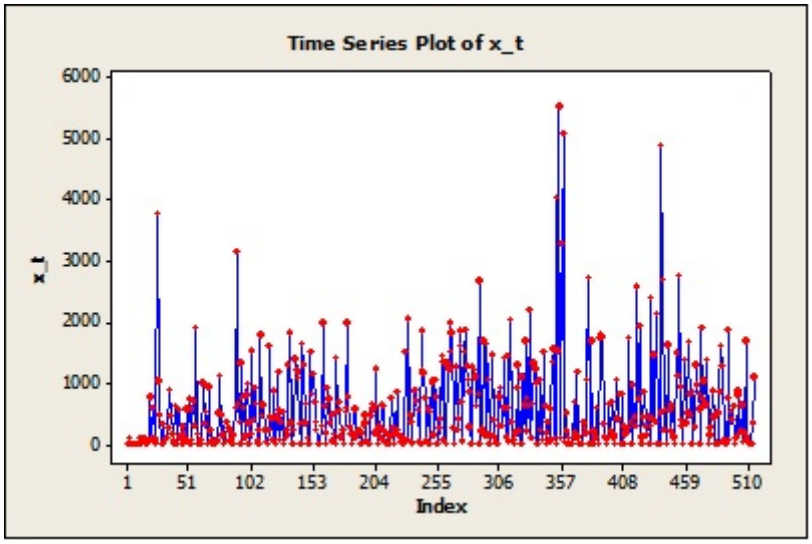
سری زمانی مجموعه ای از مشاهدات است که بر حسب زمان و یا هر کمیت دیگری مرتب شده باشند. و معمولا آن را به صورت زیر نشان می دهند $x_1, x_2, \cdots, x_n$. [۶] اگر این مجموعه از مشاهدات بصورت پیوسته باشند سری زمانی را پیوسته می گویند. و اگر مجموعه گسسته باشد سری زمانی گسسته خوانده می شود. در سری های زمانی گسسته مشاهدات در فواصل معینی به وقوع می پیوندد. اغلب برای تجزیه و تحلیل سری های زمانی پیوسته آنها را بصورت گسسته در آورده و تجزیه و تحلیل صورت می گیرد. دلیل این کار این است که در سری های زمانی پیوسته فقط مقادیر رقمی شده در فواصل گسسته برای محاسبات قابل استفاده است [۲]. در اقتصاد قیمت سهام در بازار بورس، شاخص های قیمت ماهانه، ارقام فروش سالانه و در هواشناسی بیشترین و کمترین درجه حرارت روزانه، نمونه هایی از سری زمانی هستند [۱]. رفتار گونه های مختلف سری های زمانی را می توان به وسیله ۱مدل خود همبسته تصادفی ،(AR) میانگین متحرک ،(MA) خودهمبسته میانگین متحرک (وARMA) خودهمبسته میانگین متحرک یکپارچه ARIMA توصیف کرد [۴]. به طور کلی فرآیندی را (گویندARMA(p،q که شامل مرتبهp جمله خودرگرسیون و مرتبهq جمله میانگین متحرک باشد. هم چنین اگر یک سری زمانی پس از مرتبهd تفاضل گیری ساکن شود و سپس توسط فرآیند (مدلARMA(p،q سازی گردد. در این صورت سری زمانی اصلی، سری زمانی خودرگرسیونی میانگین متحرک انباشته (استARIMA(p،d،q [۱۱]. عموما یک سری زمانی را می توان به صورت ترکیبی از ارزش ها و خطاهای گذشته مدل سازی کرد و به صورت) وARIMA(p،d،q یا به شکل رابطه ۴بیان کرد. در عمل بیشتر سری های زمانی شامل یک مولفه فصلی دوره ای است که هر S مشاهده را تکرار می کنند. S نشان دهنده طول دوره فصلی می باشد. کمترین دوره زمانی برای این پدیده ی تکراری را دوره فصلی می نامند. برای داده های ماهانه =۱۲S و برای داده های فصلی (سه ماهه) =۱۲S می باشد. باکس و جنکیز برای بررسی فصلی بودن، مدل ARIMA را تعمیم می دهند و مدل فصلی ضربی کلی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi_p(B)\Phi_p(B^s)w_t = \theta_q\Theta_Q(B^s)a_t,$$

مدل فوق را یک مدل فصلی ضرب پذیر از درجه $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ می نامند. $\phi_p, \Phi_p, \theta_q, \Theta_Q$ به ترتیب چندجمله ای هایی از مرتبه ی p،P،q،Q هستند و a_t نمادی است که باکس و جنکیز برای یک فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_a^2 بکار می برند. متغیرهای $w_t = \nabla^d\nabla_s^D x_t$ با تفاضلی کردن سری اولیه x_t برای از بین بردن روند و فصلی بودن بوجود می آیند [۶].

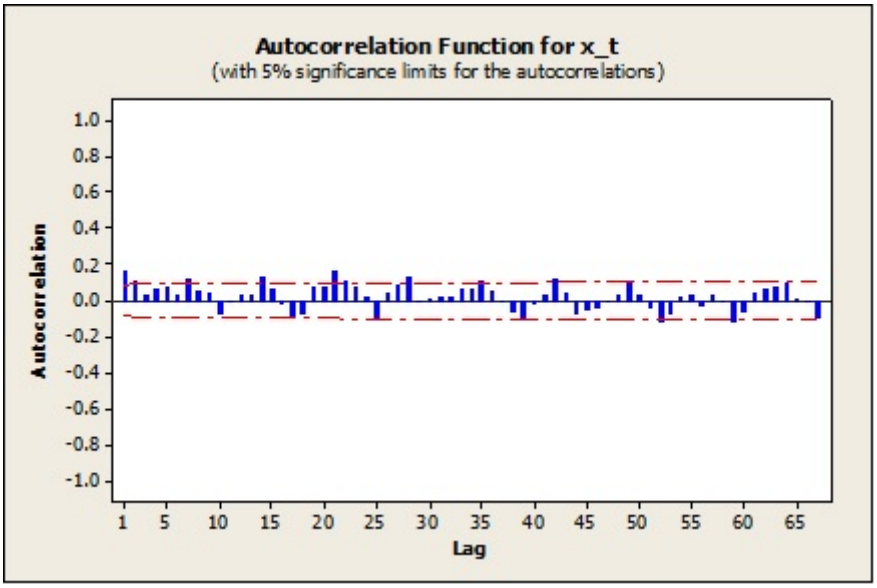
۴. یافته های تحقیق

در مدل‌سازی با استفاده از روش سری زمانی، متغیر وابسته با استفاده از متغیرهای مستقل برآورد می‌گردد. برای به دست آوردن رابطه بین متغیر وابسته و متغیرهای مستقل، نرم‌افزار Minitab استفاده شد. اولین گام در تجزیه و تحلیل سری زمانی رسم نمودار سری و نمودار ACF آن برای بررسی ایستایی سری می باشد. یادآوری میکنیم از آنجایی که در روزهایی فروش باطری صفر بوده است لذا برای جلوگیری از اشکال در محاسبات بعدی بدون اینکه از کلیت مساله کم شود به داده ها عدد یک را اضافه می کنیم و لذا با داده های تبدیل شده‌ی $x_t + 1$ کار انجام خواهد شد. نمودار سری تعداد فروش شرکت تولید و توزیعی نیک باتری گلستان در شکل ۴ نشان داده شده است.



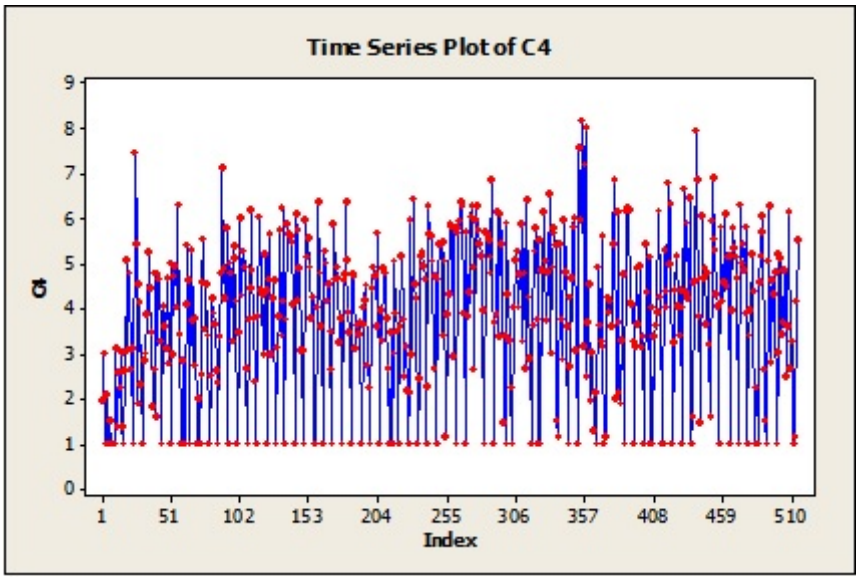
شکل ۱: نمودار سری زمانی تعداد فروش باتری

نمودار این سری یک نوع رفتار فصلی را نشان می دهد. همچنین نمودار ACF تعداد فروش شرکت تولید و توزیعی نیک باتری گلستان در شکل ۲-۴ داده شده است.



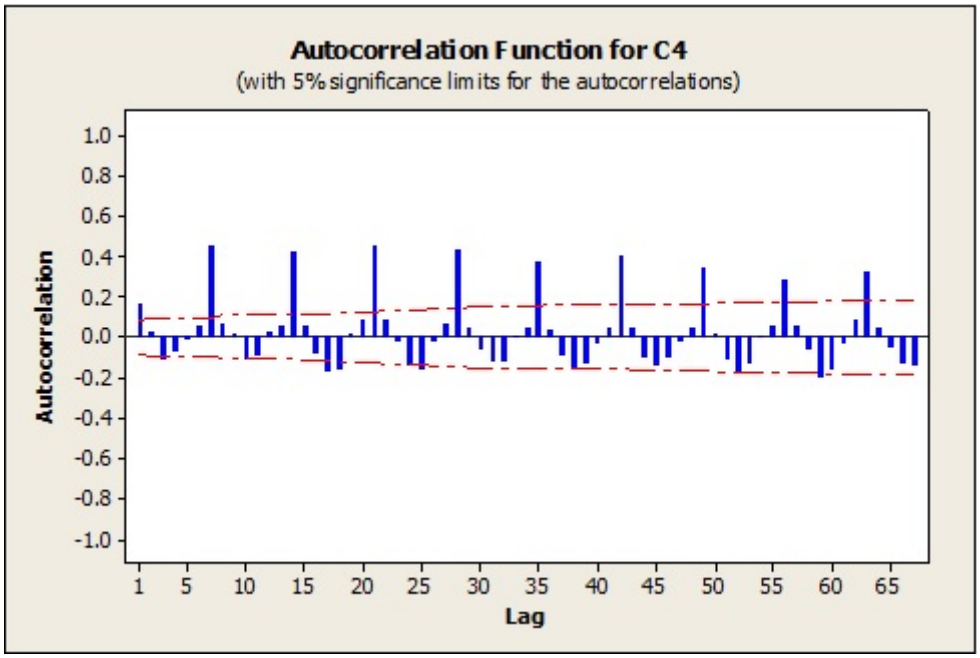
شکل ۲: نمودار ACF تعداد فروش باتری

برای بررسی بیشتر سری داده‌ها، ابتدا به بررسی ایستایی سری در واریانس می پردازیم. برای این کار از تبدیلات باکس–کاکس استفاده شد و بهترین مقدار برای تبدیل پارامتر $\lambda = ۰/۲۴$ می باشد. نمودار سری تبدیل شده در شکل ۴-۴ نشان داده شده است.



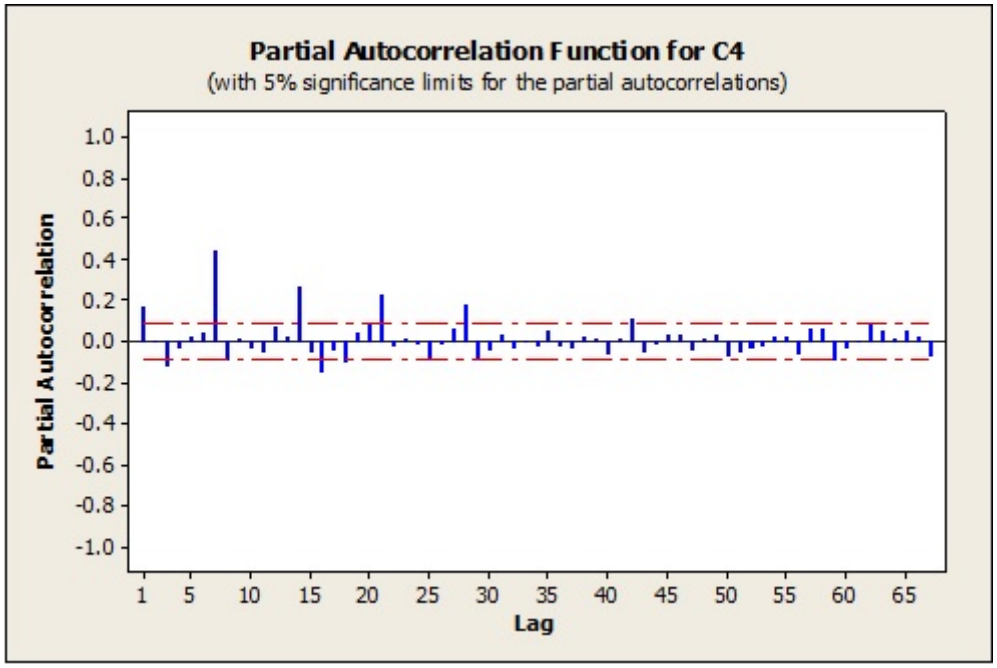
شکل ۳: نمودار تبدیلات باکس–کاکس برای سری تعداد فروش باتری

نمودار شکل ۴-۴ بیانگر یک سری زمانی است که در میانگین و واریانس ایستا می باشد. نمودارهای ۴-۵ و ۴-۶ ACF و PACF داده‌های تبدیل شده سری تعداد فروش باتری را نشان می‌دهند.
نمودارهای ACF و PACF داده‌های تبدیل شده فصلی بودن داده‌های سری را به طور برجسته‌ای نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود در تاخیرهای ۷، ۱۴، ۲۱ خودهمبستگی مثبت شدیدی که به آرامی در حال تنزل است وجود دارد. اکنون یک تفاضل فصلی با دوره تناوب ۷ را



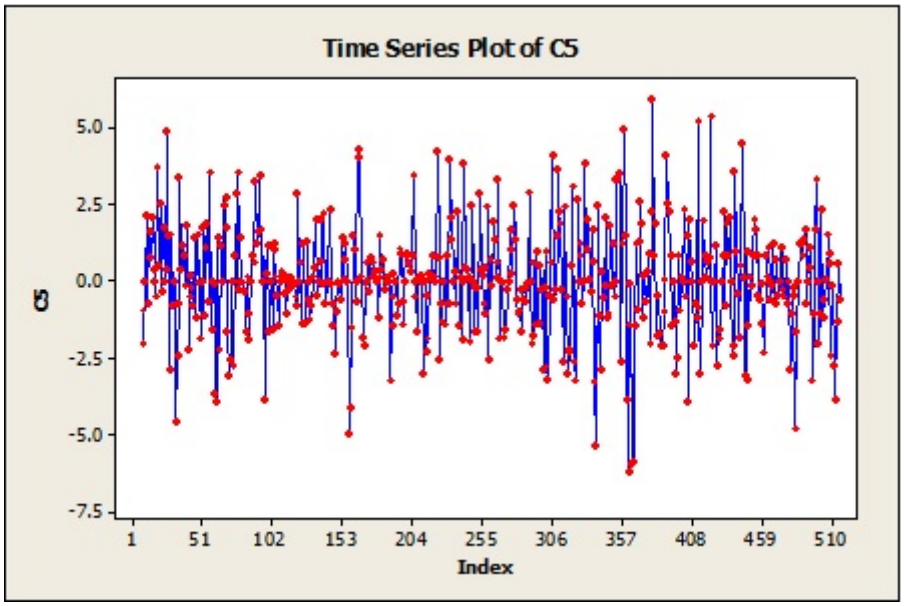
شکل ۴: نمودار ACF برای داده‌های تبدیل شده

روی داده‌های تبدیل شده اعمال می‌کنیم. نمودارها در زیر داده شده است.

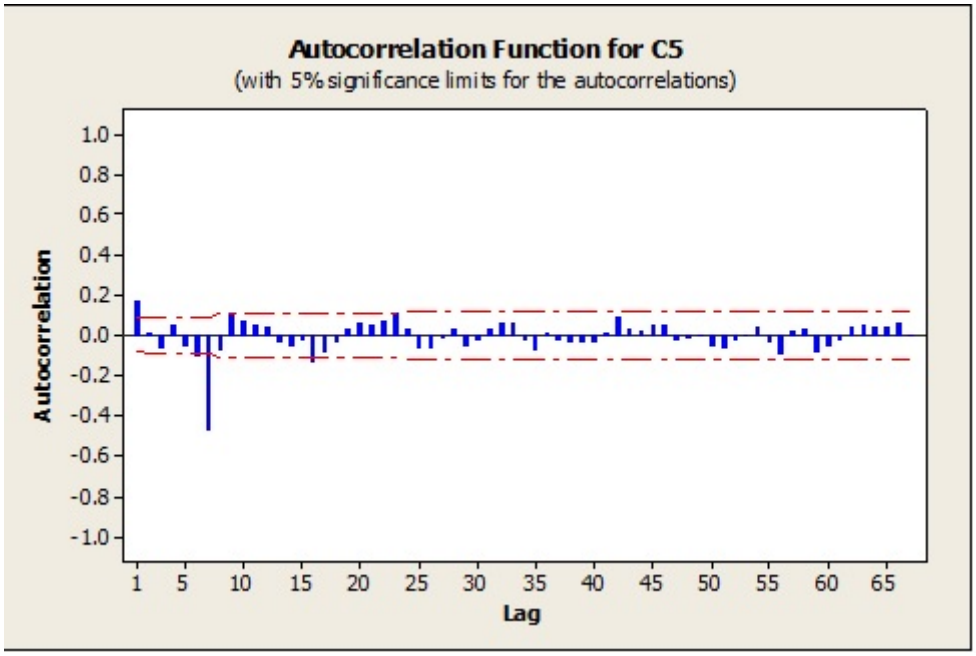


شکل ۵: نمودار PACF برای داده‌های تبدیل شده

نمودار سری تفاضلی شده از مرتبه‌ی ۷ نشان می‌دهد که پدیده‌ی فصلی تا حدودی برطرف شده است. نظر به اینکه تابع خودهمبستگی قطع شده است و تابع خودهمبستگی جزیی آهسته تر کاهش می‌یابد، مدل دارای شکل میانگین متحرک خواهد بود. بنابراین مدل آریمای فصلی ضربی



شکل ۶: نمودار سری تفاضلی شده از مرتبه‌ی ۷



شکل ۷: نمودار ACF سری تفاضلی شده از مرتبه‌ی ۷

ARIMA(۱،۰،۰)×(۱،۱،۰)۷ می‌باشد. پس از بررسی مدل مورد نظر به این نتیجه رسیده شد که فرضیه $H_0 : \theta_0 = 0$ در سطح اطمینان ۹۵ درصد رد نمی‌شود. پس جمله ثابت از مدل حذف و نتایج آزمون در جدول ۴-۳ نشان داده شده است:

از جدول ۴-۱ مشاهده می‌شود که مقدار برآورد برای پارامترهای میانگین متحرک غیرفصلی و فصلی به ترتیب عبارتند از ۰/۱۴۶۷- و ۰/۸۱۵۴ و هر دو پارامتر اختلاف معنی‌داری با صفر دارند. بنابراین مدل مورد نظر مورد قبول می‌باشد. اکنون به بررسی مناسبت مدل بر اساس باقیمانده‌ها پرداخته خواهد شد. مدل ARIMA(۱،۰،۰)×(۱،۱،۰)۷ به عنوان الگوی اولیه مشخص گردیده، سپس با برازش و اصلاح الگوی اولیه، مدلهای

جدول ۴-۱: نتایج مدل ARIMA(۰,۰,۱) × (۰,۱,۱)۷

نوع	ضرایب	آماره تی	p-مقدار
MA(۱)	-۰/۱۴۶۷	-۳/۳۳	۰/۰۰۱
SMA(۷)	۰/۸۱۵۴	۳۱/۳۰	۰/۰۰۰

جدول ۴-۳: جدول الگوهای شناسایی شده

مدل	نام الگو
ARIMA(۰,۰,۱) × (۰,۱,۱)۷	الگوی M_1
ARIMA(۰,۰,۱) × (۰,۱,۲)۷	الگوی M_2
ARIMA(۰,۰,۲) × (۰,۱,۱)۷	الگوی M_3
ARIMA(۰,۰,۲) × (۰,۱,۲)۷	الگوی M_4
ARIMA(۰,۱,۲) × (۰,۱,۲)۷	الگوی M_5

نهایی آریمای فصلی به صورت زیر تعریف شده است:
نتایج آزمون پرت-مانتو بر روی الگوهای شناسایی شده در جدول زیر داده شده است.
هیچکدام از مدل‌های فوق با افزایش پارامتر در مدل موجب بهبود مدل نشده است بنابراین مدل نهایی ۱M یعنی)ARIMA۰،۰،۱)×(۱،۱،۰)۷ مورد پذیرش قرار گرفته است. اکنون به پیش بینی فروش داده‌های تبدیل شده در ۳۰ روز از ۲ مرداد ۱۴۰۰ تا ۳۰ مرداد پرداخته می‌شود.
در این فصل، ابتدا به توضیح شاخص‌ها و چگونگی جمع‌آوری داده‌ها پرداخته شد. سپس مراحل طراحی و ساخت مدل سری زمانی تشریح شد و پس از آن پیش‌بینی تعداد فروش باتری‌های شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان مورد کندوکاو قرار گرفت.

۵. نتیجه گیری

برنامه ریزی موثر در همه حوزه های کسب و کار، مستلزم داشتن پیش بینی درست از وضعیت آینده است. پیش بینی یکی از مهم ترین ابزارهای مدیران، جهت اداره سازمان ها به خصوص در محیط های رقابتی است. پیش بینی ها هرگز به طور کامل با واقعیت انطباق نمی یابند و هیچ روش منحصر به فردی به عنوان بهترین روش پیش بینی وجود ندارد. پیش بینی فروش در شرکتی از اهمیت اساسی برخوردار است. در این مقاله کارایی مدل سری های زمانی در پیش بینی فروش تعداد باتری شرکت تولیدی و توزیعی نیک باتری گلستان بررسی شد و مقادیر آن برای

جدول ۴-۴: نتایج آزمون پرت-مانتو بر روی الگوهای شناسایی شده

الگو	نوع	ضرایب	آماره تی	p-مقدار
الگوی M_2	MA(۱)	-۰/۱۴۶۲	-۳/۳۲	۰/۰۰۱
	SMA(۷)	۰/۸۲۹۱	۱۸/۵۳	۰/۰۰۰
	SMA(۱۴)	-۰/۰۱۷۸	-۰/۳۹	۰/۶۹۵
الگوی M_3	MA(۱)	-۰/۱۵۹۶	-۳/۵۹	۰/۰۰۰
	MA(۲)	-۰/۰۶۹۹	-۱/۵۸	۰/۱۱۶
	SMA(۷)	۰/۸۱۹۴	۳۱/۶۹	۰/۰۰۰
الگوی M_4	MA(۱)	-۰/۱۵۹۰	-۳/۵۷	۰/۰۰۰
	MA(۲)	-۰/۰۷۰۴	-۱/۵۸	۰/۱۱۴
	SMA(۷)	۰/۸۳۵۱	۱۸/۶۴	۰/۰۰۰
	SMA(۱۴)	-۰/۰۲۰۲	-۰/۴۵	۰/۶۵۶
الگوی M_5	MA(۱)	۰/۸۶۸۵	۱۳۱۵/۰۰	۰/۰۰۰
	MA(۲)	۰/۱۰۲۱	۷/۸۰	۰/۰۰۰
	SMA(۷)	۰/۸۵۲۲	۱۸/۵۰	۰/۰۰۰
	SMA(۱۴)	-۰/۰۲۲۹	-۰/۵۰	۰/۶۱۵

۳۰ روز آینده بدست آمد. مدل مناسب پس از بررسی انواع مدل‌ها مدل فصلی)ARIMA۰،۰،۱)×(۰،۱،۱)۷ می‌باشد که به خوبی به پیش‌بینی داده‌ها منتج گردید. نتایج نشان می دهد که مدل سری های زمانی، نتایج قابل قبولی در زمینه پیش بینی تعداد فروش باتری دارد.

مراجع

[1] T.W. Anderson. *The statistical analysis of time series*, volume 19. Springer-Verlag, New York, 2011.

جدول ۴-۵: مقادیر واقعی، برآوردی و خطای برآورد داده‌های تبدیل شده تعداد فروش باتری بر اساس مدل ARIMA(۰,۰,۱) × (۰,۱,۱)۷

روز	۱۴۰۰/۵/۲	۱۴۰۰/۵/۳	۱۴۰۰/۵/۴	۱۴۰۰/۵/۵	۱۴۰۰/۵/۶	۱۴۰۰/۵/۷	۱۴۰۰/۵/۸	۱۴۰۰/۵/۹	۱۴۰۰/۵/۱۰	۱۴۰۰/۵/۱۱
مقدار واقعی	۴/۶۴۶۹۸	۴/۸۶۹۵۸	۵/۰۵۱۸۴	۳/۸۹۵۷۸	۳/۷۷۶۵۴	۱/۰۹۰۱۳	۴/۴۹۵۶۷	۴/۹۰۱۸۳	۴/۹۷۲۴۱	۵/۰۵۱۸۴
مقدار پیش بینی‌شده	۵/۲۳۸۵۵	۵/۱۳۴۲۵	۳/۴۵۰۸۲	۳/۷۲۵۵۷	۴/۸۷۳۰۱	۲/۵۰۴۱۱	۳/۶۱۲۴۱	۶/۱۳۱۸	۲/۶۹۳۸۳	۳/۲۷۴۱۳
خطای پیش‌بینی	۰/۵۹۱۵۷	۰/۲۶۴۶۷	/۶۰۱۰۲۰-	-۰/۱۷۰۲۱	۱/۰۹۶۴۷	۱/۴۱۳۹۸	-۰/۸۸۳۲۶	۱/۲۲۹۹۷	-۲/۲۷۸۵۸	-۱/۷۷۷۷۱

[2] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day, New York, 1976.

[3] S. Shahabuddin. Forecasting automobile sales. *Management Research News*, 226:267–298, 2009.

[4] G.U. Yule. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special refrence to wolfers sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character.*, 32:670–682, 1927.

[۵] عادل آذر، امیر افسر و پرویز احمدی. مقایسه روش های کلاسیک و هوش مصنوعی در پیش بینی شاخص قیمت سهام و طراحی مدل ترکیبی. *فصلنامه مدرس علوم انسانی*، ۱۰(۴۹):۱-۱۶، ۱۳۸۵.

[۶] حسینعلی نیرومند و ابوالقاسم بزرگ‌نیا. *سري‌هاي‌زماني* انتشارات پیام نور، تهران، ۱۳۸۴.

[۷] امیررضا ممدوحی، محمدرضا سیدهاشمی. موانع اجراي‌استراتژيهاي‌بازاريابي: ارائه ي يك طبقه بندي ورتبه بندي آن براي شركت ايران خودرو. *نشریه مدیریت بازرگانی*، ۶: ۱۱۹-۱۳۴، ۱۳۸۷.

[۸] سید محمود حسینی، مریم نکوئی زاده و مریم مخزنی قدیمی. تجزیه و تحلیل استراتژی‌های بازاریابی شرکت‌های خدماتی در دوران رکود. *چشم‌انداز مدیریت بازرگانی*، ۶:۱۱۷-۱۳۹، ۱۳۹۰.

[۹] عادل آذر و منصور مومنی. *آمار و کاربرد آن در مدیریت*. انتشارات سمت، تهران، ویرایش ۲، ۱۳۸۴.

[۱۰] سید عباس کاظمی و مسعو کسایی. *مدیریت تولید و عملیات*. انتشارات سمت، تهران، ویرایش ۲، ۱۳۸۰.

[۱۱] دامودار گجراتی. *مبانی اقتصادسنجی*. انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ویرایش ۲، ۱۳۳۴.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–142، صص. ۱۰۷–۱۱۴

شاخص‌های تیل و محاسبه آنها در خانواده توزیع‌های پارتو

مهدی یعقوبی اول ریابی*،آ، شبنم شفیقآ

آگروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی،گناباد، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
آنتروپی تعمیم یافته
توزیع‌های پارتو
شاخص‌های تیل

چکیده

شاخص تیل [1] یکی از مهمترین معیارهای اندازه‌گیری نابرابری درآمد است که توسط هنری تیل (۱۹۶۷) معرفی شد. این شاخص به طور گسترده ای برای مطالعه میزان نابرابری در توزیع‌های درآمد مورد استفاده قرار می‌گیرد. تیل با استفاده از مفهوم آنتروپی در نظریه اطلاع روشی را برای ارزیابی نابرابری در توزیع‌های درآمد معرفی نمود. در این مقاله ابتدا شاخص‌های تیل را معرفی و ارتباط آنها را با کلاس اندازه های آنتروپی تعمیم یافته مطالعه خواهیم کرد. سپس با استفاده از روابط بدست آمده، شاخص‌های تیل را برای خانواده توزیع‌های پارتو که شامل توزیع‌های مهم و پرکاربرد در مباحث مربوط به درآمد هستند محاسبه خواهیم کرد.

۱. مقدمه

عنصر «درآمد» نقش محوری وتعیین کننده در عمده تحلیل‌های اقتصادی از جمله موضوعات مربوط به مطلوبیت، رفاه، فقر، نابرابری، توسعه و دیگر موضوعات دارد.

با همین زاویه نگاه، وقتی از نابرابری اقتصادی سخن به میان می‌آید، بی درنگ بحث ها بر نابرابری درآمدی متمرکز می‌شود، در صورتی که نابرابری اقتصادی اعم از نابرابری درآمدی است چرا که در معیارهای نابرابری درآمدی، متغیرهایی نظیر بیکاری، نبودآموزش مناسب، محرومیت های اجتماعی از جمله تبعیض جنسیتی، آزادی و جنبه های مختلف کیفیت زندگی(نظیر سلامتی و طول عمر) مورد توجه قرار نگرفته است. فراتر از این، نابرابری اقتصادی نیز متأثر از انواع دیگر نابرابری‌ها نظیر نابرابری سیاسی، حقوقی و نابرابری اجتماعی است. برای اندازه‌گیری میزان نابرابری در توزیع درآمد یک جامعه شاخص‌های متفاوتی ارائه شده است. برخی از این شاخص‌ها به جهت راحتی در محاسبه، برخی به جهت ملاحظات آماری وبرخی نیز بنا به مفهومی که از عدالت، مساوات و رفاه اجتماعی به عمل آمده است ارائه شده اند.

در یک تقسیم بندی شاخص‌های نابرابری را به دو طبقه‌ی شاخص‌های عینی [1] و شاخص‌های قیاسی [2] تقسیم می‌کنند. مطابق این تقسیم بندی شاخص‌های عینی ابزارها و معیارهایی هستند که برمبنای اندازه‌گیری پراکندگی درآمد افراد جامعه به تجزیه وتحلیل الگوی توزیع درآمد وتعیین میزان نابرابری آن پرداخته توجه مستقیم به مطلوبیت‌های جامعه، تابع رفاه فردی وتابع رفاه اجتماعی ندارند. منتقدین شاخص‌های عینی معتقدند که بدون استفاده از فرض‌هایی در ارتباط با تابع رفاه اجتماعی امکان رتبه بندی کامل توزیع‌های درآمد، اندازه‌گیری نابرابری آنها وتعیین میزان تفاوت و اختلاف بین الگوها وجود ندارد و بر این اساس شاخص‌های نابرابری را بر پایه مقایسه حداکثر رفاه اجتماعی، مطابق تعریفی که از تابع رفاه به عمل می آید، با میزان از دست دادن بخشی از این رفاه تنظیم می کنند. این گونه شاخص‌ها را شاخص قیاسی می‌گویند. حد و مرز

*سخنران
پست الکترونیک: m_yaghoobiawal@yahoo.com (مهدی یعقوبی اول ریابی)، shafigh0687@gmail.com (شبنم شفیق)

[1] Objective
[2] Syllogistical

مشخص و صریحی بین این دو طبقه وجود ندارد به طوری که برخی معتقدند هر شاخص عینی یک شاخص قیاسی نیز هست چون این شاخص نیز در بر گیرنده‌ی اشکال خاصی از توابع رفاه اجتماعی است.
شاخص‌های مختلفی برای اندازه گیری میزان نا برابری معرفی شده اند که معروف ترین آن ها ضریب جینی، ضریب بونفرونی و شاخص زنگا است. ضریب جینی درعین محبوب بودن نقایصی نیز دارد و لذا تعمیم های مختلفی از آن معرفی شده است از جمله تعمیمی از این شاخص توسط ییتزاکی[3] (۱۹۸۳) پیشنهاد شد. همچنین شاخص آنتروپی تعمیم یافته (GE) که خود مشتمل بر چندین شاخص نابرابری مهم دیگر بود معرفی شد. حالت خاص و مهم این شاخص، شاخص‌های T_0و T_1اند که توسط تیل معرفی شده‌اند. این دو شاخص بعدها به طور گسترده توسط محققین زیادی مورد استفاده قرارگرفته‌اند که می توان به چوتوکاپانچ[4] و همکاران (۲۰۰۷)، جوردا[5] و همکاران (۲۰۱۴)، سارابیا[6] و همکاران (۲۰۱۷) اشاره کرد. در این مقاله ابتدا شاخص‌های تیل را معرفی و ارتباط آنها با کلاس اندازه های آنتروپی تعمیم یافته را مطالعه خواهیم کرد. سپس با استفاده از روابط بدست آمده، شاخص‌های تیل را برای خانواده توزیع‌های پارتو که شامل توزیع‌های مهم و پرکاربرد در مباحث مربوط به درآمد هستند محاسبه خواهیم کرد.

۲. شاخص‌های تیل

فرض کنید $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ بردار درآمد در یک جامعه N نفره با میانگین μ باشد.
تیل (۱۹۶۷) با استفاده از مفهوم آنتروپی[7] در نظریه اطلاع دو شاخص T_0و T_1 را برای اندازه گیری نابرابری معرفی نمود که به شاخص‌های تیل معروف اند و به فرم زیر تعریف می شوند:

$$T_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{\mu} \log \frac{X_i}{\mu}.$$

این شاخص در واقع تفاضل آنتروپی توزیع درآمدکنونی از آنتروپی مربوط به توزیع درآمد کاملا عادلانه (که مساوی $\log N$ است) می باشد. کمترین مقدار اندازه‌ی تیل (متناظر با توزیع کاملا عادلانه) مساوی صفر و بیشترین مقدارآن (متناظر با توزیع کاملا نا عادلانه) مساوی $\log N$ است.
بنابراین اندازه‌ی این شاخص مستقل از تعداد افراد جامعه نیست. برای محدود کردن دامنه این شاخص به فاصله‌ی بین صفر و یک می توان آن را بر $\log N$ تقسیم کرد اما در این حالت مفهوم نابرابری اندازه‌گیری شده تا حدی تغییر می‌کند. ثانیاً شاخص تیل دارای ویژگی تجزیه پذیری است که با انجام چنین تعدیلی تجزیه‌پذیری آن دچار اشکال می‌شود. البته تیل معتقد بود که وابستگی شاخص نابرابری به تعداد افراد جامعه امری طبیعی است. به این ترتیب که اگر جامعه ای از دو فرد تشکیل شده باشدکه یک فرد دارای تمام درآمد جامعه وفرد دیگر هیچ گونه درآمدی نداشته باشد، اندازه ی شاخص تیل برابر $\log 2$ خواهد بود. حال اگر جامعه ی مورد بررسی از 2×10^6 فرد تشکیل شده باشد که یکی از آن ها دارای تمام درآمد جامعه و بقیه هیچ گونه درآمدی نداشته باشند، اندازه ی شاخص تیل مساوی $\log(2 \times 10^6)$است. به اعتقاد تیل، عدم تساوی اندازه‌ی شاخص نابرابری در دو حالت مورد بررسی کاملاً منطقی است. چون نابرابری در جامعه‌ی دوم به مراتب بیشتر از نابرابری در جامعه‌ی اول است. دلیل این امر آن است که نسبت افراد بدون درآمد و سهم جمعیتی آنان از کل افراد در جامعه‌ی دوم به مراتب بیشتر از جامعه‌ی اول است. اگر درآمد جامعه‌ی دوم به طور کاملا مساوی بین نیمی از افرادآن توزیع شود و نصف دیگر افراد جامعه هیچ گونه درآمدی نداشته باشند، اندازه‌ی این شاخص برابر $\log 2$ ومساوی اندازه‌ی شاخص در جامعه‌ی اول می‌شود و علت آن است که در هر دو حالت اخیر، نیمی از افراد جامعه دارای درآمد مساوی و نیمه‌ی دیگر بدون هیچ‌گونه درآمدی هستند. تیل، شکل دیگری از این شاخص که به اندازه‌ی تیل موسوم است را به صورت زیر ارائه کرده است.

$$T_0 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \log \frac{\mu}{X_i}.$$

در ادامه شاخص‌های تیل برای برخی توزیع‌های درآمد محاسبه خواهند شد.
فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی مطلقا" پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد که بر بازه $0 \le L < U < \infty$ تعریف شده است. همچنین فرض کنید امید ریاضی X متناهی باشد و قرار دهیم: $E(X) = \square$. کلاس اندازه های آنتروپی تعمیم یافته را با نماد GE نشان می دهند وبه

[3] Yitzhaki
[4] Chotikapanich
[5] Jorda
[6] Sarabia
[7] Entropy

صورت زیر تعریف می کنند:

$$GE(\theta)=\frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[E\left(\frac{X}{\mu}\right)^{\theta}-1\right],\theta\neq 0,1, \quad (1)$$

که $E\left(X^{\theta}\right)<\infty$.
به سادگی می‌توان نشان داد که حالت‌های حدی GE برای $\theta=0$ و $\theta=1$ متناظر با شاخص‌های تیل T_0و T_1 است. همچنین اینها به عنوان حالت‌های خاص انتگرال زیر:

$$\int_{L}^{U} x^{r}(\log x)^{m}\cdot f(x)\,dx=E\left[x^{r}(\log x)^{m}\right], \quad (2)$$

با $(m=1.r=0)$ و $(r=m=1)$ می باشند.
لم زیر در محاسبه انتگرال فوق مفید است.
لم: فرض کنید X یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته باشد، به طوری که:

$$E(X^{r})<\infty, r=1,2,\cdots.$$

اگر قرار دهیم $g(r)=E(X^{r})$ آنگاه

$$\frac{d^{m}}{dr^{m}}g(r)=E\left[X^{r}(\log X)^{m}\right], m=1,2,\cdots.$$

اثبات به استقراء به سادگی انجام می‌شود.
حال اگر تعریف کنیم:

$$U(r,m)=E\left[X^{r}(\log X)^{m}\right] \quad (3)$$

:آنگاه روابط زیر را داریم

$$U(0,1)=E(\log X), \quad (4)$$
$$U(1,1)=E(X\log X). \quad (5)$$

توجه داشته باشید که عبارات قبل ارتباط مستقیمی با شاخص تیل دارند. شاخص‌های تیل که معمولاً بانمادهای T_0 و T_1 نمایش می‌دهند به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T_0(X)=-E\left(\log\frac{X}{\mu}\right). \quad (6)$$
$$T_1(X)=E\left(\frac{X}{\mu}\log\frac{X}{\mu}\right). \quad (7)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$T_0(X)=-U(0,1)+\log\mu. \quad (8)$$
$$T_1(X)=\frac{1}{\mu}U(1,1)-\log\mu. \quad (9)$$

عبارات بالا برای به دست آوردن شاخص‌های تیل برای توزیع‌های پارامتری که شکل بسته ای دارند مناسب است.

معادله (۲) حالت خاصی از فرمول به دست آمده توسط جنکینس[8] (۲۰۰۹) است که منجر به حصول دو اندازه حدی برای GE است یعنی:

$$GE(۰) = U(۰,۱). \quad (۱۰)$$
$$GE(۱) = U(۱,۱). \quad (۱۱)$$

لم فوق نه تنها برای حالت یک متغیره به کار می‌رود بلکه برای گشتاورهای با مراتب بالاتر نیز که حالت چند متغیره دارند، قابل استفاده است. در ادامه ابتدا خانواده توزیع‌های پارتو را معرفی و سپس در این خانواده، شاخص‌های تیل را محاسبه خواهیم کرد.

۳. خانواده توزیع‌های پارتو

پارتو (۱۸۹۷) مشاهده کرد که در بسیاری از جوامع، توزیع درآمد افرادی که درآمدشان بیش از مقدار معین x است می‌تواند با $Cx^{-\alpha}$ تقریب شود. به ویژه او مشاهده کرد که چنین تقریبی برای درآمدهای زیاد مناسب تر به نظر می‌رسد. پارتو اعتقاد داشت که اگر برای مقادیر مختلف x نمودار لگاریتم سطح درآمد در مقابل تعداد افرادی که درآمدی بیش از این سطح دارند را رسم کنیم، با یک نمودار تقریبا خطی مواجه خواهیم شد. جالب اینکه در طول یک قرن اخیر داده‌های تجربی این اعتقاد را تایید کرده اند.
از آنجایی که خانواده توزیع‌های پارتو با بسیاری از توزیع‌های دیگر مرتبط اند، مدل های کاربردی مناسبی را برای استفاده در علوم مختلف مانند جامعه شناسی، فیزیک و قابلیت اعتماد فراهم آورده اند. از لحاظ سلسله مراتبی خانواده توزیع‌های پارتو با توزیع پارتو نوع اول (کلاسیک) شروع و به تدریج با اضافه شدن پارامترهای مکان، مقیاس، شکل و نابرابری تکامل یافتند.
جدول (۱) تابع چگالی احتمال، یا تابع توزیع تجمعی و همچنین گشتاورهای مرتبه r توزیع‌های خانواده پارتو را نشان می‌دهد.

جدول ۱: برخی مشخصه‌های توزیع‌های خانواده پارتو

نام توزیع	تابع چگالی $f(x)$ یا تابع توزیع $F(x)$	گشتاور مرتبه r ام $E(X^{r})$
پارتو کلاسیک	$f(x) = \frac{\alpha\sigma^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}, x \geq \sigma > ۰$	$\frac{\alpha\sigma^{r}}{\alpha-۱}, \alpha > r$
پارتو نوع ۲	$f(x) = \frac{\alpha}{\sigma\left(۱+\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha+۱}}, x \geq ۰$	$\frac{\sigma^{r}\gamma(\alpha-r)\gamma(r+۱)}{\gamma(\alpha)}, \alpha > r$
پارتو نوع ۳	$F(x) = ۱ - \frac{۱}{\left[۱+\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{\beta}}\right]}, x \geq ۰$	$\sigma^{r}\gamma(۱-r\beta)\gamma(۱+r\beta) - \frac{۱}{\beta} < r < \frac{۱}{\beta}$
پارتو نوع ۴	$F(x) = ۱ - \frac{۱}{\left[۱+\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{\beta}}\right]^{\alpha}}, x \geq ۰$	$\frac{\sigma^{r}\gamma(\alpha-r\beta)\gamma(۱+r\beta)}{\gamma(\alpha)}, -\frac{۱}{\beta} < r < \frac{\alpha}{\beta}$

۴. محاسبه شاخص‌های تیل در خانواده توزیع‌های پارتو

دراین بخش شاخص‌های تیل را برای برخی توزیع‌های خانواده پارتو محاسبه می کنیم.

۴.۱. توزیع پارتو کلاسیک

همان طور که قبلا بیان شد، تابع چگالی و گشتاور مرتبه r ام این توزیع عبارت است از:

$$f(x;\alpha,\sigma) = \frac{\alpha\sigma^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}, x \geq \sigma > ۰. \quad (۱۲)$$
$$E(X^{r}) = \frac{\alpha\sigma^{r}}{\alpha-۱}, \alpha > r. \quad (۱۳)$$

[8] Jenkins

پس داریم:

$$E(X)=\frac{\alpha\sigma}{\alpha-1}. \quad (14)$$

از طرفی بنا به)۳(:

$$U(r,1)=\frac{d}{dr}E(X^r)=\frac{\left(\alpha\sigma^r\log\sigma\right)(\sigma-r)+\alpha\sigma^r}{(\alpha-r)^2}. \quad (15)$$

بنا به)۸(خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}T_0(X)&=-U(0,1)+\log E(X)\\&=-\frac{1}{\alpha}+\log\frac{\alpha}{\alpha-1}.\end{aligned} \quad (16)$$

همچنین:

$$U(1,1)=\frac{\alpha\sigma\log\sigma}{\alpha-1}+\alpha\sigma. \quad (17)$$

بنا به)۹(: $T_1(X)=\frac{1}{E(X)}U(1,1)-\log E(X)$

$$=\frac{1}{\alpha-1}-\log\frac{\alpha}{\alpha-1}. \quad (18)$$

۲.۴ . *توزیع پارتو نوع دو*

همان‌گونه که دیدیم تابع چگالی و گشتاور مرتبه r ام این توزیع به فرم زیر است:

$$f(x;\alpha,\sigma)=\frac{\alpha}{\sigma\left(1+\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha+1}},\alpha\geq 0. \quad (19)$$

$$E(X)^r=\frac{\sigma^r(\alpha-r)(r+1)}{\gamma(\alpha)}. \quad (20)$$

لذا می توان نوشت:

$$E(X)=\frac{\sigma}{\alpha-1}. \quad (21)$$

از طرفی دیدیم که:

$$U(r,1)=\frac{d}{dr}E(X^r)=\frac{\sigma^r\log\sigma(\alpha-r)(r+1)-\acute{\gamma}(\alpha-r)\sigma^r(r+1)+\acute{\gamma}(r+1)\sigma^r\gamma(\alpha-r)}{\gamma(\alpha)}.$$

$$\Rightarrow U(0,1)=\log\sigma+\psi(\alpha)-\gamma. \quad (22)$$

که در آن $\gamma=0.5772156649$ ثابت اویلر و $\psi(\alpha)=\frac{\acute{\gamma}(\alpha)}{\gamma(\alpha)}$ تابع digamma است.

بنابه) ۸(:

$$\begin{aligned}T_0(X)&=-U(0,1)+\log E(X)\\&=\gamma+\psi(\alpha)-\log(\alpha-1),\end{aligned} \quad (23)$$

$$U(1,1)=\frac{\sigma}{\alpha-1}\left(\log\sigma+\psi(\alpha-1)-\gamma+1\right). \quad (24)$$

همچنین بنا به)۹(داریم :

$$T_{۱}(\mathrm{X}) = \frac{۱}{E(X)} U(۱,۱) - \log E(X) \tag{۲۵}$$

$$= ۱ - \gamma - \psi(\alpha - ۱) + \log(\alpha - ۱). \tag{۲۶}$$

۳.۴ . *توزیع پارتو نوع سه*

تابع توزیع و گشتاور مرتبه r ام این توزیع به فرم زیر است:

$$F(x) = ۱ - \frac{۱}{\left[۱ + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{\beta}}\right]}, x \geq ۰. \tag{۲۷}$$

$$E(X)^{\mathrm{r}} = \sigma^{\mathrm{r}} \gamma(۱ - \mathrm{r}\beta)\gamma(۱ + \mathrm{r}\beta). \tag{۲۸}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sigma\gamma(۱ - \beta)\gamma(۱ + \beta). \tag{۲۹}$$

از طرفی

$$U(r,۱) = \frac{d}{dr} E(X^r)$$

$$= \sigma^r \log\sigma\gamma(۱ - \mathrm{r}\beta)\gamma(۱ + \mathrm{r}\beta) - \beta\acute{\gamma}(۱ - \mathrm{r}\beta)\sigma^r\gamma(۱ + \mathrm{r}\beta) + \beta\acute{\gamma}(۱ + \mathrm{r}\beta)\gamma(۱ - \mathrm{r}\beta)\sigma^{\mathrm{r}}.$$

$$\Rightarrow U(۰,۱) = \log\sigma. \tag{۳۰}$$

برای محاسبه $T_{۰}(\mathrm{X})$ بنا به)۸ (داریم:

$$T_{۰}(\mathrm{X}) = -U(۰,۱) + \log E(X)$$

$$= \log[\gamma(۱ - \beta)\gamma(۱ + \beta)]. \tag{۳۱}$$

و

$$U(۱,۱) = \sigma \log\sigma\gamma(۱ - \beta)\gamma(۱ + \beta) - \beta\acute{\gamma}(۱ - \beta)\gamma(۱ + \beta)\sigma + \beta\acute{\gamma}(۱ + \beta)\gamma(۱ - \beta)\sigma, \tag{۳۲}$$

وبا توجه به) ۹(:

$$T_{۱}(\mathrm{X}) = \frac{۱}{E(X)} U(۱,۱) - \log E(X)$$

$$= \beta[\psi(۱ + \beta) - \psi(۱ - \beta)] - \log[\gamma(۱ + \beta)\gamma(۱ - \beta)]. \tag{۳۳}$$

۴.۴ . *توزیع پارتو نوع چهار*

تابع توزیع و گشتاور مرتبه r ام این توزیع به فرم زیر است:

$$F(x) = ۱ - \frac{۱}{\left[۱ + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{\beta}}\right]^{\alpha}}, x \geq ۰. \quad (۳۴)$$

$$E(X)^{r} = \frac{\sigma^{r}\gamma(\alpha - r\beta)\gamma(۱ + r\beta)}{\gamma(\alpha)}, \quad (۳۵)$$

$$E(X) = \frac{\sigma\gamma(\alpha - \beta)\gamma(۱ + \beta)}{\gamma(\alpha)}. \quad (۳۶)$$

$$U(r, ۱) = \frac{d}{dr}E(X^{r}) \quad (۱)$$

$$= \frac{\sigma^{r}\log\sigma\gamma(\alpha - r\beta)\gamma(۱ + r\beta) - \beta\acute{\gamma}(\alpha - r\beta)\sigma^{r}\gamma(۱ + r\beta) + \beta\acute{\gamma}(۱ + r\beta)\gamma(\alpha - r\beta)\sigma^{r}}{\gamma(\alpha)}. \quad (۲)$$

$$\Rightarrow U(۰, ۱) = \log\sigma - \beta\psi(\alpha) - \beta\gamma. \quad (۳۷)$$

بنا به (۸) :

$$T_{۰}(X) = -U(۰, ۱) + \log E(X)$$

$$.= \beta[\gamma + \psi(\alpha)] + \log\left[\frac{\gamma(۱+\alpha)\gamma(\alpha-\beta)}{\gamma(\alpha)}\right] \quad (۳۸)$$

$$U(۱, ۱) = \frac{\sigma\log\sigma\gamma(\alpha - \beta)\gamma(۱ + \beta) - \beta\acute{\gamma}(\alpha - \beta)\sigma\gamma(۱ + \beta) + \beta\acute{\gamma}(۱ + \beta)\sigma\gamma(\alpha - \beta)}{\gamma(\alpha)}. \quad (۳۹)$$

بنا به (۹) $T_{۱}(X) = \frac{۱}{E(X)}U(۱, ۱) - \log E(X)$

$$= \beta[\psi(۱ + \beta) - \psi(\alpha - \beta)] - \log\frac{\gamma(\alpha - \beta)\gamma(۱ + \beta)}{\gamma(\alpha)}. \quad (۴۰)$$

خلاصه نتایج فوق در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲: شاخص‌های تیل برای برخی توزیعهای خانواده پارتو

نام توزیع	$T_{۰}(X)$	$T_{۱}(X)$
پارتو کلاسیک	$-\frac{۱}{\alpha} + \log\frac{\alpha}{\alpha-۱}$	$\frac{۱}{\alpha-۱} - \log\frac{\alpha}{\alpha-۱}$
پارتو نوع ۲	$\gamma + \psi(\alpha) - \log(\alpha - ۱)$	$۱ - \gamma - \psi(\alpha - ۱) + \log(\alpha - ۱)$
پارتو نوع ۳	$\log[\gamma(۱ - \beta)\gamma(۱ + \beta)]$	$\beta[\psi(۱ + \beta) - \psi(۱ - \beta)] - \log[\gamma(۱ + \beta)\gamma(۱ - \beta)]$
پارتو نوع ۴	$\beta[\gamma + \psi(\alpha)] + \log\left[\frac{\gamma(۱+\alpha)\gamma(\alpha-\beta)}{\gamma(\alpha)}\right]$	$\beta[\psi(۱ + \beta) - \psi(\alpha - \beta)] - \log\frac{\gamma(\alpha-\beta)\gamma(۱+\beta)}{\gamma(\alpha)}$

۵. نتیجه‌گیری

شاخص‌های تیل به عنوان ابزارهای مهمی برای سنجش میزان نابرابری در توزیع درآمد یا ثروت در یک جامعه آماری استفاده می شوند. خواص جالب و ارتباط آنها با سایر شاخص‌های نابرابری بر اهمیت آنها افزوده است. در این مقاله سعی نمودیم با استفاده از رابطه شاخص‌های تیل با اندازه آنتروپی‌های تعمیم یافته آنها را در خانواده توزیع‌های پارتو که خانواده‌ای متداول و پر اهمیت در بررسی های درآمد هستند، محاسبه نماییم.

مراجع

[1] D. Chotikapanich, W. E. Griffiths, and D. P. Rao. Estimating and Combining National Income Distributions Using Limited Data, Journal of Business & Economic Statistics, 25, 97–109, 2007.
[2] S. P. Jenkins, Distributionally-Sensitive Indices and the GB2 Distribution, Review of Income and Wealth, 55, 392–8, 2009.
[3] V. Jorda, J. M. Sarabia, and F. Prieto. On the Estimation of the Global Income Distribution Using a Parsimonious Approach. in J. Bishop and J. G. Rodr_ıguez (eds), Economic Well-Being and Inequality, Research on Economic Inequality, vol. 22, Emerald, Bingley, U.K., 115–45, 2014.
[4] V. Pareto. Agginuta allo studio della curva delle entrate. Giornale dehli Economisti, series 2, 14, 15-26 , 1897.
[5] J. M. Sarabia, V. Jordá, and L. Remuzgo. The Theil Indices in Parametric Families of Income Distributions—A Short Review, International Association for Research in Income and Wealth, vol. 63(4), 867-880, 2017.
[6] H. Theil.. Economics and Information Theory. Amsterdam: North Holland, 1967.
[7] S. Yitzhaki., “On an Extension of the Gini Inequality Index,” International Economic Review, 24, 617–28, 1983.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–144، صص. ۱۱۵–۱۲۲

تابع مطلوبیت و شاخص های نابرابری مبتنی بر آن

علیرضا حسین زاده*

گروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی، گناباد، ایران .

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
شاخص نابرابری درآمد
توزیع درآمد، تابع مطلوبیت
تابع رفاه

چکیده

مطالعه شاخص های نابرابری توزیع درآمد از موضوعات ارزشمند و حائز اهمیت در آمار اقتصادی به شمار می رود. در یک رویکرد کلی و از دو دیدگاه متفاوت این شاخص ها به دو گروه عمده شاخص های عینی و قیاسی تقسیم می شوند. شاخص های عینی با محاسبه میزان پراکندگی درآمد افراد جامعه به تجزیه و تحلیل الگوی درآمد و تعیین میزان نابرابری آن پرداخته و توجه مستقیم به مطلوبیت های جامعه، تابع رفاه فردی و تابع رفاه اجتماعی ندارند. در مقابل، شاخص های قیاسی، نابرابری توزیع در آمد را با در نظر گرفتن فرض هایی برای تابع رفاه فردی و اجتماعی اندازه گیری می کنند. در این رویکرد یک تابع رفاه اجتماعی حاصل جمع مطلوبیت های فردی افراد جامعه در نظر گرفته می شود و شاخص های مفیدی را بدست می دهد. در مقاله حاضر با معرفی شاخص های نابرابری در آمد و توابع مطلوبیت و همچنین با بکارگیری توابع مطلوبیت خاص، برخی شاخص های مشهور معرفی شده را استخراج می کنیم.

۱. مقدمه

در یک فرآیند تصمیم‌گیری، انجام هر عمل معلوم از میان مجموعه اعمال ممکن به پیامدی می‌انجامد که ارزیابی آن با مقیاسی معقول همواره آسان یا ممکن نیست، چرا که برتری یا رجحان عملی بر عمل دیگر به سازه‌های گوناگونی بستگی دارد. به ویژه اگر سازه‌ی شانس نیز در این پیامد مؤثر باشد، سنجش آن دشوارتر می‌شود. مطلوبیت تابعی است که روی پیامدهای گوناگونی که شخص با آنها مواجه است تعریف می‌شود و میزان دلپسندی نسبی آنها را با یک مقیاس عددی اندازه‌گیری می‌کند. از این رو در علم اقتصاد، تابع مطلوبیت ابزار اندازه‌گیری رضایت نسبی به شمار می‌آید. دربسیاری از زمینه‌های کاربردی بخصوص در ریاضیات مالی، اقتصاد و بیمه تمرکز اصلی روی مطلوبیت پول صورت می‌پذیرد. در تئوری‌های اقتصادی مدرن، وقتی که سرمایه‌گذاران با نمودهای تصادفی مواجه هستند باید تصمیم گیری‌های آنها بر اساس امید ریاضی تابع مطلوبیت بنا شود.

برای صاحب نظران علم آمار و اقتصاد، بررسی چگونگی توزیع درآمد و اندازه گیری میزان نابرابری در توزیع در آمد از اهمیت ویژه ای برخوردار است. ویلفرد پارتو [1] (۱۸۹۵) اقتصاددان ایتالیایی اولین کسی است که قانون توزیع در آمد او، الگوی ساده حاکم بر توزیع درآمد را ابداع کرد. او درآمد فردي را روي محور افقي و جمعیت را بر روي محور عمودي نشان داد و دریافت که تعداد اندکي از مردم داراي درآمد زیاد و اکثر افراد جامعه داراي درآمد اندکي هستند و بدین ترتیب نمودار پارتو توسط وی ابداع شد. یک تئوری مشابه توسط ماکس اتو لورنتس [2] (۱۹۰۷) اقتصاددان آمریکایی ارائه شد. هردو محقق اشاره داشتند که بیشترین سهم درآمد یا ثروت، به تعداد بسیار کمي از مردم تعلق دارد. تا کنون تحقیقات متعدد

*سخنران
پست الکترونیک : hoseinzade1@yahoo.com (علیرضا حسین زاده)

[1] Pareto
[2] Lorenz

و متنوعی در زمینه توزیع های درآمد انجام شده است. بخصوص تعمیم های مختلفی برای توزیع پارتو بیان شده است. برای اطلاع بیشتر در این زمینه به کلیبر وکوتز[۳] (۲۰۰۳) مراجعه شود.
علاوه بر مشخص کردن قانون توزیع درآمد، طراحی شاخص هایی که قادر به اندازه گیری میزان نابرابری در توزیع درآمد باشند نیز حائز اهمیت است. از دیدگاه علم آمار، یک شاخص نابرابری اساساً یک آماره است که میزان نسبی پراکندگی در الگوی توزیع درآمد را اندازهگیری میکند. هر چه مقدار این شاخصها در الگوی توزیع درآمد جامعه بزرگتر باشد معرف بزرگ بودن شکاف درآمدی و در نتیجه بیشتر بودن میزان نابرابری درآمد در میان افراد جامعه است و برعکس. به طور کلی شاخص های نابرابری درآمد در دو گروه کلی شاخص های عینی و شاخص های قیاسی طراحی و ارائه شده است.
شاخص های عینی با محاسبه میزان پراکندگی درآمد افراد جامعه به تجزیه و تحلیل الگوی درآمد و تعیین میزان نابرابری آن پرداخته و توجه مستقیم به مطلوبیت های جامعه، تابع رفاه فردی و تابع رفاه اجتماعی ندارند.
شاخص های قیاسی بر خلاف شاخص های عینی که توجه مستقیمی به تابع رفاه ندارند، نابرابری در توزیع درآمد را با در نظر گرفتن فرض هایی برای تابع رفاه فردی و اجتماعی اندازه گیری می کنند. در این رهیافت توابع مطلوبیت نقشی ارزنده ایفا می کند. دالتون[۴] (۱۹۲۰) را بنیان گذار ارائه شاخص های قیاسی می دانند. او تابع رفاه اجتماعی جامعه را حاصل جمع مطلوبیت های فردی افراد جامعه در نظر می گیرد و فرض می کند مطلوبیت فردی افراد جامعه تابعی از میزان درآمد آنها باشد. همچنین تابع مطلوبیت فردی همه افراد جامعه را یکسان و مقعر در نظر می گیرد.

۲. رهیافت اصولی طراحی شاخص های نابرابری درآمد

تا کنون شاخص های متعددی برای اندازه گیری میزان نابرابری در توزیع درآمد ارائه شده است. این شاخص ها بسته به تعاریفی که از عدالت، مساوات و رفاه اجتماعی به عمل آمده است طراحی شده اند. به این لحاظ مقایسه عملکرد آنها در سنجش نابرابری توزیع در آمد و انتخاب شاخص ارجح امکان پذیر نیست.
برای رفع این مشکل گروهی از اقتصاددانان توجه خود را معطوف به طرح مجموعه ای از خواص و اصولی نموده اند که در ساختن یک شاخص نابرابری باید مورد توجه قرار گیرد. وجود چنین مجموعه ای، می تواند پاسخ مناسبی در طراحی و انتخاب یک شاخص نابرابری مطلوب باشد.
در طراحی یک شاخص نابرابری باید ویژگي سهولت محاسبه آن با استفاده از اطلاعات آماري موجود مورد توجه قرار گیرد. رعایت این امر جنبه نظري نداشته و فقط از جنبه عملي و اجرايي قابل توجه است.
اکنون با الهام از معصومی[۵] (۱۹۹۳) رهیافت اصولی طراحی یک شاخص نابرابری که مبتنی بر هفت اصل است را ارائه می دهیم. فرض می کنیم جامعه شامل N فرد باشد که هر فرد می تواند یک نفر یا یک خانوار باشد. همچنین فرض می کنیم $X = (X_1, \dots, X_N)$ بردار درآمد جامعه دارای میانگین μ باشد. هر شاخص نابرابری مانند $I(X)$ باید در اصول زیر صدق کند.

الف) اصل پایایی نسبت به تغییر متناسب

این اصل معرف پایایی و یا عدم حساسیت شاخص نابرابری $I(X)$ نسبت به تغییر متناسب تمام درآمدها است. به عبارت دیگر اگر درآمد تمام افراد جامعه به يك نسبت افزایش (کاهش) یابد شاخص نابرابري توزیع درآمد تغییري نمی کند. بر طبق این اصل شاخص نابرابری باید مستقل از واحد اندازه گیری و نیز مستقل از میانگین در آمد جامعه باشد. از این رو این اصل را گاهی اوقات اصل استقلال نیز می گویند.

ب) اصل تقارن

شاخص نابرابری $I(X)$ نسبت به هر جایگشت از عناصر بردار $X = (X_1, \dots, X_N)$ پایا است. به عبارت دیگر ترتیب قرار گرفتن مؤلفههای X در مقدار $I(X)$ بیتاثیر است. بنابراین شاخص نابرابری تنها باید به توزیع فراوانی درآمدها بستگی داشته و به سایر ویژگیهای افراد مانند ثروت، تحصیلات و جنسیت و مانند اینها بستگی نداشته باشد به طوری که اگر تعدادی از افراد جامعه با ویژگیهای متفاوت جایگاه درآمدی خود را تغییر دهند، شاخص نابرابری نباید تغییر کند.

ج) اصل انتقالات یا اصل پیگو–دالتون[۶]

مطابق این اصل هر انتقال درآمد از یک فرد غنی به یک فرد فقیر، با ثبات نگه داشتن درآمد سایر افراد، مقدار شاخص نابرابری را کاهش میدهد .

د) اصل پیوستگی

$I(X)$ *نسبت به همه آرگومانهایش پیوسته است . این اصل که توسط تقریباً همه شاخصهای نابرابری برآورده میشود، کمک زیادی در محاسبات ریاضی و مقایسه جمعیتهای مختلف با یکدیگر میکند .*

ه) اصل پایایی تکرار یا اصل همگنی جمعیت

[3] Kleiber and Kotz
[4] Dalton
[5] Maasoumi
[6] Pigo-Dalton

اصل همگنی جمعیت که اصل عدم حساسیت نسبت به تغییر متناسب تعداد افراد تمام گروه‌هاي درآمدي (به‌طور مثال دهک‌هاي درآمدي) نیز نامیده مي‌شود، بیانگر آن است که اگر تعداد اعضای تمام گروه‌هاي درآمدي جامعه به يك نسبت تغییر کند، به عبارت دیگر سهم گروه‌هاي درآمدي از جمعیت کشور به‌رغم تغییر (افزایش یا کاهش) جمعیت کل کشور ثابت بماند، اندازه شاخص نابرابري نباید تغییر کند، یعنی شاخص نابرابري توزیع درآمد باید مستقل از تعداد افراد جامعه مورد بررسي باشد.

و) اصل سازگاری یکپارچه یا اصل تجزیه پذیری جمعی

فرض کنید جامعه به R گروه افراز شده باشد و نیز فرض کنید گروه r ام $(r = ۱,۲, \dots, R)$ دارای میانگین درآمد μ_r بوده و شاخص نابرابری این گروه I_r باشد. مطابق این اصل اگر در هر گروه درآمد افراد به نحوی تغییر کند که میانگین درآمد گروه ثابت مانده اما نابرابری در آن گروه، یعنی I_r ، افزایش یابد، آنگاه شاخص نابرابری کل جامعه نیز باید افزایش یابد.

بنابراین مطابق این اصل باید بتوان یک شاخص نابرابری را به مجموع نابرابری بین گروهها و داخل گروهها تجزیه کرد؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$I_T = I_B + I_W$$

که در آن $I_T = I(X)$ نابرابری کل، $I_B = I(\mu_۱, \dots, \mu_R)$ *نابرابری بین گروهها* و $I_W = \sum_{r=۱}^{R} W_r I_r$ مجموع موزون نابرابری داخل گروهها است.

انتظار وجود چنین خاصیتی برای یک شاخص نابرابری کاملا معقول بوده و فقدان آن می تواند اعتبار شاخص را تا حد زیادی کاهش داده و دامنه کاربرد آن را بسیار محدود کند. اما به طور شگفت آوری اکثر شاخصهای نابرابری منجمله ضریب جینی که از پرکاربردیترین شاخصهاست فاقد چنین خاصیتی است. مطالعات تجربی بیانگر آن است که با انجام چنین تغییری در درآمدها، ضریب جینی نه تنها افزایش نمییابد بلکه در مواردی نیز کاهش مییابد.

ز) اصل نرمالیزه

این اصل بیان می کند که اگر کلیه درآمدها با هم برابر باشند، آنگاه مقدار شاخص نابرابری باید صفر باشد. دامنه تغییرات اغلب شاخص‌هاي نابرابري درآمد در بازه صفر تا یک قرار دارد و بهره‌مندي از این ویژگي (موسوم به نسبي بودن)، یک مزیت شمرده می‌شود؛ اما نداشتن این ویژگی به معناي خدشه‌دار، بي‌فایدگی یا کم فایدگی آن نیست. رعایت این ویژگي به وسیله یک شاخص، ارزیابي را تسهیل و مقایسه نابرابري درآمد در جوامع گوناگون و در الگوهاي توزیع درآمد در طي زمان و مکان را امکان پذیر مي‌سازد. در حالت "برابری کامل[۷]" مقدار شاخص نابرابری صفر است و این زمانی است که درآمد جامعه به طور مساوي بین تمام افراد آن توزیع شده است و در حالت "نابرابری کامل[۸]" مقدار شاخص برابر یک است و این در صورتی است که تمام درآمد جامعه فقط به يك فرد تعلق گیرد.

۳. تابع مطلوبیت

مطالعه تحلیلی نظریه مطلوبیت مستلزم ارائه یک ساختار ریاضی برای مشخص نمودن ترتیب پیامدهای ممکن حاصل از انجام یک عمل از میان مجموعه اعمال ممکن می‌باشد. این پیامدها یا نمودها با یک مقیاس عددی که آنرا مطلوبیت می‌نامند، به گونه‌ای مرتب می‌شوند که یک انتهای مقیاس به پیامدهای دلپسند مانند سودها و پاداش‌ها و انتهای دیگر مقیاس به پیامدهای غیردلپسند مانند زیانها و پرداخت‌ها متناظر شوند. با چنین ترتیبی هدف تصمیم گیرنده این است که از میان پیامدهای ممکن پیامدی را برگزیند که دارای ماکسیمم مطلوبیت باشد، یا حتی الامکان در ردیف پیامدهای ممکنی باشد که دارای مطلوبیت بالایی باشند. اصول موضوعه تئوری مطلوبیت اولین بار توسط نیومن و مورگنسترن[۹] (۱۹۴۴) مطرح شد. آنها با استفاده از این اصول وجود تابع مطلوبیت را ثابت نمودند و نحوه ساختن توابع مطلوبیت را به کمک این اصول تشریح کردند.

از دیدگاه اقتصادی فرض می‌شود که هر تابع مطلوبیت [۱۰] مانند $U(x)$، باید دارای خواص زیر باشد:

۱. $U(x)$ تابعی اکیداً صعودی از xباشد،

۲. $U(x)$ تابعی اکیداً مقعر از x باشد.

معمولاً فرض می‌کنیم که $U(x)$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم باشد که در این صورت شرایط فوق بیان می‌کنند که مشتق مرتبه اول تابع مطلوبیت مثبت و مشتق مرتبه دوم آن منفی است.

خاصیت اول بیان می‌کند که نمودهای دلپسندتر دارای مطلوبیت بیشتری هستند. این خاصیت به "خاصیت عدم اقناع[۱۱]" نیز موسوم است. خاصیت دوم بیان می‌کند که میزان رشد تابع مطلوبیت در اثر بدست آوردن نمودی پولی به اندازه g، یعنی $U(x+g) - U(x)$ باید تابعی صعودی از سرمایه x باشد. از سوی دیگر تابع مطلوبیت عموم مردم متمایل به این خاصیت است که به آن "خاصیت ریسک گریزی"[۱۲] می‌گویند.

---

[7] Perfect equality
[8] Perfect inequality
[9] Neumann and Morgenstern
[10] Utility function
[11] Non – satiation property
[12] Risk aversion property

تابع $r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ به تابع ریسک گریزی موسوم است. $r(x)$ به عنوان تابعی از دارایی سرمایه‌گذار، معیاری برای میزان ریسک گریزی او ارائه می‌دهد. این تابع بطور کامل $U(x)$ را مشخص می‌کند، زیرا با در دست داشتن تابع $r(x)$ و همچنین شرایط اولیه‌ای برای تابع مطلوبیت $U(x)$، می‌توانیم با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم:

$$U''(x) + r(x)\,U'(x) = ۰$$

جواب یکتایی برای $U(x)$ بدست آوریم.
تابع $U(x)$ رایک تابع مطلوبیت استاندارد می‌گویند اگر در نقطه خاصی مانند $x_۰$ داشته باشیم:

$$.U(x_۰) = ۰.U'(x_۰) = ۱$$

حال با در نظر گرفتن این شرایط اولیه و با حل معادله دیفرانسیل بالا جواب یکتای زیر برای $U(x)$ بدست خواهد آمد.

$$.U(x) = \int_{x_۰}^{x} \exp[-\int_{x_۰}^{z} r(y)\,dy]dz$$

در تئوری‌های اقتصادی یک توافق عمومی بر آن است که تابع $r(x)$، مربوط به یک تابع مطلوبیت واقع‌گرا، باید تابعی نزولی از ثروت باشد.
اکنون برخی توابع مطلوبیت معروف و خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این توابع علاوه بر تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی، در محاسبات مربوط به علوم بیمه مورد استفاده قرار می گیرند.

· تابع مطلوبیت نمایی

خانواده توابع مطلوبیت نمایی با پارامتر $\alpha > ۰$به صورت زیر است:

$$U(x) = \frac{۱}{\alpha}(۱ - e^{-\alpha x}), \quad \alpha > ۰, -\infty < x < \infty.$$

واضح است که $U(۰) = ۰$ و $U'(۰) = ۱$. همچنین برای هر x داریم، $r(x) = \alpha$.

· تابع مطلوبیت لگاریتمی

یک خانواده سه پارامتری از توابع مطلوبیت با پارامترهای α ،β ،γ به فرم زیر، معرف خانواده توابع مطلوبیت لگاریتمی است:

$$U(x) = \alpha\ \ln(x - \beta) + \gamma, \quad x > \beta, \quad \alpha > ۰, -\infty < \beta, \gamma < \infty.$$

در حالت خاصی که $U(x) = \ln(x)$ داریم، $U(۱) = ۰$ و $U'(۱) = ۱$. همچنین با در نظر گرفتن $\gamma = -\alpha \ln \alpha$ خانواده مذکور به یک خانواده دو پارامتری به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$U(x) = \alpha \ln\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right),$$

که در این حالت، $U(\alpha + \beta) = ۰$ و $U'(\alpha + \beta) = ۱$. همچنین داریم:

$$r(x) = \frac{۱}{x - \beta}, \quad x > \beta,$$

که تابعی اکیداً نزولی از x است.

· تابع مطلوبیت توانی نوع اول

یک خانواده دو پارامتری از توابع مطلوبیت به فرم:

$$U(x) = \frac{\alpha^{\beta+۱} - (\alpha - x)^{\beta+۱}}{(\beta + ۱)\alpha^{\beta}}.\frac{x}{\alpha} < ۱.\frac{\beta}{\alpha} > ۰.$$

به خانواده توابع مطلوبیت توانی نوع اول با پارامترهای α و βموسوم است. برای خانواده فوق تابع ریسک گریزی برابر $r(x) = \frac{\beta}{\alpha - x}$ است که برای مقادیر $\beta > ۰$ تابعی صعودی از x است.

حسین‌زاده و همکاران (۲۰۰۹) با در نظر گرفتن خانواده دو پارامتری فوق و با تبدیل پارامتری $\alpha = \frac{-۱}{\theta}$ و $\beta = \frac{\lambda}{\theta}$ خانواده توابع مطلوبیت دو پارامتری زیر را در نظر گرفته و خواص آن را مورد مطالعه قرار دادند:

$$U_{\theta,\lambda}(x) = \frac{(۱+\theta x)^{\frac{\theta-\lambda}{\theta}} - ۱}{\theta - \lambda}, ۱ + \theta x > ۰, \ \lambda > ۰, -\infty < \theta < \infty.$$

· تابع مطلوبیت توانی نوع دوم

خانواده توابع مطلوبیت توانی نوع دوم با پارامتر k به فرم زیر است:

$$U(x) = \frac{x^{۱-k} - ۱}{۱ - k}, \ x > ۰, \ k > ۰, \ k \neq ۱.$$

توجه کنید که تابع $U(x) = \ln(x)$ حالت حدی تابع مطلوبیت توانی نوع دوم است وقتی که $k \to ۱$. همچنین $U(۱) = ۰$ و $U'(۱) = ۱$ و $r(x) = \frac{k}{x}$ که تابعی اکیداً نزولی از x است.

· تابع مطلوبیت لاینکس[۱۳]

این تابع که مجموع یک تابع خطی و یک تابع نمایی است، توسط بل[۱۴] (۱۹۸۸) به فرم زیر معرفی گردید:

$$U(x) = \alpha x - \beta e^{-\gamma x}, \quad \alpha, \beta, \gamma > ۰, -\infty < x < \infty.$$

کنیفی[۱۵] (۲۰۰۷)، میانگین تعمیم یافته‌ای از توابع مطلوبیت به فرم زیر را مورد مطالعه قرار داد.

$$U(x) = \left[\sum w_i U_i^{-\lambda}(x)\right]^{\frac{-۱}{\lambda}},$$

که در آن $U_i(x), (i = ۱, ۲, \dots, n)$ توابع مطلوبیت، λ یک پارامتر حقیقی و $w_i, (i = ۱, ۲, \dots, n)$ وزن‌های میانگین تعمیم یافته هستند به طوری که $\sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱$. در این مطالعه او توابع مطلوبیت زیر را معرفی و مورد بررسی قرار داد. $\phi(x)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

$$\cdot U(x) = w\,\phi(x) + (۱ - w)\ln x,$$

$$\cdot U(x) = \phi^{w}(x)(\ln x)^{۱-w},$$

$$\cdot U(x) = \left[w\phi^{-\lambda}(x) + (۱ - w)(\ln x)^{-\lambda}\right]^{\frac{-۱}{\lambda}},$$

$$\cdot U(x) = \left[w\phi^{-\lambda}(x) + (۱ - w)(\ln x)^{-\lambda}\right]^{\frac{-۱}{\lambda}},$$

شاخص های نابرابری مبتنی بر مطلوبیت

قبلا شاخص های نابرابری توزیع درآمد را به دو دسته عمده شاخص های عینی و قیاسی تقسیم نمودیم. همچنین بیان نمودیم که شاخصهای عینی آماره هایی هستند که با رویکرد برآورد میزان پراکندگی درآمد افراد جامعه، میزان نابرابری توزیع درآمد را ارزیابی می کنند. شاخص های دامنه تغییرات نسبی، انحراف از میانگین نسبی، هرفیندال[۱۶]، واریانس، ضریب پراکندگی، واریانس لگاریتم ها، جینی[۱۷] و تیل[۱۸] در زمره شاخص های عینی به شمار می روند. فرمول محاسباتی و دامنه تغییرات این شاخص ها در جدول (۱) منعکس شده است. کران پایین همه شاخص ها، یعنی حالت برابری کامل، صفر است و برای تبدیل کران بالای شاخص ها، یعنی حالت نابرابری کامل، به عدد یک می توانیم فرمول محاسباتی را بر کران بالای تغییرات شاخص تقسیم نماییم.

توجه داریم که در حالت برابری کامل، در آمد همه افراد جامعه مساوی و برابر میانگین در آمد جامعه یعنی μ است. همچنین در حالت نابرابری کامل، درآمد همه افراد به جز یک نفر صفر است و این یک نفر همه ثروت را که برابر $N\mu$ است در اختیار دارد.

با به کاربستن دو ملاحظه فوق و جاگذاری در شاخص نابرابری می توان مقادیر حداقل و حداکثر (دامنه تغییرات)

جدول ۱: شاخص های نابرابری عینی

دامنه تغییرات شاخص	فرمول محاسباتی	نام شاخص نابرابری
$0 \le R \le N$	$R = \frac{1}{\mu}[\max X_i - \min X_i]$	**دامنه تغییرات نسبی**
$0 \le R \le \frac{2(N-1)}{N}$	$AD = \frac{1}{N\mu}\sum_{i=1}^{N} \lvert X_i - \mu \rvert$	**انحراف از میانگین نسبی**
$0 \le H \le \frac{1}{N}$	$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{T}\right)^2 = \frac{1}{(N\mu)^2}\sum_{i=1}^{N} X_i^2$	**هرفیندال**
$0 \le V \le (N-1)^2$	$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$	**واریانس**
$0 \le CV \le \sqrt{N-1}$	$CV = \frac{\sqrt{V}}{\mu}$	**ضریب پراکندگی**
$0 \le VL < \infty$	$VL = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log X_i - \log \mu)^2$	**واریانس لگاریتم ها**
$0 \le G \le \frac{N-1}{N}$	$G = \frac{1}{2N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lvert X_i - X_j \rvert$	**جینی**
$0 \le T \le \log N$	$T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{\mu}\log\frac{X_i}{\mu}$	**تیل**

شاخص را به دست آورد.

شاخصهای قیاسی، برخلاف شاخصهای عینی که توجه مستقیمی به تابع رفاه ندارد، نابرابری در توزیع درآمد را با در نظر گرفتن فرضهایی برای تابع رفاه فردی و اجتماعی اندازهگیری میکنند. در زیر دو شاخص قیاسی معروف را معرفی و مورد بررسی قرار می دهیم.

شاخص دالتون

همان گونه که قبلا بیان نمودیم دالتون بنیان گذار ارائه شاخص های قیاسی است که شاخص های قیاسی را بر اساس توابع مطلوبیت فردی و اجتماعی در قالب یک تابع رفاه اجتماعی بنا نموده است. او تابع مطلوبیت فردی همه افراد جامعه را یکسان و مقعر در نظر می گیرد و بر این اساس تابع رفاه اجتماعی جامعه را حاصل جمع مطلوبیت های فردی افراد جامعه در نظر می گیرد. بنابراین اگر $U(x)$ مطلوبیت حاصل از در آمد x باشد در این صورت تابع رفاه اجتماعی به صورت زیر تعریف می شود:

$$W = W\left(U(X_1).U(X_2)\ldots.U(X_N)\right) = \sum_{i=1}^{N} U(X_i)$$

حال به استناد نامساوی جنسن برای تابع مقعر $U(x)$ نامساوی زیر معتبر خواهد بود.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U(X_i) \le U(\mu).$$

به استناد این نامساوی حد اکثر رفاه اجتماعی برابر $NU(\mu)$ است. دالتون شاخص خود را به صورت نسبت میزان اختلاف بین رفاه اجتماعی حاصل از توزیع درآمد کنونی با توزیع درآمد عادلانه یعنی $NU(\mu) - \sum_{i=1}^{N} U(X_i)$ بر حداکثر رفاه اجتماعی که به ازای توزیع درآمد عادلانه حاصل میشود به صورت زیر تعریف می کند:

$$D = \frac{NU(\mu) - \sum_{i=1}^{N} U(X_i)}{NU(\mu)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} U(X_i)}{NU(\mu)}.$$

به عبارت دیگر این شاخص میزان کاهش نسبی رفاه کل جامعه در مقایسه با حداکثر رفاه اجتماعی ممکن را به عنوان میزان نابرابری درآمد در نظر میگیرد. اندازه این شاخص در حالت برابری کامل توزیع درآمد مساوی صفر است اما در حالت نابرابری کامل توزیع درآمد اندازه آن الزاماً مساوی یک نیست. برای این که دامنه تغییرات این شاخص بین صفر و یک محدود شود، کاکوانی شاخص تعدیل شده دالتون (D^*) را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$D^* = \frac{NU(\mu) - \sum_{i=1}^{N} U(X_i)}{NU(\mu) - (N-1)U(0) - U(N\mu)}.$$

[13] Linex utility function
[14] Bell
[15] Conniffe
[16] Herfindahal
[17] Gini
[18] Theil

شاخص دالتون مستقل از واحد اندازهگیری درآمد نبوده و در نتیجه افزایش یا کاهش کلیه درآمدها به ترتیب، موجب کاهش یا افزایش اندازه این شاخص میشود. البته دالتون با پیشنهاد اصل متناسب درآمدها و پذیرش آن، بر وجود ویژگی فوق در شاخص خود واقف بوده و آن را قابل قبول میداند.

شاخص آتکینسون

آتکینسون[19] (۱۹۷۰) با تعریف یک درآمد سرانه مانند X_e شاخص خود را بنا نمود. X_e عبارت از درآمد سرانهای است که اگر به طور معادل به هر یک از افراد جامعه تخصیص داده شود، رفاه اجتماعی حاصل از آن برابر با رفاه اجتماعی است که توسط توزیع درآمد کنونی ایجاد شده است. بنا بر ایده دالتون رفاه اجتماعی توزیع درآمد کنونی برابر $\sum_{i=1}^{N}U(X_i)$ است و رفاه اجتماعی پس از تخصیص X_e به هر یک از افراد جامعه برابر $NU(X_e)$ *است که این دو مقدار بنا بر تعریف* X_e *باید با یکدیگر برابر باشند. لذا از تساوی* $NU(X_e)=\sum_{i=1}^{N}U(X_i)$ *و اکیدا صعودی بودن تابع مطلوبیت خواهیم داشت:*

$$X_e = U^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U(X_i)\right).$$

براحتی با توجه به خواص تابع مطلوبیت و نامساوی جنسن، نامساوی $X_e \le \mu$ همواره برقرار است. *آتکینسون شاخص خود را به صورت زیر بیان کرده است:*

$$A = 1 - \frac{X_e}{\mu}.$$

اندازه این شاخص در حالت برابری کامل توزیع درآمد مساوی صفر است اما در حالت نابرابری کامل توزیع درآمد، لزوماً مساوی یک نیست مگر آنکه شرایطی بر روی تابع رفاه اعمال شود. در حالت نابرابری کامل درآمد داریم:

$$NU(X_e)=\sum_{i=1}^{N}U(X_i)=(N-1)U(0)+U(N\mu).$$

آتکینسون شاخص خود را برمبنای مفاهیم فوق به صورت زیر ارائه کرده است:

$$A = 1-\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^{v}\right]^{\frac{1}{v}} \quad v \le 1.$$

به راحتی می توان دید که $0 \le A \le 1 - N^{1-\frac{1}{v}}$ و برای مقادیر بزرگ N ، $0 \le A \le 1$.

اکنون ما با به کارگیری سه تابع مطلوبیت توانی و لگاریتمی و نمایی در شاخص اصلی $A = 1 - \frac{X_e}{\mu}$ شاخص اخیر و دو شاخص دیگر را ارائه می کنیم.

حالت خاص ۱: اگر تابع مطلوبیت را تابع مطلوبیت توانی به فرم $U(x)=\frac{x^{v}-1}{v}$ برای $v<1$ و $x>0$ در نظر بگیریم با پاره ای محاسبات جبری ساده بدست می آوریم، $U^{-1}(x)=(vx+1)^{\frac{1}{v}}$.

حال بنا بر تعریف X_e داریم:

$$X_e = U^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U(X_i)\right)=U^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i^{v}-1}{v}\right)=U^{-1}\left(\frac{\sum X_i^{v}-N}{Nv}\right)=\left[v\frac{\sum X_i^{v}-N}{Nv}+1\right]^{\frac{1}{v}}=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^{v}-1+1\right]^{\frac{1}{v}}=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^{v}\right]^{\frac{1}{v}}.$$

حال با جایگذاری در شاخص اصلی $A = 1 - \frac{X_e}{\mu}$ شاخص آتکینسون (۱۹۷۰) حاصل خواهد شد.

حالت خاص ۲: اگر تابع مطلوبیت را تابع مطلوبیت لگاریتمی به فرم:

$$U(x)=\ln xx>0$$

در نظر بگیریم، آنگاه به وضوح $U^{-1}(x)=e^{x}$ و داریم:

$$X_e = U^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U(X_i)\right)=U^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln X_i\right)=U^{-1}\left(\frac{1}{N}\ln(X_1.X_2\dots X_N)\right)$$

[19] Atkinson

$$. = e^{\ln\left(\sqrt[N]{X_۱ . X_۲ \dots X_N}\right)} = \sqrt[N]{X_۱ . X_۲ \dots X_N}$$

ملاحظه میشود که در این حالت X_e برابر میانگین هندسی درآمدهای N فرد است و لذا شاخص آتکینسون در این حالت بهصورت زیر خواهد بود:

$$.A = ۱ - \frac{X_e}{\mu} = ۱ - \frac{\sqrt[N]{X_۱ . X_۲ \dots X_N}}{\mu}$$

به وضوح در این حالت $۰ \le A \le ۱$.

حالت خاص ۳: *اگر تابع مطلوبیت را تابع مطلوبیت نمایی به فرم،* $U(x) = \frac{۱-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ *برای* $\alpha > ۰$ *در نظر بگیریم آنگاه با پاره ای محاسبات جبری ساده بدست می آوریم،* $U^{-۱}(x) = \frac{-۱}{\alpha} \ln(۱ - \alpha x)$ *. حال داریم:*

$$X_e = U^{-۱}\left(\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} U(X_i)\right) = U^{-۱}\left(\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} \frac{۱ - e^{-\alpha X_i}}{\alpha}\right) = U^{-۱}\left(\frac{N - \sum_{i=۱}^{N} e^{-\alpha X_i}}{\alpha N}\right)$$
$$= \frac{-۱}{\alpha} \ln\left(۱ - ۱ + \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} e^{-\alpha X_i}\right) = \frac{-۱}{\alpha} \ln\left(\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} e^{-\alpha X_i}\right).$$

و در نتیجه شاخص زیر استنتاج خواهد شد .

$$.A = ۱ - \frac{X_e}{\mu} = ۱ + \frac{۱}{\alpha\mu} \ln\left(\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} e^{-\alpha X_i}\right)$$

در حالت برابری کامل مقدار شاخص برابر صفر و در حالت نابرابری کامل و برای مقادیر بزرگ N برابر ۱ است.

نتیجه گیری

به دلیل اهمیت ویژه شاخص های نابرابری در آمد مبتنی بر تابع رفاه اجتماعی که بر روی توابع مطلوبیت افراد جامعه بنا می شود، می توانیم با در نظر گرفتن توابع رفاه متفاوت شاخص های نابرابری جدیدی بسازیم و شاخصی را که بیشترین سازگاری را با اصول هفت گانه داشته باشد بر گزینیم. لازم به ذکر است که انتخاب تابع رفاه مناسب لزوما شاخص نابرابری مناسبی را بدست نخواهد آورد.

مراجع

[1] A. Atkinson. On The Measurement of Inequality. Journal of Economic Theory, Paper 244-263, 1970.
[2] D. E. Bell. One switch utility functions and a measure of risk. Management Science, Vol. 34, 1416-1424, 1988.
[3] D. Conniffe. Generalized means of simple utility functions with risk aversion. Paper Presented at Irish Economics Association Conference, 2007.
[4] H. Dalton. The Measurement of the Inequality of Incomes, The Economic Journal, Vol. 30, No. 119, 348-361, 1920.
[5] A. R. Hoseinzadeh, G. R. Mohtashami Borzadaran, and G. H Yari. A view on extension of utility-based on links with information measures. Communications of the Korean Statistical Society Vol. 16, No. 5, 1-8, 2009.
[6] C. Kleiber, and S. Kotz. Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, John Wiley, Hoboken, NJ, 2003.
[7] M.O. Lorenz. Method of Measuring the Concentration of Wealth, Journal of American Statistical Association, 9, 209-219, 1905.
[8] E. Maasoumi. A compendium to information theory in economics and econometrics, Econometric Reviews, 12(2), 137-181, 1993.
[9] J. Neumann and O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Second edition, 1947; third edition, 1953. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1944.
[10] V. Pareto. La Legga Della Domanda, Girnale Degli Economisti, /gennaio. 59-68, 1895.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–145، صص. ۱۲۳–۱۳۲

خانواده توزیع‌های بتای تعمیم یافته نوع ۲ و ارتباط بین آنها

مهدی یعقوبی اول ریابی*، علیرضا حسین زاده، معصومه حسن پور

گروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی،گناباد، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
بتای تعمیم یافته نوع ۲
گامای تعمیم یافته
سینگ مادالا
داگوم
فیسک
لوماکس

چکیده

خانواده توزیع‌های بتای تعمیم یافته نوع دوم، یک مدل مناسب برای توزیع درآمد است. انعطاف پذیر بودن و ارتباط آن با بسیاری از توزیع‌های مهم بر اهمیت آن افزوده است. در این مقاله توزیع بتای تعمیم یافته نوع ۲ و زیر مجموعه های آن از قبیل توزیع‌های گامای تعمیم یافته، بتای نوع ۲، سینگ مادالا، داگوم، فیسک و لوماکس و ارتباط بین آنها را مورد مطالعه قرار داده و مشخصه های بارز هر توزیع را بیان نموده ایم.

۱. مقدمه

مدل بندی توزیع‌های اقتصادی درآمد اولین بار در سال ۱۸۹۵ با کارهای ویلفرد پارتو[1] آغاز شد. توزیعی که او معرفی کرد یک توزیع ساده بود ولی تأثیر زیادی در مباحث مربوط به رشد اقتصادی و مقایسه نابرابری های درآمد داشت. مطالعات تجربی نشان داد که گرچه توزیع پارتو درآمدهای سطح بالا را به خوبی مدل بندی می کند اما برای برازش درآمدهای پایین مدل های جدیدتری مورد نیاز است. پس از معرفی توزیع پارتو افراد زیادی در زمینه توزیع‌های درآمد به پژوهش پرداختند و مدل‌های جدیدی را ارائه نمودند. آمون[2] (۱۸۹۵) توزیع گاما را معرفی کرد که اخیرا نیز برای برازش داده‌های درآمد از آن استفاده می‌شود. آموروسو[3] (۱۹۲۴) توزیع گامای تعمیم یافته را معرفی کرد، بارتلز[4] و متلن[5] (۱۹۷۵) توزیع وایبل را پیشنهاد دادند. همچنین مک دونالد[6] (۱۹۸۴) دو توزیع چهارپارامتری بتای تعمیم یافته نوع اول و دوم را معرفی کرد که تعمیمی از توزیع‌های قبلی (حالت‌های خاص و حدی) بودند. برای مطالعه بیشتر می‌توان به کلیبر[7] و کوتز[8] (۲۰۰۳)، دادپی و همکاران (۲۰۰۷)، یعقوبی اول ریابی و همکاران (۲۰۱۴) مراجعه نمود. در این مقاله ابتدا توزیع بتای تعمیم یافته نوع دوم و سپس برخی مدل‌های مهم زیر مجموعه آن از قبیل توزیع‌های گامای تعمیم یافته، بتای نوع دوم، سینگ مادالا، داگوم، فیسک و لوماکس و ارتباط بین آنها را مورد مطالعه قرار داده و مشخصه‌های بارز هر توزیع را بیان نموده ایم.

*سخنران

پست الکترونیک : m_yaghoobiawal@yahoo.com- (مهدی یعقوبی اول ریابی)، hoseinzade1@yahoo.com- (علیرضا حسین زاده)، mas.hasanpour@gmail.com- (معصومه حسن پور)

[1] Vilferdo Pareto
[2] Ammon
[3] Amoroso
[4] Bartels
[5] Metelen
[6] Mc-Donald
[7] Kleiber
[8] Kotz

۲. ۲ - توزیع بتای تعمیم یافته نوع[۹]

توزیع محوری و مهم خانواده توزیع‌های بتای تعمیم یافته، توزیع $GB۲$است که توسط مک دونالد (۱۹۸۴) معرفی شد. این توزیع، یک مدل مناسب برای برازش به توزیع درآمد است که توسط محققین زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. انعطاف پذیر بودن این توزیع و ارتباط آن با بسیاری توزیع‌های مهم درآمد بر اهمیت آن افزوده است. این توزیع چهار پارامتری که معمولا با نماد $GB۲(a,b,p,q)$ نمایش داده می‌شود دارای تابع چگالی و تابع توزیع به فرم زیر است:

$$f(x)=\frac{ax^{ap-۱}}{b^{ap}B(p,q)\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{p+q}}\quad x>۰, \tag{۱}$$

$$F(x)=\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{a}}{pB(p,q)\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{p}}{}_۲F_۱\left[p,۱-q;p+۱;\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{a}}{۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}}\right]\quad x>۰, \tag{۲}$$

که در آن b پارامتر مقیاس و a و p و q پارامترهای شکل اند و همه پارامترها نیز مثبت اند و

$${}_۲F_۱(a,b;c;x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(b)_n}.\frac{x^n}{n!},\qquad |x|<۱, \tag{۳}$$

تابع فوق هندسی گوس[۱۰] است.

خانواده توزیع‌های $GB۲$ شامل تعداد زیادی توزیع‌های درآمدند برای مثال با قرار دادن $(a=p=۱),(p=q=۱),(q=۱),(a=۱)$ در توزیع $GB۲$ متناظرا توزیع‌های، سینگ ـ مادالا[۱۱] بتای نوع ۲، داگوم[۱۲]، فیسک[۱۳] و لوماکس[۱۴] به دست می آید.

۰ یک حالت خاص و مهم توزیع $GB۲$ توزیع گامای تعمیم یافته[۱۵] است که با قرار دادن $b=\beta q^{\frac{۱}{a}}$ و $q\to\infty$ به دست می آید و دارای تابع چگالی به فرم زیر است:

$$f(x)=\frac{a}{\theta^{ap}\gamma(p)}x^{ap-۱}e^{-(x/\theta)^{a}} \tag{۴}$$

باید توجه داشت که چون توزیع‌های نمایی، گاما، وایبل، نرمال تعمیم یافته و... حالات خاصی از توزیع GG اند بنابراین زیرخانواده توزیع $GB۲$ نیز محسوب می شوند. شکل (۱) برخی از این روابط را بیان می‌کند.

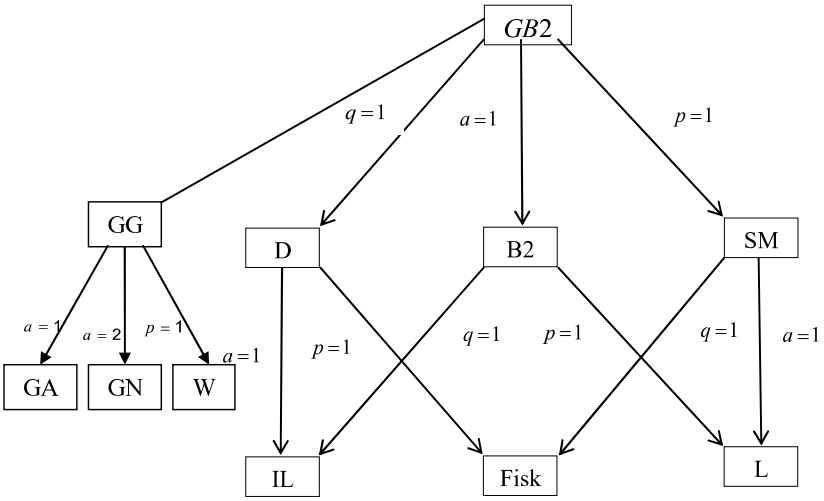
توزیع بتای تعمیم یافته نوع دوم ($GB۲$)، توزیع داگوم (D)، توزیع بتای نوع دوم (۲B)، توزیع سینگ ـ مادالا (SM)، توزیع لومکس معکوس (IL)، توزیع لگ ـ لجستیک (Fisk)، توزیع لومکس (L)، گامای تعمیم یافته (GG)، وایبل (W)، نرمال تعمیم یافته (GN).

برای توزیع $GB۲$ به راحتی روابط زیر قابل استنتاج است

۰ اگر $X\sim GB۲(a,b,p,q)$ آنگاه

$$۱)Y=X^{s}\sim GB۲\left(\frac{a}{s},b^{s},p,q\right),\quad s>۰.$$
$$۲)Y=\frac{۱}{X}\sim GB۲\left(a,\frac{۱}{b},p,q\right).$$
$$۳)E\left(X^{k}\right)=\frac{b^{k}\gamma\left(p+\frac{k}{a}\right)\gamma\left(q-\frac{k}{a}\right)}{\gamma(p).\gamma(q)},-aq<k<aq.$$
$$۴)Y=\left(\frac{X^{a}}{۱+X^{a}}\right)^{\frac{۱}{a}}\sim GB۱(a,b,p,q).$$

[9] Generalized Beta distribution of the second kind: $GB2$
[10] Gauss's hypergeometric
[11] Singh-Maddala
[12] Dagum:D
[13] Fisk
[14] Lomax:L
[15] Generalize Gamma: GG



شکل ۱: خانواده توزیع‌های بتای تعمیم یافته نوع ۲ و روابط بین آنها

۲ .۱ . *رابطه توزیع $GB2$ با سایر توزیع ها*

مالیک[16] (۱۹۶۷) و آهوجا[17] (۱۹۶۹) نشان دادند که اگر $X_1 \sim GG(a,1,p)$ و $X_2 \sim GG(a,1,q)$، و مستقل باشند، آنگاه

$$\frac{X_1}{X_2} \sim GB2\,(a,1,p,q)\,. \qquad (۵)$$

رابطه (۵) بیشتر به صورت زیر معروف است.

$$\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{1/a} \sim GB2\,(a,1,p,q)\,. \qquad (۶)$$

که در آن $X_1 \sim G(1,p)$ و $X_2 \sim G(1,q)$، و مستقل هستند. که رابطه بین توزیع گاما و $GB2$ را نشان می‌دهد.
حالت خاص رابطه (۶) به ازای a=۱ است که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{X_1}{X_2} \sim B2\,(1,p,q)\,. \qquad (۷)$$

از رابطه (۶) می‌توان برای تولید اعداد تصادفی از توزیع $GB2$ استفاده کرد، بدین صورت که ابتدا از توزیع $G(1,p)$ و $G(1,q)$، داده تصادفی تولید و سپس با استفاده از رابطه (۶) از توزیع $GB2$، داده تولید می‌کنیم. یا می‌توان از رابطه (۵) داده از توزیع $GB2$ شبیه سازی کرد.
می‌دانیم اگر $X_1 \sim G(1,p)$ و $X_2 \sim G(1,q)$، و X_1 و X_2 مستقل باشند آنگاه:

$$W = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim B1\,(p,q)\,. \qquad (۸)$$

با مقایسه روابط (۷) و (۸) به راحتی استنباط می‌شود که

$$X = \frac{1}{W} - 1 = \frac{1-W}{W} \sim B2\,(p,q)\,. \qquad (۹)$$

[16] Malik
[17] Ahuja

۲.۲. *نتایج تجربی*

ورتیا و ورتیا (۱۹۸۰) یک توزیع $GB۲$ چهار پارامتری به مجموعه‌ای از داده‌های درآمدهای مالیاتی مربوط به سال ۱۹۶۷ در کشور فنلاند برازش دادند. آنها برآوردهای درستنمایی ماکسیمم و گشتاورهای پارامترها را محاسبه کردند و مشاهده کردند که این توزیع برازش داده ، بهتر از توزیع دو و سه پارامتری لگ نرمال است.

مک دونالد (۱۹۸۴) توزیع‌های $GB۲$ و ۲B را برای داده‌های درآمد در سال ۱۹۸۰ در آمریکا به کار برد. در مطالعه آنها توزیع $GB۲$ از ده توزیع دیگر (که شامل توزیع‌های نوع بتا و نوع گاما بود) بهتر نتیجه داد. اما این توزیع از توزیع سینگ ـ مادالا در آن داده‌ها بهتر نبود.

باتلر[18] و مک دونالد (۱۹۸۹) توزیع $GB۲$ را برای درآمدهای خانواده‌ها از سال ۱۹۴۸ تا ۱۹۸۰ به کار بردند و پارامترهای آنها را برآورد کردند. همچنین برآورد پارامترها را برای داده‌های گروهی (طبقه بندی شده) بدست آوردند.

محققین بسیاری توزیع $GB۲$ و حالت‌های خاص آن را به داده‌های درآمد و ثروت ارائه دادند و مزایای توزیع $GB۲$ برازش داده شده را نسبت به توزیع‌های دیگر نشان دادند. برای اطلاع بیشتر به کلیبر و ترد[19] (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

زاندوناتی[20] (۲۰۰۱) تعمیمی از توزیع $GB۲$ ارائه کرد. او از فرمی که فلر برای $GB۲$ به کار برده بود استفاده کرد و تابع چگالی زیر را بدست آورد:

$$f(x)=\frac{a\theta x^{a-۱}}{b^{a}B(p,q)}\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{-\theta p}\left\{۱-\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{-\theta}\right\}^{q-۱}. \qquad (۱۰)$$

که توزیع زاندوناتی نامیده می‌شود. واضح است که اگر $\theta = ۱$ به توزیع $GB۲$ می‌رسیم.

۳. توزیع سینگ ـ مادالا

این توزیع که معمولا با نماد $SM(a,b,q)$ نمایش داده می‌شود توسط سینگ و مادالا (۱۹۷۵) معرفی شد و پس از آن برای داده‌های درآمد مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. اگرچه این توزیع قبل از توزیع $GB۲$ معرفی شد، اما راحت تر آن است که آن را به عنوان حالت خاصی از توزیع $GB۲$ معرفی کنیم. توزیع سینگ ـ مادالا حالت خاص توزیع $GB۲$ است وقتی که p=۱. به عبارتی می‌تون نوشت: $GB۲(a,b,۱,q)\equiv SM(a,b,q)$.

توزیع سینگ ـ مادالا دارای تابع چگالی زیر است:.

$$f(x)=\frac{aqx^{a-۱}}{b^{a}[۱+(x/b)^{a}]^{۱+q}},\quad x>۰, \qquad (۱۱)$$

چگالی فوق سه پارامتر a و b و q دارد که هر سه مثبت می‌باشند. b پارامتر مقیاس و a و q پارامترهای شکل هستند. همچنین پارامتر q دنباله سمت راست توزیع و پارامتر a هر دو دنباله توزیع را کنترل می‌کند.

این توزیع با اسامی مختلف در متون آماری معرفی شده است. برخی آن را توزیع بر نوع XII [21] می‌نامند. کاکوانی [22] (۱۹۸۰) این توزیع را برای داده‌های درآمد به کار برد و آن را توزیع پارتو نوع IV نامید. آرنولد (۱۹۸۳) آن را توزیع بتا ـ پی [23] نامید. میلک و جانسون (۱۹۷۴) آن را توزیع لگ ـ لجستیک تعمیم یافته نامیدند. در متون آماری اسامی دیگری نیز برای توزیع سینگ ـ مادالا ارائه شده است.

حالت خاص تابع چگالی (۱۱) وقتی است که a=q باشد. در این حالت توزیع پارا ـ لجستیک [24] نامیده شده است (کلوگمن [25] و همکاران (۱۹۹۹)).

حالت خاص دیگری از چگالی فوق به ازای q=۱ حاصل می‌شود. که آن را توزیع لگ ـ لجستیک یا توزیع فیسک می‌نامند. بعلاوه اگر a=۱ باشد آن را توزیع لومکس می نامند.

تابع توزیع سینگ ـ مادالا به صورت زیر است:

$$F(x)=۱-[۱+(x/b)^{a}]^{-q},\quad x>۰. \qquad (۱۲)$$

---

[18] Butler
[19] Trede
[20] Zandonatti
[21] Burr XII distribution
[22] - Kakwani
[23] - Beta-P distribution
[24] Paralogistic distribution
[25] Klugman

با استفاده از رابطه بالا به سادگی می‌توان معکوس تابع توزیع فوق را به صورت زیر بدست آورد:

$$F^{-1}(u) = b[(1-u)^{-1/q} - 1]^{1/a}, \quad 0 < u < 1. \tag{۱۳}$$

بنابراین توزیع سینگ ـ مادالا توزیعی است که برای آن تابع چگالی، تابع توزیع و تابع چندک همگی فرم ساده و بسته ای دارند. این مطلب باعث کاربرد زیاد این توزیع در مباحث مختلف شده است.

۱.۳ . *گشتاورها و برخی خواص دیگر توزیع*

با پاره ای محاسبات ریاضی k امین گشتاور توزیع سینگ ـ مادالا برای a<k<aq– به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E\left(X^k\right) = \frac{b^k B(1+k/a, q-k/a)}{B(1,q)} = \frac{b^k \gamma(1+k/a)\gamma(q-k/a)}{\gamma(q)}, \tag{۱۴}$$

به ویژه

$$E\left(X\right) = \frac{bB(1+1/a, q-1/a)}{B(1,q)} = \frac{b\gamma(1+1/a)\gamma(q-1/a)}{\gamma(q)}, \tag{۱۵}$$

و

$$\mathrm{var}\left(X\right) = \frac{b^2\{\gamma(q)\gamma(1+2/a)\gamma(q-2/a) - \gamma^2(1+1/a)\gamma^2(q-1/a)\}}{\gamma^2(q)}, \tag{۱۶}$$

در نتیجه ضریب تغییرات به فرم زیر خواهد بود:

$$CV = \sqrt{\frac{\gamma(q)\gamma(1+2/a)\gamma(q-2/a)}{\gamma^2(1+1/a)\gamma^2(q-1/a)\}} - 1}, \tag{۱۷}$$

همچنین ضریب چولگی و ضریب برجستگی عبارتند از:

$$skewness = \frac{\gamma^2(q)\lambda_3 - 3\gamma(q)\lambda_2\lambda_1 + 2\lambda_1^3}{[\gamma(q)\lambda_2 - \lambda_1^2]^{3/2}}, \tag{۱۸}$$

$$kurtosis = \frac{\gamma^3(q)\lambda_4 - 4\gamma^2(q)\lambda_3\lambda_1 + 6\gamma(q)\lambda_2\lambda_1^2}{[\gamma(q)\lambda_2 - \lambda_1^2]^2}, \tag{۱۹}$$

که در آنها

$$\lambda_i = \gamma(1+i/a)\gamma(q-i/a), \quad i = 1,2,3,4.$$

بعلاوه با مشتق گیری از تابع چگالی بدست می‌آوریم:

$$x_{\mathrm{mode}} = b\left(\frac{a-1}{aq+1}\right)^{1/a}, \qquad a > 1. \tag{۲۰}$$

ملاحظه میشود که نما نسبت به q، یک تابع نزولی است. یعنی وقتی q افزایش میابد، دم سمت راست توزیع نازک تر میشود.
چون تابع توزیع سینگ ـ مادالا و تابع چندکی آن دارای فرم بسته میباشند، میتوانیم بعضی از ویژگیهای مربوط به آمارههای مرتب را نیز بدست آوریم. مثلاً آرنولد و لاگونا[۲۶] (۱۹۷۷) و آرنولد (۱۹۸۳) نشان دادند که

$$X \sim SM(a,b,q) \Rightarrow X_{1:n} \sim SM(a,b,nq). \tag{۲۱}$$

[26] Laguna

در واقع اثبات کردند که اگر X دارای توزیع سینگ ـ مادالا باشد آماره مرتب مرتبه اول آن دارای توزیع سینگ ـ مادالا با پارامترهای جدید است. همچنین

$$E\left(X_{۱:n}\right)=\frac{b\gamma(۱+۱/a)\gamma(nq-۱/a)}{\gamma(nq)}. \qquad (۲۲)$$

تادیکامالا[۲۷] (۱۹۷۷) گشتاورهای مرتبه k ام، آمارههای مرتب مرتبه i ام در یک نمونه تصادفی n تایی را برای $k\le n\le ۲$ بدست آوردند.

$$E\left(X_{i:n}^{k}\right)=i\binom{n}{i}b^{k}q\sum_{j=۰}^{i-۱}(-۱)^{j}\binom{i-۱}{j}B\left(qn-qi+q-\frac{k}{a}+qj,۱+\frac{k}{a}\right).$$

آرنولد و لاگونا (۱۹۷۷) جداولی را برای $k\le n\le ۱$ برای مقادیر مختلف n ، b ، q و a تهیه کردند.
السیدی[۲۸] و همکاران (۱۹۹۰) ثابت کردند که اگر $X\sim SM(a,b,q)$ آنگاه:

$$P\left[۱+\left(\frac{X}{b}\right)^{a}>xy\right]=P\left[۱+\left(\frac{X}{b}\right)^{a}>x\right]\cdot P\left[۱+\left(\frac{X}{b}\right)^{a}>y\right], \qquad (۲۳)$$

که در آن $a,b>۰$ و $x,y>۱$ و بالعکس. بنابراین رابطه فوق میتواند توزیع سینگ ـ مادالا را تبیین نماید.
زاندوناتی (۲۰۰۱) تعمیمی از توزیع SM به صورت زیر ارائه داد:

$$f(x)=\frac{aq\theta x^{a-۱}}{b^{a}}\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{-q-۱}\left\{۱-\left[۱+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{-q}\right\}^{\theta-۱}, \qquad x>۰. \qquad (۲۴)$$

در واقع به توزیع سینگ ـ مادالا که سه پارامتر a و b و q دارد، یک پارامتر θ اضافه شده است. واضح است که اگر $\theta=۱$ قرار دهیم، همان توزیع SM حاصل میشود.

۴. توزیع داگوم

اگر در توزیع $GB۲$، پارامتر شکل q را برابر یک قرار دهیم، چگالی زیر حاصل میشود. که توزیع داگوم با پارامترهای $a,b,p>۰$ نامیده و با نماد $X\sim D(a,b,p)$ نمایش داده میشود.

$$f(x)=\frac{apx^{ap-۱}}{b^{ap}[۱+(x/b)^{a}]^{p+۱}}, \quad x>۰. \qquad (۲۵)$$

از این توزیع در زمینه های مختلف علوم استفاده میشود. ظاهراً توزیع داگوم اولین بار در سال توسط بر (۱۹۴۲) ارائه شده است. لذا در آن زمان توزیع داگوم، توزیع بر نوع سوم نامیده شد. توزیع داگوم با رابطه زیر به توزیع سینگ ـ مادالا مر بوط می گردد.

$$X\sim D(a,b,p)\Leftrightarrow\frac{۱}{X}\sim SM\left(a,\frac{۱}{b},p\right). \qquad (۲۶)$$

این رابطه به ما اجازه می دهد که از روی خواص توزیع سینگ ـ مادالا بتوانیم خواص توزیع داگوم را پیدا کنیم. همان طور که قبلا بیان شد توزیع سینگ ـ مادالا، توزیع بر نوع XII یا به طور ساده توزیع بر نامیده می شود. پس غیر منتظره نیست که توزیع داگوم، توزیع بر معکوس[۲۹] نامیده شود. لذا در بعضی متون آماری، توزیع داگوم، توزیع بر معکوس نامیده شده است.
میلک و جانسون (۱۹۷۴)، توزیع داگوم را به عنوان حالت خاصی از توزیع $GB۲$، توزیع بتا ـ کا[۳۰] نامیده اند. داگوم (۱۹۷۷) توزیع خود را برای یک مجموعه مشاهدات تجربی از درآمد وبا استفاده از معادله دیفرانسیل زیر بدست آورد:

$$\eta(x,F)=\frac{d\log F(x)}{d\log x}=ap\left\{۱-[F(x)]^{۱/p}\right\}, \quad x\ge۰. \qquad (۲۷)$$

به طوریکه $p>۰ap>۰$.

[27] Tadikamalla
[28] El-Saidi
[29] Inverse Burr distribution
[30] Beta-K

۴ .۱ . *گشتاورها و برخی خواص دیگر توزیع*

تابع توزیع داگوم دارای فرم بسته و به صورت زیر است:

$$F(x) = \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]^{-p}, \qquad x > 0. \tag{۲۸}$$

لذا تابع چندکی آن نیز دارای فرم بسته به صورت زیر است:

$$F^{-1}(u) = b[u^{-1/p} - 1]^{-1/a}, 0 < u < 1. \tag{۲۹}$$

به سادگی و با استفاده از نتایج بخش ۲، گشتاور مرتبه k ام توزیع (–ap<k<a) صورت زیر بدست میآید.

$$E\left(X^k\right) = \frac{b^k B(p + k/a, 1 - k/a)}{B(p, 1)} = \frac{b^k \gamma(p + k/a)\gamma(1 - k/a)}{\gamma(p)}. \tag{۳۰}$$

با قرار دادن $k = 1$ $k = 2$ و ضریب تغییر برای توزیع داگوم به صورت زیر حاصل میشوند. $\mathrm{var}(X)$, $E(X^2)$, $E(X)$,

$$E(X) = \frac{b\gamma(p + 1/a)\gamma(1 - 1/a)}{\gamma(p)}, \tag{۳۱}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{b^2\{\gamma(p)\gamma(p + 2/a)\gamma(1 - 2/a) - \gamma^2(p + 1/a)\gamma^2(1 - 1/a)\}}{\gamma^2(p)}, \tag{۳۲}$$

$$CV = \sqrt{\frac{\gamma(p)\gamma(p + 2/a)\gamma(1 - 2/a)}{\gamma^2(p + 1/a)\gamma^2(1 - 1/a)}}, \tag{۳۳}$$

همچنین ضریب چولگی و ضریب کشیدگی عبارتند از

$$skewness = \frac{\gamma^2(p)\lambda^3 - 3\gamma(p)\lambda_2\lambda_1 + 2\lambda_1^3}{[\gamma(p)\lambda_2 - \lambda_1^2]^{3/2}} i, \tag{۳۴}$$

$$kurtosis = \frac{\gamma^3(p)\lambda_4 - 4\gamma^2(p)\lambda_3\lambda_1 + 6\gamma(p)\lambda_2\lambda_1^2 - 3\lambda_1^4}{[\gamma(p)\lambda_2 - \lambda_1^2]^2}. \tag{۳۵}$$

که در آنها $\lambda_i = \gamma(1 - i/a)\gamma(p + i/a), \quad i = 1, 2, 3, 4$.

نمای توزیع داگوم نیز عبارتست از

$$x_{\mathrm{mode}} = b\left(\frac{ap - 1}{a + 1}\right)^{1/a}, \quad ap > 1. \tag{۳۶}$$

با تغییر پارامترها در تابع چگالی داگوم ، شکلهای جذاب و انعطاف پذیری از تابع چگالی بدست می آید، که معمولاً تک مدی هستند و برای داده‌های درآمد کاربرد دارند.

از تابع چندکی می توان میانه توزیع داگوم را به صورت $x_m = b[2^{1/p} - 1]^{-1/a}$ بدست آورد.

اگر $X \sim D(a, b, p)$ و $X_{n:n}$ آماره مرتب مرتبه n ام در یک نمونه n تایی باشد، آنگاه به سادگی ثابت میشود که $X_{n:n} \sim D(a, b, np)$ ، یعنی

$$X \sim D(a, b, p) \Rightarrow X_{n:n} \sim D(a, b, np).$$

با توجه به مطالب گفته شده قبل، امید ریاضی آماره مرتب مرتبه n ام عبارتست از

$$E(X_{n:n}) = \frac{b^k \gamma(np + 1/a)\gamma(1 - 1/a)}{\gamma(np)}. \tag{۳۷}$$

گشتاورهای سایر آماره‌های مرتب را می توان توسط رابطه بازگشتی به دست آورد .
لازم به ذکر است که السیدی و همکاران (۱۹۹۰) نشان دادند که در توزیع داگوم رابطه زیر برقرار است:

$$P\left[1+\left(\frac{b}{X}\right)^{a}>xy\right]=P\left[1+\left(\frac{b}{X}\right)^{a}>x\right]\cdot P\left[1+\left(\frac{b}{X}\right)^{a}>y\right],\quad a,b>0\ x,y>1. \tag{۳۸}$$

داگوم در سالهای ۱۹۸۰-۱۹۷۷ تعمیمهایی از توزیع معرفی شده خود را ارائه داد. او توزیع داگوم معرفی شده در رابطه (۲۵) را توزیع داگوم نوع I نامید و توزیع داگوم نوع II را که تعمیمی از توزیع داگوم نوع I است، به صورت زیر ارائه داد.

$$F(x)=\alpha+(1-\alpha)\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]^{-p},\quad x\geq 0, \tag{۳۹}$$

واضح است که در توزیع داگوم نوع II ، پارامتر α به مجموعه سه پارامتر (a,b,p) اضافه شده است. که $0<\alpha<1$. از توزیع داگوم نوع II نیز می توان برای داده‌های درآمد استفاده کرد. توزیع داگوم نوع III نیز همان توزیع داگوم نوع II است که در آن $\alpha<0$ در نظر گرفته شده است. هر توزیع داگوم نوع II و III را می توان از معادله دیفرانسیل زیر با فرض $p>0 \quad ap>0$ بدست آورد.

$$\eta(x,F)=\frac{d[\log F(x)-\alpha]}{d\log x}=ap\left\{1-\left[\frac{F(x)-\alpha}{1-\alpha}\right]^{1/p}\right\},\quad x\geq 0. \tag{۴۰}$$

داگوم (۱۹۹۹) توزیع دو متغیره زیر را برای دو متغیر سرمایه انسانی و ثروت بدست آورد. این تابع توزیع به صورت زیر است:

$$F(x_1,x_2)=(1+b_1x_1^{-a_1}+b_2x_2^{-a_2}+b_3x_1^{-a_1}x_2^{-a_2})^{-p},\quad x_i>0, i=1,2. \tag{۴۱}$$

که یک توزیع شش پارامتری است. اگر $b_3=b_1b_2$ ، آنگاه توزیع فوق به صورت زیر در می آید.

$$F(x_1,x_2)=(1+b_1x_1^{-a_1})^{-p}(1+b_2x_2^{-a_2})^{-p}. \tag{۴۲}$$

طبق رابطه (۴۲) ملاحظه می شود که X_2,X_1 مستقل هستند. به جز حالت دو متغیره، هنوز مثالی از کاربردهای تجربی برای توزیع چند متغیره داگوم، ارائه نشده است.

۴.۲ . *نتایج تجربی*

اگرچه توزیع داگوم به طور خاص در مجلات اقتصادی انگلیس تا دهه ۱۹۹۰ به کار برده میشد، ولی بعد از آن کاربردهای متعددی از این توزیع برای داده‌های درآمد و ثروت در مجلات فرانسوی، ایتالیایی و آمریکای لاتین آمده است. مثلاً داگوم (۱۹۷۷) توزیع داگوم نوع II را برای درآمد خانوار از سال های ۱۹۶۰ تا ۱۹۶۹ به کار برد. اسپینگوئت[31] و ترازا[32] (۱۹۸۳)، توزیع داگوم نوع II را برای مدل سازی حقوق فرانسویان از سال های ۱۹۷۰ تا ۱۹۷۸ به کار برد. داگوم و لمی (۱۹۸۹) توزیع داگوم نوع I تا III را به داده‌های درآمد ایتالیایی ها برازش دادند. برای اطلاع بیشتر از کاربرد توزیع داگوم به کلیبر و کوتز (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

۵. توزیع فیسک و توزیع لومکس

در این بخش زیرخانواده دیگری از خانواده توزیعهای $GB2$ را بررسی می‌کنیم. دو توزیعی که قصد بررسی آنها را داریم توزیع فیسک و توزیع لومکس هستند. اگرچه این دو توزیع خیلی انعطاف پذیر نیستند، ولی کاربردهای بسیاری از آنها در مقالات استفاده شده است. چون خواص این توزیع ها در اکثر متون آماری بررسی شده است، در این بخش به ذکر مطالب مختصری از این دو توزیع اکتفا می‌کنیم.

[31] Espinguet
[32] Terraza

۱.۵ . *توزیع فیسک*

اولین توزیعی که در این بخش بررسی می‌کنیم توزیع فیسک با تابع توزیع و تابع چگالی زیر است:

$$F(x) = ۱ - \left[۱ + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{-۱} = \left[۱ + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right]^{-۱}, \quad x > ۰, \tag{۴۳}$$

$$f(x) = \frac{a x^{a-۱}}{b^{a}\left[۱ + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{۲}}, \quad x > ۰, \tag{۴۴}$$

که در آنها $a, b > ۰$.

این توزیع اولین بار توسط فیسک (۱۹۶۱) معرفی شد. توزیع فیسک، در واقع توزیع سینگ ـ مادالا با q=۱ می باشد. همچنین می توان توزیع فوق را یک توزیع داگوم با p=۱ در نظر گرفت. چگالی فوق را می توان همچنین به عنوان حالت خاص سه پارامتری از توزیع چامپرنان[۳۳] (۱۹۵۲) در نظر گرفت.

بعضی از نویسندگان مانند داگوم (۱۹۷۵)، شوکری[۳۴] و همکاران (۱۹۸۸)، از توزیع فیسک به عنوان توزیع لگ ـ لجستیک یاد کردند، در صورتی که آرنولد (۱۹۸۳) آن را توزیع پارتو نوع III نامید و یک پارامتر مکان به آن اضافه کرد. به این دلیل به توزیع (۴۴)، توزیع لگ ـ لجستیک نیز میگویند. زیرا اگر X دارای توزیع (۴۴) باشد آنگاه ثابت می شود که logX دارای توزیع لجستیک با پارامتر مقیاس a و پارامتر مکان b میباشد..

فرض کنید نمونه تصادفی n تایی از توزیع Fisk(a،b) در اختیار باشد و $X_{i:n}$ آماره مرتب مرتبه i ام در نمونه تصادفی n تایی باشد. چگالی $X_{i:n}$ عبارتست از :

$$f_{i:n}(x) = i\binom{n}{i} F(x)^{i-۱}\left[۱ - F(x)\right]^{n-i} f(x) = \frac{n! a x^{ai-۱}}{(i-۱)!(n-i)! b^{ai}[۱+(x/b)^{a}]^{n+۱}} \tag{۴۵}$$

که توزیع $GB۲$ می باشد. در واقع میتوان نوشت

$$X_{i:n} \sim GB۲(a, b, i, n-i+۱).$$

برای اطلاع بیشتر آرنولد (۱۹۸۳) را ببینید.

۲.۵ . *توزیع لومکس یا پارتو نوع دوم*

یک حالت خاص دو پارامتری از توزیع $GB۲$ توزیع لومکس می باشد که توسط لومکس (۱۹۵۴) به عنوان مدلی مناسب برای داده‌های شکست اقتصادی معرفی شد و دارای تابع توزیع و چگالی به فرم زیر است:

$$F(x) = ۱ - \left[۱ + \left(\frac{x}{b}\right)\right]^{-q}, \quad x > ۰, \tag{۴۶}$$

$$f(x) = \frac{q}{b}\left(۱ + \frac{x}{b}\right)^{-q-۱}, \quad x > ۰. \tag{۴۷}$$

واضح است که توزیع لومکس، حالت خاص توزیع سینگ ـ مادالا به ازای a=۱ است. در متون آماری توزیع لومکس بیشتر با نام توزیع پارتو نوع دوم شناخته شده است. زیرا اگر

$$X \sim Lo\max(b, q) \Leftrightarrow X + b \sim Par(b, q).$$

این توزیع همچنین توزیع پیرسون نوع VI نامیده می شود.

۶. نتیجه گیری

مشخصههای اقتصادی کمی مانند درآمد، مقادیر نامنفی را اختیار میکنند و برای بررسی آنها لازم است از توزیع‌هایی استفاده شود که دارای متغیرهایی هستند که مقادیر مثبت اختیار میکنند. در این رابطه توزیع‌های تعمیم یافته مانند $GB۲$ به عنوان خانوادهای از اینگونه توزیع‌ها با انعطاف پذیری بالا اهمیت ویژه ای دارند. بعلاوه اینکه بسیاری از توزیع‌های مهم مانند سینگ مادالا، داگوم، گامای تعمیم یافته، فیسک و لومکس حالتهای خاص این توزیع اند ولذا مشخصههای این توزیع‌ها به راحتی از روی مشخصههای متناظر توزیع $GB۲$ قابل استخراج اند.

---

[33] - Champernowne distribution

[34] Shoukri

مراجع

[1] J. C. Ahuja, On certain properties of the generalized Gompertz distribution. Sankhya¯ , B31, 541–544, 1969.
[2] O. Ammon, Die Gesellschaftsordnung und ihre Naturlichen Grundlagen, Jena, 1895.
[3] L. Amoroso, Ricerche Intorno alla Curva dei Radditi. Annali di matematica. Pura ed applicata. Series 4-12, Vol, II. 123-157, 1924-1925.
[4] B. C. Arnold, Pareto Distributions. Fairland, MD: International Co-operative Publishing House, 1983.
[5] B. C. Arnold, and L. Laguna, On generalized Pareto distributions with applications to income data. International Studies in Economics No. 10, Dept. of Economics, Iowa State University, Ames, Iowa, 1977.
[6] C.P.A. Bartels, H. van Metelen, Alternative probability density functions of income: A comparison of the lognormal-, Gamma- and Weibull-distribution with Dutch data. Research Memorandum No. 29, 1975.
[7] I.W. Burr, Cumulative Frequency Functions. The Annals of Mathematical Statistics, 13, 215-232, 1942.
[8] R. J. Butler, and J. B. McDonald, Using incomplete moments to measure inequality.Journal of Econometrics, 42, 109–119, 1989.
[9] D.G. Champernowne, The graduation of income distributions. Econometrica, 20, 91– 615, 1952.
[10] A. Dadpay, E. S. Soofi, and R. Soyer, Information Measures for Generalized Gamma Family, ournal of Econometrics, 138, 568-585, 2007.
[11] C. Dagum, Linking the functional and personal distributions of income. In: J. Silber (ed.): Handbook on Income Inequality Measurement, Boston, Dordrecht, and London: Kluwer, pp. 101–128, 1999.
[12] C. Dagum, and A. Lemmi, A contribution to the analysis of income distribution and income inequality, and a case study: Italy. Research on Economic Inequality, 1, 123– 157. 1989.
[13] C. Dagum, The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio. Economie Applique´e, 33, 327–367, 1980.
[14] C. Dagum, A new model of personal income distribution: Specification and estimation. Economie Applique´e, 30, 413–437, 1977.
[15] C. DagumA model of income distribution and the conditions of existence of moments of finite order. Bulletin of the International Statistical Institute, 46 (Proceedings of the 40th Session of the ISI, Warsaw, Contributed Papers), 199–205, 1975.
[16] M. A. El-Saidi, K. P. Singh,, and A. A. Bartolucci, A note on a characterization of the generalized log-logistic distribution. Environmetrics, 1, 337–342, 1990.
[17] P. Espinguet, and M. Terraza, Essai d'extrapolation des distributions de salaires franc¸ais. Economie Applique´e, 36, 535–561, 1983.
[18] P. R. Fisk, The graduation of income distributions. Econometrica,29, 171–185, 1961 a.
[19] P. R. Fisk, Estimation of location and scale parameters in a truncated grouped sech- square distribution. Journal of the American Statistical Association, 56, 692–702, (1961b).
[20] N. C. Kakwani, Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications. New York: Oxford University Press, 1980.
[21] C. Kleiber, and M. Trede, Multivariate income distributions via copulas. Working paper, Universita¨t Dortmund, 2003.
[22] C. Kleiber, S. Kotz, Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, (Wiley & Sons, New Jersey), 2003.
[23] S. A. Klugman,, and R. Parsa, Fitting bivariate loss distributions with copulas. Insurance: Mathematics & Economics, 24, 139–148, 1999.
[24] K. S. Lomax, Business failures: Another example of the analysis of failure data. Journal of the American Statistical Association, 49, 847–852, 1954.
[25] H. J. Malik, Exact distribution of the quotient of independent generalized gamma variables. Canadian Mathematical Bulletin, 10, 463–465, 1967.
[26] J. B. McDonald, Some generalized functions for the size distribution of income. Econometrica, 52, 647–663, 1984.
[27] PH. J. Malik, Exact distribution of the quotient of independent generalized gamma variables. Canadian Mathematical Bulletin, 10, 463 PSMT2013 465, 1967.
[28] V. Pareto, La Legga Della Domanda, Girnale Degli Economisti,/gennaio. 59-68,1895.
[29] M. M. Shoukri, I. U. H. Mian, and , D. S. Tracy Sampling properties of estimators of the log-logistic distribution with application to Canadian precipitation data. Canadian Journal of Statistics, 16, 223–236, 1988.
[30] S. K. Singh, and G. S. MaddalaA stochastic process for income distribution and tests for income distribution functions. ASA Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, 551–553, 1975.
[31] P. R. Tadikamalla, An approximation to the moments and the percentiles of gamma order statistics.Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B, 1977,39, 372–381.
[32] P. L. I. Vartia,, and Y. O. Vartia, Description of the income distribution by the scaled F distribution model. In: N. A. Klevmarken and J. A. Lybeck (eds.): The Statics and Dynamics of Income. Clevedon, UK: Tieto, pp. 23–36, 1980.
[33] A. Zandonatti, Distribuzioni de Pareto Generalizzate. Tesi di Laurea, Dept. of Economics, University of Trento, Italy, 2001.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–151، صص. ۱۳۳–۱۴۴

منحنی و شاخص بونفرونی و ارتباط آنها با منحنی لورنتس و برخی شاخص های مهم نابرابری

مهدی یعقوبی اول ریابی*، علیرضا حسین زاده، عفت دلیر

گروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی،گناباد، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
منحنی لورنتس
منحنی بونفرونی
ضریب جینی
ضریب بونفرونی
اندازه های آنتروپی تعمیم یافته

چکیده

از دیرباز تعیین چگونگي توزیع درآمد و نحوه تقسیم ثروت در جوامع، مورد توجه دانشمندان علوم مختلف بوده است ودر این زمینه منحنی ها و شاخص هاي متفاوتي معرفي و مورد استفاده قرارگرفته اند .شاخص هايي كه هر كدام طرفداران و منتقداني دارند. در این مقاله ابتدا مروری بر برخی منحنی ها و شاخص های مهم در مبحث نابرابری خواهیم داشت سپس منحنی و شاخص بونفرونی را معرفی و ویژگی های آنها را بیان خواهیم کرد و در نهایت ارتباط آنها را با شاخص ها و منحنی های متداول ذکر شده بررسی نموده، نتیجه را در قالب چند مثال ارائه خواهیم کرد.

۱. مقدمه

یکی از مهمترین نشانه های رشد اجتماعی و وضعیت رفاه در یک جامعه فرضی، تعادل و توازن ثروت در آن جامعه است. نابرابری در درآمد و ثروت در یک جامعه یکی از موضوعات بسیار مورد توجه، از گذشته تا به حال، برای اقتصاددانان، جامعه شناسان و سیاست مداران بوده است. یکی از دلایل این توجه این است که نابرابری، یکی از عوامل موثر در بسیاری از ناهنجاری‌های اجتماعی و اقتصادی است. ضمن اینکه با شناخت این پدیده می توان به برخی پرسش‌ها پاسخ داد، از جمله اینکه آیا سیاست مالیاتی جدید چه تاثیری بر جامعه خواهد داشت؟

برای بیان و اندازه گیری نابرابری دو روش عمده هندسی و عددی وجود دارد. در روش هندسی با کمک برخی نمودارها میزان نابرابری را در جامعه به تصویر می‌کشیم. مهمترین این نمودارها عبارتند از منحنی‌های نابرابری لورنتس [۱]، بونفرونی [۲] و زنگا [۳]. در روش عددی سعی می‌شود که میزان نابرابری در جامعه را با کمک یک شاخص عددی بیان کنیم. شاخص های نابرابری زیادی تا کنون معرفی شده‌اند. شاخص هایی که هر کدام طرفداران و منتقدانی دارند ازقبیل ضریب جینی [۴]، ضریب بونفرونی [۵]، شاخص زنگا [۶]، شاخص تیل [۷] شاخص آتکینسون [۸]. در این مقاله ابتدا برخی شاخص ها و منحنی های مهم مانند منحنی لورنتس، ضریب جینی، اندازه آنتروپی تعمیم یافته، شاخص های تیل و... . را مرور خواهیم

*سخنران

پست الکترونیک: m_yaghoobiawal@yahoo.com (مهدی یعقوبی اول ریابی)، hoseinzade1@yahoo.com (علیرضا حسین زاده)، e_dalir_e@yahoo.com (عفت دلیر)

[1] Lorenz Inequality Curve
[2] Bonferroni Inequality Curve
[3] Zenga Inequality Curve
[4] Gini Index
[5] Bonferroni Index
[6] Zenga Index
[7] Theil Index
[8] Atkinson Index

کرد آنگاه منحنی و شاخص بونفرونی را معرفی و خواص آنها را بیان می کنیم. سپس ارتباط بین منحنی بونفرونی با منحنی لورنتس و شاخص بونفرونی با سایر شاخص های نابرابری را مطالعه نموده با ارائه چند مثال موضوع را تبیین می کنیم

۲. منحنی لورنتس

منحنی لورنتس از شاخص‌های مهم چگونگی "حتوزیع ثروت"> در جامعه می‌باشد که اولین بار توسط ماکس اوتو لورنز[9] (۱۹۰۵) پیشنهاد شد. بسیاری از کارشناسان آن را شاخص مهمی برای نمایش نابرابری‌های اجتماعی به صورت کلی نیز می‌دانند. این منحنی در صد تجمعی درآمد را با در صد تجمعی جمعیت مرتبط می کند. در صفحه منحنی لورنتس، محور عمودی درصد تجمعی درآمد و محور افقی درصد تجمعی جمعیت را بیان می کند. در حالتی که توزیع ثروت در میان اعضای جامعه کاملا عادلانه باشد، منحنی لورنتس قطر مربع واحد خواهد بود که به آن "خط توزیع کاملا عادلانه" یا خط برابری[10] می گویند. در این صورت، درصدهای مشخصی از جمعیت بطور کاملا متناسب، درآمدهای معینی از ثروت ملی را در اختیار خواهند داشت. در غیر این صورت منحنی لورنتس یک منحنی محدب خواهد بود و ناحیه واقع بین خط مستقیم و منحنی لورنتس به ناحیه توزیع ناعادلانه درآمدها موسوم است (منتظر ظهور ۱۳۷۱). مطابق با تعریف فوق هر چقدر منحنی لورنتس در یک جامعه فرضی به "حخط توزیع کاملا عادلانه"> نزدیک‌تر باشد توزیع ثروت در آن جامعه عادلانه‌تر انجام گرفته است.
برای یک جمعیت به حجم n با مقادیر x_i، $i = ۱,\dots, n$ منحنی لورنتس بر حسب $n+۱$ نقطه به صورت زیر تعریف می شود

$$L\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=۱}^{k} x_{i:n}}{\sum_{i=۱}^{n} x_{i:n}}, \qquad k = ۰, ۱, ۲, \dots, n$$

که در آن $L(۰) = ۰$ و $x_{i:n}$ درآمد iامین فرد است وقتی درآمد ها از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند و منحنی لورنتس از اتصال این نقاط به دست می آید
رابطه بالاتابع لورنتس را به ازاء مقادیر $۰, \frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}, \dots, ۱$ مشخص می کند ولی تابع لورنتس $L(p)$ را برای هر p در فاصله $[۰, ۱]$می توان با استفاده از تعریف زیر محاسبه کرد

$$L(p) = \frac{۱}{n\bar{x}} \left\{ \sum_{i=۱}^{\lfloor pn \rfloor} x_{i:n} + (pn - \lfloor pn \rfloor)\, x_{\lfloor pn \rfloor + ۱:n} \right\}, \quad ۰ \le p \le ۱ \qquad (۱)$$

که $\lfloor pn \rfloor$بزرگترین عد صحیح کوچکتر از pn است.
برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f(x)$ وتابع توزیع $F(x)$ تابع لورنتس به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(p) = \frac{۱}{E(X)} \int_{-\infty}^{F^{-۱}(p)} x f(x) dx, \qquad p \in [۰, ۱] \qquad (۲)$$

که با تغییر متغیر مناسب به فرم زیر نیز قابل تبدیل است

$$L(p) = \frac{۱}{E(X)} \int_{۰}^{p} F^{-۱}(x) dx \qquad p \in [۰, ۱] \qquad (۳)$$

که در آن $E(X) = \int_{۰}^{۱} F^{-۱}(t) dt$ میانگین توزیع است و

$$F^{-۱}(t) = Sup\{x \mid F(x) \le t\}, \quad t \in [۰, ۱]$$

۰ فرمول (۳) وقتی کارایی دارد که $F^{-۱}(x)$ فرم بسته ای داشته باشد. در غیر این صورت می توان از عبارت زیر که هم ارز (۳) است استفاده کرد

$$\{(p, L(p)\} = \{(p, v) \mid p = F(x),\ v = F_{۱}(x);\ x \ge ۰\} \qquad (۴)$$

که در آن $F_k(x) = \frac{۱}{E(X)} \int_{۰}^{F(x)} t^k f(t) dt, \quad x \ge ۰, k = ۰, ۱, ۲, \dots.$

[9] Max Otto Lorenz
[10] Egalitarian Line

۲ .۱ . *خواص منحنی لورنتس*

منحنی لورنتس L *در شرایط زیر صدق می کند :*

۱- $L(۱) = ۱, L(۰) = ۰$

۲- منحنی لورنتس یک منحنی اکیدا صعودی و اکیدا محدب است.

۳- برای $۰ < p < ۱$ داریم: $L(p) \leq p$ و در حالت عدالت کامل: $L(p) = ۱$

۴- همواره داریم: $\int_{۰}^{۱} L(p)\,dp \leq \frac{۱}{۲}$

از خواص (۱) و (۳) نتیجه می گیریم: $\forall ۰ \leq p \leq ۱ \rightarrow ۰ \leq L(p) \leq p$ و با انتگرال گیری بدست می آید که: $۰ \leq \int_{۰}^{۱} L(p)\,dp \leq \frac{۱}{۲}$

۳. ضریب جینی

ضریب جینی یک شاخص مهم آماری است که معمولا برای سنجش میزان نابرابری در توزیع درآمد یا ثروت در یک جامعه آماری استفاده می شود و اولین بار توسط آماردان ایتالیایی به نام کورادو جینی[11] (۱۹۱۲) معرفی شد. ضریب جینی همواره بین صفر و یك قرار دارد و هرچه این شاخص به صفر نزدیك تر باشد، توزیع درآمد عادلانه تر بوده و به برابری کامل نزدیك تر است و برعکس، هر چقدر ضریب جینی به یك نزدیك تر باشد، بیانگر نابرابری در توزیع درآمد می باشد.

برای یک جمعیت به حجم n با مقادیر nx_i ,..., $i = ۱,$. ضریب جینی را با G نمایش داده به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$G = \frac{۱}{n}\left(n + ۱ - ۲\frac{\sum_{i=۱}^{n}(n + ۱ - i)x_{i:\,n}}{\sum_{i=۱}^{n} x_{i:\,n}}\right) \qquad (۵)$$

و اگر Xیک متغیر تصادفی دارای تابع لورنتس L باشد ضریب جینی به فرم زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} G &= ۲\int_{۰}^{۱}(u - L(u))du \\ &= ۱ - ۲\int_{۰}^{۱} L(u)du \end{aligned} \qquad (۶)$$

۳ .۱ . *خواص ضریب جینی*

برخی خواص مهم ضریب جینی عبارتند از:

۱ــدر حالت فقدان نابرابری (عدالت کامل)، $G = ۰$ است.

۲- در حالت ماکزیمم نابرابری مقدار ضریب جینی باید تابعی صعودی مانند c_n از n باشد، به قسمی که:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = ۱$$

۳ــاگر $Y = aX, (a > ۰)$ ، آنگاه $G(X) = G(Y)$ یعنی ضریب جینی نسبت به تبدیلات مقیاسی پایا است . یعنی اگر کلیه درآمدها به طور متناسبی تغییر کند، ضریب جینی تغییر نخواهد کرد.

۴ــاگر $Y = h + X, (h > ۰)$ آنگاه $G(Y) < G(X)$.یعنی ضریب جینی نسبت به تبدیلات مکانی پایا نیست.

۵ــطبق اصل انتقالات (پیگو ــدالتون)، اگر انتقالی به اندازه $h > ۰$ به شرط محدودیت $h < \frac{۱}{۲}(x_{i+۱} - x_i)$ ، $x_{i+۱}$ را به x_i ببرد، ضریب جینی کاهش می یابد. یعنی انتقال درآمد از فرد غنی ($x_{i+۱}$) به فرد فقیر (x_i) با ثابت نگه داشتن درآمد سایر افراد، شاخص نابرابری را کاهش می دهد

۴. اندازه های نابرابری آنتروپی تعمیم یافته GE

شاروک[12] (۱۹۸۰) *خانواده اندازه های نابرابری آنتروپی تعمیم یافته* (GE) *را به صورت زیر ارائه کرد :*

$$GE(\alpha) = \frac{۱}{\alpha(\alpha - ۱)}\left[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{\alpha} - ۱\right] \qquad (۷)$$

[11]-Corrado Gini

[12]Shorrock

این خانواده از اندازه ها ، شاخص های نابرابری مهمی از قبیل اندازه های T_0و T_1 تیل، نصف مجذور ضریب تغییرات و اندازه آتکینسون را شامل می شوند .

$GE(0)$، همان شاخص T_0 تیل هست که با گرفتن حد از رابطه (۲) وقتی $\alpha \to 0$ حاصل می شود.
درنتیجه شاخص T_0 عبارت است از:

$$T_0 = \frac{1}{n}\sum_i \ln\left(\frac{\mu}{x_i}\right) \tag{۸}$$

این شاخص توسط تیل (۱۹۷۰)معرفی شد.
$GE(1)$، همان شاخص T_1 تیل هست که با گرفتن حد از رابطه (۲) وقتی $\alpha \to 1$ حاصل می شود
شاخص T_1 در سال ۱۹۶۵ توسط تیل مطرح گردید.

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_i \left(\frac{x_i}{\mu}\right)\ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right) \tag{۹}$$

نصف مجذور ضریب تغییرات در $\alpha = 2$ حاصل می شود و می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^2 - 1\right] \tag{۱۰}$$

آتکینسون کلاس دیگری از اندازه های نابرابری است که گه گاهی مورد استفاده قرار می گیرد. به دلیل شباهت فراوان تعدادی از خواص تئوری آن با خواص اندازه های نابرابری آنتروپی تعمیم یافته، جزء همین کلاس مورد مطالعه قرار می گیرند. این شاخص توسط آتکینسون(۱۹۷۰) معرفی شد.

$$A_\varepsilon = \begin{cases} 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & \varepsilon \neq 1 \\ 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^{\frac{1}{n}}\right)}{\mu} & \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{۱۱}$$

که در آن ε یک پارامتر وزنی تنفر نابرابری است و بین صفر و بی نهایت قرار می گیرد. بیشترین مقداری که ε می گیرد ، بیشترین زیان نابرابری است که برای جامعه مدنظر حاصل می شود
روهد[13] (۲۰۰۸) با استفاده از تعریف انتگرال معین بصورت حد مجموع ریمان نشان داد که

$$T_0 = \lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) = -\int_0^1 \ln L'(\pi)\, d\pi \tag{۱۲}$$

$$T_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)\ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) = \int_0^1 L'(\pi)\ln\left(L'(\pi)\right) d\pi \tag{۱۳}$$

$$\frac{1}{2}CV^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(L'(\pi)^2 - 1\right) d\pi \tag{۱۴}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} 1 - \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1 - \left[\int_0^1 L'(\pi)^{1-\varepsilon} d\pi\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{۱۵}$$

[13]-Rohde

۵. منحنی بونفرونی

منحنی بونفرونی (BC) که خواص و ویژگی های جالبی در مطالعات نابرابری های درآمد و ثروت دارد اولین بار توسط بونفرونی (۱۹۳۰) پیشنهاد شدند. BC نه تنها در سنجش نابرابری ها ارزشمند است بلکه در قابلیت اعتماد نیز اهمیت زیادی دارند (برای مطالعه بیشتر به جیورجی[۱۴] و گرسینزی[۱۵] ۲۰۰۱ و پوندیر[۱۶] ۲۰۰۵ مراجعه کنید).
برای جمعیتی به حجم n و با مقادیر درآمدی $X_i, i = ۱, \dots, n$ منحنی بونفرونی به صورت زیر تعریف می شود:

$$BC\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=۱}^{k} q_i}{\frac{k}{n}} = \frac{n\sum_{i=۱}^{k} x_{i:n}}{k\sum_{i=۱}^{n} x_{i:n}}, k = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۱۶)$$

که در آن $q_i = \frac{x_{i:n}}{\sum_{i=۱}^{n} x_{i:n}}$ سهم درآمد فرد i ام و $x_{i:n}$ درآمد امین-i فرد است، اگر درآمد ها به ترتیب صعودی مرتب شده باشند. اگر روی محور افقی درصد تجمعی جمعیت p_i یعنی $\left\{\left(\frac{۱}{n}\right), \dots, ۱\right\}$ و روی محور عمودی درصد تجمعی درآمد تقسیم بر درصد تجمعی جمعیت یعنی

$$\left\{\left(\frac{q_۱}{\frac{۱}{n}}\right), \left(\frac{q_۱ + q_۲}{\frac{۲}{n}}\right), \dots, ۱\right\}$$

رسم شود ، از اتصال نقاط نموداری حاصل می شود که به آن منحنی بونفرونی می گویند.
برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f(x)$ وتابع توزیع $F(x)$ منحنی بونفرونی به صورت زیر تعریف می شود:
تعریف ۱: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی ، با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ که حداقل دو بار مشتق پذیر است و با تابع چگالی احتمال $f(x)$ است ، منحنی بونفرونی را با $BC(p)$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$BC\left[F\left(x\right)\right] = \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{F_۱(x)}{F(x)} \qquad (۱۷)$$

که μ_x میانگین جزئی[۱۷] و $F_۱(x)$ اولین گشتاور تابع توزیع[۱۸] اند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mu_x = \frac{\int_۰^x t f(t)dt}{\int_۰^x f(t)dt}, \qquad F_۱\left(x\right) = \frac{۱}{E(X)}\int_۰^x t\, f(t)dt$$

و بوسیله $[F(x),\ BC(F(x))]$ در یک مربع واحد رسم می شود. باید توجه داشت که با انتخاب $p = F(x)$ منحنی بونفرونی را بصورت زیر نیز می توان نوشت:

$$BC\left(p\right) = \frac{F_۱\left[F^{-۱}(p)\right]}{p} = \frac{۱}{\mu p}\int_۰^p F^{-۱}(t)dt, ۰ \le p \le ۱. \qquad (۱۸)$$

که درآن $(t) = \inf\{x : F(x) \ge t\}$ تابع چندکی می باشد.
وقتی $p \to ۰$ ، $B\left(p\right)$ فرم $(\frac{۰}{۰})$ به خود می گیرد، از اینرو منحنی بونفرونی همیشه از مبدا مختصات شروع نمی شود. از سوی دیگر داریم:

$$BC'\left(p\right) = \frac{۱}{\mu p^۲}\int_۰^p \frac{tdt}{f(F^{-۱}\left(t\right))} > ۰$$

بنا براین منحنی بونفرونی اکیدا صعودی است اما چون

$$BC''\left(p\right) = -\frac{۱}{\mu p^۳}\int_۰^p \frac{t^۲ f'\left(F^{-۱}\left(t\right)\right)dt}{(f(F^{-۱}\left(p\right))^۳}$$

[14]-Giorgi
[15]-Grescenzi
[16]-Pundir
[17]-Partial Mean
[18]-First moment distribution function

لذا محدب یا مقعر بودن منحنی بونفرونی بستگی به محدب یا مقعر بودن توزیع مربوطه دارد. در صفحه منحنی بونفرونی خط $y = ۱$ یعنی خطی که نقطه $(۰,۱)$ را به نقطه $(۱,۱)$ مرتبط می سازد، خط برابری یا خط عدالت نامیده می شود.لذا هرچه منحنی بونفرونی به خط برابری نزدیکتر باشد، توزیع ثروت یا درآمد در جامعه عادلانه تر است.

۱-۵ خواص منحنی بونفرونی:

منحنی بونفرونی در خواص زیر صدق می کند:

۱-برای هر توزیع، منحنی بونفرونی اکیدا صعودی است.

۲- اگر $۰ < p < ۱$ آنگاه: $۱ \leq$ و در حالت برابری کامل: $۱ =$

۳- همواره داریم: $۰ \leq \int_{۰}^{۱} dp \leq ۱$

۶. شاخص بونفرونی

این شاخص نیز که همزمان با منحنی بونفرونی توسط بونفرونی (۱۹۳۰)، معرفی گردید یکی از شاخص های مهم در اندازه گیری نابرابری های اجتماعی است. این شاخص را معمولا با B نمایش می دهند. از لحاظ هندسی شاخص بونفرونی مساحت ناحیه محصور بین منحنی بونفرونی، دستگاه مختصات و خط برابری کامل است وبه صورت زیر بیان می شود:

$$BC = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(۱ - \frac{\sum_{j=۱}^{i} q_j}{\frac{i}{n}}\right) \qquad (۱۹)$$

که در آن q_i سهم درآمد فرد i ام می باشد.

حال برای جامعه ای با n فرد که درآمدشان به ترتیب صعودی مرتب شده است و μ میانگین کل درآمد است ، p_i و q_i را که به ترتیب نشان دهنده درصد تجمعی جمعیت و درصد تجمعی درآمد متناظر با گروه درآمدی i است را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$p_i = \frac{i}{n}, q_i = \frac{\sum_{j=۱}^{i} x_j}{n\mu}$$

میانگین درآمد های کمتر مساوی با x_i را با μ_i نمایش داده وبه صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\mu_i = \frac{۱}{i}\sum_{j=۱}^{i} x_j$$

لذا برای یک توزیع گسسته ، شاخص بونفرونی را به صورت زیر نیز می توان محاسبه کرد:

$$BC = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n-۱}\left[\frac{\mu - \mu_i}{\mu}\right] = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{p_i - q_i}{p_i}\right] \qquad (۲۰)$$

BC را به عنوان نسبتی از ترکیبات خطی آماره های ترتیبی می توان به صورت زیر نوشت:

$$BC = \frac{\sum_{i=۱}^{n} w_i x_{(i)}}{\sum_{i=۱}^{n} x_{(i)}} \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$w_i = ۱ - \sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{j}, w_{i+۱} = w_i + \frac{۱}{i}, \sum_{i=۱}^{n} w_i \sum w_i = ۰$$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد. شاخص بونفرونی به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} BC = \int_{۰}^{\infty} \frac{F(x) - F_۱(x)}{F(x)} f(x)\,dx &= ۱ - \int_{۰}^{\infty} \frac{F_۱(x)}{F(x)} f(x)\,dx \\ &= ۱ - \int_{۰}^{\infty} F_۱(x) d\ln[F(x)] \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

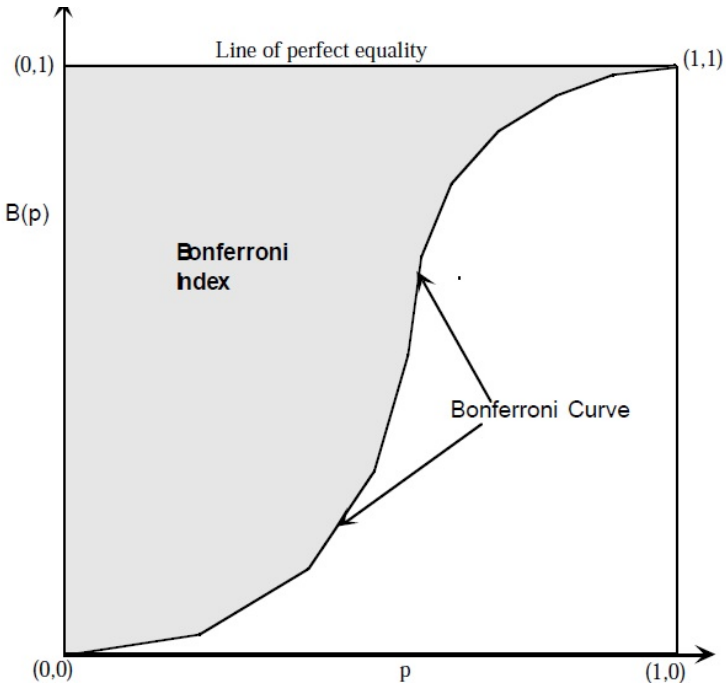
و با انتخاب $p = F(x)$ داریم:

$$B = ۱ - \int_{۰}^{۱} BC\,(p)\,dp \qquad (۲۳)$$

که $BC(p)$ همان منحنی بونفرونی حاصل از تابع توزیع مدنظر می باشد.
لذا شاخص بونفرونی همواره نامنفی است و مقادیر بین صفر و یک را می گیرد. هرچه این شاخص به صفر نزدیکتر باشد ، توزیع درآمد عادلانه تر است و برعکس هر چه قدر این شاخص به یک نزدیکتر باشد، بیانگر نابرابری در توزیع درآمد می باشد.

۱.۶ . خواص شاخص بونفرونی

برخی خواص مهم ضریب جینی عبارتند از:
$۰ \le B \le ۱$ ـهمواره داریم:
۲) $B = ۰$ اگر و تنها اگر همه درآمد ها برابر باشند . این همان اصل نرمالیزه یا اصل فقدان نابرابری است.
۳) $B = ۱$اگر و تنها اگر یک درآمد مثبت باشد.
۴) B متقارن است. بدین معنا که اگر تعدادی از افراد جامعه با ویژگی های متفاوت جایگاه درآمدی خود را تغییر دهند ، اندازه نابرابری تغییر نمی کند.
۵) B به کلاسی از اندازه های خطی نابرابری درآمد متعلق است که توسط مهران (۱۹۷۶) معرفی شد.
۶) طبق اصل انتقالات (پیگو ـدالتون) ، انتقال درآمد از فرد غنی به فرد فقیر، شاخص بونفرونی را کاهش می دهد .
شکل (۱) منحنی بونفرونی و شاخص بونفرونی را نشان می دهد



شکل ۱: منحنی بونفرونی و شاخص بونفرونی

۷. محاسبه منحنی و شاخص بونفرونی برای برخی توابع توزیع

در این بخش ابتدا با ارائه مثالی به محاسبه منحنی بونفرونی و شاخص بونفرونی می پردازیم ، سپس خلاصه نتایج برای برخی توزیع ها در جدول شماره (۱) ارائه می شود.

مثال ۱: فرض کنید متغیر تصادفی X ، دارای تابع توزیع مستطیلی باشد.داریم:

$$F(x)=\frac{x-(۱-\theta)\mu}{۲\theta\mu};\mu(۱-\theta)\le x\le\mu(۱+\theta),۰\le\theta\le۱ \qquad (۲۴)$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست می آید:

$$F'(x)=f(x)=\frac{۱}{۲\theta\mu}$$

لذا برای μ_x (میانگین شرطی) داریم:

$$\mu_x=\frac{\int_{\mu(۱-\theta)}^{x}\frac{t}{۲\theta\mu}dt}{\int_{\mu(۱-\theta)}^{x}\frac{۱}{۲\theta\mu}dt}=\frac{۱}{۲}(x+\mu(۱-\theta)) \qquad (۲۵)$$

منحنی بونفرونی را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$BC(F(x))=\frac{\mu_x}{\mu}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{\mu}+(۱-\theta)\right) \qquad (۲۶)$$

اگر $p=F(x)$ انتخاب شود ، داریم:

$$p=\frac{x-(۱-\theta)\mu}{۲\theta\mu}\Rightarrow x=۲\theta\mu+(۱-\theta)\mu \qquad (۲۷)$$

با جایگذاری x از رابطه (۲۷)در رابطه (۲۶) به دست می آید که:

$$BC(p)=\theta p+(۱-\theta) \qquad (۲۸)$$

و با استفاده از رابطه (۲۳) ، شاخص بونفرونی به صورت زیر حاصل می شود:

$$B=۱-\int_{۰}^{۱}(\theta p+(۱-\theta))\,dp=\frac{\theta}{۲} \qquad (۲۹)$$

مثال۲: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد یعنی $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ در این صورت داریم: $F(x)=۱-e^{-\lambda x}\Rightarrow$

$$F^{-۱}(t)=-\frac{۱}{\lambda}\ln(۱-t),$$

بنابر (۱۸)
$$BC(p)=\frac{-۱}{p}\int_{۰}^{p}\ln(۱-t)dt,$$

به سادگی با انتگراگیری جزء به جزء نتیجه می شود:

$$BC(p)=۱+\frac{(۱-p)\ln(۱-p)}{p}$$

و با استفاده از رابطه (۲۳) ، شاخص بونفرونی به صورت زیر حاصل می شود:

$$B=۱-\int_{۰}^{۱}\left(۱+\frac{(۱-p)\ln(۱-p)}{p}\right)dp=\frac{\pi^{۲}}{۶}-۱$$

۸. ارتباط منحنی و شاخص بونفرونی با منحنی لورنتس و ضریب جینی

با توجه به تعاریف منحنی لورنتس و منحنی بونفرونی و روابط (۳) و (۱۸) به سادگی دیده می شود که:

$$B(p)=\begin{cases}\frac{L(p)}{p}\ ۰<p<۱\\ ۰\ p=۰\end{cases} \qquad (۳۰)$$

جدول ۱:

توزیع	منحنی بونفرونی CB	شاخص بونفرونی B
تباهیده $F(x;\mu)=\begin{cases}xx=\mu\\ \circ x\neq\mu\end{cases}$	۱	۰
توانی $f(x)=\alpha x^{\alpha-۱}$ $\alpha>۱,\circ\leq x\leq ۱$	$p^{\frac{۱}{\alpha}}$	$\frac{۱}{\alpha+۱}$
مستطیلی $F(x)=\frac{x-(۱-\theta)\mu}{۲\theta\mu}$ $x\geq\mu(۱-\theta)$ $x\leq\mu(۱+\theta),\circ\leq\theta\leq ۱$	$(۱-\theta)+\theta p$	$\frac{\theta}{۲}$
گاما $F(x;\alpha,\lambda)=\int_{\circ}^{x}\frac{\lambda^{\alpha}t^{\alpha-۱}e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$ $\alpha,\lambda>\circ,x\geq\circ$	$\left[۱+\frac{(\lambda x)^{\alpha}/\alpha!}{\sum_{i=\alpha+۱}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}}\right]^{-۱}$	$۱-\int_{\circ}^{\infty}\frac{F(x;\alpha+۱,\lambda)}{F(x;\alpha,\lambda)}f(x)\,dx$
یکنواخت $f(x)=۱,a\leq x\leq a+\theta$	$\frac{۲a+\theta p}{۲a+\theta}$	$\frac{\theta}{۴a+۲\theta)}$

اگر چه از دیدگاه هندسی ، منحنی بونفرونی نابرابری را متناظر با منحنی لورنتس نشان می دهد و هر دو منحنی به طور تقریبی مشخص می شوند، ولی نتایج اطلاعات آن ها متفاوت است . ایمیدو و همکاران (۲۰۰۹) به این موضوع اشاره کرده اند

مقادیر $L(p)$ کسرهایی از درآمد کل هستند. در حالی که مقادیر $B(p)$ به سطوح نسبی درآمد بستگی دارد. شکل $B(p)$ به شکل توزیع مدنظر مرتبط است. قبلا نشان دادیم که $B(p)$ صعودی است ، ولی علامت مشتق دوم مشخص نیست، لذا $B(p)$ در بعضی نقاط محدب و در بعضی نقاط مقعر است . در حالی که $L(p)$ همواره صعودی و محدب است.

اگر هر کدام از منحنی های لورنتس و بونفرونی در یک درصد خاص مثلا $x=F^{-۱}(p)$ با یکدیگر مقایسه شوند، نابرابری تجمعی روی این درصد حاصل می شود. برای منحنی لورنتس داریم">

$$D_L(p)=p-L(p),\circ\leq p=F(x)\leq ۱$$

که $D_L(p)$ تفاوت بین درصد افرادی که درآمدشان کمتر یا مساوی x است و سهم واقعی درآمد کل جمعیت، در توزیع تحت بررسی است.

با در نظر گرفتن منحنی بونفرونی داریم:

$$D_B(p)=۱-B(p)=\frac{\mu-E(X|X\leq\mu)}{\mu},\circ\leq p=F(x)\leq ۱$$

که $D_B(p)$ تفاوت نسبی بین میانگین درآمد جمعیت و میانگین درآمد افرادی که درآمدشان کمتر مساوی x است را اندازه می گیرد.

مثال۳: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو نوع با تابع توزیع: . $x>\sigma$, $F(x)=۱-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}$ باشد. تابع لورنتس آن به صورت زیر حاصل می شود:

$$L(p)=۱-(۱-p)^{۱-\frac{۱}{\alpha}}$$

حال با توجه به رابطه (۳۰) داریم:

$$B(p)=\begin{cases}\frac{۱-(۱-p)^{۱-\frac{۱}{\alpha}}}{p}\circ<p\leq ۱\\ \circ p=\circ\end{cases}$$

تبصره: از رابطه (۳۰) نتیجه می شود که منحنی لورنتس همیشه زیر منحنی بونفرونی قرار می گیرد، یعنی: $L(p)\leq B(p),p\in(\circ,۱]$ پس می توان نوشت $\int_{\circ}^{۱}L(p)\,dp\geq ۱-\int_{\circ}^{۱}B(p)\,dp$ و *لذا نامساوی زیر بین ضریب جینی و ضریب بونفرونی برقرار است :*

$$B\leq(۱+G)/۲$$

زیرا شاخص جینی عبارت است از:

$$G = ۱ - ۲\int_{۰}^{۱} L\,(p)\,dp$$

۹. محاسبه اندازه های نابرابری GE برحسب منحنی بونفرونی

با توجه به رابطه(۳۰ و همچنین روابط موجود بین اندازه های نابرابری GE و منحنی لورنتس، روابط (۱۲) تا (۱۵)،که در بخش ۴ بیان شد، محاسبه اندازه های نابرابری GE بر حسب منحنی بونفرونی را در این بخش ، اساس کار قرار می دهیم.
رابطه (۲۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L\,(p) = \begin{cases} pB\,(p) & ۰ < p \le ۱ \\ ۰ & p = ۰ \end{cases} \qquad (۳۱)$$

لذا:

$$L'\,(p) = B\,(p) + pB'\,(p) \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳۲) در روابط (۱۲) تا (۱۵ داریم:

$$T_{۰} = -\int_{۰}^{۱} \ln(B\,(p) + pB'\,(p))dp \qquad (۳۳)$$

$$T_{۱} = \int_{۰}^{۱} (B\,(p) + pB'\,(p)) \ln\,(B\,(p) + pB'\,(p))\,dp \qquad (۳۴)$$

$$\frac{۱}{۲}CV^{۲} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left((B\,(p) + pB'\,(p))^{۲} - ۱\right) dp \qquad (۳۵)$$

$$A = ۱ - \left[\int_{۰}^{۱} (B\,(p) + pB'\,(p))^{۱-\varepsilon}\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}} \qquad (۳۶)$$

مثال ۴: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع مستطیلی باشد. آنگاه منحنی بونفرونی برای این متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می شود:

$$B\,(p) = (۱ - \theta) + \theta p$$

مشتق اول $B\,(p)$ نسبت به p عبارت است از: $B'\,(p) = \theta$
با قرار دادن $B\,(p)$ و $B'\,(p)$ در روابط (۳۳) تا (۳۶۳) اندازه های نابرابری GE به صورت زیر حاصل می شود:

$$L = -\int_{۰}^{۱} \ln\,(۲\theta p + (۱ - \theta))\,dp == \frac{۱}{۲\theta}\left(\ln\left(\frac{(۱-\theta)^{۱-\theta}}{(۱+\theta)^{۱+\theta}}\right) + \theta + ۱\right)$$

$$T = \int_{۰}^{۱} (۲\theta p + (۱ - \theta)) \ln\,(۲\theta p + (۱ - \theta))\,dp$$

$$= \ln\,(\theta + ۱)\left[\frac{(\theta + ۱)^{۲}}{۴\theta}\right] - \left[\frac{۱ + \theta^{۲}}{۴\theta}\right] - \frac{(۱ - \theta)^{۲}}{۴\theta}\,(\ln\,(۱ - \theta) - ۱)$$

$$\frac{۱}{۲}CV^{۲} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left((۲\theta p + (۱ - \theta))^{۲} - ۱\right) dp = \frac{۱}{۶}\theta^{۲}$$

$$A = ۱ - \left[\int_{۰}^{۱} (۲\theta p + (۱ - \theta))^{۱-\varepsilon} dp\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}}$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲\theta(۲-\varepsilon)}\left[(\theta+۱)^{۲-\varepsilon} - (۱-\theta)^{۲-\varepsilon}\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}}$$

مثال ۵: برای متغیر تصادفی X، با توزیع توانی داریم:

$$B(p) = p^{\frac{۱}{\alpha}}$$

و لذا: $B'(p) = \frac{۱}{\alpha}p^{\frac{۱}{\alpha}-۱}$

با استفاده از روابط (۳۳) تا (۳۶) نتایج زیر حاصل می شود:

$$T = \int_{۰}^{۱}\left(p^{\frac{۱}{\alpha}}\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)\right)\ln\left(p^{\frac{۱}{\alpha}}\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)\right)dp = \ln\left(\frac{\alpha+۱}{\alpha}\right) - L = -\int_{۰}^{۱}\ln\left(p^{\frac{۱}{\alpha}}\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)\right)dp = -\frac{۱}{\alpha}(\ln(p)-۱) - \ln\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)$$

$$\frac{۱}{۲}CV^{۲} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}\left(\left(p^{\frac{۱}{\alpha}}\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)\right)^{۲}-۱\right)dp = \frac{۱}{۲}\left[\frac{(\alpha+۱)^{۲}}{\alpha(۲+\alpha)}-۱\right]$$

$$A = ۱ - \left[\int_{۰}^{۱}\left(p^{\frac{۱}{\alpha}}\left(\frac{۱}{\alpha}+۱\right)\right)^{۱-\varepsilon}dp\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}} = ۱ - \left[\left(\frac{\alpha+۱}{\alpha}\right)^{۱-\varepsilon}\cdot\frac{\alpha}{۱+\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}}$$

مثال ۶: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی یکنواخت باشد .برای $B(p)$ و $B'(p)$ داریم:

$$B(p) = \frac{۲a + (b-a)p}{a+b}$$
$$B'(p) = \frac{b-a}{a+b}$$

با قرار دادن روابط بالا در روابط (۳۳) تا (۳۶) داریم:

$$L = -\int_{۰}^{۱}\ln\left(\frac{۲(a+p(b-a))}{a+b}\right)dp = -\ln\left(\frac{۲b}{a+b}\right)$$

$$T = \int_{۰}^{۱}\left(\frac{۲(a+p(b-a))}{a+b}\right)\ln\left(\frac{۲(a+p(b-a))}{a+b}\right)dp = \frac{۲b\ln\left(\frac{۲b}{a+b}\right)}{a+b}$$

$$\frac{۱}{۲}CV^{۲} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}\left(\left(\frac{۲(a+p(b-a))}{a+b}\right)^{۲}-۱\right)dp = \frac{۲b^{۲}}{a+b} - \frac{۱}{۲}$$

$$A = ۱ - \left[\int_{۰}^{۱}\left(\frac{۲(a+p(b-a))}{a+b}\right)^{۱-\varepsilon}dp\right]^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}} = ۱ - \left(\left(\frac{۲b}{a+b}\right)^{۱-\varepsilon}\right)^{\frac{۱}{۱-\varepsilon}}$$

۱۰. منحنی بونفرونی و ارتباط آن با منحنی انتقال آزمون زمان کل مقیاس شده[19]

یکی از منحنی های کاربردی در قابلیت اعتماد ، منحنی $STTT$ است که ارتباط آن با منحنی لورنتس و خصوصا منحنی بونفرونی یکی از حلقه های اتصال اقتصاد و قابلیت اعتماد است.

تعریف ۲: فرض کنید X، یک متغیر تصادفی نامنفی و اکیدا پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد که پیوسته و حداقل دو بار مشتق پذیر است. منحنی $STTT$ را معمولا با $T_{۴}$نمایش داده ،بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$T_{۴}(p) = \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{F^{-۱}(p)}\overline{F}(t)\,dt; p\in[۰,۱] \qquad (۳۷)$$

که در آن $E(X) = \mu < \infty$ میانگین توزیع است و $\overline{F}(t) = \sup\{x|F(x)\le t\}$ تابع چندکی می باشد و $F^{-۱}(۰) = ۰$ است.

[19] Scaled Total Time on Test Transform Curve: $STTT$

با توجه به تعریف منحنی $T_۴$ و ارتباط آن با سایر منحنی ها می توان به مقایسه منحنی ها با یکدیگر براساس تعاریف واردشده در مساله آزمون بقا و قابلیت اعتماد پرداخت .
رابطه بین $T_۴$ و منحنی بونفرونی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$T_۴(p) = pB(p) + \left[\frac{۱-p}{\mu}\right] F^{-۱}(p), p \in (۰, ۱] \qquad (۳۸)$$

منحنی $T_۴$ مانند منحنی بونفرونی در مربع واحد تعریف می شود. همیشه مشتق اول آن مثبت است . لذا این منحنی صعودی است و مشتق دوم آن علامتی متغیر دارد، لذا در بعضی نقاط محدب و در بعضی نقاط مقعر است.
قضیه۱: منحنی بونفرونی همیشه بالای منحنی لورنتس و زیر منحنی $T_۴$قرار می گیرد.
اثبات: به طور شهودی داریم:

$$L(p) = pBC(p) \leq BC(p)\, p \in (۰, ۱]$$

با فرض $F(۰) = ۰$ و $F^{-۱}(۰) = ۰$ داریم:

$$T_۴(p) = \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{F^{-۱}(p)} [۱ - F(t)]\, dt = \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{p} (۱-t)\, dF^{-۱}(t)$$

$$T_۴(p) = \frac{۱}{\mu}\left\{(۱-p)F^{-۱}(p) + \int_{۰}^{p} F^{-۱}(t)\, dt\right\} \geq$$

$$\frac{۱}{\mu}\left\{(۱-p)\frac{۱}{p}\int_{۰}^{p} F^{-۱}(t)\, dt + \int_{۰}^{p} F^{-۱}(t)\, dt\right\}$$

$$\frac{۱}{\mu p}\int_{۰}^{p} F^{-۱}(t)\, dt = BC(p)\, p \in (۰, ۱]$$

بنابراین نتیجه می گیریم که منحنی بونفرونی همیشه زیر منحنی $T_۴$ قرار می گیرد.
قضیه زیر نیز با روشی مشابه قضیه قبل قابل اثبات است
قضیه۲: اگر B ضریب بونفرونی باشد آنگاه همواره داریم: $B \leq \left(۱ - \frac{V}{۲}\right)$ که در آن V عبارت است از:

$$V = \int_{۰}^{۱} T_۴(p)\, dp$$

مراجع

[۱] محمود منتظر ظهور، اقتصاد خرد و کلان، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۱.
[2] C. E. Bonferroni, Elementi di statistica general. Libereria Seber, Firenze, 1930.
[3] C. Gini, Variabilita e mutabilita. Bologna, Italy (1912).
[4] G. M. Giorgiand, and M. Crescenzi, A look at the Bonferroni inequality measure in a reliability framework. Statistica, anno LXL 4, 571-583, 2001.
[5] M. O. Lorenz, Methods of measuring the cocentration of wealth. Publication of the American Statistical Association, 1905.
[6] F. Mehran, Linear Measures of Incom Inequality Econometrica. 44, 805-809, 1967.
[7] S. Pundir, S. Arora, and K. Jain, Bonferroni curve and the related statistical inference. Statistics and Probability Letters, 75, 140-150, 2005.
[8] N. Rohd, Lorenz Curves and Generalised Entropy Inequality Measures, Modeling Income Distributions and Lorenz Curves, Springer, 2008.
[9] A. F. Shorrock, The of Additively Decomposable Inequality Measures. Econometrica, 48, 613-625, 1980.
[10] H. Theil, Optimum procedures for economic information retrieval. Information Storage and Reetrieval, pp, 137-153, 1970
[11] H. Theil, The information approach to demand analysis. Econometrica, 33, 67-86, 1965.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–156، صص. ۱۴۵–۱۴۷

برآورد ناپارامتری تابع رگرسیون همراه با خطای ناهمسان

قدرت اله رحمتی[آ]، اسماعیل شیرازی[ب]

[آ] مربی گروه آمار و دانشجوی دکتری آمار – دانشگاه پیام نور – ص پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران

[ب] استادیار گروه آمار دانشگاه گنبد کاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
پیچش
تابع کرنل
رگرسیون ناپارامتری
متغیر همراه با خطا
ناهمسانی توزیع

چکیده

یکی از اهداف در رگرسیون همراه با خطا ، برآورد منحنی رگرسیون هنگامی که متغیر مستقل همراه با خطای اندازه گیری می باشد. در این زمینه روش های ناپارامتری پیشنهاد شده بر اساس اینکه خطای اندازه گیری هم توزیع هستند، استوار است. در این مقاله برآورد تابع رگرسیون همراه با خطا، هنگامیکه خطاها هم توزیع نیستند، مورد بررسی قرار می گیرید.

۱. مقدمه

ی برآورد ناپارامتری تابع رگرسیون m، هنگامیکه مشاهدات یک نمونه مستقل و هم توزیع هستند. فرض می کنیم بردار تصادفی $(W_1,Y_1),(W_2,Y_2),\dots(W_n,Y_n)$ توسط مدل (۱) تولید شده باشد.

$$Y_j = m\left(X_j\right) + \eta_j, W_j = X_j + U_j \qquad (۱)$$

که در $E\left(\eta_j|X_j\right) = 0$ و $X_j \sim f_X, U_j \sim f_U$ و U_j ها متغیری تصادفی و مستقل از (X_j,Y_j,η_j) هستند. همچنین f_U معلوم است. در مدل (۱) برآورد تابع رگرسیون توسط محققینی از قبیل فن و ماسری(۱۹۹۲)، کوک و استفانسکی(۱۹۹۴) ، استفانسکی و کوک (۱۹۹۵)، کارول و همکاران (۱۹۹۹)، تیوپن(۲۰۰۱) ، بری و همکاران (۲۰۰۲) ،راپرت (۲۰۰۲) و کارول و هال (۲۰۰۴) مورد بررسی قرار گرفته است.
در این زمینه فن و ترانگ(۱۹۹۳) برآورد ناپارامتری $\mathrm{m}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}(Y|X=x)$ را بصورت زیر در نظر گرفتند.

$$\hat{m}(x) = (nh)^{-1}\sum_{j=1}^{n} Y_j K_U\left(\frac{x-W_j}{h}\right)/\hat{f}_n(x) \qquad (۲)$$

که در آن $\hat{f}_n(x) = (nh)^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_U\left(\frac{x-W_j}{h}\right)$ برآوردگر چگالی پیچش کرنل f_X می باشد. همچنین

$$K_U(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-1}\int e^{-itx}K^{ft}(t)/f_U^{ft}\left(\frac{t}{h}\right)dt$$

که در آن K^{ft} تبدیل فوریه تابع K است.
در کاربردهای عملی ، مثال های بسیار زیادی وجود دارد که فرض هم توزیع بودن U_j ها غیر واقعی است. بعنوان مثال در داده های پزشکی ممکن است داده ها از آزمایشگاههای مختلفی بدست آمده باشند. همچنین در تحقیقات علوم اجتماعی ممکن است که داده ها از طریق مطالعات متفاوتی کسب شده باشند. در این حالت دلیگل (۲۰۰۷) و همکاران به جای مدل (۱) ، مدل رگرسیونی زیر را در نظر گرفتند.

$$Y_j = m\left(X_j\right) + \eta_j, W_j = X_j + U_j \qquad (۳)$$

که در آن $E\left(\eta_j|X_j\right)=0$ و $X_j\sim f_X, U_j\sim f_{U_j}$. همچنین U_j ها متغیری تصادفی و مستقل از (X_j,Y_j,η_j) هستند. تابع چگالی U_jها ممکن است به تعداد مشاهدات j و همچنین اندازه نمونه n ، وابسته باشد. در این حالت برآوردگر (۲) چون در آن فقط از یک تابع چگالی استفاده می کند، کاربردی ندارد.
حال برای برآورد تابع رگرسیونی مدل (۳) ، تعمیم یافته برآورد (۲) بصورت زیر در نظر می شود.

$$\hat{m}\left(x\right)=\left(nh\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}Y_jK_{U_j}\left(\frac{x-W_j}{h}\right)/\hat{f}_n\left(x\right) \qquad (۴)$$

که در آن $K_{U_j}\left(\mathrm{x}\right)=\left(2\pi\right)^{-1}\int e^{-itx}K^{ft}\left(t\right)/f_{U_j}^{ft}\left(\frac{t}{h}\right)dt$ و

$$\hat{f}_n\left(x\right)=\left(nh\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}K_{U_j}\left(\frac{x-W_j}{h}\right)$$

تحلیل دقیق خواص رابطه (۴) نشان می دهد که نرخ همگرایی این برآوردگر غیر قابل پذیرش است. پس برآورد دیگری بصورت زیر پیشنهاد می گردد.

$$\hat{m}_n\left(x\right)=\left(h\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}Y_jK_{U_j}\left(\frac{x-W_j}{h}\right)/\hat{f}_n\left(x\right) \qquad (۵)$$

که در آن $\hat{f}_n\left(x\right)=\left(h\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}K_{U_j}\left(\frac{x-W_j}{h}\right)$ یک برآورد f_X است. همچنین
$K_{U_j}\left(\mathrm{x}\right)=\left(2\pi\right)^{-1}\int e^{-itx}K^{ft}(t)\psi_j(t/h)dt$
و $\psi_j\left(t\right)=f_{U_j}^{ft}\left(-t\right)/\sum_{k=1}^{n}\left|f_{U_k}^{ft}(t)\right|^2$
این برآوردگر تحت شرایط زیر ، خوش تعریف است.

۱) یک jوجود دارد بطوریکه $\left|f_{U_j}^{ft}(t)\right|\neq 0$ برای تمام $t\in R$.
۲) $K\in L_1(R)\cap L_2(R)$ بطوریکه K^{ft} دارای تکیه گاه $[-1,1]$ و وقتی $t\to 0$ آنگاه

$$\left|K^{ft}(t)-1\right|\downarrow 0$$

۳) $f_X(x)\neq 0$
۴) f_X، τ^2f_X و m^2f_X کراندار و پیوسته هستند. همچنین $(mf_X)^{ft},{f_X}^{ft}\in L_1(R)$ که در آن $\tau^2=Var\left(Y|X=x\right)$.

برای بررسی سازگاری برآوردگر (۵) ، باید تابع $f_{U_j}^{ft}(t)$ در شرایط زیر صدق کند. وقتی $n\to\infty$ آنگاه

$$\sum\left|f_{U_j}^{ft}(t)\right|^2\to\infty inf\sum_{j=1}^{n}\left|f_{U_j}^{ft}(t)\right|^2>0$$

در حالت همسانی توزیع U_jها (یعنی $f_{U_j}^{ft}=f_U^{ft}$)، چون $f_{U_j}^{ft}(t)$ هیچ کجا صفر نیست. پس شرایط (۶) برقرار است. اما در حالت ناهمسانی توزیع U_j ها باید شرط دیگری بصورت زیر در نظر گرفته شود.
یک $\delta>1, k>0$ وجود دارد بطوریکه:

$$0\leftarrow h\geq c.n^{1-\delta+k},\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|f_{U_j}^{ft}\left(t\right)\right|^2\right)^{-2}dt=O\left(n^{-\delta}\right) \qquad (۶)$$

برای نشان دادن سازگاری برآوردگر (۵) از قضیه زیر استفاده می شود.
قضیه: اگر شرایط ۱تا ۴ و رابطه (۶) در نظر گرفته شود. آنگاه
الف) اگر $h\to 0$ و $\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|f_{U_j}^{ft}\left(t\right)\right|^2\right)^{-2}dt\to 0$ آنگاه همانطور که $n\to\infty$ داریم:

$$\hat{m}\left(\mathrm{x}\right)\xrightarrow{p}m\left(x\right)$$

ب) فرض کنید که $||m||_{\infty} < \infty$ ، با در نظر گرفتن رابطه (۷) اگر برای تمام j و
$E\left|n_j\right|^{l} \leq C_l < \infty$ ، $0 < l \leq 2\left[\frac{1}{k}\right] + 2$
آنگاه همانطور که $n \to \infty$ داریم:

$$\hat{m}\,(\mathrm{x}) \overset{a.s}{\to} m\,(x)$$

۲. بحث و نتیجه گیری

معمولا در داده های واقعی، فرض همسانی توزیع متغیر U_j اتفاق نمی افتد. در نتیجه برآورد ناپارامتری تابع رگرسیون معرفی شده یعنی رابطه (۲)، برآوردگر مناسبی نخواهد بود. اما با در نظر گرفتن فرض ناهمسانی توزیع متغیر U_j در برآورد تابع رگرسیون یعنی مدل (۳)، می توان به برآورد بهینه دست یافت. در این مقاله با معرفی برآورد تابع رگرسیون (۵) به یک برآورد سازگار با نرخ همگرایی بهینه دست می یابیم.

مراجع

[1] Berry, S. M., Carroll , R. J., and Ruppert , D.(2002)," Bayesian Smoothing and Regression Splines for Meaurement Error Problems," Journal of the American Statistical Association, 97, 160-169.

[2] Carrol, R. J., and Hall, P. (2004), "Low-Order Approximations in Deconvolution and Regression With Error in Variables," Journalof the Royal Statistical Society,Ser. B,66, 31-46.

[3] Carroll , R.j., Maca, J.D., and , Ruppert, D.(1999), : Nonparametric Regression in the Presence of Measurement Error," Biometrika, 86, 541-554.

[4] Cook, J. R., and Stefanski, l. A. (1994), "Simulation- Extrapolation Estimation in Parametric Measurement Error Models,"Journal of the American Statistical Association, 89, 1314-1328.

[5] Delaigle, A. and Meister,A(2007). " Nonparametric Regression Estimation in the Heteroscedastic Errors-in- Variables Problem ,"Journal of the American Statistical Association, Vol, 102, No . 480, pp. 1416-1426.

[6] Fan , J., and Masry, E. (1992)," Multivariate Regression Estimation With Errors in variales: Asymptotic Normality for Mixing Processes," Journal of the Multivariate Analysis, 43, 237-271.

[7] Taupin, M.L. (2001)," Semi-Parametric Estimation in the Nonlinear Structural Error-in-variables Model."The Annals of Statistics,29, 66-93.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–167، صص. ۱۴۸–۱۵۲

برآورد کرنل تابع چگالی تحت داده های دارای وابستگی زبرجمعی منفی

بهاره قنبری*[آ]، اسماعیل شیرازی[ب]

[آ] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستي۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران
[ب] استادیار، گروه آمار، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
برآورد تابع چگالی
برآوردگر کرنل
وابستگی زبرجمعی منفی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

یکی از مسایل مهم و کاربردی در نظریه احتمال و آمار کاربردی برآورد تابع چگالی و تابع توزیع متغیرهای تصادفی است که در بین روش های ناپارامتری، برآوردگر هسته ای به طور گسترده ای مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به اینکه در اکثر مطالعات کاربردی فرض استقلال بین پدیده ها برقرار نمی باشد، در این مقاله با فرض ساختار وابستگی زبرجمعی منفی برای متغیرهای تصادفی رفتار مجانبی برآوردگر کرنل تابع چگالی مورد بررسی قرار گرفته است و نرخ همگرایی آن به دست آمده است. نتایج به دست آمده در واقع توسیع و بهبود نتایج مشابه در حالت وابستگی پیوندی منفی است.

۱. مقدمه

در بین روش های ناپارامتری به منظور برآورد تابع چگالی و تابع توزیع، روش برآورد هسته ای به طور گسترده ای مورد مطالعه قرار گرفته است. یک نکته مهم در برآورد، وجود فرض استقلال است و اینکه این برآورد به چه میزان به این فرض حساس است. در حالی که می دانیم در عمل پذیره استقلال کمتر مورد پذیرش قرار می گیرد، اهمیت این سوال بیش از پیش آشکار می شود. روساس (۱۹۶۹) و روزنبلات (۱۹۷۰) اولین افرادي بودند که مسأله برآورد تابع چگالي را در حالت مشاهدات وابسته مورد توجه قرار دادند. آنها خواص مجانبي برآوردگر هسته اي چگالي را در حالتي که مشاهدات از یک فرآیند مارکوف نمونه گيري شده بودند را مورد بررسي قرار دادند. از مطالعات انجام شده در این زمینه مي توان به موارد زیر اشاره کرد. یاکوویتز (۱۹۸۵) همگرایي نقطه به نقطه برآوردگر هسته اي چگالي را براي زنجيرهاي مارکوف مورد بررسي قرار داد. ترن (۱۹۹۰) رفتار برآوردگر را براي متغيرهاي به طور ضعيف وابسته مورد مطالعه قرار داد و سازگاري يکنواخت برآوردگر را اثبات کرده و نرخ همگرايي را نيز ارايه کرد. فام و ترن (۱۹۹۱) با معرفي یک وابستگي ضعيف تر نسبت به آميزنده قوي با نام موضعي آميزنده تحت شرایط بسیار ضعيفي توانستند همگرايي يکنواخت برآوردگر را اثبات کنند. لو (۲۰۰۱) برآورد چگالي به روش هسته را براي نمونه هاي مانا تحت شرایط کلي مورد مطالعه قرار داد که شامل هر دو مورد فرآيندهاي خطي و α- آميزنده که در مقالات قبل مورد بررسي قرار گرفتند مي شود و علاوه بر آن در حالات غيرخطي و غير α- آميزنده نيز قابل انطباق است. وانگ و همکاران (۲۰۱۴) با در نظر گرفتن مدل هاي اتورگرسيو، برآورد تابع توزيع به روش هسته براي خطاهاي مشاهده نشده اين مدل را مطالعه کردند و یک نوار اطمينان همزمان براي آن ارايه دادند. سازگاري يکنواخت برآوردگر هسته اي تابع توزيع خطا در مدل اتورگرسيو مرتبه اول توسط چنگ (۲۰۱۸) مورد مطالعه قرار گرفت و در واقع او توانست یک تعميم از لم گليونکو.کانتلي ارايه دهد. مفاهيم وابستگي در عمل ممکن است به صورت دومتغيره و يا چندمتغيره مورد بررسي قرار گيرند. یکی از مفاهیم

*سخنران
پست الکترونیک: ghanbari.bahareh64@yahoo.com (بهاره قنبری)، shirazi.esmaeil@gmail.com (اسماعیل شیرازی)

مهم وابستگی چندمتغیره مبحث وابستگی زبرجمعی منفی [1] (NSD) است. این مفهوم، ابتدا توسط هو (۲۰۰۰) معرفی شد که بر اساس توابع زبرجمعی تعریف می شود. برخلاف مطالعات بسیاری که بر روی برآوردگر هسته ای تحت مفاهیم وابستگی صورت گرفته است ، تحقیقات در زمینه مفهوم وابستگی زبرجمعی منفی بسیار نادر است. با توجه به اینکه ساختار وابستگی زبرجمعی منفی یک توسیعی از وابستگی منفی پیوندی است و گاهی در به دست آوردن نابرابری های احتمالی مفیدتر نیز می باشد، از این رو در این مقاله سعی بر آن شده است تا به روش برآورد هسته ای تابع چگالی تحت این نوع وابستگی پرداخته شود. بر این اساس در ادامه این مقاله ابتدا تعاریف و مفاهیم اولیه مرتبط با متغیرهای تصادفی دارای وابستگی و بخصوص مفهوم وابستگی زبر جمعی منفی را بیان می کنیم و سپس همگرایی یکنواخت برآوردگر هسته ای تابع چگالی تحت این نوع وابستگی را مورد مطالعه قرار می دهیم. در نهایت پیشنهادی برای روش برآورد موجک تابع چگالی تحت داده های زبرجمعی منفی ارایه خواهد شد.

۲. تعاریف اولیه

در این بخش به معرفی برخی مفاهیم وابستگی و تعمیم آن ها به حالت چند متغیره می پردازیم. مفهوم وابستگی ربعی برای اولین بار توسط لی من (۱۹۶۶) معرفی شد.

تعریف ۱.۲. متغیرهای X و Y وابسته ربعی مثبت (PQD) نامیده می شوند، هر گاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$P(X \le x, Y \le y) \ge P(X \le x)P(Y \le y)$$

به طور مشابه دو متغیر تصادفی X و Y وابسته ربعی منفی (NQD) نامیده می شوند، هرگاه جهت نابرابری ها در معادله فوق عوض شود.

تعریف ۲.۲. متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ پیوندی مثبت (PA) نامیده می شوند، هرگاه برای هر دو تابع مولفه وار نانزولی f و g روی $\mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$cov(f(X_i; 1 \le i \le n), g(X_j; 1 \le j \le n)) \ge 0.$$

دنباله $\{X_n; n \ge 0\}$ را PA می نامیم هرگاه هر زیر مجموعه متناهی از آن PA باشد.

تعریف ۳.۲. متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ پیوندی منفی (NA) نامیده می شوند، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه مجزای A_1 و A_2 از مجموعه $\{1, 2, ..., n\}$

$$cov(f(X_i; i \in A_1), g(X_j; j \in A_2)) \le 0.$$

که در آن f و g مولفه وار صعودی یا نزولی هستند.

یکی از مفاهیم مهم وابستگی چندمتغیره مبحث وابستگی زبرجمعی منفی (NSD) است. این مفهوم، ابتدا توسط هو (۲۰۰۰) معرفی شد که بر اساس توابع زبرجمعی تعریف می شود. اما پیش از بیان آن، ابتدا به مفهوم تابع زبرجمعی اشاره می کنیم، که توسط کمپرمن (۱۹۷۷) تعریف شده است.

تعریف ۴.۲. تابع $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ زبرجمعی است، اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\phi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + \phi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \ge \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})$$

که در آن $\vee$ ماکسیمم مولفه ای و $\wedge$ مینیمم مولفه ای می باشند، به عبارت دیگر

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, ..., x_n \vee y_n)$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, ..., x_n \wedge y_n)$$

به عبارت دیگر می توان گفت اگر تابع ϕ دارای مشتق جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد، آنگاه این تابع زبرجمعی است اگر برای هر $i \ne j (i, j = 1, ..., n)$ داشته باشیم $\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \ge 0$.

با توجه به مفهوم تابع زبرجمعی، تغریف وابستگی زبرجمعی منفی به صورت زیر است:

تعریف ۵.۲. متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ وابسته زبرجمعی منفی نامیده می شوند، اگر برای هر تابع زبرجمعی ϕ،

$$E(\phi(X_1, X_2, ..., X_n)) \le E(\phi(X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)),$$

که در آن $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند و برای هر $1 \le i \le n$ متغیرهای تصادفی X_i و X_i^* دارای توزیع یکسان باشند.

[1] Negative Superadditive Dependence

۳. نتایج اصلی

یکی از موضوعات مهم در مباحث آماری مسیله برآورد تابع چگالی است. روش های گوناگونی برای برآورد تابع چگالی وجود دارد که از این میان برآوردگر هسته ای به طور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان منابع کلیدی و مهم در این زمینه می توان به پارزن (۱۹۶۲)، روزنبلات (۱۹۷۱) و سیلورمن (۱۹۸۶) اشاره کرد. در این بخش، برآوردگر هسته ای تابع چگالی برای متغیرهای وابسته زبرجمعی منفی مورد مطالعه قرار می گیرد.
فرض کنید $\{X_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی زبرجمعی از تابع چگالی نامعلوم $f(.)$ باشد. اگر $k(.)$ یک تابع چگالی احتمال و h_n یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی و همگرا به صفر باشند، در این صورت برآوردگر هسته ای تابع چگالی به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{۱}{nh_n}\sum_{i=۱}^{n} k(\frac{x - X_i}{h_n})$$

مسئله اساسی در اثبات همگرایی برآوردگر هسته ای تابع چگالی، استفاده از ویژگی زبرجمعی بودن نمونه تصادفی است اما زبرجمعی بودن تنها تحت تبدیلات یکنوا حفظ می شود. به عبارت دیگر در حالت کلی با توجه به یکنوا نبودن تابع هسته، دنباله متغیرهای تصادفی $\{k(\frac{x-X_i}{h_n}); n \geq$ ۱$\}$ لزوما زبرجمعی نخواهند بود. به منظور برطرف کردن این مشکل فرض می کنیم تابع $k(.)$ یک تابع با تغییرات کراندار باشد. سایر فرض های لازم برای بررسی نرخ همگرایی برآوردگر کرنل به صورت زیر هستند.

فرض ۱.۳. *دنباله* $\{X_n; n \geq ۱\}$ *یک دنباله از متغیرهای تصادفی اکیداً مانا زبرجمعی با تابع چگالی کراندار و پیوسته* $f(.)$ *باشد .*

فرض ۲.۳. *تابع چگالی* $f(.)$ *دارای مشتقات مرتبه اول و دوم کراندار و پیوسته باشد .*

فرض ۳.۳. *تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی* X_i, X_j *یعنی* $f_{ij}(.,.)$ *دارای مشتقات جزیی کراندار باشد .*

فرض ۴.۳. *تابع هسته* $k(.)$ *یک تابع چگالی احتمال، با تغییرات کراندار باشد طوری که* $\int k^۲(u)du < \infty$ *علاوه بر این می توان تابع هسته رو به صورت* $k(.) = k_۱(.) - k_۲(.)$ *در نظر گرفت که* $k_۱(.)$ *و* $k_۲(.)$ *دو تابع نانزولی باشند . فرض کنید مشتقات این دو تابع دارای موجود و انتگرال پذیر باشند .*

فرض ۵.۳. *تابع یک تابع هسته مرتبه دو باشد، یعنی :*

$$\int uk(u)du = ۰, \quad \mu_۲(k) = \int u^۲k(u)du < \infty$$

فرض ۶.۳. *دنباله پهنای باند* $\{h_n; n \geq ۱\}$ *زمانی که* $n \to \infty$ *در شرایط زیر صدق می کند :*

$$h_n \searrow ۰,$$
$$nh_n \to \infty$$

با توجه به مفروضات فوق برآوردگر تابع چگالی به روش هسته را می توان به صورت $\hat{f}_n(x) = \hat{f}_{۱,n}(x) - \hat{f}_{۲,n}(x)$ در نظر گرفت، که در آن

$$\hat{f}_{۱,n}(x) = \frac{۱}{nh_n}\sum_{i=۱}^{n} k_۱(\frac{x - X_i}{h_n}), \quad \hat{f}_{۲,n}(x) = \frac{۱}{nh_n}\sum_{i=۱}^{n} k_۲(\frac{x - X_i}{h_n})$$

همچنین برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n; n \geq ۱$ و $q = ۱, ۲$ درنظر بگیرید:

$$T_{q,i,n}(x) = h_n^{-۱}\left(k_q(\frac{x - X_i}{h_n}) - Ek_q(\frac{x - X_i}{h_n})\right)$$

این نکته قابل ذکر است که اگر نمونه $X_۱, X_۲, \dots, X_n$ زبرجمعی باشد، آن گاه نمونه تصادفی $T_{q,۱,n}, T_{q,۲,n}, \dots, T_{q,n,n}$ نیز زبرجمعی می باشد. با در نظر گرفتن مفروضات فوق می توان لم و قضیه زیر را برای نرخ همگرایی برآوردگر هسته ای تابع چگالی تحت متغیرهای NSD بیان کرد.

لم ۷.۳. *با فرض اینکه تابع هسته* $k(.)$ *در شرط لیپ شیتس صدق کند و زمانی که* $n \to \infty$ *داشته باشیم* $\frac{t_n}{h_n^2} \to 0$ *، در این صورت برای هر* $\epsilon > 0$ *و* n *به اندازه کافی بزرگ و هر بازه* $[a,b]$ *داریم:*

$$P\left(\sup_{x\in[a,b]} |\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x))| > \epsilon\right) \leq \frac{2(b-a)}{t_n} exp(\frac{-n\epsilon^2 h_n^2}{128C})$$

که در آن C *مقداری ثابت در نظر گرفته می شود و منظور از* t_n *طول زیربازه های* $[a,b]$ *است .*

قضیه ۸.۳. *با توجه به مفروضات بیان شده در ابتدای بخش، نرخ همگرایی برآوردگر مورد نظر به فرم زیر است :*

$$MISE(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{4}\mu_2^2(k)R(f'')h_n^4 + \frac{1}{nh_n}R(k) + \frac{2}{n}\sum_{j=2}^{\infty}\int (f_{1j}(x,x) - f^2(x))dx + o(h_n^4 + \frac{1}{nh_n}) + a_n$$

که در آن $\{a_n; n \geq 1\}$ یک دنباله حقیقی مستقل از h_n است طوریکه وقتی $n \to \infty$ ، دنباله به صفر همگراست. لازم به ذکر است نرخ بهینه همگرایی برآوردگر با انتخاب $h_n \leq n^{-1/5}$ حاصل می شود.

۴. آینده تحقیق

با توجه به اینکه تاکنون تحقیقی در زمینه برآورد تابع چگالی تحت داده های NSD به روش موجک انجام نشده است، در این بخش برآنیم تا برآوردگر موجک تابع چگالی تحت داده های دارای این نوع وابستگی را پیشنهاد داده و بررسی نرخ همگرایی آن را به عنوان آینده تحقیق درنظر بگیریم . بسط موجک تابع چگالی h به صورت زیر بیان می شود:

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j\geq j_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

که در عبارت فوق منظور از α و β ضرایب بسط موجک هستند که به فرم زیر تعریف می شوند:

$$\alpha_{j_0,k} = \int \phi_{j_0,k}f(x)dx, \quad \beta_{j,k} = \int \psi_{j,k}f(x)dx$$

لذا با توجه به بسط فوق، اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی NSD باشند، آنگاه برآورد خطی موجک تابع چگالی بر پایه آنها به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$\hat{h}(x) = \hat{h}_1(x) - \hat{h}_2(x)$$

طوریکه

$$\hat{h}_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\alpha}^{(1)}_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x), \quad \hat{h}_2(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\alpha}^{(2)}_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(x)$$

منظور از $\hat{\alpha}^{(1)}_{j_0,k}$ و $\hat{\alpha}^{(2)}_{j_0,k}$ عبارت های زیر هستند:

$$\hat{\alpha}^{(1)}_{j_0,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi^{(1)}_{j_0,k}(x)$$

$$\hat{\alpha}^{(2)}_{j_0,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi^{(2)}_{j_0,k}(x)$$

که $\phi^{(1)}_{j_0,k}(x)$ و $\phi^{(2)}_{j_0,k}(x)$ هر دو توابعی نانزولی هستند.

مراجع

[1] Butucea, C and Tribouley, K, Nonparametric homogeneity tests, *J. Statist. Plann. Inference*, 136,597–639, 2006.

[2] Cheng, F. Glivenko–Cantelli Theorem for the kernel error distribution estimator in the first-order autoregressive model, *Statistics and Probability Letters*, 139, 95-102, (2018).

[3] Donoho, D. L., Johnstone I. M. Hock J. C. Stern A. S. Maximum entropy and the nearly black object, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, 54(1):41–81, 1992.

[4] Hu, T. Z. Negatively superadditive dependence of random variables with applications. *Chinese Journal of Applied Probability Statistics*, 16, 133-144, 2000.

[5] Kemperman, J.H.B. On the FKG-inequalities for measure on a partially ordered space. *Indagationes Mathematicae*, 80, 313-331, 1977.

[6] Lu, Z. Asymptotic normality of kernel density estimators under dependence, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53, 447-468, (2001).

[7] Peetre, J. New thoughts on Besov spaces. Duke University, *Mathematics* Series 1, 1976.

[8] Pham, T.D. and Tran, L.T, Kernel density estimation under a locally mixing condition, Nonparametric functional estimation and related topics (G. Roussas, ed.), 419-430, (1991).

[9] Rosenblatt, M. Density estimates and Markov sequences, In Nonparametric Techniques in Statistical Inference. M. Puri. Ed. London: *Cambridge University* , 199-210, (1970).

[10] Roussas, G. G. Non-parametric estimation of the transition distribution function of a Markov process. *The Annals of Mathematical Statistics*, 40, 1386-1400, (1969).

[11] Tran, L.T. Kernel density estimation under dependence, *Statistics and Probability Letters*, 10, 193-201, (1990).

[12] Triebel, H. Theory of Function Spaces II. *Birkhauser Verlag*, Basel, 1992.

[13] Wang, J., Liu, R., Cheng, F. and Yang, L. Oracally efficient estimation of autoregressive error distribution with simultaneous confidence band, *The Annals of Statistics*, 42(2), 654-668, (2014).

[14] Yakowitz, S. Nonparametric density estimation, prediction and regression for Markov sequences, *Journal of the American Statistical Association*, 80 , 215-221, (1985).

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–175، صص. ۱۵۳–۱۵۸

ارائه مدل جدیدی از توزیع گامبل و کاربردهای آن در فرآیندهای هیدرولوژیکی

دکتر حبیب جعفری[آ]، دکتر سلیمان خزائی[آ]، آنیتا عبدالهی نانواپیشه[ب]

[آ] گروه آمار دانشگاه رازی
[ب] دانشجوی دکتری آمار دانشگاه رازی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
توزیع گامبل
توزیع گامبل نمایی شده
گشتاورها
برآورد پارامترها
نیکویی برازش

چکیده

مناسب‌ترین منبع انرژی برای استفاده انسان، انرژی آب و باد است. در این مقاله به معرفی مدل جدیدی از توزیع گامبل می‌پردازیم که در فرآیندهای هیدرولوژیکی کاربرد بسیاری دارد. تعمیم‌هایی از توزیع گامبل در برخی زمینه‌ها که توزیع گامبل نمی‌تواند مدل داده‌ها را به خوبی مشخص کند مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توزیع کاربردهای بسیاری در فرآیندهای هیدرولوژیکی، هواشناسی، اقلیم‌شناسی، بیمه، اقتصاد، زمین‌شناسی و بسیاری زمینه‌های دیگر دارد. در این مقاله ابتدا ویژگی‌های ریاضی و آماری توزیع گامبل و گامبل نمایی‌شده ارائه می‌گردد، سپس کاربردهایی از این توزیع با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی بیان می‌شود. گشتاورهای حول مبدا و میانگین و عباراتی برای چولگی و کشیدگی ارائه می‌گردد. برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت چند کاربرد از توزیع جدید با استفاده از مجموعه داده‌های هیدرولوژیکی واقعی ارائه می‌شود. نتایج برازش داده‌ها نیز مناسب بودن توزیع گامبل نمایی‌شده را برای مجموعه داده‌های واقعی تایید می‌کنند.

۱. مقدمه

گامبل برای اولین بار توزیع گامبل را به عنوان بسطی از توزیع نمایی ارائه کرد[۳]. مشخص است که این توزیع دارای نرخ خطر افزایشی و کاهشی با توجه به مقادیر پارامترهایش است. توزیع گامبل و بسطهایش کاربردهای زیادی در بسیاری از زمینه‌های علمی از جمله فرایندهای هیدرولوژیکی، اقلیم‌شناسی، بیمه، امور مالی، زمین‌شناسی و بسیاری از زمینه‌های دیگر دارند[۱۱،۵،۱]. گامبل این مدل را برای برازش مقادیر بینهایتِ داده‌های تصادفی مورد استفاده قرار داد[۴] . ناداراجا و کوتز نیز توزیع گامبل را مورد بررسی قرار داده و از این توزیع برای بررسی داده‌هایِ سیل و سرعت باد استفاده کردند[۶–۸]. همان‌طور که می‌دانیم بیشتر توزیع‌های مهم آماری به خانواده بزرگی از توزیع‌ها به نام خانواده توانی تعلق دارند. این خانواده از توزیع‌ها با به توان رساندن تابع توزیع یک توزیع پایه به دست می‌آیند که البته روش‌های مختلفی برای ارائه چنین خانواده‌هایی از توزیع‌ها در منابع موجود است[۱۳،۱۲]. ما در این مقاله روش جدید تعمیم‌یافته دیگری را برای ایجاد توزیع جدید آماری به نام" خانواده‌ای از توزیع آلفای توانی تعمیم‌یافته" ارائه می‌دهیم. در واقع هدف از این مقاله ارائه مدل جدیدی از توزیع گامبل و مقایسه آن با سایر مدل‌ها و ارائه ویژگی‌ها و کاربردهای آن در فرایندهای هیدرولوژیکی است. ما نشان می‌دهیم که در شرایط یکسان تعمیم این توزیع برازش بهتری را نسبت به خود توزیع گامبل و سایر مدل‌ها در مدل‌بندی داده‌های محیطی ارائه می‌دهد.

در بخش ۲ توزیع گامبل و توزیع گامبل نمایی‌شده و ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳ گشتاورهای توزیع جدید و در بخش ۴ برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها ارائه می‌شوند. در نهایت در بخش۵ شبیه‌سازی و در بخش‌های ۶ و ۷ به ترتیب کاربردهایی از این مدل‌ها با استفاده از چند مجموعه از داده‌های واقعی و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

پست الکترونیک: habib_jafari@yahoo.com (دکتر حبیب جعفری)، s.khazaei@razi.ac.ir (دکتر سلیمان خزائی)، anita.abdollahi@yahoo.com (آنیتا عبدالهی نانواپیشه)

۲ توزیع گامبل و توزیع گامبل توانی شده و ویژگی‌های آن

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع گامبل باشد (G) در این صورت تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است:

$$F(x) = e^{-e^{(-\lambda x)}}, x \in \mathbb{R}, \lambda > ۰ \qquad (۱)$$

که $\boldsymbol{\lambda}$ پارامتر شکل است. با مشتق‌گیری از رابطه بالا تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \lambda e^{(-\lambda x)} e^{-e^{(-\lambda x)}}, \lambda > ۰ \qquad (۲)$$

فرم‌های دیگری نیز از این توزیع ارائه شده است که به صورت زیر است:

$$F(x; \mu, \beta) = e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}$$

همان طور که مشخص است زمانی که $\mu = ۰$ با و $\beta = ۱$ باشد حالت استاندارد توزیع گامبل به دست می‌آید.

حال در این بخش به ارائه مدل جدیدمان که همان توزیع گامبل توانی شده است می‌پردازیم. الباتال و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۸ روش جدید تعمیم‌یافته‌ای را برای ایجاد توزیع جدید آماری به نام" خانواده‌ای از توزیع آلفای توانی تعمیم‌یافته" ارائه کردند. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال این خانواده جدید ارائه شده توسط آن‌ها به صورت زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{G(x)\alpha^{G(x)}}{\alpha}, \alpha \neq ۱ \\ G(x), \alpha = ۱ \end{cases}$$

و

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)\alpha^{G(x)}}{\alpha}\left[۱ + \log(\alpha) G(x)\right], \alpha \neq ۱ \\ g(x), \alpha = ۱ \end{cases}$$

که در آن g(x) و G(x) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع پایه هستند.

اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع گامبل باشد (G) باشد در این صورت تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع گامبل نمایی شده به صورت زیر خواهد بود :

$$F(x) = \frac{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}} \alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}}}{\alpha}, \qquad (۳)$$

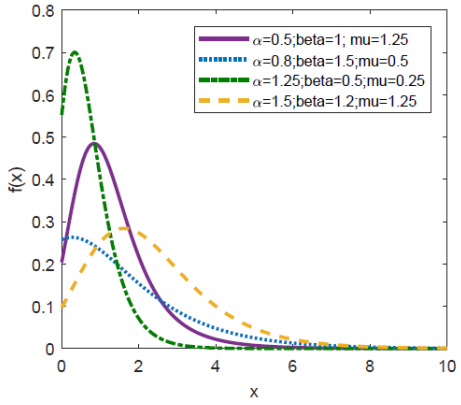
و

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)} \alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}}}{\alpha\beta}\left[۱ + \log(\alpha) e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right], \qquad (۴)$$

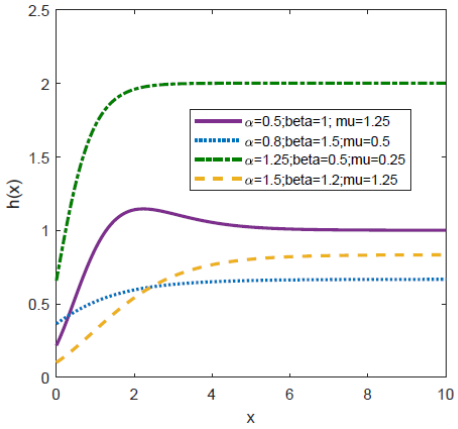
که اگر $۰ < \alpha < ۱$ انتخاب شود لازم است شرط $\log(\alpha) G(x) < ۱$ لحاظ شود. تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$h(x) = \frac{\frac{e^{-\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)} \alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}}}{\alpha\beta}\left[۱ + \log(\alpha) e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right]}{۱ - \left[\frac{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}} \alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}}}{\alpha}\right]} \qquad (۵)$$

در شکل ۱ تابع چگالی احتمال این توزیع به ازای مقادیر مختف پارامترها رسم شده است.



شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع گامبل نمایی شده به ازای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲: تابع خطر توزیع گامبل نمایی شده به ازای مقادیر مختلف پارامترها

شکل ۲ نمودار تابع نرخ خطر این توزیع را برای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت افزایشی با توجه به مقادیر پارامترهایش است.

۳ گشتاورهای توزیع گامبل نمایی شده

در این بخش برای محاسبه گشتاورهای توزیع گامبل نمایی شده نیاز به ارائه بسط‌هایی از تابع f(x) داریم که به صورت زیر آن را محاسبه می‌کنیم، اگر f(x) به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{e^{-\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)}\alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}}}{\alpha\beta}\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right]$$

با استفاده از بسط زیر و با استفاده از بسط تابع نمایی، f(x) را بازنویسی می‌کنیم.

$$\alpha^{m}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\log\alpha)^{i}}{i!}m^{i},$$

$$f(x)=\frac{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)^k}{k!}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\log\alpha)^j}{j!}\right]\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n e^{n\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}{n!}\right]}{\alpha\beta}\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)^k}{k!}\frac{(\log\alpha)^j}{j!}\frac{(i)^n e^{n\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}{n!}\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right] \quad (۶)$$

در این صورت گشتاور مرتبه n ام آن به صورت زیر خواهد بود :

$$E[X^n]=\int_0^{\infty}x^n f(X)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)}\right)^k}{k!}\frac{(\log\alpha)^j}{j!}\frac{(i)^n e^{n\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}{n!}\times\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)}}\right]dx \quad (۷)$$

که با استفاده از نرم‌افزار Matlab و به روشهای عددی می‌توان آن را محاسبه کرد. بر مبنای چهار گشتاور اول چولگی و کشیدگی توزیع گامبل نوع اول از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S=E[(X-E(X))^3]/(E[(X-E(X))^2])^{3/2}=(\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3)/[\mu_2-\mu_1^2]^{3/2},$$

و

$$K=E[(X-E(X))^4]/(E[(X-E(X))^2])^2=(\mu_4-4\mu_1\mu_3+6\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^4)/[\mu_2-\mu_1^2]^2.$$

که μ_n گشتاور مرتبه n ام توزیع ارائه شده است.

۲. برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامترهای (MLE) توزیع گامبل نمایی شده

اگر $X_1,\dots,X_n$ نمونه ای تصادفی با اندازه n از توزیع گامبل نمایی شده باشد در این صورت تابع ماکسیمم درستنمایی این توزیع به صورت زیر است:

$$L(\mu,\beta,\alpha)=\frac{1}{(\alpha\beta)^n}\prod_{i=0}^{n}\left[e^{-\left(\left(\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}\right)}\alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}}\right]\prod_{i=0}^{n}\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}\right] \quad (۸)$$

در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر است:

$$\log L(\mu,\beta,\alpha)=-[n\log(\square)+n\log(\beta)]+\sum_{i=0}^{n}\left(-\left(\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)+e^{-\left(\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}\right)+\sum_{i=0}^{n}\log\left(\alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}}\right)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\log\left[1+\log(\alpha)\,e^{-e^{\left(-\frac{(x_i-\mu}{\beta}\right)}}\right] \quad (۹)$$

بنابراین با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به پارامترهای μ, β, α، معادلات درستنمایی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\log \alpha}{\beta} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right)}{\left(\alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\log(\alpha)}{\beta} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right)}{\left[1 + \log(\alpha)\, e^{-e^{\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)}}\right]} = 0,$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\beta^2} + \left[\frac{(x_i-\mu)}{\beta^2} \times \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{-(x_i-\mu)}{\beta^2} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right) \log(\alpha)}{\left(\alpha^{e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}}\right)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{-(x_i-\mu)}{\beta^2} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right) \log(\alpha)}{\left[1 + \log(\alpha)\, e^{-e^{\left(-\frac{x_i-\mu}{\beta}\right)}}\right]} = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)}{\beta}\right)\right) = 0$$

که برآوردهای درستنمایی ماکسیمم $\hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\alpha}$، با حل این معادلات غیرخطی به دست می‌آیند.

۳. کاربردها

در این بخش کاربردهایی از توزیع‌های ارائه شده را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که توزیع گامبل توانی شده برازش بهتری را نسبت به سایر مدل‌ها برای مجموعه داده‌های هیدرولوژیکی فراهم می‌کند. همه محاسبات با استفاده از نرم افزارهای R و Matlab انجام شده‌اند. اولین مجموعه از داده‌های ارائه شده، مربوط به بارش برف (بر حسب اینچ) در فرودگاه رالی دورهام در کارولینای شمالی از سال ۱۹۴۸ تا ۲۰۰۰ می‌باشد[۱۰]. دومین مجموعه از داده‌ها مربوط به میانگین داده‌های بارندگی ماهانه ایستگاه فرودگاه رشت از فروردین ماه سال ۹۰ تا اسفند ماه سال ۹۱ است که از سازمان هواشناسی استان گیلان تهیه شده است. سومین مجموعه از داده‌ها مربوط به ۲۶۴ مشاهده از ماکسیمم سرعت ماهانه باد (بر حسب مایل بر ساعت) در منطقه پالم بیچ فلوریدا از ژانویه ۱۹۸۴ تا دسامبر ۲۰۰۵ است. داده‌ها در سایت http://www.ncdc.noaa.gov ارائه شده‌اند[۱۰].

شکل ۳ نمودار احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای داده‌های بارش برف (a) و مجموع بارندگی ماهانه سال ۹۰ و ۹۱ (b) و ماکسیمم سرعت باد (c) را ارائه می‌دهد.

جهت بررسی نیکوئی برازش توزیع‌های آماری ارائه شده با توزیع داده‌های واقعی، از آماره‌های $(-2\ln L)$ ، BIC و AIC استفاده گردید. در جدول ۱، MLE داده‌ها، $-2\ln L$ ، مقدار BIC و AIC برای مجموعه داده‌های واقعی، ارائه شده‌اند. همان طور که مشخص است با توجه به معیارهای AIC، BIC و $-2\ln L$ (بر اساس کمترین مقدار) توزیع گامبل نمایی شده بهترین برازش را برای این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند. در شکل زیر نمودار تابع چگالی احتمال چندین توزیع و هیستوگرام داده‌های واقعی ارائه شده، جهت انتخاب بهترین توزیع برای برازش به داده‌ها رسم شده است. همانطور که از شکل‌ها مشخص است توزیع جدید، نسبت به سایر مدل‌ها، برازش بهتری را روی این مجموعه از داده‌ها فراهم می‌کند.

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های واقعی

set	Model	Parameter estimates				$-2\ln L$	AIC	BIC
		μ	α	β	λ			
Set I	گامبل	0.2863	-	0.5883	-	284.30	288.30	292.58
	شانکر نمایی شده	-	0.6834	-	0.6346	254.23	258.23	262.51
	گامبل نمایی شده	**0.2592**	**0.2197**	**0.0508**	**-**	**249.12**	**255.12**	**261.54**
Set II	گامبل	0.7923	-	0.1065	-	2355.2	2359.2	2361.56
	شانکر نمایی شده	-	0.4271	-	0.1236	2329.9	2333.9	2336.25
	گامبل نمایی شده	**0.4439**	**1.1538**	**0.9534**	**-**	**1984.3**	**1988.3**	**1993.83**
Set III	گامبل	0.0335	-	2.5439	-	2645.8	2649.8	2476.9
	شانکر نمایی شده	-	120.39	-	0.1868	1799.1	1803.1	1810.25
	گامبل نمایی شده	**0.5804**	**0.0372**	**3.5274**	**-**	**1792.5**	**1798.1**	**1803.6**

۴. نتیجه‌گیری و چند پیشنهاد برای کار

در این مقاله توزیع گامبل نمایی شده بیان و ویژگی‌های آن ارائه شد. مدل جدید ارائه شده نسبت به سایر مدل‌ها دارای فرم‌های ساده تابع توزیع و چگالی به لحاظ ریاضی بوده و دارای ۳ پارامتر است. تابع نرخ خطر این توزیع به صورت افزایشی با توجه به مقادیر مختلف پارامترهایش است.

به عنوان نتیجه ی کلی، می توان گفت که توزیع گامبل‌نمایی‌شده مکانیسم نسبتاً انعطاف پذیری برای برازش طیف وسیعی از مجموعه داده‌های واقعی مثبت (داده‌های هیدرولوژیکی) فراهم می‌کند و بنابراین می‌تواند جایگزین مناسبی برای الگوهای موجود دیگر در منابع، در الگوبندی داده های واقعی در زمینه‌های اقتصاد، مهندسی، تحلیل بقا و مسائل هیدرولوژیکی باشد. بیشتر محاسبات و شکل‌ها با استفاده از نرم افزار Matlab و R انجام شده است. چندین ویژگی از این توزیع در این مقاله ارائه نشده است که امیدواریم در تحقیقات آینده مورد بررسی قرار گیرند. برخی از این ویژگی ها عبارتند از: آماره های ترتیبی، گشتاورهای آماره ترتیبی، توزیع مجانبی آماره های اکسترمم، ترتیب های تصادفی، آنتروپی و آنتروپی تجمعی باقیمانده، توزیع نسبت دو متغیر تصادفی. همچنین موضوع های استنباطی نیز می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیق در آینده را فراهم آورد. برخی از این موضوع ها عبارتند از: برآوردیابی بیزی پارامترها، برآوردیابی بر اساس انواع سانسورها، برآوردیابی به کمک روش های دیگر مانند روش کمترین مربعات قطری، پیش بینی مشاهده های آینده از این توزیع و غیره.

مراجع

[1] B.C.Arnold,, E. Castillo, , J.M..Sarabia, Some Alternative Bivariate Gumbel Models. Environmetrics, 599-616,1998.

[2] E.L. Lehmann and G. Casella. Theory of Point Estimation, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] E.J. Gumbel, C.K. Mustafi,, Some Analytical Properties of Bivariate Extremal Distributions. Journal of the American Statististical Association, 569-588,1967.

[4] E.J. Gumbel, Statistical theory of extreme values and some practical applications. Applied mathematics series 33. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1954.

[5] E.J Gumbel,. ,Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York, 1958.

[6] S. Kotz, S. Nadarajah, Extreme Value Distributions: Theory and Applications, Imperial College Press, London,2000.

[7] S.Nadarajah, and S. Kotz, The Exponentiated Type Distributions. Acta Applicandae Mathematica,97-111. 2006.

[8] S. Nadarajah The exponentiated Gumbel distribution with climate application. Environmetrics, 13-23 ,2006.

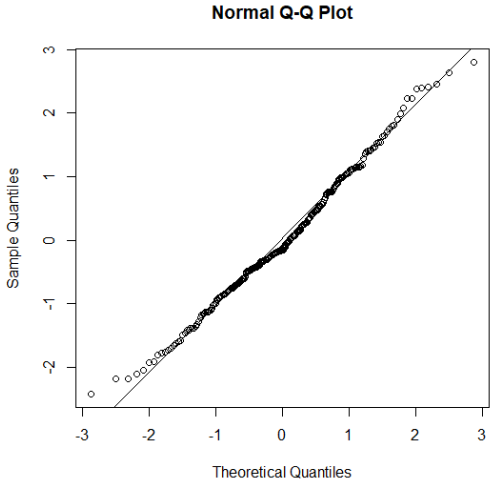
[9] I.Elbatal, Z. Ahmad , M. Elgarhy A.M., Almarashi. A new alpha power transformed family of distributions: properties and applications to the Weibull model. J. Nonlinear Sci. Appl. 1–20, 2018.

[10] Yolanda M. G´omez, Heleno Bolfarine, H´ector W. G´omez, Gumbel distribution with heavy tails and applications to environmental data. March 115-129,2019.

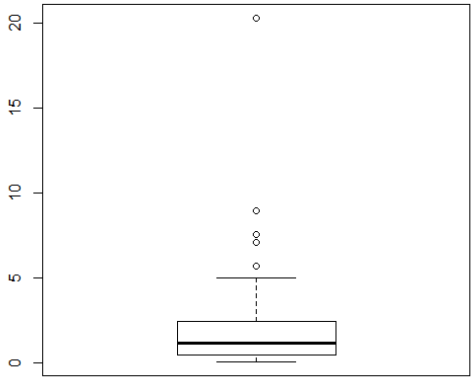
[11] S.khazaei, , A.Abdollahi Nanvapisheh,The Comparison Between Gumbel and Exponentiated Gumbel Distributions and Their Applications in Hydrological Process 49-54,2021.

[12] A. Abdollahi Nanvapisheh , S.M.T.K. MirMostafaee , E.Altun ,A new two-parameter distribution: properties and applications, Journal of Mathematical Modeling, 35-48,2019.

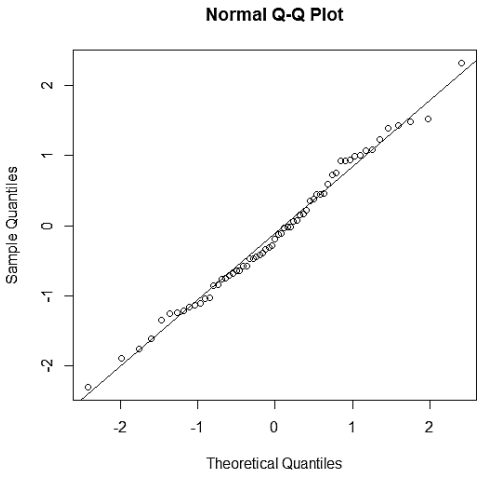
[13] Lee, C., Famoye, F. and Alzatreh, ayman, Y. Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades. WIREs Computational Statistics 2013.



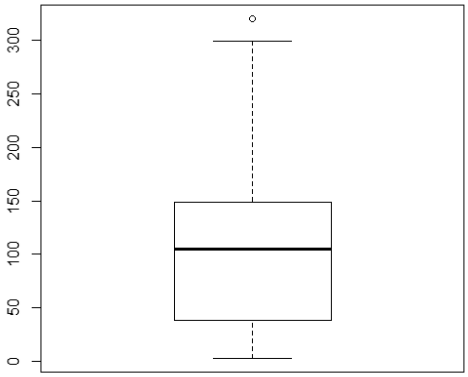
(آ)



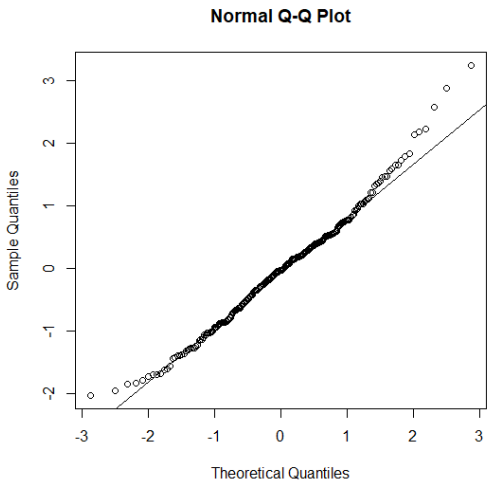
(ب)



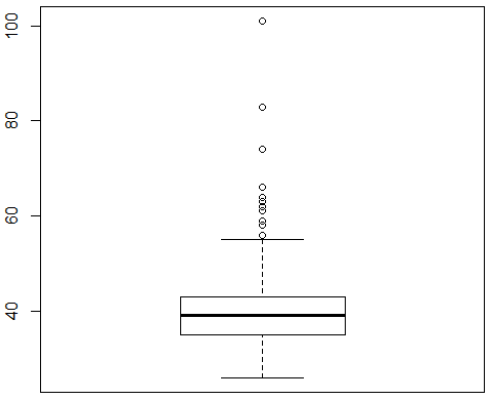
(ج)



(د)

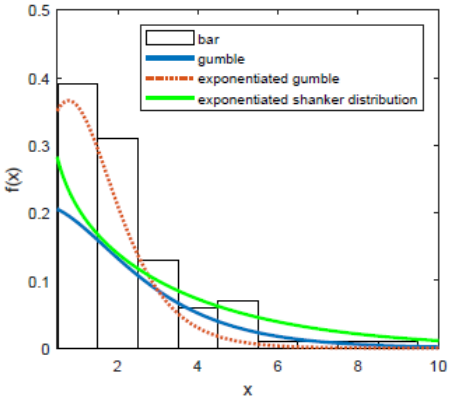


(ه)

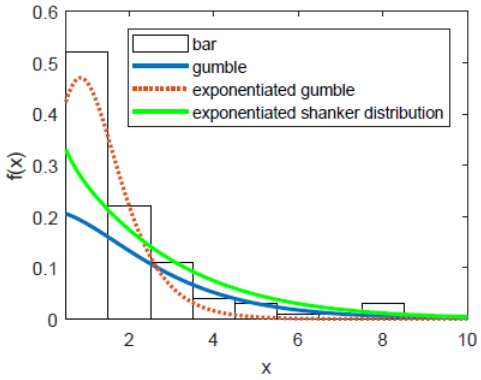


(و)

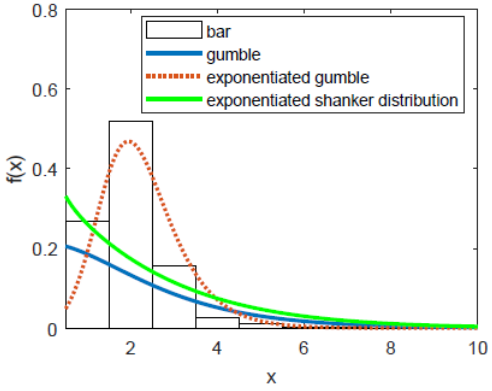
شکل ۳: احتمال نرمال و نمودار جعبه‌ای برای مجموعه داده‌های اول (آ، ب)، دوم (ج، د) و سوم (ه، و)



(ب)



(آ)



(ج)

شکل ۴: نمودارهای تابع های چگالی احتمال برازش داده شده ی توزیع های در نظر گرفته به همراه هیستوگرام به ترتیب برای مجموعه داده‌های بارش برف، بارندگی و سرعت باد

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–184، صص. ۱۶۱–۱۷۳

اثربخشی کاربرد نقشه‌هاي مفهومي بر درك دانشجویان رشته آموزش ریاضی از نمودارهای آماری

نفیسه آزادی[آ]، ابراهیم ریحانی[ب]، احسان بهرامی‌سامانی[ج]، آناهیتا کمیجانی[د]

[آ] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیرشهید رجایی. تهران
[ب] دانشیار، گروه علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی. تهران
[ج] دانشیار، گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی. تهران
[د] دانشجوی دکتری، آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیرشهید رجایی. تهران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
نقشه مفهومی
یادگیری معنادار
سواد نموداری
آموزش آمار
بدفهمی

چکیده

نقشه مفهومی با برقراری ارتباط بین مفاهیم جدید و مفاهیم موجود در ساختار شناختی منجر به یادگیری معنادار می‌شود. فراگیران با استفاده از نقشه مفهومی مطالب بسیاری را با هم ترکیب می‌کنند و به ارتباط درونی بین مفاهیم پی‌می‌برند. هدف پژوهش اثربخشی کاربرد نقشه‌هاي مفهومي بر درك دانشجویان رشته آموزش ریاضی از نمودارهای آماری است. روش پژوهش تلفیقی از دو روش کمی و کیفی است. جامعه آماری کل دانشجویان رشته آموزش ریاضی بود که ۱۸ دانشجوی کارشناسی دانشگاه فرهنگیان شهیدرجایی شیراز و دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی تهران و ۱۵ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی تهران انتخاب به عنوان نمونه هدفمند انتخاب شدند. دانشجویان گروه اول، ابتدا به سوال‌های آزمون نقشه مفهومی و سپس به سوال‌های آزمون کتبی و گروه دوم ابتدا به سوال‌های آزمون کتبی و سپس به سوال‌های آزمون نقشه مفهومی و گروه سوم فقط به سوال‌های آزمون کتبی پاسخ می‌دهند. به این ترتیب که دانشجویان هر دو گروه فرصت بازگشت به سوالات آزمونی که ابتدا انجام داده بودند و تصحیح پاسخ‌های خود را ندارند. برای ارزیابی تأثیر استفاده از نقشه مفهومی بر یادگیری دانشجویان، همه دانشجویان سه گروه به یک سوال، با عنوان آزمون مجموعی پاسخ می‌دهند. نتایج پژوهش نشان داد که استفاده از نقشه مفهومی در آموزش سواد نموداری بر درک دانشجویان و شناخت بدفهمی‌های آن‌ها از این مفاهیم بسیار مؤثر است.

۱. مقدمه

امروزه تأکید رویکردهای جدید یاددهی–یادگیری بر یادگیری معنادار است. از نظر دیوید آزوبل[۱] روانشناس آمریکایی مفهوم معنادار، مفهومی است که با مفاهیمی که در ساخت شناختی فرد وجود دارد، مرتبط باشد. اگر مطالبی که آموزش داده می‌شوند به مطالبی که دانش‌آموزان پیش از این فراگرفته‌اند، مرتبط باشد، مطلب معنادار است. در واقع این معناداری با توجه دادن وی به آنچه در مطالب بعدی مهم است، همچنین برجسته کردن روابط و ارائه یادآوری در مورد دانش قبلی مرتبط، به دست می‌آید (وولفولک[۲]، ۲۰۱۰). مطالبی که به صورت طوطی‌وار به ذهن سپرده می‌شوند، معنادار نیستند و صرفاً به تنهایی و بدون ارتباط با یکدیگر به خاطر سپرده می‌شوند (سیف، ۱۳۹۴). فراگیرانی که یادگیری آنان به

پست الکترونیک: nafise.azadi@sru.ac.ir (نفیسه آزادی)، e_reyhani@sru.ac.ir (ابراهیم ریحانی)، ehsan_bahrami_samani@yahoo.com (احسان بهرامی‌سامانی)، anahitakomeijani@sru.ac.ir (آناهیتا کمیجانی)

۱. Ausubel Paul David
۲. A.E Woolfolk،.

صورت معنادار است، یادگیری آنان دائمی خواهد بود و از وضعیت و شرایط آنان از یادگیران وابسته به یادگیران خودتنظیم ارتقاء خواهد یافت (خاین، ادفیو و بوساری[۳]، ۲۰۱۹). شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا[۴] (۲۰۰۰) با تدوین استاندارد آموزشی "چیوندها و اتصالات"> اظهار می‌کند: برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه دوازدهم باید دانش‌آموزان را قادر سازد تا روابط بین ایده‌های ریاضی را تشخیص دهند، چگونگی ایجاد این روابط را درک کنند و از آن‌ها در حل مسائل استفاده کنند. بنابراین، شایسته است که شیوه‌های ارزیابی متناسب با شیوه یاددهی –یادگیری دانش‌آموزان تغییر کند و به‌روز شود. دنیای جدید نیازمند شیوه‌های ارزیابی است که با تدریس تلفیق شده متناسب باشند و موجب تقویت یادگیرندگان و معلمان شود (اشتن مارک[۵]، ترجمه گویا و رضایی، ۱۳۸۷:۶).

شکل‌گیری دانش در ذهن یادگیرنده، مرتبط با ساخت شناختی وی است، لذا برای داشتن یک یادگیری معنادار و ارزیابی متناسب با آن، نیازمند ابزار مناسب هستیم که ساختار ذهنی فرد را با دانش جدید مرتبط سازد و یادگیری معنادار محقق شود. نقشه مفهومی برگرفته از مفهومی پیش‌سازمان‌دهنده نظریه معنادار کلامی آزوبل است که در آن بر نقش دانش قبلی فراگیر بر یادگیری‌های معنادار بعدی تأکید می‌شود. نقشه مفهومی یک ابزار مناسب برای بازنمایی تصویری و کلامی از مفاهیم و ارتباط بین آن‌ها است. نقشه مفهومی، اطلاعات فرد را خلاصه، سازماندهی و مرتب می‌کند و با علائم، کلمات و خطوط ارتباطی، روابط بین این اطلاعات از گذشته تا به امروز را مرتبط می‌کند (هادیان‌دهکردی و همکاران، ۱۳۹۱). این ایده که نقشه مفهومی به عنوان ابزار یادگیری معنی‌دار می‌توان مورد استفاده قرار داد را نخسین بار نواک و کاناس [۶](۲۰۰۸) مطرح نمودند.

در بررسی کاربردهای نقشه مفهومی در چند سال اخیر، متوجه می‌شویم که پژوهش‌هایی در ارتباط با آموزش و ارزشیابی در زمینه‌های مختلف علوم انجام شده است (مک‌کلار[۷]، ۱۹۹۸). این پژوهش‌ها گویای آن هستند که نقشه مفهومی را نه تنها می‌تواند به عنوان یک ابزار ارزشیابی به کار برد که برتری آن به عنوان یک ابزار ارزشیابی نیز بیان شده است. در واقع نقشه‌های مفهومی با نمایش ارتباطات ذهنی فرد از مفاهیم، امکان ارزیابی میزان درک او را فراهم می‌کنند. با تحلیل روابطی که دانش‌آموزان در نقشه مفهومی بین مفاهیم ایجاد کرده‌اند، می‌توان عمق و توسعه دانش‌آن‌ها را ارزیابی کرد (تاوارز[۸] و تاوارز، ۲۰۱۰). ارزیابی نقشه مفهومی شامل بررسی محتوا و ساختار نقشه‌های مفهومی است. ارزیابی ممکن است کمی یا کیفی باشد (استاردارت[۹] و همکاران، ۱۹۹۹). ارزیابی کمی نقشه‌های مفهومی همان نمره گذاری آن‌ها است. شش شیوه نمره‌گذاری برای نقشه‌های مفهومی از دیدگاه مک‌کلار (۱۹۹۹) وجود دارد:

۱)کل‌نگر: در این نوع داوری، به هر نقشه مفهومی نمره‌ای بین ۱ تا ۱۰ اختصاص می‌یابد.

۲)رابطه‌ای: در شیوه نمره‌گذاری رابطه‌ای، به گزاره‌های نقشه مفهومی به طور مستقل نمره داده می‌شود. در این شیوه به سه قسمت از گزاره نمره داده می‌شود: وجود رابطه بین مفاهیم، صحت برچسب و جهت پیکان که ممکن است یک رابطه سلسله مراتبی یا یک رابطه علّی بین مفاهیم را نشان دهد. به این ترتیب به هر گزاره درست نمره‌ای بین ۱ تا۲ اختصاص داده می‌شود.

۳)ساختاری: این نوع نمره‌گذاری، روشی سنتی در نمره‌گذاری نقشه مفهومی به شمار می‌رود که توسط نواک و گوئین (۱۹۸۴؛ نقل شده در کاناس، ۲۰۰۳) پیشنهاد شد و بر مبنای اجزاء و ساختار نقشه مفهومی بود. در این شیوه علاوه بر این که به گزاره‌های درست نمره داده می‌شود، حضور ساختارهای سلسله مراتبی نیز بررسی می‌شود و به تعداد سطوح سلسله مراتبی و ارتباط‌های عرضی هم امتیاز تعلق می‌گیرد. تعداد سطوح سلسله مراتبی میزان شمول و تعداد ارتباط‌های عرضی میزان یکپارچگی اجزای دانش را بیان می‌کند. این تکنیک نمره‌گذاری با اینکه زمان بیشتری به طول می‌انجامد، اما اطلاعات زیادی در ساختار دانش دانش‌آموز به ما می‌دهد.

۴)کل‌نگر با نقشه مرجع: این شیوه اصلاح شده شیوه کل‌نگر است.

۵)رابطه‌ای با نقشه مرجع: این شیوه اصلاح شده شیوه رابطه‌ای است.

۶)ساختاری با نقشه مرجع: این شیوه اصلاح شده شیوه ساختاری است.

نقشه مرجع، نقشه‌ای است که توسط افراد خبره و کارشناس در یک حوزه رسم شده‌اند. فرد کارناس می‌تواند معلم، استاد یا محقق باشد. نواک پیشنهاد می‌کند که بهتر است یک نقشه مفهومی مرجع، ساخته و نمره‌گذاری شود و نمره نقشه دانش‌آموز بر نمره نقشه مرجع تقسیم و درصد آن محاسبه شود. استفاده از این نقشه‌ها برای محقق اهمیت دارد؛ زیرا اولاً محقق برای تصمیم‌گیری درمورد اینکه قصد دارد چه مفاهیم و گزاره‌هایی در نقشه ارائه شوند، باید تحلیل قبلی از ساختار آن موضوع در ریاضی داشته باشد و ثانیاً وقتی محقق نقشه مرجع را خود می‌سازد یا از نقشه مرجعی که توسط معلم رسم شده‌است استفاده می‌کند، از این که چه نوع دانش مفهومی ارزیابی خواهد شد، آگاه می‌شود (هرتا، گالان و گرنل[۱۰]، ۲۰۰۴).

ارزشیابی به کمک نقشه مفهومی سه ویژگی دارد:

۱)تکلیفی که یادگیرنده می‌خواهد شواهدی از ساختار دانش خود در یک زمینه را مشخص نماید.

۲)شکل پاسخ‌دهی یادگیرنده.

---

۳. J.O. Busari، & A.O.، Adefuye، A.A.، Khine،

۴. NCTM

۵ Mark Ashton

۶ Cañas

۷ McClure

۸ Tavares

۹ Stoddart

۱۰ &Granell ،Galán Huerta

۳)نظام نمره‌گذاری که به وسیله آن می‌توان نقشه مفهومی یادگیرنده را به طور دقیق و پایا ارزیابی کرد.
تکلیف نقشه مفهومی شامل رویه‌هایی است که به ساخت نقشه مفهومی منجر می‌شود و درک دانشجو را نمایش می‌دهد (مک کلار، سوناک و سوئن[۱۱]، ۱۹۹۹). تکلیف نقشه مفهومی بر اساس اطلاعاتی که برای دانشجویان فراهم می‌کند، با طیفی از نقشه‌های بسیار هدایت کننده آن‌هایی هستند که در آن‌ها مفاهیم، عبارت‌های اتصالی و خطوط اتصال و ساختار نقشه در اختیار دانشجویان قرار داده می‌شود. در نقطه مقابل، نقشه‌های کمتر هدایت کننده، نقشه‌هایی هستند که دانشجویان برای رسم آن‌ها، در انتخاب مفاهیم و تعداد آن‌ها و اینکه کدام مفاهیم با هم مرتبط هستند و همچنین در انتخاب کلمات برای بیان رابطه‌ها آزاد هستند (یو، ۲۰۰۸).
یکی از ویژگی‌های نقشه‌های مفهومی، نمایش سلسله مراتبی مفاهیم در آن‌ها است. به این معنی که مفاهیم کلی‌تر در بالای نقشه و مفاهیم جزئی‌تر در قسمت‌های پایین‌تر نقشه قرار می‌گیرند.
ویژگی مهم دیگر نقشه‌های مفهمی، ارتباطات عرضی است. این ارتباطات بین مفاهیم در نواحی مختلف از نقشه مفهومی رابطه برقرار می‌کند و نشان‌دهنده آن است که چگونه یک مفهوم از یک شاخه از دانش روی نقشه، با یک مفهوم از شاخه دیگر در نقشه مرتبط است(نواک و کاناس، ۲۰۰۸).
کلهر (۱۳۹۳) یک طرح پیش و پس‌آزمون با گروه کنترل استفاده کرد. گروه آزمایش از طریق نقشه مفهومی و گروه کنترل به شیوه مرسوم آموزش دیدند. ابزار اندازه‌گیری یک آزمون معلم ساخته بود که حیطه‌های دانش و یادگیری معنی‌دار دانش‌آموزان را در یادگیری زبان انگلیسی مورد سنجش قرار داد. از سوالات سطوح بالای شناختی جهت ارزیابی یادگیری معنی‌دار استفاده کرد. نتایج پژوهش کلهر با استفاده از آزمون t مستقل نشان داد که استراتژی آموزشی نقشه مفهومی باعث افزایش یادگیری درس زبان انگلیسی و یادگیری معنی‌دار خواندن و درک مطلب انگلیسی در دانش‌آموزان گروه آزمایش نسبت به گروه کنترل شده است. مصرآبادی (۱۳۸۸) در پژوهشی با یک طرح نیمه آزمایشی با پیش و پس‌آزمون بر روی ۱۲ کلاس درسی (۶ کلاس آزمایش و ۶ کلاس کنترل) اجرا کرد و دانش‌آموزان خود نقشه‌های مفهومی مطالب تدریس شده را تهیه کردند. یافته‌های این پژوهش نشان داد که ارائه آموزش مبتنی بر نقشه مفهومی در مقایسه با روش‌های مرسوم بر نمره‌های پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در دروس زیست‌شناسی و روانشناسی تأثیر مثبتی داشت، اما کاربرد نقشه مفهومی در افزایش نمره‌های درس فیزیک مؤثر واقع نشد. قنبری (۱۳۸۹) با استفاده از روش نیمه‌تجربی و انجام پیش و پس‌آزمون بر روی دانشجویان پرستاری دریافت که روش نقشه مفهومی بر یادگیری دانشجویان پرستاری مؤثر است. سمیعی‌زفرقندی (۱۳۹۵) با استفاده از روش نیمه‌آزمایسی با طرح پیش و پس‌آزمون با گروه آزمایش و گواه بر روی ۷۶ دانش‌آموز دختر پایه ششم، دریافت که بین میزان یادگیری دو گروه تفاوت معناداری وجود دارد و استفاده از نقشه مفهومی در تدریس بیش از روش سنتی موجب یادگیری دانش‌آموزان در درس علوم تجربی شده است. در برخی از تحقیقات، نظیر تحقیق بارولز[۱۲] (۲۰۰۲) و فی[۱۳] (۲۰۰۳) از دو ابزار نقشه مفهومی و آزمون کتبی در کنار هم برای ارزیابی استفاده شده است، اما در این گونه تحقیق‌ها مقایسه‌ای بین عملکرد دانش‌آموزان در آزمون کتبی و نقشه‌های مفهومی در مفهوم نمودارهای آماری صورت نگرفته است. در پژوهش حاضر، علاوه بر اینکه از دو ابزار آزمون کتبی و نقشه مفهومی برای ارزیابی دانش ریاضی دانش‌آموزان استفاده شد، عملکرد دانش‌آموزان در نقشه‌های مفهومی یا عملکرد آن‌ها در آزمون کتبی مقایسه و تأثیر استفاده از نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، بر یادگیری دانش‌آموزان نیز مطالعه و بررسی شد.
سواد نموداری: ریدنس و همکاران [۱۴] (۲۰۰۴) (به نقل از ابراهیمی، ۱۳۹۶) بیان می‌دارند اصطلاح سواد نموداری به توانایی رسم‌کردن، ارائه، خواندن و تفسیر چارت‌ها، نگاشت‌ها، نمودارها و دیگر نمایش‌های بصری و نسخه‌های گرافیکی، اشاره می‌کند. آن یک زبان بصری یا مهارتی برای افزایش یادگیری محسوب می‌شود.
نمودارهای آماری: نمودارها قالب‌هایی هستند که به‌منظور نمایش داده‌های علمی مورد استفاده قرار می‌گیرند، یا به‌منظور نمایش اطلاعاتی که توصیف آن با متن یا رسانه‌های الکترونیکی دشوار است، مورداستفاده قرار می‌گیرند (شاه، مایر و هگارتی[۱۵]، ۱۹۹۹). همچنین وینر[۱۶] (۲۰۰۹) نمودارهای آماری را نمایش بصری از سیستم‌ها و معادلات عددی تعریف می‌کند. محققین دیگری نمودارهای آماری را، تکنیک خلاصه‌سازی داده‌ها که در انتقال اطلاعات، سریع و در استخراج اطلاعات، دقیق هستند، تعریف کرده‌اند (فیشر[۱۷]، ۲۰۰۰).
در پژوهش حاضر، علاوه بر اینکه از دو ابزار آزمون کتبی و نقشه مفهومی برای ارزیابی دانش ریاضی دانشجویان استفاده شد، عملکرد دانشجویان در نقشه مفهومی یا عملکرد آن‌ها در آزمون کتبی مقایسه و تأثیر استفاده از نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، بر یادگیری دانشجویان نیز مطالعه و بررسی شد. همچنین عملکرد دانشجویان کارشناسی یا عملکرد دانشجویان کارشناسی ارشد مقایسه شد و بدفهمی‌های دانشجویان در پاسخگویی به سوالات، بررسی گردید. فرضیه‌های پژوهش عبارتند از: فرضیه۱: بین میانگین نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه اول (ابتدا سوالات نقشه مفهومی و سپس آزمون کتبی را پاسخ دادند.) و گروه دوم (ابتدا سوالات آزمون کتبی و سپس سوالات نقشه مفهومی پاسخ دادند.) در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد. فرضیه۲: بین میانگین‌های نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه اول

---
[۱۱] &Suen Sonak
[۱۲] Baralos
[۱۳] Fi
[۱۴] al et Readence،
[۱۵] Mayer & Shah
[۱۶] Wenner
[۱۷] Fischer

جدول ۱: گزاره‌های نقشه‌های مفهومی و شماره سوال‌های آزمون کتبی نظیر آن

شماره سوال آزمون مجموعی	آزمون کتبی	گزاره‌هایی که می‌توان در هر یک از نقشه‌های مفهومی نوشت
۱و۲	۴	تشخیص انواع نمودارها از یکدیگر
۱	۴	تشخیص نوع متغیر هر نمودار
۲	—	نمودار چندضلعی برای مقایسه دو یا چند سری از داده به کار می‌رود.
۱	۴	نمودار بافت‌نگاشت برای داده‌های پیوسته به کار می‌رود.
—	—	نمودار دایره‌ای برای داده‌های کیفی مناسب هستند.
۲	۴	رسم صحیح هر نمودار با توجه به داده‌ها.
—	۴	برای رسم نمودار بافت‌نگاشت، از حد پایین و حد بالای طبقات داده‌ها استفاده می‌کنیم.

جدول ۲: گروه‌های دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد و تعداد افراد هر گروه

نوع آزمون	تعداد دانشجویان کارشناسی ارشد	تعداد دانشجویان کارشناسی	گروه
ابتدا نقشه مفهومی، سپس آزمون کتبی	۵	۶	گروه اول
ابتدا آزمون کتبی، سپس نقشه مفهومی	۵	۶	گروه دوم
فقط آزمون کتبی	۵	۶	گروه سوم

و سوم (که فقط به آزمون کتبی پاسخ دادند) در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد. فرضیه۳: بین میانگین نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه دوم و سوم در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد.

۲. روش‌شناسی علمی

تحقیق حاضر تلفیقی از دو روش کمی و کیفی است؛ زیرا هدف این مطالعه، بررسی ساخت شناختی دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد است. طرح این تحقیق بر مبنای انجام مطالعه موردی برای ارزیابی درک ریاضی دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی در مبحث نمودارهای آماری انتخاب شد.

در اجرای میدانی، ۱۸ دانشجوی کارشناسی دانشگاه فرهنگیان شهیدرجایی شیراز و دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی تهران و ۱۵ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی تهران انتخاب شدند.

ابزارهایی که برای جمع‌آوری اطلاعات در این تحقیق استفاده شدند، عبارتند از:

۱)آزمون کتبی محقق ساخته در مورد نمودارهای آماری است.

۲)آزمون نقشه مفهومی محقق ساخته در مورد نمودارهای آماری که یک نقشه ناقصی است که دانشجویان باید برچسب‌های آن را با کلمات مناسب کامل کنند.

۳)آزمون مجموعی محقق ساخته که تنها شامل یک سوال بود. هدف این سوال بررسی تأثیر نقشه مفهومی بر روی ساخت ذهنی دانشجو است. سوالات آزمون کتبی و آزمون نقشه مفهومی با اهداف یکسان طراحی شدند. این دو آزمون قرار است درک آماری دانشجویان را درباره نمودارهای آماری در این موارد ارزیابی کنند: انواع نمودارهای آماری، مقیاس‌ها و کمیت مربوط به هر نمودار آماری، ویژگی‌های هر نمودار و رسم نمودارها.

جدول۱ گزاره‌هایی که دانشجویان می‌توانستند در نقشه‌های مفهومی خود ایجادکنند به همراه سوالاتی نظیر آن‌ها در آزمون کتبی و مجموعی را نشان می‌دهد.

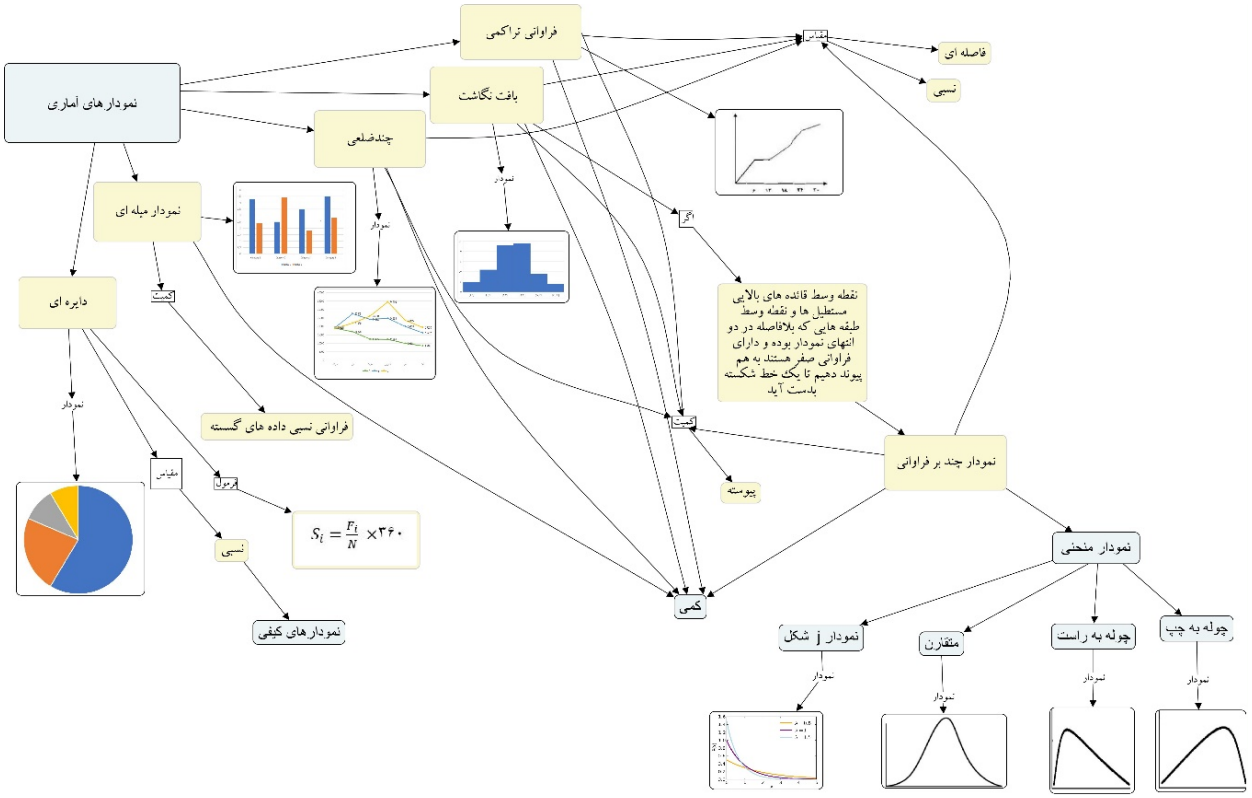
نقشه‌های مفهومی که دانش‌آموزان می‌خواهند جاهای خالی نقشه‌ها را پر کنند، پایایی بیشتری نسبت به سایر تکالیف نقشه مفهومی دارند (هیمانگشو و کاساتا، ۲۰۱۰). بنابر عقیده مک کلار (۱۹۹۹) شیوه نمره گذاری رابطه‌ای با نقشه مرجع، نسبت به دیگر شیوه‌های نمره‌گذاری بیان شده، روایی و پایایی بیشتری دارد. بنابراین در این پژوهش از شیوه نمره‌گذاری رابطه‌ای با نقشه مفهومی استفاده شده است. برای پایایی آزمون کتبی و مجموعی از آزمون α کرونباخ استفاده شد که با استفاده از نرم افزار spss مقدار ۰/۴۵۵ بدست آمد.

اجرای پژوهش در سه مرحله انجام پذیرفت: در مرحله اول ابتدا دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی به طور جداگانه به سه گروه هم سطح تقسیم شدند. این تقسیم‌بندی بر اساس نتایج یک امتحان کتبی با موضوع سواد نموداری انجام شد.

دانشجویان گروه اول، ابتدا به سوال‌های آزمون نقشه مفهومی و سپس به سوال‌های آزمون کتبی و گروه دوم ابتدا به سوال‌های آزمون کتبی به سپس به سوال‌های آزمون نقشه مفهومی پاسخ می‌دهند. به این ترتیب که دانشجویان هر دو گروه فرصت بازگشت به سوالات آزمونی که ابتدا انجام داده بودند و تصحیح پاسخ‌های خود را ندارند. با انجام این کار علاوه بر اینکه عملکرد دانشجویان در نقشه مفهومی با عملکرد آن‌ها در آزمون کتبی مقایسه می‌شود، تأثیر استفاده از نقشه مفهومی بر یادگیری دانشجویان ارزیابی می‌شود و همچنین عملکرد دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد با یکدیگر مقایسه می‌شود.. دانشجویان گروه سوم فقط به سوال‌های آزمون کتبی پاسخ می‌دهند. در مرحله دوم همه دانشجویان در هر سه

نمرات	فراوانی
۱۰–۱۲	۱
۱۳–۱۵	۶
۱۶–۱۸	۷
۱۹–۲۱	۸
۲۲–۲۴	۱
۲۵–۲۷	۶
۲۸–۳۰	۱

گروه به یک سوال، با عنوان آزمون مجموعی پاسخ می‌دهند. در مرحله سوم در مورد آزمون مجموعی نیز، با استفاده از نتایج مصاحبه‌های انجام شده با دانشجویان و روش‌های تحلیل کیفی بررسی‌های عمیق‌تری انجام گرفت.



شکل ۱: نقشه مفهومی مرجع درمورد نمودارهای آماری[۱۸]

سوال کتبی: در یک مدرسه، از ۳۰ دانش‌آموز کلاس دهم، آزمون شخصیت گرفته شده است. که نمرات دانش‌آموزان به شرح زیر است. نمودار مناسب برای آن رسم کنید و بگویید چرا از این نمودار استفاده کردید؟ نوع متغیر را در این نمودا مشخص کنید.

سوال مجموعی۱: در نمودار زیر نوع متغیر را با ذکر علت مشخص کنید.

سوال مجموعی۲: جدول زیر، سهام سه شرکت A،B،C را از خردادماه تا آبان ماه سال ۱۴۰۰ نشان می‌دهد. تغییرات سهام سه شرکت را در یک نمودار نشان دهید؟ از چه نموداری استفاده می‌کنید؟ **یافته‌های پژوهش**

برای بررسی عملکرد دانشجویان در آزمون کتبی، به هر سوال این آزمون یک نمره اختصاص داده شد و برای این که نمره‌گذاری پایایی لازم را داشته باشد، نمره‌گذاری بر اساس یک قاعده نمره‌گذاری صورت گرفت و هر سوال شیوه نمره‌گذاری مخصوص به خود را داشت.

در این بخش برای بررسی معناداری تفاوت میانگین‌های به دست آمده از نمره‌های دانشجویان سه گروه مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد، از آزمون تحلیل واریانس یک طرفه استفاده شد. جدول ۳، آمارهای توصیفی آزمون تحلیل واریانس یک طرفه دانشجویان کارشناسی و جدول ۴ آمارهای توصیفی آزمون تحلیل واریانس یک طرفه دانشجویان کارشناسی ارشد را نشان می‌دهد.

	A	B	C
خرداد	۱۸۸۹۸	۱۹۴۳۰	۱۸۹۴۰
تیر	۱۶۸۷۸	۲۷۵۴۵	۲۱۹۸۰
مرداد	۱۲۴۳۵	۲۴۱۶۸	۲۶۲۰۰
شهریور	۱۲۳۹۴	۲۴۸۱۸	۳۴۵۱۰
مهر	۹۹۸۹	۱۹۹۵۲	۲۳۵۹۰
آبان	۸۵۱۶	۱۶۲۲۲	۱۹۳۳۰

جدول ۳: آمار توصیفی آزمون تحلیل واریانس یک طرفه مربوط به (مقطع کارشناسی)

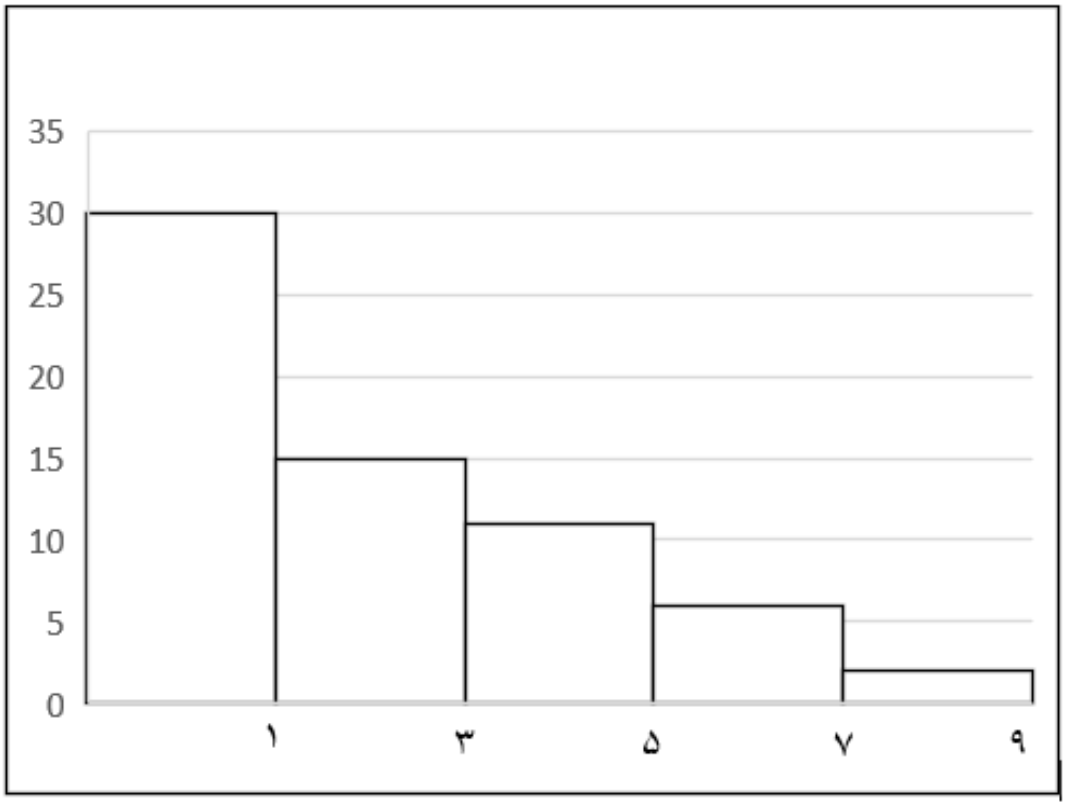
	تعداد	میانگین	انحراف استاندارد	خطای انحراف استاندارد	سطح اطمینان ۹۵ درصد	
					کران پایین	کران بالا
گروه۱	۶	۳	۰/۸۹۴	۰/۳۶۵	۲/۰۶	۳/۹۴
گروه۲	۶	۰/۸۳	۰/۷۵۳	۰/۳۰۷	۰/۰۴	۱/۶۲
گروه۳	۶	۱/۱۷	۱/۴۷۲	۰/۶۰۱	-۰/۳۸	۲/۷۱
مجموع	۱۸	۱/۶۷	۱/۴۱۴	۰/۳۳۳	۰/۹۶	۲/۳۷

جدول ۴: آمار توصیفی آزمون تحلیل واریانس یک طرفه (مقطع کارشناسی ارشد)

	تعداد	میانگین	انحراف استاندارد	خطای انحراف استاندارد	سطح اطمینان ۹۵ درصد	
					کران پایین	کران بالا
گروه۱	۵	۳/۰۰	۰/۷۰۷۱	۰/۳۱۶۲	۲/۲۲	۳/۸۷۸
گروه۲	۵	۱/۰۰۰	۱/۴۱۴۲	۰/۶۳۲۵	-۰/۷۵۶	۲/۷۵۶
گروه۳	۵	۱/۲۰۰	۰/۸۳۶۷	۰/۳۷۴۲	۰/۱۶۱	۲/۲۳۹
مجموع	۱۵	۱/۷۳۳	۱/۳۳۴۵	۰/۳۴۴۶	۰/۹۹۴	۲/۴۷۲

جدول ۵: اطلاعات مربوط به تحلیل واریانس یک طرفه بین میانگین سه گروه (مقطع کارشناسی)

	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مجموع مربعات	F	Sig
بین گروه‌ها	۱۶/۳۳۳	۲	۸/۱۶۷	۸/۹۳۴	۰/۰۰۷
درون گروه‌ها	۱۷/۶۶۷	۱۵	۱/۱۷۸		
مجموع	۳۴/۰۰۰	۱۷			



همانطورکه جدول ۵ نشان می‌دهد، چون F محاسبه شده در سطح ۹۵ درصد از F جدول بحرانی ($F_{(۲,۱۵)} = ۳/۶۸$) بزرگتر است، بین میانگین نمرات سه گروه دانشجویان کارشناسی در آزمون کتبی، تفاوت معنی دار وجود دارد ($p < ۰/۰۵$ و $F_{(۲,۱۵)} = ۸/۹۳۴$).
با توجه به جدول ۶ F، محاسبه شده در سطح ۹۵ درصد از F جدول بحرانی ($F_{(۲,۱۲)} = ۳/۸۸$) بزرگتر است، لذا بین میانگین نمرات سه گروه دانشجویان کارشناسی ارشد در آزمون کتبی، تفاوت معنی دار وجود دارد ($p < ۰/۰۵$ و $F_{(۲,۱۲)} = ۵/۶۸۸$).
درجدول‌های ۷و۸ تفاوت میانگین‌های گروه‌ها با یکدیگر در هر کدام از مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد از روش تعقیبی توکی محاسبه شده است. اطلاعات به دست آمده در این جدول‌ها بیان می‌کند که میانگین کدام دو گروه‌ها با هم متفاوت هستند.
در اینجا فرضیه‌های پژوهش مورد بررسی قرارخواهند گرفت:
فرضیه۱: بین میانگین نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه اول (ابتدا سوالات نقشه مفهومی و سپس آزمون کتبی را پاسخ دادند.) و گروه دوم (ابتدا سوالات آزمون کتبی و سپس سوالات نقشه مفهومی پاسخ دادند.) در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد. با توجه به جدول ۵ و HSD محاسبه شده (۱/۶۲۶)، همچنین با توجه به جدول ۶ و HSD محاسبه شده (۱/۷۵۰)، مشاهده می‌شود که در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین میانگین نمرات آزمون کتبی گروه اول و دوم در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود

جدول ۶: اطلاعات مربوط به تحلیل واریانس یک طرفه بین میانگین سه گروه (مقطع کارشناسی ارشد)

	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مجموع مربعات	F	Sig
بین گروه‌ها	۱۲/۱۳۳	۲	۶/۰۶۷	۵/۶۸۸	۰/۰۱۸
درون گروه‌ها	۱۲/۸۰۰	۱۲	۱/۰۶۷		
مجموع	۲۴/۹۳۳	۱۴			

جدول ۷: مقایسه تفاضل میانگین‌های نمره‌ها گروه‌ها در آزمون کتبی با روش تعقیبی توکی (مقطع کارشناسی)

گروه (i)	گروه (j)	تفاضل میانگین	خطای استاندارد	Sig	سطح اطمینان ۹۵ درصد	
					کران پایین	کران بالا
گروه۱	گروه۲	۲/۱۶۷	۰/۴۷۷	۰/۰۰۳	۰/۷۹	۳/۵۴
	گروه۳	۱/۸۳۳	۰/۷۰۳	۰/۰۸۹	-۰/۲۶	۳/۹۳
گروه۲	گروه۱	-۲/۱۶۷	۰/۴۷۷	۰/۰۰۳	-۳/۵۴	-۰/۷۹
	گروه۳	-۰/۳۳۳	۰/۶۷۵	۰/۹۵۲	-۲/۴۰	۱/۷۳
گروه۳	گروه۱	۱/۸۳۳	۰/۷۰۳	۰/۰۸۹	-۳/۹۳	۰/۲۶
	گروه۲	۰/۳۳۳	۰/۶۷۵	۰/۹۵۲	-۱/۷۳	۲/۴۰

جدول ۸: مقایسه تفاضل میانگین‌های نمره‌ها گروه‌ها در آزمون کتبی با روش تعقیبی توکی (مقطع کارشناسی ارشد)

گروه (i)	گروه (j)	تفاضل میانگین	خطای استاندارد	Sig	سطح اطمینان ۹۵ درصد	
					کران پایین	کران بالا
گروه۱	گروه۲	۲/۰۰۰	۰/۷۰۷۱	۰/۰۸۹	-۰/۳۳۱	۴/۳۳۱
	گروه۳	۱/۸۰۰	۰/۴۸۹۹	۰/۰۲۰	۰/۳۱۸	۳/۲۸۲
گروه۲	گروه۱	-۲/۰۰۰۰	۰/۷۰۷۱	۰/۰۸۹	-۴/۳۳۱	۰/۳۳۱
	گروه۳	-۰/۲۰۰	۰/۷۳۴۸	۰/۹۹۱	-۲/۵۴۳	۲/۱۴۳
گروه۳	گروه۱	-۱/۸۰۰۰	۰/۴۸۹۹	۰/۰۲۰	-۳/۲۸۲	-۰/۳۱۸
	گروه۲	۰/۲۰۰۰	۰/۷۳۴۸	۰/۹۹۱	-۲/۱۴۳	۲/۵۴۳

دارد. بنابراین فرضیه ۱تأیید می‌شود. این نشان دهنده آن است که دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد گروه اول در آزمون کتبی موفق‌تر از دانشجویان گروه دوم عمل کرده‌اند. درواقع کامل کردن نقشه مفهومی قبل از آزمون کتبی باعث شده است که دانشجویان سازماندهی ذهنی بهتری نسبت به موضوع پیدا کنند و در نتیجه به سوالات آزمون کتبی بهتر پاسخ دهند.

فرضیه۲: بین میانگین‌های نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه اول و سوم (که فقط به آزمون کتبی پاسخ دادند) در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد. مطابق جدول‌های ۷ و ۸، فرضیه ۲ مبنی بر وجود تفاوت معنی‌دار بین میانگین نمرات آزمون کتبی گروه اول و سوم در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تأیید می‌شود. این نشانده آن است که دانشجویان گروه اول در آزمون کتبی موفق‌تر از دانشجویان گروه سوم عمل کردند. درواقع، دانشجویانی که پیش از انجام آزمون کتبی، نقشه‌های مفهومی را کامل کردند، نسبت به دانشجویانی که اصلاً آزمون‌های نقشه مفهومی را انجام ندادند، به سوالات آزمون کتبی بهتر پاسخ دادند.

فرضیه۳: بین میانگین نمرات آزمون کتبی دانشجویان گروه دوم و سوم در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود دارد. مطابق اطلاعات جدول‌های ۷ و ۸ بین نمرات آزمون کتبی گروه دوم و سوم در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد تفاوت معناداری وجود ندارد. لذا فرضیه ۳ پژوهش رد می‌شود. البته این نتیجه قابل پیش‌بینی بود؛ چرا که دانشجویان گروه دوم با این که نقشه‌های مفهومی را کامل کردند اما فرصت بازگشت به سوالات آزمون کتبی که قبل از نقشه مفهومی پاسخ دادند، نداشتند. تفاوت این دو گروه در آزمون مجموعی مشخص می‌شود که در بخش‌های بعد به بررسی عملکرد دانش‌جویان همه گروه‌ها در این آزمون پرداخته خواهد شد.

با توجه به یافته‌های جدول ۹، دانشجویان کارشناسی از نقشه مفهومی نمرات بین صفر تا ۵ یعنی بین صفر درصد تا ۱۰۰ درصد نمره کل را کسب کردند که همه دانشجویان غیر از یک نفر، بیش از ۵۰ درصد نمره کل را دریافت نمودند. همچنین با توجه به جدول ۱۰، دانشجویان کارشناسی ارشد از نقشه مفهومی نمرات بین ۲ تا ۵ یعنی بین ۴۰ درصد تا ۱۰۰ درصد نمره کل را کسب نمودند که همه دانشجویان غیر از یک نفر، بیش از ۵۰ درصد نمره کل را کسب کردند.

مقایسه عملکرد دانشجویان گروه اول و دوم مقطع‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد در آزمون نقشه مفهومی و آزمون کتبی: نه نفر از دانشجویان کارشناسی و شش نفر از دانشجویان کارشناسی ارشد در گزاره نقشه مفهومی، نمودار منحنی را به اشتباه نوشتند. برخی از این دانشجویان از عبارت "<توزیع نرمال>" یا "<توزیع تجمعی>" استفاده کردند. یک نفر از دانشجویان کارشناسی، از عبارت "<هیستوگرام>" به جای نمودار منحنی استفاده کرده است. تمام دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد که نمره کامل از این گزاره دریافت کردند، از عبارت "<چولگی>" استفاده کردند. هیچکدام از دانشجویان در هر دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد، از عبارت مورد نظر نویسندگان یعنی "<منحنی>" برای این گزاره در نقشه مفهومی استفاده نکردند.

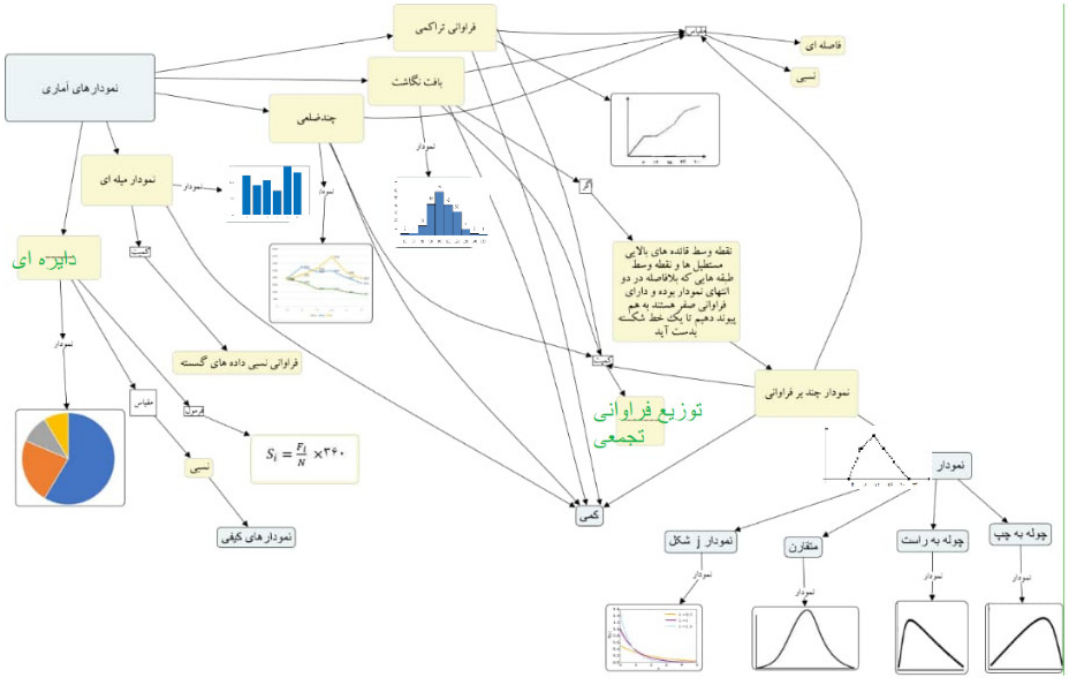
۱۵ نفر از دانشجویان کارشناسی و ۱۰ نفر از دانشجویان کارشناسی ارشد، در پاسخ به سوال آزمون کتبی، حد بالا و پایین طبقات را در نظر نگرفتند و نمودار آن‌های بین نمودار میله‌ای و بافت نگاشت بود. پنج نفر از دانشجویان کارشناسی و دو نفر از دانشجویان کارشناسی ارشد نوع متغیر سوال کتبی را گسسته دانستند و نمودار میله‌ای برای آن رسم کردند که نمودار میله‌ای آن‌ها نیز اشتباه بود، زیرا مرکز دسته را در نظر نگرفتند و نمودار

جدول ۹: نمره‌های دانشجویان کارشناسی از نقشه مفهومی و درصد نمره‌های کسب شده نسبت به نقشه مرجع

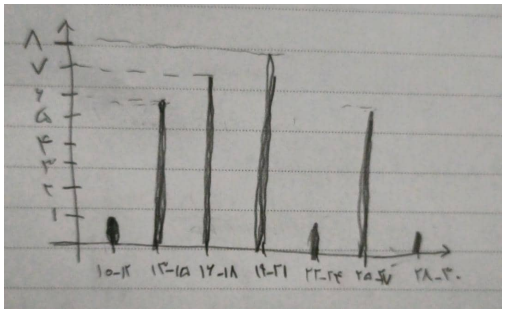
	نام دانشجو	نمره نقشه مفهومی	درصد نسبت به نقشه مرجع
گروه اول	۱	۳	%۶۰
	۲	۳	%۶۰
	۳	۴	%۸۰
	۴	۴	%۸۰
	۵	۳	%۶۰
	۶	۳	%۶۰
گروه دوم	۷	۳	%۶۰
	۸	۳	%۶۰
	۹	۵	%۱۰۰
	۱۰	۰	۰
	۱۱	۵	%۱۰۰
	۱۲	۳	%۶۰

جدول ۱۰: نمره‌های دانشجویان کارشناسی ارشد از نقشه مفهومی و درصد نمره‌های کسب شده نسبت به نقشه مرجع

	نام دانشجو	نمره نقشه مفهومی	درصد نسبت به نقشه مرجع
گروه اول	۱۹	۳	%۶۰
	۲۰	۵	%۱۰۰
	۲۱	۴	%۸۰
	۲۲	۵	%۱۰۰
	۲۳	۵	%۱۰۰
گروه دوم	۲۴	۴	%۸۰
	۲۵	۲	%۴۰
	۲۶	۳	%۶۰
	۲۷	۳	%۶۰
	۲۸	۳	%۶۰



شکل ۲: نقشه مفهومی یکی از دانشجویان

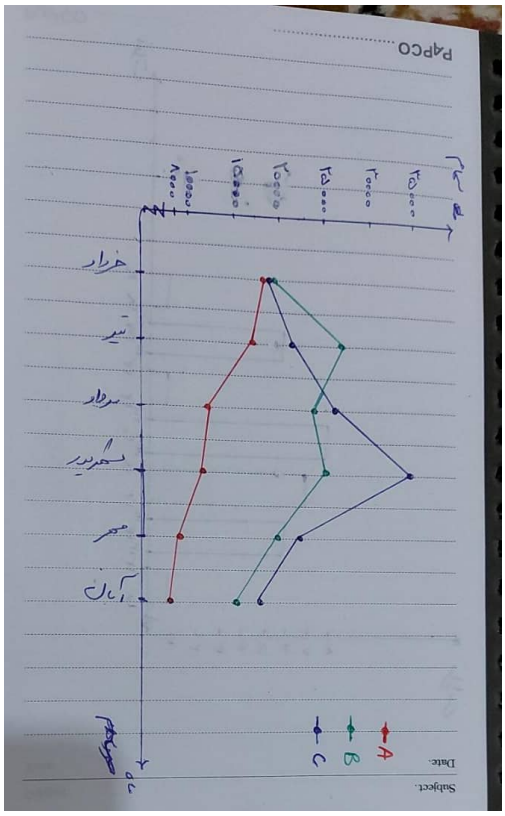


شکل ۳: پاسخ به سوال کتبی یکی از دانشجویان

را به صورت پیوسته با در نظر گرفتن طبقات رسم کردند. در واقع این دانشجویان در رسم صحیح نمودار بافت‌نگاشت و میله‌ای و همچنین نوع متغیر نمودار بافت‌نگاشت و میله‌ای دچار بدفهمی هستند.

عملکرد دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد سه گروه در آزمون مجموعی: پنج نفر از دانشجویان کارشناسی به سوال مجموعی یک پاسخ نادرست دادند. برخی از آن‌ها کمیت را پیوسته نوشتند اما برای آن علت نادرست بیان کردند. از این پنج نفر، سه نفر از گروه ۲ و دو نفر از گروه سه بودند. تمام دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد گروه ۱، به سوال مجموعی یک پاسخ صحیح دادند. دز مقطع کارشناسی ارشد، دو نفر از دانشجویان گروه ۲ و پنج نفر از دانشجویان گروه ۳ به سوال مجموعی یک پاسخ صحیح ندادند.

یک نفر از دانشجویان کارشناسی گروه اول، در پاسخ به سوال مجموعی دو، از نمودار j‌شکل استفاده کرد. همچنین یک نفر دیگر از دانشجویان کارشناسی گروه اول، نمودار چند برفراوانی را برای سوال مجموعی ۲ مناسب دانست که نشان‌دهنده بدفهمی آن‌ها از نمودارهای آماری است. دو نفر از دانشجویان کارشناسی گروه دوم، در پاسخ به سوال مجموعی ۲ نمودار چند بر فراوانی را مناسب دانستند. از بین دانشجویان کارشناسی گروه سوم، پنج نفر به سوال مجموعی دو پاسخ نادرست دادند. برخی از این پنج نفر، نمودار میله‌ای و برخی دیگر نمودار چندبرفراوانی را مناسب دانستند. تمام دانشجویان کارشناسی ارشد گروه اول، به سوال مجموعی یک پاسخ صحیح دادند. دو نفر از دانشجویان کارشناسی ارشد، برای این سوال، علاوه به نمودار چندضلعی و رسم صحیح آن، نمودار راداری نیز پیشنهاد کردند. نمودار راداری در کتاب ریاضی و آمار۱ (دهم



شکل ۴: پاسخ به سوال مجموعی یکی از دانشجویان

انسانی) معرفی شده است و دو دانشجوی کارشناسی ارشد که این نمودار را پیشنهاد کردند، تجربه تدریس این کتاب را در مدرسه داشتند. دو نفر از دانشجویان کارشناسی گروه دوم، به سوال مجموعی دو پاسخ نادرست دادند. آن‌ها نمودار چندبرفراوانی را برای این سوال مناسب دانستند. همچنین هیچکدام از دانشجویان کارشناسی ارشد گروه سوم، در پاسخ به سوال مجموعی دو، نمره کامل دریافت نکردند. دو نفر از آن‌ها به این سوال پاسخی ندادند. یک نفر نمودار میله‌ای را مناسب دانست و دو نفر نمودار چند بر فراوانی را پیشنهاد نمودند.

۳. بحث و نتیجه‌گیری

اولین بدفهمی مشخص شده در پژوهش، درباره عدم شناخت نمودارهای مختلف مثل نمودار منحنی، بافت‌نگاشت و میله‌ای بود. دانشجویان ویژگی‌های مربوط به این نمودارها را به درستی نمی‌دانستند و در تمایز بین نمودارها و رسم آن‌ها دچار ابهام بودند. برخی از دانشجویان در تشخیص نوع متغیر هر کدام از نمودارهای آماری دچار ابهام و بدفهمی بودند. تعدادی از دانشجویان نمودارهای میله‌ای را مربوط به متغیرهای گسسته دانستند یا نوع متغیر نمودار بافت‌نگاشت را به درستی تشخیص ندادند. این بدفهمی‌ها به کمک نقشه مفهومی قابل تشخیص و ارزیابی بود.

دانشجویان گروه اول که ابتدا نقشه مفهومی را کامل کردند و سپس به سوال‌های آزمون کتبی پاسخ دادند، نسبت به دو گروه دیگر، در آزمون کتبی موفق‌تر عمل کردند. در واقع، دانشجویان گروه اول با سازماندهی ذهنی مناسبی که از کامل کردن نقشه مفهومی به دست آورده بودند، به سوال‌های آزمون کتبی پاسخ‌های صحیح‌تری دادند. بنابراین می‌توان گفت که نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، موقعیتی را برای دانش‌آموزان گروه اول فراهم نموده‌اند که در آن همزمان با ارزیابی یادگیری، یادگیری نیز صورت گرفته است. پس می‌توان دریافت که استفاده از نقشه مفهومی در ارزیابی یادگیری دانشجویان تأثیر می‌گذارد.

هدف این مطالعه بررسی تأثیرکاربرد نقشه‌هاي مفهومي بر درك دانشجویان رشته آموزش ریاضی از نمودارهای آماری بود. نتایج حاکی از آن است که استفاده از نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، باعث ارتقای یادگیری دانشجویان می‌شود. استفاده از نقشه مفهومی در ارزیابی، از ایده تغییر رویکردها در ارزیابی و ارزشیابی در جهت استفاده از ابزارهای مختلف در کنار آزمون‌های کتبی کمک می‌کند. ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) نیز در پژوهش خود دریافتند که نقشه‌های مفهومی و آزمون کتبی اگر در کنار یکدیگر برای ارزیابی دانش‌آموزان به کار برده شوند، می‌توانند

شواهد همه جانبه‌ای را از دانش شاگردان به ما نشان دهند. بنابراین بهتر است ابتدا از دانشجویان بخواهیم نقشه‌های مفهومی را کامل کنند و سپس به سوالات آزمون کتبی پاسخ دهند که این کار سبب می‌شود که دانشجویان به یک سازماندهی ذهنی مناسبی نسبت به مبحث مورد نظر برسند و سپس به سوالات آزمون کتبی پاسخ‌های صحیح‌تری بدهند؛ زیرا با توجه به یافته‌ها مشخص شد که دانشجومعلمان رشته آموزش ریاضی در حیطه سواد نموداری دچار بدفهمی‌ها و ابهامات زیادی هستند که این بدفهمی‌ها، می‌تواند مانعی برای این دانشجومعلمان برای تدریس درس آمار در آینده شود.

نتایج پژوهش حاضر با یافته‌های پژوهش ریحانی (۱۳۹۱) و نواک در درس علوم (۲۰۰۸) همسو است. همچنین با نتایج پژوهش بارولز (۲۰۰۵)، ویلیامز (۱۹۹۸) و اسمیتا (۲۰۰۹) در درس ریاضی، از این نظر که استفاده از نقشه‌های مفهومی در ارزیابی درس ریاضی (به طور خاص سواد نموداری)، در شناخت بدفهمی دانشجویان در حیطه سواد نموداری کمک می‌کند، همسو است.

نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که یاددهی به وسیله نقشه مفهومی می‌تواند فرایند یادگیری را معنادارتر کند؛ لذا ارزیابی به وسیله نقشه مفهومی امکانی بهتر برای شناسایی بدفهمی‌ها و میزان درک مخاطبین را به ما می‌دهد که از این طریق دانجشومعلمان می‌توانند فرایند یاددهی – یادگیری را اصلاح نموده و یادگیری معنادار را تقویت نمایند. دانشجومعلمان رشته آموزش ریاضی می‌توانند این شیوه را برای تدریس دروس مختلف به ویژه درس آمار در مدرسه به کار بندند. لذا می‌توان گفت ارزشیابی در خدمت آموزش قرار می‌گیرد. نقشه مفهومی در آموزش ریاضی در کشور ما تازه متولد شده است و نیازمند پژوهش‌های بیشتر در این زمینه هستیم. موضوع‌هایی مانند چگونگی استفاده از نقشه مفهومی در آموزش سایر مفاهیم ریاضیات و آمار در مقاطع متوسطه و حتی آموزش عالی می‌توانند در پژوهش‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

همچنین می‌توان پیشنهاد کرد که دانشجومعلمان می‌توانند در مراحل مختلف آموزش از شیوه‌های مختلف ارائه نقشه‌های مفهومی از قبل آماده شده به عنوان یک راهبرد آموزشی در تدرس آینده خود در مدارس استفاده کنند. در این زمینه می‌توان دانش‌آموزان را نیز ترغیب کرد که با تهیه نقشه‌های مفهومی مطلب درسی از آن به عنوان یک راهبرد یادگیری استفاده کنند.

مراجع

[۱] اشتن مارك، جينكر (۱۳۸۷). ***ارزيابي رياضي ترجمه*** زهرا گويا و ماني رضائي، تهران: فاطمي (نشر اثر اصلي ۱۹۹۱).

[۲] ریحانی، ابراهیم، بخشعلی‌زاده، شهرناز، استادی، مریم (۲۰۱۲). تأثیرکاربرد نقشه‌های مفهومی بر درک دانش‌آموزان رشته ریاضی از توابع مثلثاتی. ***رویکردهای نوین آموزشی***، ۷(۲): ۲۳-۵۲.

[۳] سیف، علی اکبر (۱۳۹۴)، ***روانشناسی پرورشی نوین***، چاپ هفتم، تهران، انتشارات نشر دوران.

[۴] سمیعی زفرقندی (۲۰۱۴). تأثیر استفاده از نقشه مفهومی بر یادگیری درس علوم. ***مطالعات آموزش و آموزشگاهی***، ۳(۴)، ۸۱-۹۸.

[۵] قنبري عاطفه، پارياد، عزت و احساني مريم (۱۳۸۹). تأثير تدريس به روش نقشه مفهومي بر ميزان يادگيري و يادداري يک درس در دانشجويان پرستاري، ***گام‌های توسعه در آموزش پزشکی***، ۷(۲)، ۱۱۸-۱۱۲.

[۶] کلهر، منصوره، مهران، گلنار (۱۳۹۳). تأثیر آموزش با نقشه مفهومی بر یادگیری معنی‌دار زبان انگلیسی دانش‌آموزان دوره متوسطه، ***نشریه پژوهش در نظام های آموزشی***، ۹(۲۹)، ۱۹۳-۲۱۷.

[۷] مصرآبادی، جواد و استوار، نگار (۲۰۰۹). اثربخشی نقشه مفهومی بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در دروس زیست‌شناسی، روان‌شناسی و فیزیک. **اندیشه های نوین تربیتی**، ۵(۱)، ۹۳-۱۱۴.

[۸] مصرآبادی، جواد. (۱۳۹۰). معرفی و اعتباربخشی آزمون‌های مبتنی بر نقشه مفهومی در ارزشیابی عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان، ***نوآوری‌های آموزشی***، ۱۰(۲)، ۲۴-۷.

[۹] هادیان دهکردی، مسعود، اسلام پور، محمدجواد، ریحانی، ابراهیم (۲۰۱۴). ارزیابی درک دانشجویان ریاضی از مفهوم حد به کمک نقشه مفهومی. ***فناوری آموزش***، ۸(۴)، ۲۵۹-۲۶۸.

[10] Baralos, G. (2009). Concept mapping as evaluation tool in mathematics. Colección Digital Eudoxus, (16).

[11] Cañas, A. J., Coffey, J. W., Carnot, M. J., Feltovich, P., Hoffman, R. R., Feltovich, J., & Novak, J. D. (2003). A summary of literature pertaining to the use of concept mapping techniques and technologies for education and performance support. Report to the Chief of Naval Education and Training, 1-108.

[12] Fi, C. D. (2003). Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy. The University of Iowa.

[13] Himangshu, S., CassataWidera, A. (2010). Beyond individual classrooms: How valid are concept maps for large scale assessment? In J. Sánchez, A. J. Cañas, & J. D. Novak (Eds), Concept maps: Making learning meaningful, proceedings of fourth international conference on concept mapping Viña del Mar, Chile.

[14] Hazel, E., & Prosser, M. (1994). First year university student's understanding of photosynthesis, their study strategies and learning context. American Biology Teacher, 56, 274-279.

[15] Huerta, P. M., Galán, E., & Granell, R. (2003). Concept maps in mathematics education: A possible framework for students' assessment. Valencia, Spain: Departmento de Didáctica de las Matemáticas, Universitat de València.

[16] Khine, A.A., Adefuye, A.O., & Busari, J.O. (2019). Utility of concept mapping as a tool to enhance metacognitive teaching and learning of complex concepts in undergraduate medical education. *Archives of Medicine and Health Sciences, 7*, 267 - 272.

[17] MacClure, John,Sonak, Brian, Hoik-(1998). Concept. Concept Map Assessment of Classroom learning: Reliability, Validity, and logistical Practically. Journal of research Science teaching, Vol.36, No. 4, pp. 475-492.

[18] McClure, J., Sonak, B., & Suen, H K. (1999). Concept map assessment of classroom learning: Reliability, validity, and logistical practicality. Journal of Research Science Teaching, 36(4), 475–492.

[19] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Assessment standard for school mathematics. Reston, VA: Author.

[20] Novak J. D., & Musonda, D. (1991). A twelve-year longitudinal study of science concept learning. *American Educational Research Journal*, 28 (1), 117-153.

[21] Novak, J. D. & Cañas, A. J. (2008). The theory underlying concept maps and how to construct and use them, Technical Report IHMC Camp Tools 200601 Rev 012008, Florida Institute for Human Cognition. Retrieved from http://cmap ihmc. us/publications Research Papers/ Theory underlying concept maps.
[22] Schmittau, J. (2009). Concept mapping as a means to develop and assess conceptual understanding in secondary mathematics teacher education. In Concept mapping in mathematics (pp. 137-147). Springer, Boston, MA.
[23] Stoddart, T., Abrams, R., Gasper, E. & Canada, D. (2000). Concept maps as assessment in science inquiry learning report of methodology. Journal of Science Education, 22(12), 12211246.
[24] Tavares, R. (2010). Concept Map Under Modified Bloom Taxonomy Analysis. *Proc. of Fourth Int. Conference on Concept Mapping* J. Sánchez, A.J. Cañas, J.D. Novak, Eds. Viña del Mar, Chile
[25] Williams, G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. Journal for Research in Mathematics education, 29(4), 414–421.
[26] Woolfolk, A.E., Winne, P.H., Perry, N.E., & Shapka, J. (2010). Educational Psychology (4th ed). Toronto: Pearson Canada.
[27] Yue, H. (2008). Concept maps as assessment tools in mathematics, comparison with clinical interviews. Doctoral dissertation, department of mathematical sciences, the university of Texas at El Paso.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–186، صص. ۱۷۴–۱۷۸

ارزیابی مدل‌های ARMA–GARCH-M برای مدل‌سازی میانگین و نوسانات سرعت باد

لیلا گلشنی *،آ

آگروه ریاضی و آمار، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
گارچ در میانگین
گارچ نامتقارن
معیار اطلاع بیزی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

امروزه استفاده از انرژی‌های تجدیدپذیر از جمله انرژی باد در بسیاری از کشورهای جهان رو به افزایش است. اما از آنجا که این انرژی نسبت به سایر منابع انرژی ناپایدار است، استفاده از آن می‌تواند یک مشکل باشد. پس داشتن اطلاعات دقیق از میانگین و نوسان سرعت باد می‌تواند برای استفاده مؤثر از این انرژی مفید باشد. بنابراین در این مقاله میانگین و نوسانات سرعت باد را مدلبندی می کنیم و نشان می‌دهیم که نوسانات سرعت در معادله میانگین تاثیر دارد. برای این منظور انواعی از مدل‌های گارچ در میانگین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. داده‌های مورد بررسی میانگین هفتگی سرعت باد از ابتدای سال ۲۰۰۲ تا پایان سال ۲۰۱۶ در ایستگاه هواشناسی اردبیل است. برای مدلبندی ابتدا به داده‌های این ایستگاه، یک مدل اتورگرسیو میانگین متحرک برای میانگین سرعت باد برازش داده، سپس برای مانده‌های حاصل از برازش انواع مدل‌های متقارن و نامتقارن گارچ در میانگین را به کار می‌بریم. سپس با استفاده از معیار اطلاع بیزی بهترین مدل را انتخاب می‌کنیم و به این نتیجه می‌رسیم که مدل متقارن گارچ در میانگین به طور موثر تغییر روند میانگین و نوسان سرعت باد را نشان می‌دهد.

۱. مقدمه

امروزه استفاده از انرژی‌های تجدیدپذیر از جمله انرژی باد در مقایسه با سایر منابع انرژی در بسیاری از کشورهای جهان رو به افزایش است. با توسعه نگرش‌های زیست محیطی و راهبردهای صرفه جویانه در بهره‌برداری از منابع انرژی‌های تجدیدناپذیر، استفاده از انرژی باد در مقایسه با دیگر صور انرژی، به علت عدم نیاز به سوخت، تامین بخشی از تقاضاهای انرژی برق، عدم نیاز به آب، نداشتن آلودگی زیست محیطی و... می‌تواند یک انتخاب مناسب در مقایسه با سایر منابع انرژی باشد. اما از انجا که انرژی باد نسبت به سایر منابع انرژی ناپایدار است، در نتیجه استفاده از این انرژی می‌تواند مشکل باشد. بنابراین داشتن اطلاعات دقیق از میانگین و نوسان سرعت باد می‌تواند برای استفاده مؤثر از این انرژی مفید باشد.

تحقیقات در مورد مدل‌سازی میانگین سرعت باد به روش‌های متعددی انجام شده است. در این راستا مدلبندی میانگین سرعت باد به وسیله مدل‌های میانگین متحرک جمع بسته (ARIMA) توسط حسین و همکاران [۶] صورت گرفته است. اوینگ و همکاران [۴] از مدل گارچ در میانگین (GARCH-M) برای مدل‌سازی نوسانات سری استفاده کردند. پاین وکارول [۸] در ادامه کار اوینگ و دیگران، میانگین و نوسانات سرعت باد واقع شده در مکان‌های مختلف ایالات را به طور همزمان مدل‌سازی کردند. آنها از مدل ARMA–GARCH-M استفاده کردند.

تحقیقات در مورد سرعت باد در ایران توسط محققان به روش‌های مختلفی صورت گرفته است. استفاده از شبکه‌های عصبی برای پیش‌بینی میانگین سرعت باد را می‌توان در مقالاتی مانند [۹] یافت. ملاعباسی و گلشنی [۱۱] برای مدل‌سازی سرعت باد در ایستگاه انزلی مدل ARMA-EGARCH را بکار بردند. در این مقاله میانگین و نوسانات سرعت باد را مدل‌سازی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مدل‌های ARMA-GARCH-M

*سخنران
پست الکترونیک: Leila_golshani@yahoo.com (لیلا گلشنی)

برای مدل‌بندی میانگین و نوسانات سرعت باد در ایران نیز قابل اجرا است. برای این منظور شهر اردبیل را به جهت روند افزایش تغییرات سرعت باد در این شهر در نظر می‌گیریم.

۲. معرفی مدل‌های GARCH

۱. مدل GARCH(1,1): این مدل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_t = \alpha_0 + \beta_1 v_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \qquad \varepsilon_t = \sqrt{v_t} z_t$$

که در آن α_i، β_i پارامترهای مجهول، $\{Z_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هریک با میانگین صفر و واریانس یک هستند[۱].

۲. مدل EGARCH(1,1) (گارچ نمایی): این مدل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\log v_t = \alpha_0 + \alpha_1 \log v_{t-1} + \beta_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{v_{t-1}}} + \gamma_1 \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{v_{t-1}}}, \qquad \varepsilon_t = \sqrt{v_t} z_t$$

که در آن $\{Z_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند [۷]. در این مدل اگر باشد $\gamma = 0$، مدل متقارن است و در غیر این صورت، مدل نامتقارن می‌باشد [۱۰].

۳. مدل NGARCH(1,1): به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{v_t}$$

و

$$v_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\varepsilon_{t-1} - \gamma \sqrt{v_{t-1}}\right)^2 + \beta_1 v_{t-1}$$

که در آن $\{Z_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند مدل NGARCH به عنوان GARCH نامتقارن نیز شناخته می‌شود [۲].

۴. مدل GJR-GARCH: این مدل ساده‌ترین نوع از مدل‌های GARCH نامتقارن است. مدل GJR-GARCH(1,1) به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{v_t}$$

و

$$v_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 v_{t-1} + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

که در آن $\{Z_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند و I_t تابع نشانگر بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_t < 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

در این مدل اگر γ معنادار نباشد ($\gamma = 0$) بدین معنی است که مدل کاملاً متقارن است. اما اگر γ معنادار باشد ($\gamma \neq 0$) مدل نامتقارن است و اثر شوک‌های مثبت و منفی نمی‌تواند یکسان باشد [۱۰].

۵. مدل GARCH-M: مدل GARCH-M(1,1) بصورت $\varepsilon_t = \sqrt{v_t} Z_t$ و $v_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 v_{t-1}$ تعریف می‌شودکه در آن z_t مانند گذشته است. براي‌اين مدل، معادله میانگین بصورت زیر است [۳]:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \delta \sqrt{v_t}$$

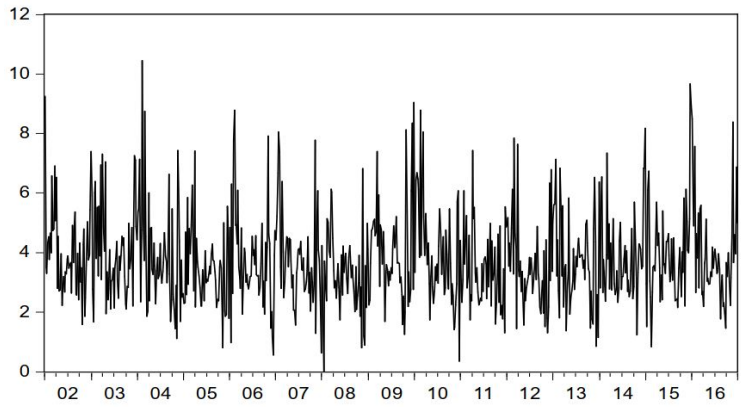
که در آن c و δ مقادیر ثابتی هستند. در این مدل اگر ضریب δمعنی‌دار باشد در آن صورت $\delta \neq 0$ نشان می‌دهد که انحراف معیار بر معادله میانگین تأثیر دارد.

۳. معرفی داده‌ها و نتایج تجربی

در این بخش، به برازش مدل به معادله میانگین و معادله واریانس سرعت باد درایستگاه اردبیل می‌پردازیم. داده‌های مورد بررسی، سرعت باد در این ایستگاه، از ژانویه ۲۰۰۲ تا دسامبر ۲۰۱۶ است که از سایت سازمان هواشناسی ایران اخذ شده است. در این بخش، برای ۷۸۳ داده ثبت شده توسط این ایستگاه که به صورت میانگین سرعت باد در هفته است، رفتار سری سرعت باد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا بررسی مانایی سری صورت می‌گیرد و پس از آن مدل ARIMA به میانگین سری و در پایان انواع مدل‌های GARCH-M به واریانس سری برازش داده و با معیار اطلاع بیزي‌بهترین مدل را انتخاب می‌کنیم.

۱.۳ . *بررسی مانایی*

در این قسمت مانایی سری اردبیل بررسی می‌شود. برای این منظور از رسم نمودار سری و آزمون‌های مانایی استفاده می‌شود. این نمودار هیچ روند خاصی را نشان نمی‌دهد، با توجه به این شکل ۱ می‌توان دریافت که سری اردبیل ماناست. اما برای اطمینان بیشتر در مورد مانایی این سری، آزمون مانایی انجام می‌شود.



شکل ۱: نمودار سری زمانی مربوط به ایستگاه اردبیل

جدول ۲، خروجی آزمون دیکی – فولر تعمیم یافته را نشان می‌دهد. مقدار آماره آزمون ۱۴٫۹۳۴− به دست آمده و مقدار احتمال ۰٫۰۰۰ از تمامی سطوح معنی‌داری داده شده، کوچکتر است. لذا فرض صفر (نامانایی) رد می‌شود. پس نتیجه این آزمون، مانایی سری اردبیل می‌باشد.

جدول ۱: آزمون دیکی –فولر برای سری ایستگاه اردبیل

آماره آزمون t	مقدار احتمال	مقادیر بحرانی در سطح		
		۱ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد
۱۴٫۹۳۴−	۰٫۰۰۰	۳٫۴۳۸−	۲٫۸۶۵−	۲٫۵۶۸−

۴. معادله میانگین برای سری اردبیل

در این قسمت به مدل‌بندی معادله میانگین سری اردبیل می‌پردازیم. معیاری که برای برتری یک مدل نسبت به مدل‌های دیگر در نظر گرفته می‌شود، معیار اطلاع بیزی (BIC) است. در این قسمت برای انتخاب مدل برای میانگین سری، از رویکرد باکس –جنکینز، استفاده می‌شود. در بین مدل‌های مختلف ARMA، مدل ARMA(1,1) که برای آن تمامی ضرایب مدل‌در سطح ۰٫۰۵ معنی‌دار هستندو معیار اطلاع بیزي کمتری نسبت به سایر مدل‌ها دارد، مناسب است.

۵. تحلیل مانده‌های مدل

در این قسمت با استفاده از آزمون لیانگ – باکس و آزمون ضریب لاگرانژ، به تحلیل مانده‌های مدل می‌پردازیم. برای بررسی وجود یا عدم وجود خودهمبستگی بین مانده‌های حاصل از مدل، از آزمون لیانگ –باکس استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل از بررسی برای تاخیرهای ۵ و ۹ نشان میدهد مقدار احتمال آماره‌های $Q(5)$ و $Q(9)$ بیشتر از ۵ درصد است، بنابراین خودهمبستگی بین مانده‌های حاصل از مدل وجود ندارد. برای بررسی فرض ناهمسانی واریانس مانده‌ها و یا وجود اثرات گارچ در داده‌ها از آزمون ضریب لاگرانژ استفاده می‌شود. برای این آزمون مقدار احتمال برای آماره LM برابر ۰٫۰۰۰ است،که کمتر از ۵ درصد می‌باشد. پس فرضیه وجود اثرات گارچ رد نمی‌شود. پس بنا به نتیجه به دست آمده به بررسی انواعی از مدل‌های GARCH می‌پردازیم.

۶. معادله واریانس سری اردبیل

در این قسمت مدل‌های GARCH-M(1,1)، EGARCH-M(1,1)، GJR-GARCH-M(1,1) و NGARCH-M(1,1) را به داده‌های ایستگاه اردبیل برازش داده و سپس در بین این مدل‌ها بهترین مدل با در نظر گرفتن معیار BIC انتخاب می‌شود. لازم به ذکر است که برای همه این مدل‌ها، معادله میانگین با درنظر گرفتن انحراف معیار در مدل ARMA(1,1) ، به صورت زیر است:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \delta\sqrt{v_t}$$

نتایج حاصل از بررسی انواع مدل‌های گارچ در میانگین ذکر شده به صورت جدول زیر است:

جدول ۲: نتیجه برازش مدل‌های GARCH-M به واریانس اردبیل

معادله میانگین	EGARCHM(1,1)	NGARCHM(1,1)	GARCHM(1,1)	GJRGARCHM(1,1)
c	۲٫۹۹۴۱	۲٫۹۶۷۴	۲٫۹۷۰۷	۳٫۰۰۱۹
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)
Φ_1	۰٫۵۴۱۶	۰٫۵۵۴۵	۰٫۵۵۸۳	۰٫۵۷۰۱
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)
θ_1	−۰٫۳۵۴۷	−۰٫۳۷۷۳	−۰٫۳۸۱۷	−۰٫۳۸۴۵
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۱۱۶)	(۰٫۰۰۸۸)	(۰٫۰۰۴۲)
δ	−۰٫۵۲۶۹	۰٫۵۵۰۱	۰٫۵۴۹۱	۰٫۵۱۴۵
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۱۳۲)	(۰٫۰۱۱۳)	(۰٫۰۲۰۹)
معادله واریانس	۰٫۰۹۰۶	۰٫۲۰۲۲	۰٫۲۰۵۸	۰٫۱۹۴۲
عرض از مبدا	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)
α_1	۰٫۰۱۰۹	۰٫۲۳۳۱	۰٫۲۳۲۷	۰٫۲۰۸۶
	(۰٫۸۰۳۲)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)
β	۰٫۸۶۷۶	۰٫۶۸۸۰	۰٫۶۸۵۰	۰٫۶۹۱۸
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)
γ	۰٫۴۰۳۴	۱٫۹۱۳۱	-	۰٫۰۵۳۵
	(۰٫۰۰۰۰)	(۰٫۰۰۰۰)		(۰٫۴۵۹۸)
BIC	۳٫۵۲۴۶	۳٫۵۳۰۱	۳٫۵۲۱۶	۳٫۵۲۹۵
$Q(۵)$	۱٫۶۳۵۹	۱٫۳۰۰۵	۱٫۲۴۶۶	۱٫۲۶۳۵
	(۰٫۹۹۴۴)	(۰٫۹۹۹۷)	(۰٫۹۹۹۸)	(۰٫۹۹۹۸)
$Q(۹)$	۲٫۵۶۵۶	۲٫۰۶۱۳	۱٫۹۹۲۴	۲٫۰۳۱۲
	(۰٫۹۴۵۳)	(۰٫۹۸۱۸)	(۰٫۹۸۴۹)	(۰٫۹۸۳۲)
LM	۰٫۶۸۴۹	۰٫۳۴۴۵	۰٫۳۲۶۵	۰٫۳۵۸۸
	(۰٫۴۰۷۹)	(۰٫۵۵۷۳)	(۰٫۵۶۷۷)	(۰٫۵۴۹۲)

جدول ۲ از دو قسمت معادله میانگین و معادله واریانس تشکیل شده است. در این جدول اعداد ضرایب مربوط به متغیرها و اعداد داخل پرانتز مقادیر احتمال‌ها است. در جدول فوق مشاهده می‌شود که برای همه مدل‌ها به غیر از مدل EGARCH-M مقادیر احتمال ضرایب کمتر از ۵ درصد می‌باشند، بنابراین مقادیر ضرایب معنی دار هستند و مدل EGARCH-M که چنین نیست مناسب نمی‌باشد. از طرفی ضریب γ برای مدل GJR-GARCH-M در سطح ۵ درصد معنی دار نیست و لذا مدل متقارن می‌باشد. معنی‌دار بودن ضریب γ در مدل‌ها موید این مطلب است که انحراف معیار در معادله میانگین تاثیر دارد. همچنین مقادیر احتمال آزمون لیانگ باکس برای تاخیرهای ۵ و ۹ بزرگتر از ۵ درصد است پس خودهمبستگی در مانده‌های حاصل از مدل وجود ندارد ومقادیر احتمال آزمون LM نیز که بزرگتر از ۵ درصد است، نشان می‌دهد که واریانس مانده‌ها همسان است. حال چون معیار اطلاع بیزی برای مدل GARCH-M نسبت به سایر مدل‌ها کمتر است پس این مدل مناسب می‌باشد.

مراجع

[1] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[2] Robert F Engle and Victor K Ng. Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of finance*, 48(5):1749–1778, 1993.

[3] Robert F Engle, David M Lilien, and Russell P Robins. Estimating time varying risk premia in the term structure: The arch-m model. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 391–407, 1987.

[4] Bradley T Ewing, Jamie Brown Kruse, and John L Schroeder. Time series analysis of wind speed with time-varying turbulence. *Environmetrics*, 17(2):119–127, 2006.

[5] Lawrence R Glosten, Ravi Jagannathan, and David E Runkle. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5):1779–1801, 1993.
[6] Shakir Hussain, A Elbergali, Abdullah Al-Masri, and G Shukur. Parsimonious modelling, testing and forecasting of long-range dependence in wind speed. *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, 15(2):155–171, 2004.
[7] Daniel B Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 347–370, 1991.
[8] JE Payne and B Carroll. Modeling wind speed and time-varying turbulence in geographically dispersed wind energy markets in china. *Energy Sources, Part A*, 31(19):1759–1769, 2009.
[۹] شهین ابراهیمی و نوید غفارزاده. پیش بینی کوتاه مدت سرعت باد با استفاده از سه نوع ترکیب شبکه های عصبی براساس تقسیم و ترکیب. *دوفصلنامه انرژی های تجدید پذیر و نو*، (۱):۴۴–۵۱، ۱۳۹۶.
[۱۰] علی سوری. *اقتصادسنجي‌همراه با کاربرد Eviews & Stata*. انتشارات فرهنگ شناسی، تهران، ۱۳۹۵.
[۱۱] بیتا ملاعباسی و لیلا گلشنی. ارزیابی الگوهای سری زمانی برای نوسانات سرعت باد در ایستگاه هواشناسی انزلی. *مجله بررسی‌های آمار رسمی ایران*، در دست چاپ، ۱۴۰۰.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–191، صص. ۱۷۹–۱۸۷

مروری بر خانواده توزیع های احتمال سیستم پیرسن تعمیم یافته

علیرضا حسین زاده*، مهدی یعقوبی اول ریابی

گروه آمار، واحد گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی،گناباد، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
سیستم پیرسن
توزیع های تعمیم یافته
تابع چندک
توزیع چوله
خانواده بتا
سیستم پیرسن تعمیم یافته
تابع بسل اصلاح شده نوع سوم
خانواده توزیع های مارشال ـ الکین
تابع استوانه سهموی

چکیده

در بسیاری از مسایل کاربردی مربوط به شناسایی الگوی احتمالی داده ها (تابع توزیع یا تابع چگالی احتمال)، دو رویکرد اساسی برآورد ناپارامتری و برآورد پارامتری تابع چگالی احتمال مورد توجه است. در رویکرد پارامتری، از آنجایی که خانواده توزیعهای تعمیم یافته بدلیل انعطاف پذیری بیشتر در وضعیت های متنوع تری به داده ها برازش می شوند، تولید و به کار بستن این خانواده ها جهت برازش داده ها ضروری به نظر می رسد. در مقاله حاضر ابتدا مروری اجمالی بر روشهای تولید خانواده توزیع های تعمیم یافته خواهیم داشت. سپس با تمرکز بر یکی از این روش ها موسوم به "روش معادله دیفرانسیل" خانواده توزیع های احتمال سیستم پیرسن و تعمیم های آن را معرفی و برخی از اعضاء این خانواده را مرور خواهیم نمود.

۱. مقدمه

از آنجایی که اغلب توزیعهای کلاسیک به دلیل عدم انعطاف پذیری لازم در توصیف پدیده های طبیعی ناتوان هستند، در دهه های اخیر تلاش محققین علم آمار در جهت تعمیم این توزیع ها و ساختن توزیع های انعطاف پذیر بیشتر شده است. تا قبل از دهه۱۹۸۰، تعمیم توزیع ها در سه روش به نامهای، روش معادله دیفرانسیل [۱] ، روش تبدیل [۲] و روش چندک [۳] ، انجام شده است. محققین در روشهای ابداع شده بعد از دهه ۱۹۸۰تلاش کرده اند تا با ترکیب نمودن توزیع های موجود با یکدیگر و یا با اضافه نمودن پارامترهای جدید به توزیع موجود، شکل تعمیم یافته ای را به دست آورند. از این رو روش های بعد از دهه ۱۹۸۰ به روشهای ترکیبی نامگذاری شده اند. در این مقاله علاوه بر سه روش مذکور چهار روش ترکیبی به نامهای، روش تولید توزیع های چوله [۴] ، روش اضافه نمودن پارامترها [۵] به توزیع های موجود، روش بتای تولید شده [۶] و روش مرکب [۷] را مرور خواهیم نمود.

*سخنران

پست الکترونیک : hoseinzade1@yahoo.com (علیرضا حسین زاده)، m_yaghoobiawal@yahoo.com (مهدی یعقوبی اول ریابی)

[1] Method of differential equation
[2] Method of transformation
[3] Method of quantile
[4] Method of generating skew distributions
[5] Method of adding parameters
[6] Beta-generated method
[7] Composite method

بخصوص با تمرکز بر روش معادله دیفرانسیل و به تبعیت از مقاله شکیل[8] و کیبریا[9] (۲۰۱۶) اولین خانواده سیستم پیرسن و خانواده های تعمیم یافته مبتنی بر آن که تا کنون معرفی شده اند را بررسی خواهیم نمود.

۲. مروری بر روشهای تولید توزیعهای تعمیم یافته

در این قسمت به تبعیت از مقاله لی[10] و همکاران (۲۰۱۳) چگونگی ساخت توزیع های تعمیم یافته در قالب هفت روش معروف که تا کنون توسط محققین ارائه شده است را مرور خواهیم نمود. تمرکز اصلی این روشها بر ساختن توزیع های یک متغیره پیوسته است.

۲ .۱ . *روش معادله دیفرانسیل*

کار با ارزش و ماندگار پیرسن رویکردی سیستماتیک در جهت تولید توزیع های آماری به کمک معادله دیفرانسیل ارائه کرد.
فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. گوییم توزیع X به سیستم پیرسن تعلق دارد اگر تابع چگالی احتمال آن در معادله دیفرانسیل زیر صدق نماید:

$$\frac{df(x)}{f(x)}=\frac{d+x}{ax^2+bx+c}dx, \quad (۱)$$

که در آن پارامترهای حقیقی d,c,b,a به گونه ای هستند که $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد. شکل $f(x)$ به مقادیر این پارامتر ها وابسته است. بر این اساس پیرسن[11] (۱۸۹۵ و ۱۹۰۱) اعضاء حاصله از این سیستم را توزیع های پیرسن نوع I تا VI نام گذاری نمود. بعدها در مقاله ای دیگر پیرسن (۱۹۱۶) حالات خاص دیگری را تعریف و آنها را توزیع های پیرسن نوع VII تا XII نامید. بسیاری از توزیع های مشهور حالت خاصی از سیستم پیرسن هستند. توزیع های نرمال و t – استیودنت پیرسن نوع VII، توزیع بتا پیرسن نوع I و توزیع گاما پیرسن نوع III هستند. جزییات کامل تری از این سیستم در بخش بعدی بیان خواهد شد.

۲ .۲ . *روش تبدیل*

جانسون[12] (۱۹۴۹) روشی برای تولید توزیع ها، با در نظر گرفتن تبدیلات نرمال سازی به فرم زیر پیشنهاد داد:

$$Z=\nu+\delta f\left(\frac{X-\mu}{\lambda}\right),$$

که در آن f یک تابع تبدیل، Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و ν,δ,μ,λپارامترها هستند. بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود، جانسون با مثبت در نظر گرفتن δ,ν سه خانواده تبدیل زیر را معرفی کرد:
الف) خانواده لگ نرمال:

$$Z=\nu+\delta\ln(X-\mu), X\geq\mu.$$

ب) خانواده توزیع های کراندار:

$$Z=\nu+\delta\ln\left(\frac{X-\mu}{\mu+\lambda-X}\right), \mu\leq X\leq\mu+\lambda.$$

ج) خانواده توزیع های بیکران:

$$Z=\nu+\delta\sinh^{-1}\left(\frac{X-\mu}{\lambda}\right), -\infty<X<\infty.$$

این خانواده توزیع ها به طور مشترک بسیاری از توزیعهای کلاسیک نظیر نرمال، لگ نرمال، گاما، بتا، نمایی و غیره را پوشش می دهند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به جانسون و همکاران (۱۹۹۴) مراجعه شود.

---
[8] Shakil
[9] Kibria
[10] Lee
[11] Pearson
[12] Johnson

۲ ۳ . *روش تابع چندک*

کار اولیه در این روش بر مبنای تعمیم توزیع لامبدا صورت گرفت. این خانواده تعمیم یافته، به خانواده توزیع های لامبدای تعمیم یافته[۱۳] مشهورند و بر حسب تابع چندکی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Q(y) = Q(y;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3}-(1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, 0 \le y \le 1.$$

پارامترهای λ_1,λ_2 به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس هستند و λ_3,λ_4 به ترتیب چولگی و کشیدگی را نشان می دهند. تابع چگالی متناظر با توزیع بالا به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1}+\lambda_4(1-y)^{\lambda_4-1}}, x = Q(y).$$

لازمه وجود تابع چگالی معتبری به شکل فوق آن است که به ازاء جمیع مقادیر $0 \le y \le 1$ صورت و مخرج کسر بالا هم علامت باشند. تفاوت ها و اشتراکات دو سیستم پیرسن و خانواده لامبدای تعمیم یافته بالا توسط فریمر [۱۴] و همکاران (۱۹۸۸) مورد بررسی قرار گرفته شده است.
موینو[۱۵] و همکاران (۲۰۰۶) با استفاده از روش تابع چندک دو خانواده تعمیم یافته از توزیع های S شکل موسوم به خانواده توزیع های S [۱۶] و GS [۱۷] به دست آوردند که توابع چگالی احتمال آنها در زیر آمده است:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \alpha[F(x)]^g\left\{1-[F(x)]^k\right\}, F(x_0) = F_0, k > 0,$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \alpha[F(x)]^g\left\{1-[F(x)]^k\right\}^\gamma, F(x_0) = F_0, k > 0,$$

که در آن α پارامتر مقیاس و γ,k,g پارامترهای شکل هستند.

۲ ۴ . *روش تولید توزیع چوله*

روش استفاده از یک توزیع متقارن برای تولید توزیع چوله (نامتقارن) برای اولین بار توسط آزالینی[۱۸] (۱۹۸۵) پیشنهاد شد که توزیع نرمال چوله را معرفی کرد. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی f_0 باشد که تابعی متقارن حول صفر است و متغیر تصادفی Y دارای تابع توزیع $G(x)$ متقارن حول صفر باشد. می توان ثابت کرد که برای هر عدد حقیقی λ تابع چگالی توزیع چوله به صورت زیر خواهد بود:

$$2f_0(x)\,G(\lambda x), -\infty < x < \infty.$$

حال اگر متغیرهای تصادفی X,Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند آنگاه تابع چگالی احتمال توزیع نرمال چوله به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x;\lambda) = 2\varphi(x)\,\phi(\lambda x),$$

که در آن $\varphi(x),\phi(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

۲ ۵ . *روش اضافه کردن پارامترها*

افزودن پارامتری جدید به خانواده ای از توزیعها، روشی متداول برای توسعه آن خانواده و بدست آوردن خانواده ای منعطف تر به شمار می رود. توزیع هایی مانند توزیع وایبل، گاما، پارتو و بسیاری از توزیعهای دیگر با استفاده از این روش ساخته شده اند. یکی از روشهای افزودن پارامتر، روش نمایی کردن است.
فرض کنید F_E,F به ترتیب توابع توزیع متغیر تصادفی X و متغیر تصادفی جدید X_E باشند. اگر تعریف کنیم:

$$F_E(x) = [F(x)]^\gamma, \gamma > 0,$$

[13] Generalized lambda distributions: GLDs
[14] Freimer
[15] Muino
[16] S-distribution: S
[17] GS-distribution: GS
[18] Azzalini

آنگاه $F_E(x)$ یک تابع توزیع جدید خواهد بود. توسط این روش توزیع های زیادی تولید شده اند. گوپتا[19] و همکاران (۱۹۹۸)، یک حالت متقارن از معادله فوق را ارائه نمودند. گوپتا و کوندا[20] (۲۰۰۱)، نیز خانواده " نمایی، نمایی شده[21] " را مورد مطالعه قرار دادند. کوردیرو[22] و دیکاسترو[23] (۲۰۱۱)، یک خانواده جدید از توزیعها به نام توزیع تعمیم یافته نمایی شده با دو پارامتر اضافی $\beta > ۰, \gamma > ۰$ معرفی نمودند. مجددا فرض کنید F, F_E به ترتیب توابع توزیع متغیر تصادفی X و متغیر تصادفی جدید X_E باشند. اگر تعریف کنیم:

$$F_E(x) = \{۱ - [۱ - F(x)]^{\beta}\}^{\gamma}, \beta, \gamma > ۰,$$

در اینصورت $F_E(x)$ یک تابع توزیع جدید خواهد بود. توجه داریم که در تمام نقاط پیوستگی هر دو تابع توزیع معرفی شده در بالا می توان با مشتق گیری از آنها تابع چگالی احتمال خانواده جدید را به دست آورد.
روش دیگری برای افزودن پارامتری جدید به خانواده ای از توزیعها توسط مارشال[24] و الکین[25] (۱۹۹۷)، ارائه گردیده است که موسوم به روش مارشال – الکین است. آنها با اضافه نمودن یک پارامتر شکل به یک توزیع پایه خانواده جدیدی ارائه نموده اند.

۲ .۶ . روش تولید بتا

کار اولیه در زمینه روش بتای تعمیم یافته توسط اوگن و همکاران[26] (۲۰۰۲) انجام گرفت. آنها به کمک توزیع بتا حالت تعمیم یافته ای از این توزیع را پیشنهاد دادند. تابع توزیع جدید به صورت زیر تعریف می شود:

$$G(x) = \int_{۰}^{F(x)} b(t)\, dt,$$

که در آن $b(t)$ تابع چگالی احتمال توزیع بتا و $F(x)$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته دلخواه است.
تابع چگالی احتمال متناظر با توزیع فوق با مشتق گیری به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$g(x) = \frac{۱}{B(\alpha\beta)} f(x) F^{\alpha-۱}(x) (۱ - F(x))^{\beta-۱}.$$

توزیع فوق تعمیمی از توزیع آماره ترتیبی برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(x)$ است. این روش بعد از اوگن و همکارانش برای بسیاری از توزیع ها مورد استفاده قرار گرفته است. از جمله می توان توزیع بتا–گامبل (نادراجا[27] و کوتز[28] ۲۰۰۴)، توزیع بتا–وایبل (فمویی[29] و همکاران ۲۰۰۵)، توزیع بتا–گاما (کنگ[30] و همکاران ۲۰۰۷)، توزیع بتا–پارتو (اکینست[31] و همکاران ۲۰۰۸) و غیره را نام برد.

۲ .۷ . روش مرکب

کوری[32] و آناندا[33] (۲۰۰۵) ، روشی برای تولید توزیع های جدید با استفاده از ترکیب دو توزیع، پیشنهاد نمودند که روش مرکب نامیده می شود.
فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} c f_۱(x), & x \epsilon (۰, \theta) \\ c f_۲(x), & x \epsilon [\theta, \infty) \end{cases},$$

که در آن c یک عدد ثابت و $f_۱$ ، $f_۲$ توابع چگالی احتمال با تکیه گاه ثابت هستند. در اینجا پارامتر مجهول θ به گونه ای محاسبه می شود که تابع چگالی $f(x)$ در θ پیوسته و مشتق پذیر باشد. پیوستگی و مشتق پذیری در شرایط زیر برقرارند:

---
[19] Gupta
[20] Kunda
[21] Exponentiated exponential family
[22] Cordeiro
[23] De Castro
[24] Marshall
[25] Olkin
[26] Eugene
[27] Nadarajah
[28] Kotz
[29] Famoye
[30] Kong
[31] Akinsete
[32] Cooray
[33] Ananda

$$.f_1(\theta) = f_2(\theta), f_1'(\theta) = f_2'(\theta)$$

فرض کنید f_1 دارای n پارامتر و f_2 دارای m پارامتر باشند. آنگاه توزیع ترکیبی $f(x)$ حد اکثر $n+m-1$ پارامتر خواهد داشت.
از توزیع هایی که با این روش تولید شده اند می توان به توزیع ترکیبی لگ نرمال– بور، توزیع ترکیبی نمایی–پارتو، توزیع ترکیبی پارتو– وایبل اشاره نمود.

۳. معرفی خانواده توزیع های سیستم پیرسن تعمیم یافته

در اولین روش ساخت توزیع های تعمیم یافته (روش معادله دیفرانسیل)، سیستم پیرسن را در قالب یک معادله دیفرانسیل با چهار پارامتر معرفی نمودیم. در سالهای اخیر بسیاری از محققین توجه خود را معطوف به شکل تعمیم یافته ای از معادله دیفرانسیل (۱) موسوم به " معادله دیفرانسیل سیستم پیرسن تعمیم یافته[۳۴] " با نماد (GPE) نموده اند که به فرم زیر معرفی می شود:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j} dx,$$

که در آن n, m اعداد طبیعی و ضرایب b_j, a_j پارامترهای حقیقی هستند. این سیستم با انتخاب مناسب پارامترهای مدل، در بر دارنده اکثریت قریب به اتفاق توابع چگالی احتمال خواهد بود.

۳.۱. *مرور تعمیم های سیستم تا (GPE) قبل از دهه اخیر*

الف) روی[۳۵] (۱۹۷۱) سیستم (GPE) را در حالت خاص $b_0 = 0, n = 3, m = 2$ به منظور استخراج پنج توزیع که پارامترهای آنها وابسته به اولین هفت گشتاور جامعه هستند، مورد مطالعه قرار داد.
ب) دانینگ[۳۶] و هنسون[۳۷] (۱۹۷۷) از سیستم (GPE) در مقاله خود تحت عنوان " توزیع های پیرسن تعمیم یافته و برنامه ریزی غیرخطی" استفاده نمودند.
پ) کوب[۳۸] و همکاران (۱۹۸۳) با به کار بردن چند جمله ای صورت کسر سیستم (GPE) از درجه بزرگتر از یک و بزرگتر از درجه مخرج کسر، توزیع های سیستم پیرسن را به منظور تولید توزیع های چند نمایی توسعه دادند.
ت) چاودری[۳۹] و احمد[۴۰] (۱۹۹۳) کلاس دیگری از توزیع های پیرسن تعمیم یافته با مشخصات زیر مورد بررسی قرار دادند:

$$m = 3, n = 2, b_0 = b_1 = b_2 = 0, \frac{a_4}{2b_3} = -2\alpha, \frac{a_0}{2b_3} = 2\beta.$$

ث) لیفیور[۴۱] و همکاران (۲۰۰۲) مسایل " مشخصه سازی" را بر اساس برخی از توزیع های پیرسن تعمیم یافته مورد مطالعه قرار دادند.
ج) سنکاران[۴۲] (۲۰۰۳) با در نظر گرفتن کلاسی از سیستم (GPE) به فرم:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} dx,$$

کلاس جدیدی از توزیع های احتمال را پیشنهاد دادند و برخی نتایج "مشخصه سازی" را بر اساس رابطه بین نرخ شکست و گشتاورهای شرطی، اثبات نمودند.
چ) روسانی[۴۳] و اسکارفن[۴۴] (۲۰۰۹) کلاسی از سیستم (GPE) به فرم :

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} dx,$$

را در نظر گرفتند و از خانواده توزیع های پیرسن تعمیم یافته حاصله، به منظور مطالعه پدیده فیزیکی، "ذرات باردار در حال تعامل با یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی" استفاده نمودند.

---
[34] Generalized Pearson system of differential equation: GPE
[35] Roy
[36] Dunning
[37] Hanson
[38] Cobb
[39] Chaudhry
[40] Ahmad
[41] Lefevre
[42] Sankaran
[43] Rossani
[44] Scarfone

۲.۳ . *مرور تعمیم های سیستم (GPE) در دهه اخیر*

الف) شکیل[45] و همکاران a)۲۰۱۰) بر اساس معادله دیفرانسیل:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_1 x} dx, b_1 \neq 0,$$

خانواده جدیدی از سیستم های پیرسن تعمیم یافته تعریف نمودند. از حل این معادله دیفرانسیل خانواده توابع چگالی احتمال زیر بدست می آید:

$$f(x) = cx^{\alpha} \exp\left(-\mu x^2 - \beta x\right), \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \mu > 0, x \geq 0,$$

که در آن،

$$\mu = -\frac{a_2}{2b_1}, \alpha = \frac{a_0}{b_1}, \beta = -\frac{a_1}{b_1}, b_1 \neq 0,$$

و c ثابت نرمال ساز است که به وسیله رابطه زیر داده می شود:

$$c = \frac{(2\mu)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\gamma(\alpha+1)\exp\left(\frac{\beta^2}{8\mu}\right) D_{-(\alpha+1)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu}}\right)},$$

که در آن $D_p(z)$ تابع استوانه سهموی[46] است. اشکال مختلفی از توابع چگالی فوق به ازاء مقادیر خاص پارامترها در مقاله شکیل و کیبریا (۲۰۱۶) آمده است.

ب) شکیل و کیبریا (۲۰۱۰) کلاس دیگری از سیستم (GPE) به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_p x^p}{b_1 x + b_{p+1} x^{p+1}} dx, b_1 \neq 0, b_{P+1} \neq 0, x > 0.$$

از حل معادله دیفرانسیل فوق، خانواده توابع چگالی احتمال زیر حاصل می شود:

$$f(x) = cx^{\mu-1}(\alpha + \beta x^p)^{-\vartheta}, x, \alpha, \beta, \mu, \vartheta, p > 0.$$

در خانواده فوق $c = p\alpha^{\vartheta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{p}} \frac{1}{B\left(\frac{\mu}{p}, \vartheta - \frac{\mu}{p}\right)}$ ثابت نرمال ساز و روابط بین پارامترهای جدید و ضرایب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$\alpha = b_1, \beta = b_{P+1}, \mu = \frac{a_0 + b_1}{b_1}, \vartheta = \frac{a_0 b_{P+1} - a_p b_1}{p b_1 b_{P+1}}, b_1, b_{P+1} \neq 0.$$

در ثابت نرمال ساز c تابع $B(\cdot,\cdot)$ تابع بتا است که در آن باید شرط $\vartheta > \frac{\mu}{p}$ برقرار باشد.

اشکال مختلفی از توابع چگالی فوق به ازاء مقادیر خاص پارامترها در مقاله شکیل و کیبریا (۲۰۱۶) آمده است.

پ) شکیل و همکاران b)۲۰۱۰) کلاس دیگری از سیستم (GPE) به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_p x^p + a_{2p} x^{2p}}{b_{p+1} x^{p+1}} dx, b_{P+1} \neq 0, x > 0.$$

از حل معادله دیفرانسیل فوق، خانواده توابع چگالی احتمال زیر حاصل می شود:

$$f(x) = cx^{\vartheta-1}(-\alpha x^p - \beta x^{-p})^{-\vartheta}, x > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, p > 0, \vartheta \in \mathbb{R},$$

که در آن رابطه بین ضرایب معادله دیفرانسیل و پارامترهای تابع چگالی به صورت زیر است:

[45] Shakil
[46] Parabolic cylinder function

$$\alpha = -\frac{a_{۲}p}{pb_{p+۱}}, \beta = \frac{a_{۰}}{pb_{P+۱}}, \vartheta = \frac{a_p+b_{P+۱}}{b_{P+۱}}.$$

بر اساس مقادیر مختلف پارامترهای $p, \vartheta, \beta, \alpha$ برای ثابت نرمال ساز c سه مقدار مختلف و در نتیجه سه خانواده توزیع مربوط به آن حاصل حاصل خواهد شد. این حالات مختلف عبارتند از:

۱) در حالت $\vartheta \in \mathbb{R}, p > ۰, \beta > ۰, \alpha > ۰$ داریم:

$$c = \frac{p}{۲}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{\vartheta}{۲p}} \frac{۱}{K_{\frac{\vartheta}{p}}\left(۲\sqrt{\alpha\beta}\right)},$$

که در آن $K_{\frac{\vartheta}{p}}\left(۲\sqrt{\alpha\beta}\right)$ " تابع بسل اصلاح شده نوع سوم[47] " است.

۲) در حالت $\vartheta > ۰, p > ۰, \beta = ۰, \alpha > ۰$ داریم:

$$c = \frac{p\alpha^{\frac{\vartheta}{p}}}{\gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)}.$$

۳) در حالت $\vartheta < ۰, p > ۰, \beta > ۰, \alpha = ۰$ داریم:

$$c = \frac{p}{\beta^{\frac{\vartheta}{p}}\gamma\left(-\frac{\nu}{p}\right)}.$$

در حالت (۱) اشکال مختلفی از توزیع برای مقادیر خاص پارامترها در مقاله شکیل و کیبریا (۲۰۱۶) آمده است.

ت) همدانی[48] (۲۰۱۱) خانواده جدیدی از توزیع های پیوسته و چوله با تکیه گاه محدود را معرفی نمود. تابع چگالی احتمال این خانواده به صورت زیر است:

$$f(x) = cpx^{-(p+۱)}\left(\beta - \alpha x^{۲p}\right)\exp\left(-\alpha x^{p} - \beta x^{-p}\right), ۰ < x < \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{۲\beta}}, \alpha > ۰, \beta > ۰, p > ۰,$$

که در آن c ثابت نرمال ساز است و مقدار آن برابر $c = \exp\left(۲\sqrt{\alpha\beta}\right)$ است.

در حالتی که p عددی طبیعی باشد همدانی (۲۰۱۱) مشخصه سازی های خانواده بالا را بررسی نمود.

با محاسبات جبری ساده می توان نشان داد معادله دیفرانسیل پیرسن نظیر چگالی فوق به صورت زیر است:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{\beta^{۲}p - \beta(p+۱)x^{p} - ۲\alpha\beta p x^{۲p} - \alpha(p-۱)x^{۳p} + \alpha^{۲}p x^{۴p}}{\beta x^{p+۱} - \alpha x^{۳p+۱}}dx,$$

در حالت خاص $\alpha = \beta$ داریم:

$$f(x) = \alpha p e^{۲\alpha} x^{-(p+۱)}\left(۱ - x^{۲p}\right) exp(-\alpha(x^{p} + x^{-p}))), ۰ < x < ۱, \alpha > ۰, p > ۰.$$

ث) احسان الله[49] و همکاران (۲۰۱۳) با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{a_{۰} + a_{۱}x + a_{۲}x^{۲}}{b_{۲}x^{۲} + b_{۳}x^{۳}}dx,$$

که حالت خاصی از سیستم (GPE) است، و با در نظر گرفتن ضرایب معادله فوق به صورت:

$$a_{۰} = \beta\gamma, a_{۱} = \beta - \gamma + \gamma\vartheta, a_{۲} = \mu + \vartheta - ۲, b_{۲} = \gamma, b_{۳} = ۱.$$

[47] Modified Bessel function of third kind
[48] Hamedani
[49] Ahsanullah

معادله دیفرانسیل به شکل ساده زیر تبدیل می شود:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \left(\frac{\vartheta - ۱}{x} + \frac{\mu - ۱}{x+\gamma} + \frac{\beta}{x^۲}\right)dx,$$

که با انتگرالگیری از معادله بالا خواهیم داشت:

$$f(x) = cx^{\vartheta-۱}(x+\gamma)^{\mu-۱} exp\left(-\beta x^{-۱}\right), \beta > ۰, \gamma > ۰, ۰ < \vartheta < ۱, ۰ < \mu < ۱, ۰ < \vartheta < ۱ - \mu.$$

که در آن c ثابت نرمال ساز است.

ج) استاورویانیس[50] (۲۰۱۴) با در نظر گرفتن سیستم (GPE) حالت $n = ۶, m = ۵$ خانواده توزیع های زیر را به دست آورد:

$$f(x) = \frac{c}{\left[۱ + \left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^۲ + \gamma\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^۴\right]^{\lambda}} exp\left[-\delta \tan^{-۱}\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right],$$

که در آن β پارامتر مکان و $\alpha > ۰$ پارامتر مقیاس است و $\lambda > \frac{۱}{۲}$ و $\gamma \geq ۰$ و c ثابت نرمال ساز است.

چ) اخیرا شکیل و سینق (۲۰۱۵) با در نظر گرفتن سیستم (GPE) برای حالت $m = n = ۱$ و حل معادله دیفرانسیل:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{a_۱ + b_۱x}{a_۲ + b_۲x}dx, a_۱, b_۱ \geq ۰, a_۲, b_۲ > ۰, a_۱b_۲ \neq a_۲b_۱.$$

خانواده توزیع های زیر را به دست آوردند.

$$f(x) = c(۱ + \alpha x)^{\mu}(\gamma + \delta x)^{-\theta}e^{-\lambda x}, \alpha, \gamma, \delta > ۰ \mu, \theta, \lambda \geq ۰; x > ۰,$$

که در آن :

$$\mu = \frac{a_۲b_۱}{b_۲^۲}, \alpha = \frac{b_۲}{a_۲}, \gamma = a_۲, \delta = b_۲, \theta = \frac{a_۱}{b_۲}, \lambda = \frac{b_۱}{b_۲}, a_۲, b_۲ \neq ۰,$$

و c ثابت نرمال ساز است.

در پایان متذکر می شویم که اخیرا، زارع مقدم[51] و همکاران (۲۰۲۰) در بررسی "تکنیک تقریب تابع چگالی مبتنی بر گشتاور" از سیستم (GPE) استفاده نموده اند.

۴. نتیجه گیری

اهمیت مطالعه و ساخت خانواده توزیع های آماری منعطف به عنوان مدل توزیع فراوانی داده ها، در تمامی سطوح جامعه که به نحوی با اطلاعات عددی سر و کار دارند بر هیچکس پوشیده نیست. از این رو محققین به عنوان یک میدان تحقیقاتی وسیع و کاربردی، توجه ویژه ای به این زمینه تحقیقاتی داشته اند که پیوسته در حال رشد است. در متن حاضر سعی نمودیم با بررسی دو مقاله اساسی، شکیل و همکاران (۲۰۱۶) و لی و همکاران (۲۰۱۳)، برخی تحقیقات انجام شده در این زمینه را برای علاقه مندان بازگو نماییم.

مراجع

[1] M. Ahsanullah, M. Shakil, and B. M. G. Kibria. On a probability distribution with fractional moments arising from generalized Pearson system of differential equation and its characterization. International Journal of Advanced Statistics and Probability, 1 (3), 132-141, (2013).
[2] A. Akinsete, F. Famoye, C. Lee. The Beta-Pareto distribution. Statistics, 42:547–563, (2008).
[3] A. Azzalini. A class of distributions which includes the normal ones. Scand J Statist, 12:171–78, (1985).
[4] M. A. Chaudhry, M. Ahmad. On a probability function useful in size modeling. Canadian Journal of Forest Research, 23(8), 1679–1683, (1993).

[50] Stavroyiannis
[51] Zareamoghaddam

[5] L. Cobb, P. Koppsteinand, N. H. Chen. Estimation and moment recursion relations for multimodal distributions of the exponential family. Journal of the American Statistical Association, 78(381), 124-130, (1983).
[6] K. Cooray MMA. Ananda. Modeling actuarial data with a composite Lognormal-Pareto model. Scand Actuar J, 5:321–334,(2005).
[7] G. M. Cordeiro, de. Castro. A new family of generalized distributions, Journal of Statistical Com-putation and Simulation, 11, 1–27, (2011).
[8] K. Dunning, J. N. Hanson. Generalized Pearson distributions and nonlinear programming. Journal of Statistical Computation and Simulation, Volume 6, Issue 2, 115 – 128, (1977).
[9] N. Eugene, C. Lee, F. Famoye. The beta-normal distribution and its applications. Commun Stat Theory Methods, 31:497–512, (2002).
[10] M. Freimer, G. Kollia, GS. Mudholkar, CT. Lin. A study of the generalized Tukey lambda family. Commun Stat Theory Methods, 17: 3547–3567, (1988).
[11] F. Famoye, C. Lee. O. Olumolade. The Beta-Weibull distribution. J Stat Theory Appl, 4:121–136, (2005).
[12] Gupta RC, Gupta PL, Gupta RD. Modeling failure time data by Lehman alternatives. Commun Stat Theory Methods1998, 27:887–904, (1998).
[13] RD. Gupta, D. Kundu. Exponentiated exponential family: an alternative toγand Weibull. Biom J, 43:117–130, (2001).
[14] G. G. Hamedani. Characterizations of the Shakil-Kibria-Singh Distribution. Austrian Journal of Statistics, 40 (3), 201–207, (2011).
[15] NL. Johnson Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika, 36:149–176, (1949).
[16] NL. Johnson, S. Kotz and N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions.vol. 1, 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.; (1994).
[17] L. Kong, C. Lee, JH. Sepanski. On the properties of beta-gamma distribution. J Mod Appl Stat Methods, 6:187–211, (2007).
[18] K. Kuray, M.A. Ananda. Modeling actuarial data with a composite Lognormal-Pareto model. Scandinavian Actuarial Journal, 5, 321-334, (2005).
[19] C. Lee, F. Famoye and A. Y. Alzaatreh.Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades. © 2013 Wiley Periodicals, Inc., (2013).
[20] C. Lefevre, V. Papathanasiou, and S. Utev. Generalized Pearson distributions and related characterization problems. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 54, 731-742, (2002).
[21] AW. Marshall I. Olkin. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. Biometrika, 84:641–652, (1997).
[22] JM. Mino, EO. Voit, A. Sorribas. GS-distributions: a new family of distributions for continuous unimodal variables. Comput Stat Data Anal, 50:2769–2798, (2006).
[23] S. Nadarajah, S. Kotz. The beta Gumbel distribution. Math Probl Eng, 4:323–332, (2004).
[24] K. Pearson. Contributions to the mathematical theory of evolution, II: Skew variation in homogeneous material. Philosophical Transactions of theRoyal Society of London, A186, 343-414, (1895).
[25] K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution, X: Supplement to a memoir on skew of variation. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 197, 343-414, (1901).
[26] K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution, XIX: Second supplement to a memoir on skew of variation. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 216, 429-457, (1916).
[27] A. Rossani, and A. M. Scarfone. Generalized Pearson distributions for charged particles interacting with an electric and/or a magnetic field. Physica, A,388, 2354-2366, (2009).
[28] L. K. Roy. An extension of the Pearson system of frequency curves. Trabajos de estadistica y de investigacion operativa, 22 (1-2), 113-123, (1971).
[29] P.G. Sankaran. A generalized Pearson system useful in reliability analysis. Statistical papers, 44, 125-130, (2003).
[30] M. Shakil, J. N. Singh, and B. M. G Kibria. On a family of product distributions based on the Whittaker functions and generalized Pearson differential equation. Pakistan Journal of Statistics, 26(1), 11-125, (2010a).
[31] M. Shakil, J. N. Singh, and B. M. G Kibria. A new family of distributions based on the generalized Pearson differential equation with some applications. Austrian Journal of Statistics, 39 (3), 259–2, (2010b).
[32] M. Shakil, and B. M. G Kibria. On a family of life distributions based on generalized Pearson differential equation with applications in health statistics. Journal of Statistical Theory and Applications, 9 (2), 255-282, (2010).
[33] M. Shakil, J. N. Singh. A note on a new class of generalized Pearson distribution arising from Michaelis-Menten function of enzyme kinetics. International Journal of Advanced Statistics and Probability, 3(1), 25-34, (2015).
[34] M. Shakil, B.M. Golam Kibria, J. N. Singh. Review on Generalized Pearson System of Probability Distributions. Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education Vol. 11 No. 2 33, (2016).
[35] S. Stavroyiannis. On the generalised Pearson distribution for application in financial time series modelling. Global Business and Economics Review, 16(1), 1-14, (2014).
[36] H. Zareamoghaddam, S. B. Provost, S. Ejaz Ahmed, Ha. Hyung-Tae. The generalized Pearson family of distributions and explicit representation of the associated density functions. Communications in Statistics- Theory and Methods, Published online: 08 Nov 2020.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–200، صص. ۱۸۸–۲۰۳

مدلسازی تعداد تصادفات منجر به فوت در شهر تهران با رویکرد فرایند نقطه‌ای

سامان سپهوند[آ]، محمد عباسی فرد[ب]، مصطفی احمدی[ج]، زهرا امینی فارسانی[د]

[آ] کارشناس ارشد اکچوئری، کارشناس محاسب فنی شرکت بیمه دی، تهران، نویسنده مسئول
[ب] کارشناس ارشد آمار ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
[ج] کارشناس ارشد آمار ریاضی، دانشگاه لرستان، لرستان
[د] عضو هیئت علمی دانشگاه لرستان، دانشکده علوم ریاضی، لرستان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
فرایندهای نقطه‌ای خودبرانگیخته
فرایند نقطه‌ای پواسون
مدل‌های اتورگرسیو دوره‌ای شرطی
همبستگی سریالی
بیش پراکنشی
مدل‌های سری زمانی فصلی

چکیده

بسیاری از پدیده‌های اطراف ما به‌صورت یک سری زمانی شمارش‌پذیر تحقق می‌یابند، با توجه به گستردگی این نوع از پیشامدها مدلسازی چنین وقایعی همواره مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این مقاله قصد داریم تا به کمک نوعی خاص از مدل‌های اتورگرسیو به نام ACD فرایندهای نقطه‌ای نشاندار تعداد تصادفات منجر به فوت را مدلسازی و پیشگویی نماییم. این مکانیزم به صورت ایجاد یک رابطه میان تابع شدت فرایند نقطه‌ای نشاندار مذکور و مدل عنوان شده‌ی ACD صورت می‌پذیرد. مدل‌های ACD اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط انگل و راسل [۳] مورداستفاده قرار گرفت. با توجه به اینکه تعداد تصادفات رخ داده در طول ماه‌های مختلف سال متفاوت است لذا استفاده از مدل‌های ساده‌ای مانند پواسون نمی‌تواند نتیجه قابل قبولی برای کاربران به دنبال داشته باشد. از طرفی پیشگویی، کنترل و برنامه ریزی حوادث برای سازمان‌های زیادی حائز اهمیت است که از جمله آنها می‌توان به شرکت‌های بیمه، نهادهای نظارتی مانند پلیس راهنمایی و رانندگی و حتی شهرداری‌ها اشاره نمود. با این مقدمه در این مطالعه سعی می‌شود تا علاوه بر به کارگیری مدل‌های مرسوم سری زمانی از مدل‌های جدیدتر و کارامدتری در قالب فرایندهای نقطه‌ای استفاده شود. پس از مدلسازی تعداد تصادفات، به کمک معیارهای مناسب آماری به ارزیابی مدل‌ها پرداخته و مناسب‌ترین مدل معرفی می‌شود. برای مدلسازی آماری مشروحه از تعداد تصادفات رخ داده در شهر تهران استفاده می‌شود، سپس به کمک مدل نهایی به پیشگویی تعداد تصادفات منجر به فوت در شهر تهران می‌پردازیم و در گام بعدی صحت و دقت پیش‌بینی‌ها مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد.

۱. مقدمه

در این مقاله قصد داریم تا به کمک مدل‌های ACD مطرح شده توسط انگل و راسل (۱۹۹۸) و برخی از مفاهیم مرتبط با فرایندهای نقطه‌ای، سری زمانی مرتبط با تعداد تصادفات منجر به فوت (در شهر تهران) را مدلسازی نماییم. سری زمانی مشاهدات شمارش پذیر در بسیاری از پدیده‌های طبیعی اطراف مشاهده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان به تعداد معاملات انجام شده در بازار مالی، تعداد افراد مبتلا شده به یک بیماری و یا تعداد حوادثی که در طول زمان رخ می‌دهد اشاره نمود. مطالعات مرتبط با این دسته از مشاهدات بسیار رایج است و در این زمینه می‌توان به نوشتارهای افرادی چون زیگر (۱۹۸۸) [۱۷] و دیویس (۱۹۹۹) [۱۶] مراجعه نمود. در بسیاری از مواقع سری زمانی مشاهدات ایجاد شده دارای ساختاری بیش پراکنده هستند، تا کنون مدل‌های بسیاری جهت مدلسازی این‌گونه مشاهدات معرفی شده است. مدل‌های آرچ معرفی شده توسط انگل (۱۹۸۲)[۱۱] و تعمیم آن به مدل‌های گارچ توسط بولیسلو و نلسون (۱۹۹۴)[۱۴]یک نمونه بارز از مدل‌های نام‌برده محسوب می‌شود. مدل‌های پواسون دوگانه معرفی شده توسط افرون [۱۲](۱۹۸۶) نیز بدین منظور طراحی شد و بعدها به‌عنوان مدل‌های کاکس تعمیم

پست الکترونیک: saman_sepahvand@yahoo.com (سامان سپهوند)، mohammadabbasifar94@gmail.com (محمد عباسی فرد)،
mosiahmadi92@yahoo.com (مصطفی احمدی)، aminifarsani.z@lu.ac.ir (زهرا امینی فارسانی)

یافت. مدل‌های ACD یا اتورگرسیو شرطی دوره‌ای نیز قادرند تا به‌خوبی اثرات مربوط به بیش پراکندگی مرتبط با مدل‌های شمارش پذیر را تحت پوشش قرار داده و وابستگی سریالی میان آنها را در مدل منعکس نمایند. مدل‌های ACD ابتدا به‌منظور تجزیه‌وتحلیل مدت‌زمان سپری‌شده تا فروش (خرید) سهامی خاص مورد استفاده قرار گرفت و بعدها از این مدل به منظور مدلسازی مدت زمان سپری شده تا وقوع پیشامدهای متوالی که به صورت تصادفی رخ می‌دهند بهره گرفته شد در این زمینه می‌توان به کارهای انجام شده توسط حمیدیه و دیگران (۲۰۱۳) [۲] اشاره نمود. به کمک ساختار خاص این مدل با به‌روز رسانی اطلاعات مرتبط با فرایند تحت مطالعه می‌توان قدرت پیش‌بینی را بهبود بخشید. این مدل به عنوان ترکیبی از ساختار مدل‌های ناهم واریانسی آرچ ،گارچ و تحلیل عناصر مرتبط با فرایند انتقال در مدل‌های تصادفی تعریف می‌شود. از این منظر یکی از انگیزه‌های مشابه ایجاد مدل‌های ACD و آرچ رخ دادن برخی از حوادث به‌صورت خوشه‌ای است. در این مقاله به کمک تعریف تابع شدت مرتبط با فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه و مدل بندی آن به کمک مدل‌های ACD قادر خواهیم بود تا تعداد تصادفات منجر به فوت را در شهر تهران بررسی و مقدار آن‌را برای زمان‌های آینده پیش‌بینی نماییم. این مدلسازی در چندمرحله بهبودیافته و با مدل‌های قبل مقایسه می‌شود و مدل ارجح‌تر شناسایی می‌گردد. در مدل نهایی به‌منظور بهبود عملکرد از تعداد کل تصادفات به‌عنوان نشانه‌های فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه استفاده کرده و از این متغیر کمکی در برازش مدل ACD نهایی بهره می‌گیریم. به‌وضوح تعداد کل تصادفات به‌عنوان یک عامل مرتبط با فرایند اصلی (تعداد تصادفات منجر به فوت) موجب برانگیخته شدن تابع شدت فرایند اصلی تحت مطالعه شده به طوری‌که مقادیر بزرگ نشانه‌ها (تعداد کل تصادفات) موجب افزایش شانس وقوع بیشتر تصادفات منجر به فوت می‌گردد.

۲. ضرورت و بیان مسئله

در صورتی‌که نرخ وقوع تصادفات در شهرها و همچنین در ماه‌های مختلف سال مشخص باشد، می‌توانیم کمک قابل‌توجهی جهت مدیریت تصادفات به‌منظور کاهش خسارت و مرگ‌ومیر ناشی از آن ارائه کرده باشیم. برای دست‌یابی به چنین هدفی بی‌شک محکوم‌به استفاده از ابزارهای آماری هستیم. به‌طور مثال اگر مدل ما مشخص کند که شهرهای غربی دارای نرخ وقوع تصادف بیشتری نسبت به سایر شهرهاست مسلماً باید پایگاهای انتظامی وامدادی بیشتری در این شهرها مستقر شوند و یا اگر مشخص شود که در ماه‌های اول سال نرخ وقوع تصادفات بیشتر است به‌منظور کاهش تصادفات و به‌طبع کاهش تلفات، می‌بایست در ماه‌های اول سال نظارت و مدیریت بیشتری صورت پذیرد. یا به‌عنوان مثال دیگر شرکت‌های بیمه برای تخصیص بهینه‌ی منابع و همچنین جلوگیری از بحران مالی و یا حتی تعیین حق‌بیمه‌ی عادلانه می‌بایست فراوانی وقوع تصادفات در ماه‌های متفاوت سال را برآورد و پیش‌بینی کنند. در این مقاله تعداد تصادفات ۱۲ سال متوالی (از سال ۸۱ تا ۹۳) کلان‌شهر تهران را که از پلیس راهنمایی و رانندگی مربوطه اخذ شده مورد مطالعه قرار داده‌ایم. تعداد تصادفات را به ۲ نوع مختلف (مجزا) زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

- تصادف منجر به مرگ
- تصادف منجر به خسارت یا جراحت انسانی

هدف ما در این مقاله برآورد تعداد تصادفات منجر به فوت به کمک فرآیند نقطه‌ای شمارش پذیر پواسون و مدل‌های ACD است. به‌منظور ورود به مبحث اصلی تعاریف و مقدمات لازم ارائه می‌گردد.

۳. سری‌های زمانی $ARMA(p.q)$

به‌منظور مدل بندی سری‌های زمانی مانا یکی از مدل‌های مناسب مدل‌های $ARMA$ هستند. به‌طورکلی یک مدل $ARMA$ شامل یک فرایند خود بازگشتی به‌صورت AR و یک فرایند میانگین متحرک به‌صورت MA است. این فرایند به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y_t=\theta_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots + \psi_q e_{t-q} + e_t$$

که در آن pو q عبارت‌اند از مرتبه‌های فرایندهای AR و MA و e_i جملات اغتشاش مربوط به سری زمانی بوده که از یک‌دیگر مستقل و هم توزیع می‌باشند و به آن‌ها اصطلاحاً نوفه سفید می‌گویند. با استفاده از عملگر پس‌رو خواهیم داشت:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t = c + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)$$

و یا به‌طور معادل داریم:

$$\phi(B) y_t = c + \theta(B) e_t$$

که در آن Bیک عملگر پس‌رو است و $\theta(B)$ و $\phi(B)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \dots - \varphi_p z^p$$
$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$$

قابل‌توجه است که مدل‌های $ARIMA(p,d,q)$ نیز تعریفی همانند بالا داشته با این تفاوت که سری زمانی نامانای اولیه با d بار تفاضل دارای مدل مانای $ARMA\ (p,q)$خواهد بود. به عبارتی دیگر برای مدل $ARIMA(p,d,q)$متغیر تعریف شده به صورت $\nabla_d Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = (1-B)Y_t = W_t$یک فرایند مانای $ARMA(p,q)$خواهد بود و داریم:

$$\phi(B)\nabla^d Y_t = \theta(B)e_t = \phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)e_t = \phi(B)W_t = \theta(B)e_t$$

۴. سری‌های زمانی $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

در صورتی که خودهمبستگی سری زمانی تحت مطالعه در تأخیرهای ثابتی (تاخیرهای از مرتبه ۳ یا ۶ یا ۱۲ و...) معنی‌دار بوده و مرتبا فرایند طی گذشت دوره‌ی زمانی معین روند مشخصی را تکرار نماید آنگاه به آن دوره‌ی ثابت، دوره‌ی فصلی و به روند مربوطه تغیرات فصلی گویند. این‌گونه ازسری‌های زمانی خاص را سری‌های زمانی فصلی ضربی می‌گویند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\phi(B)\phi(B)\nabla^d\nabla_S^D Y_t = \theta(B)\theta(B)e_t$$

که در آن

$$\phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \ldots - \varphi_p z^p$$
$$\phi(z) = 1 - \gamma_1 z^s - \gamma_2 z^{2s} - \ldots - \gamma_P z^{Ps}$$
$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \ldots + \theta_q z^q$$
$$\theta(z) = 1 + \psi_1 z^s + \psi_2 z^{2s} + \ldots + \psi_Q z^{Qs}$$

در عبارت بالاp,d,qرا مرتبه‌های عادی فرایند و P,D,Q را مرتبه‌های فصلی فرایند گویند. s نیز نشان دهنده‌ی دوره‌ی فصلی سری زمانیست؛ بنابراین همانند قبل اگر داشته باشیم$\nabla^d\nabla_S^D Y_t = W_t$به‌طوری‌که متغیر تعریف شده W_tدر مدلی به‌صورت$ARMA(p,q)(P,Q)_s$با دوره‌ی فصلی sصدق کند آنگاه گوییم Y_t دارای مدلی به‌صورت$SARIMA\ (p,d,q)\ (P,D,Q)_s$ و با دوره‌ی فصلی sاست.

۵. فرایندهای نقطه‌ای

فرایندهای نقطه‌ای یک بعدی (بعد زمان)مدلی مفید برای مطالعه و تحلیل رخ‌دادهای تصادفی است.به عنوان مثال با توجه به اینکه هر تصادف در لحظه‌ای از زمان رخ می‌دهد این پدیده را می‌توان به کمک فرایندهای نقطه‌ای مدل‌سازی کرد.از لحاظ نظری تفاوت زیادی میان فرایند های نقطه‌ای چندبعدی و یک بعدی وجود دارد لذا در این بخش در حد نیاز خود به تعریف فرایندهای نقطه‌ای یک بعدی می‌پردازیم. فرایند نقطه‌ای $\{N, t \geq 0\}$ به عنوان یک فرایند شمارنده‌ی ورودها در یک سیستم معرفی می‌شود. در این دسته از فرایندها هر پیشامد دارای جهشی به طول ۱ است به‌طوری‌که تعداد جهش‌ها در هر بازه‌ی کراندار از زمان، متنهای است.

تعریف: فرایند تصادفی $\{N, t \geq 0\}$ را یک فرایند نقطه‌ای یک بعدی (بعد زمان)گویند هرگاه N_t نشان دهنده‌ی تعداد کل پیشامدهای رخ داده تا زمان t باشد. در حقیقت فرایند نقطه‌ای $\{N, t \geq 0\}$ دارای خواص زیر است:

۱) $N_t \in \mathbb{Z}^+$

۲) $s \leq t, N_s \leq N_t, s,t \in \mathbb{R}^+$

۳) $\{N_t - N_s, s < t\}$ نشان‌دهنده‌ی تعداد پیشامدهای رخ داده در بازه‌ی $(s,t]$ است.

تعریف: تابع شدت شرطی فرایند نقطه‌ای $\{N, t \geq 0\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda\,(t|\mathcal{F}_t) = lim_{\delta t \to 0} \frac{P(\{N(t,t+\delta t)\}|\mathcal{F}_t)}{\delta t}$$

که در آن $\mathcal{F}_t$ یک پالایه و نشان‌دهنده‌ی سیر افزایشی اطلاعات نسبت به گذشت زمان است.اگر تابع $\lambda\,(t|\mathcal{F}_t)$ مقداری ثابت باشد فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه را هم‌گن و در غیر این صورت آن‌را ناهم‌گن گویند. در حقیقت تابع شدت تعریف شده می‌بایست به شکل منحصر به فردی تعریف گرددو به ازای تمام حالات ممکن $\mathcal{F}_t$ خوش‌تعریف باشد و ساختار احتمالاتی فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه را مشخص نماید. برای اطلاع بیشتر از جزعیات تابع شدت پیشنهاد می‌شود که به کار (۱۹۹۱) مراجعه نمایید.

قضیه: برای فرایند نقطه‌ای یک بعدی $\{N, t \geq 0\}$ تابع مجموعه‌ای $\lambda_N(.)$ تعریف شده به صورت زیر

$$\lambda_N\,(0,t] = E(N_t)$$

یک اندازه است و آن را اصطلاحا اندازه‌ی شدت فرایند نقطه‌ای گویند. نقش اندازه‌ی شدت یک فرایند نقطه‌ای در تعیین ساختار احتمالاتی آن بسیار حائز اهمیت است. دو فرایند نقطه‌ای یکسان حتما دارای تابع شدت‌های یکسانند ولیکن عکس این مطلب الزاما برقرار نیست، لذا تناظری یک به یک میان یک فرایند نقطه‌ای و تابع شدت ان وجود ندارد.

برهان: به مولر – واگه‌پی‌ترسن () مراجعه شود.
تعریف : در صورتی که بتوان اندازه‌ی شدت $\lambda_N(.)$ را به صورت

$$\lambda_N(\circ, t] = \int_{\circ}^{t} \lambda(s), t \in \mathbb{R}^+$$

که در آن $\lambda(s)$تابعی نامنفی است، انگاه $\lambda(s)$ همتن تابع شدت تعریف شده‌ی قبل است.

۱.۵ . *فرایند نقطه‌ای پواسون*
فرایند نقطه‌ای $\{N, t \geq \circ\}$ را یک فرایند نقطه‌ای پواسون ناهمگن با تابع شدت $\lambda(t)$ گویند هرگاه :

۱) $N(\circ) = \circ, a.s$
۲) $\{N, t \geq \circ\}$ دارای نموهای مستقل باشد
۳) $P\{N_{t+h} - N_t \geq ۲\} = o(h)$
۴) $P\{N_{t+h} - N_t = ۱\} = h\lambda(t) + o(h)$

نکته: تابع f را یک تابع $o(h)$ گویند هرگاه :

$$lim_{h\to\circ} \frac{f(h)}{h} = \circ$$

در صورتی که تابع شدت $\lambda(t)$ را برابر λ قرار دهیم فرایند پواسون حاصل شده را پواسون همگن گویند.
همانطور که می‌دانیم در فرایند پواسون، وقوع پیشامدها در بازه‌های زمانی مجزا مستقل هستند. در بسیاری از پدیده‌های تصادفی موجود در طبیعت و داده‌های حاصل شده از ان این خاصیت یک فرض غیر واقعی است. عدم برقرای استقلال نموهای فرایند به دلایل زیادی ممکن ایجاد شود. با این حال فرایند نقطه‌ای پواسون عموما شرایط را برای برای مدل‌سازی ابتدایی و تحلیل اکثر الگوهای نقطه‌ای فراهم می‌سازد. از این رو فرایند نقطه‌ای پواسون در عین سادگی یکی از مهمترین فرایندهای شمارشی محسوب می‌شود. فرایند کاکس یا تصادفی دومرحله‌ای یکی دیگر از رده های مهم و پرکاربرد از فرایندهای نقطه‌ای است. در این رده از فرایندها تابع شدت خود تحقق یک فرایند تصادفی است. در ادامه این فرایند مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲.۵ . *فرایند نقطه‌ای خودانگیزشی*
فرایند نقطه‌ای خودانگیزشی یکی از ملموس‌ترین فرایندهایی است که در آن تابع شدت، خود رفتاری تصادفی دارد و غالبا تابعی از عوامل درون‌زای فرایند اصلی تحت مطالعه تعریف می‌شود. بنابراین رفتار گذشته‌ی فرایند می‌تواند بر مقدار حال و آینده‌ی آن اثر گذار باشد. تجزیه و تحلیل این رده از فرایندها در مطالعات افرادی چون بدلی و همکاران (۲۰۰۶) و انگل راسل (۱۹۹۸) مشاهده می‌گردد. همچنین کاربردهای این رده از فرایندها در کارهای هاوکس و اوکس (۱۹۷۴) با عنوان فرایندهای هاوکس قابل جستجو است. با توجه به مباحث مطرح شده توسط دیلی و ورجونز (۲۰۰۷) می‌توان اذعان نمود، نقش و کاربرد فرایند خودانگیزشی در فرایندهای نقطه‌ای مشابه نقش و کاربردی که مدل‌های اتورگرسیو در سری های زمانی مرسوم به عهده دارند. بنابراین برای مدل‌سازی تابع شدت فرایند نقطه‌ای خودانگیزشی می‌توان تمامی پیشامدهای متوالی متناهی بعد و نشان‌های مربوط به آن را به طور صریح و مشخص مورد استفاده قرار داد.
تعریف: فرایند نقطه‌ای $\{N_t\}$ را یک فرایند خودانگیزشی گویند هرگاه :

۱) $N(\circ) = \circ, a.s$
۲) فرایند شرطی منظم است و احتمال رخ دادن ۲ و یا بیشتر از ۲ پیشامد در یک زمان بسیار کوتاه بی‌نهایت کوچک است و به عبارتی :

$$P(\{N(t, t+\delta t) > ۲ | \mathcal{F}_t\}) = o(\delta t), t \epsilon \mathbb{R}^+$$

۳) تابع شدت شرطی این فرایند به صورت

$$\lambda = \begin{cases} \lambda(t, \circ) \circ \leq t < T_۱ \\ \lambda(t, N_t, T_۱, T_۲, \dots, T_{N_t}) T_{N_t} < t \leq T_{N_t+۱} \end{cases}$$

تعریف می‌شود . به وضوح تعداد پیشامدها و زمان وقوع آن‌ها در مقدار تابع شدت اثر گذار است.
۴) نموهای فرایند مستقل نیستند و رفتار گذشته‌ی فرایند بر رفتار آینده آن اثر گذار است. این تاثیر به صورت مستقیم است. بنابراین خودهمبستگی این فرایند همواره مقداری نامنفی تعریف می‌شود.

۳.۵. *فرآیند نقطه‌ای نشان‌دار*

در برخی از فرآیندهای نقطه‌ای ممکن است به هر نقطه‌ای از فرآیند یک نشانه ضمیمه گردد. یک فرآیند نقطه‌ای نشان‌دار را می‌توان به‌صورت زوج مرتب (ε, t) نشان داد. که در آن t می‌تواند یک بردار باشد در اغلب موارد میان نقاط فرایند و نشان‌های ان نوعی رابطه و همبستگی وجود دارد. در ادامه از این رده‌ی خاص از فرایندهای نقطه‌ای استفاده کرده و با در نظر گرفتن میانگین میزان دمای هوا در هر ماه به عنوان نشان‌های فرایند، فرایند نقطه‌ای خودانگیزشی نشان‌دار خود را ایجاد نموده و به کمک آن قدرت پیش‌بینی مدل را بهبود می‌دهیم.

تعریف: فرآیند نقطه‌ای نشان‌دار $\{N_t\}$روی فضای S با نشان‌هایی در فضای M یک فرآیند نقطه‌ای به صورت $N_t = \{(\varepsilon_t, m_t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ روی فضای $S \times M$ است به‌طوری‌که فرایند زمینه‌ی $\{N_g\}$ به صورت یک فرایند حاشیه‌ای و بدون در نظر گرفتن نشان‌ها خود یک فرایند نقطه‌ای است. در این فرایند برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار $A \subseteq S$ داریم :

$$.N_t\,(A \times M) < \infty, a.s$$

حال به‌منظور مدل بندی تابع شدت مرتبط با فرآیند نقطه‌ای تحت مطالعه همانطور که قبل نیز گفته شد از مدل‌های $ACD(p,q)$ (مدل‌های اتورگرسیو شرطی دوره‌ای) بهره می‌گیریم.

۶. مدل‌های $ACD(p,q)$ و تشریح ساختار آن

فرض کنید که متغیر تصادفی T_i نشان‌دهنده مدت‌زمان سپری‌شده تا وقوع i امین پیشامد باشد. در این صورت متغیر X_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = T_{i+1} - T_i \quad (1)$$

با این تعریف X_i عبارت است از مدت‌زمان سپری‌شده تا وقوع iامین پیشامد متوالی. همچنین فرآیند نقطه‌ای شمارش پذیر $N(t)$ را به‌صورت زیر تشریح می‌کنیم :

$$N\,(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\} \quad (2)$$

بنابراین در این مقاله فرآیند $N(t)$ معرفی شده در بالا نشان‌دهنده تعداد تصادفات منجر به فوت تا زمان t است. رفتار گذشته‌ی فرآیند را به‌عنوان یک پالایه برای فرآیند نقطه‌ای شمارش پذیر $N(t)$ در نظر گرفته و به‌صورت H_t نمایش می‌دهیم. فرآیند $N(t)$ نسبت به پالایه H_t اندازه‌پذیر بوده و داریم:

$$H_t \equiv \sigma\{(X_j, Y_j), j \leq t\} \quad (3)$$

همان‌طور که می‌دانید یک پالایه نشان‌دهنده‌ی سیر افزایشی اطلاعات نسبت به گذشت زمان بوده و یک سیگما میدان است به طوری که تمامی مصادیق ممکن فرایند تحت مطالعه در آن تعریف شده است. اکنون تابع شدت شرطی مرتبط با فرآیند نقطه‌ای $N(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda\,(t\,|H_t) = \lim_{h \to 0} \frac{P\,(\{N\,(t, t+h)\} > 0\,|H_t)}{h} \quad (4)$$

همچنین می‌دانیم که در فرآیندهای شمارشی همواره داریم :

$$N\,(t, t+h) = N\,(t+h) - N\,(t) \quad (5)$$

حال به کمک مدل‌های مطرح شده‌ی $ACD(p,q)$مدت زمان سپری شده تا وقوع i مین پیشامد تصادفی یعنی X_i را به صورت زیر فرض می‌کنیم :

$$X_{N(t)+1} = \psi_{N(t)+1}\varepsilon_{N(t)+1}$$

در چنین مدلی خواهیم داشت:

$$E\{X_{N(t)+1}\,|H_t\} = \psi_{N(t)+1}E(\varepsilon_{N(t)+1})$$

این مدل اولین بار توسط انگل و راسل مطرح گردید. در این مدل جملات اغتشاش ε_iها هم توزیع و مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند و دنباله‌ای با مقادیر مثبت فرض می‌گردند. عموماً ε_iها را متغیرهایی با توزیع نمایی یا وایبول در نظر گرفته به‌طوری‌که $E(\varepsilon_i) = 1$، همچنین عبارت $\psi_{N(t)}$ نسبت به H_t اندازه‌پذیر است و مقدار آن وابسته به رفتار گذشته‌ی فرآیند خواهد بود. مدل تشریح شده $ACD(p,q)$ بسیار شبیه به مدل‌های گارچ است به‌طوری‌که این دسته از مدل‌ها دارای ویژگی های یکسان بوده و می‌توانند به‌خوبی رفتار خوشه‌ای برخی از فرآیندهای

نقطه‌ای خاص را مدل‌سازی نمایند. به‌منظور درک بهتر ساختار مدل پیشنهاد می‌شود که به کارهای سی (۲۰۰۵)[۱۵،۷]، پاکمار (۲۰۰۶) و هاتسوچ (۲۰۰۶) [۲۰]مراجعه شود. تاکنون حالت‌های بسیار متنوعی جهت مدلسازی عبارت $\psi_{N(t)}$ مطرح شده است. مدل در نظر گرفته در این مقاله برای اولین بار توسط افرادی چون باونس و جیوت(۲۰۰۰) [۴] ارائه گردید. این مدل به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$$X_t = \psi_t \varepsilon_t$$
$$\psi_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j g\left(x_{t-j}, \varepsilon_{t-j}\right) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \psi_{t-j}$$

در این مدل غالباًε_iها را متغیرهای تصادفی با توزیع وایبول به‌صورت $\varepsilon_i \sim Wib\,(1,\gamma)$ در نظر می‌گیرند. بنابراین در این مدل خواهیم داشت:

$$E\left\{X_t \,|H_{t-1}\right\} = \psi_t \gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$

در حالت کلی برای تابع g دو حالت زیر پیشنهاد می‌شود :

- حالت اول : $g(x_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \varepsilon_{t-1}$

در این حالت مدل خود بازگشتی شرطی $ACD(1,1)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\psi_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\psi_{t-1} = \omega + \alpha\left(\frac{X_{t-1}}{\psi_{t-1}}\right) + \beta\psi_{t-1}$$

این مدل ازنظر ساختاری بسیار مشابه مدل‌های نمایی ـ گارچ معرفی‌شده توسط نلسون (۱۹۹۱) است.

قضیه : مدل $ACD(1,1)$ مطرح شده در بالا ماناست اگر شرط $|\beta| < 1$ برقرار باشد .

برهان : : به مرجع سی [۱۹] مراجعه شود.

- حالت دوم : $g(x_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = Lnx_{t-1}$

در این حالت مدل خود بازگشتی شرطی $ACD(1,1)$ به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\psi_t = \omega + \alpha Lnx_{t-1} + \beta\psi_{t-1}$$

این مدل نیز ازنظر ساختاری بسیار مشابه مدل لگ ـ گارچ معرفی‌شده توسط گویک(۱۹۸۶) است.

قضیه : به طور کلی مدل معرفی شده $ACD(p,q)$ یک مدل ماناست اگر داشته باشیم . $\sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\beta_j + \alpha_j) < 1$

برهان : به مرجع سی [۱۹] مراجعه شود.

مجدداً خاطرنشان می‌شود که در مدل‌های معرفی‌شده در بالا فرض بر این است که $\varepsilon_i \sim Wib\,(1,\gamma)$ درصورتی‌که قصد داشته باشیم جملات اغتشاش ε_iرا نمایی استاندارد در نظرگیریم کافی است $\gamma = 1$ قرار دهیم.

نکته: باید دقت نمود که متغیرهای تصادفی X_iها تعریف شده در بالا به‌صورت شرطی دارای توزیع وایبول(نمایی) خواهند بود نه غیرشرطی.

در صورت وجود متغیرهایی به‌عنوان نشانه‌های فرایند نقطه‌ای و استفاده از آن‌ها در مدل ارائه‌شده در بالا به عنوان متغیرهای کمکی کافی است مدل $ACD\,(p,q)$را به‌صورت زیر تعمیم دهیم :

$$\psi_t = \omega + \alpha g(x_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \beta\psi_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \eta_j Y_j$$

که در آن Y_j ها معرف نشانه‌های مرتبط با فرایند نقطه‌ای موردمطالعه است.

قضیه: مدل مطرح‌شده $ACD(1,1)$ با یک مؤلفه‌ی مثبت مقدار به‌عنوان نشانه تحت شرایط زیر مانا خواهد بود:

$$0 \le \beta < 1, E\left\{Y_{N(t)}\right\} < \infty$$

برهان : به باونس وگالی[۱۳] مراجعه شود .

۷. تفسیر تابع شدت از طریق تابع مخاطره

با توجه به تابع نرخ مخاطره مرتبط با متغیر تصادفی $X_{N(t)}$ می‌توان تابع شدت شرطی مرتبط با فرآیند نقطه‌ای $N(t)$ را به‌صورت زیر مطرح نمود:
اگر جملات خطا را به‌صورت $\varepsilon_i \sim Wib(1,\gamma)$ در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$P\left(X_{N(t)+1} < x \,|H_t\right) = P(\psi_{N(t)+1}\varepsilon_{N(t)+1} < x \,|H_t) = P(\varepsilon_{N(t)+1} < x\psi^{-1}_{N(t)+1} \,|H_t)$$
$$\Rightarrow f_{X_{N(t)+1}}(x \,|H_t) = \gamma\psi^{-1}_{N(t)+1}(\psi^{-1}_{N(t)+1}x)^{\gamma-1}\exp(-x\psi^{-1}_{N(t)+1})^{\gamma}$$
$$\Rightarrow X_{N(t)+1} \,|H_t \sim Wib(\psi^{-1}_{N(t)+1},\gamma)$$

. از طرفی تابع مخاطره‌ی شرطی $X_{N(t)}$ عبارت است از:

$$\lambda\,(t \,|H_t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{P\{X_{N(t)+1}<t|H_t\}}{P(X_{N(t)+1}>t|H_t)} = \left(\psi^{-1}_{N(t)}\right)^{\gamma}\left(t^{\gamma-1}\right)\gamma$$
$$\psi_{N(t)+1} = \omega + \alpha\varepsilon_{N(t)} + \beta\psi_{N(t)}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$P(\{N(t,t+h) = 0 \,|H_t\}) = P(X_{N(t)} > h \,|H_t) = \exp\{-(h\psi^{-1}_{N(t)})^{\gamma}\}$$

۸. براورد پارامترهای مدل

به‌منظور برآورد پارامترهای $\omega,\alpha,\beta,$ از روش ماکزیمم درستنمایی بهره گرفته و با توجه به اینکه مشاهدات X_i به‌صورت شرطی از یکدیگر مستقل‌اند تابع درستنمایی به‌صورت زیر ارائه‌شده می‌شود:

$$\ell\,(\omega,\alpha,\beta) = Log\left\{f\,(x_1)\prod_{t=2}^{n} f\left(x_t \,|x_{[1,2,\ldots,t-1]}\,, y_{[1,2,\ldots,t-1]}\right)\right\}$$

که در آن $x_{[1,2,\ldots,t-1]}, y_{1,2,\ldots,t-1}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بردار مشاهدات $(x_1,x_2,\ldots,x_{t-1})$ و $(y_1,y_2,\ldots,y_{t-1})$ خواهند بود. با توجه به اینکه توزیع X_iها به‌صورت شرطی دارای توزیع وایبول هستند خواهیم داشت:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\gamma}{\psi_0}\left(x_1\psi_0^{-1}\right)^{\gamma-1} e^{-(\psi_0^{-1}x_1)^{\gamma}}$$
$$f\left(x_t \,|x_{[1,\ldots,t-1]}, y_{[1,2,\ldots,t-1]}\right) = \frac{\gamma}{\psi_{N(t)}}\left(x_t\psi^{-1}_{N(t)}\right)^{\gamma-1} e^{-(\psi^{-1}_{N(t)}x_t)^{\gamma}}$$

باید دقت نمود که چون مشاهدات از زمان ۱ به بعد حاصل‌شده اند بنابراین به‌منظور برآورد λ مرتبط با X_1 نمی‌توان از اطلاعات گذشته بهره گرفت و می‌بایست λ_0 را مقداری منطقی (مثلاً امید ریاضی مشاهدات) به‌منظور نقطه‌ی اولیه λ_0 در نظر گرفت. با جایگذاری توزیع X_iها در تابع درستنمایی داریم:

$$\ell\,(\psi_t,\gamma) = Log\left\{\prod_{t=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{\psi_t}\left(x_t\psi_t^{-1}\right)^{\gamma-1} e^{-(\psi_t^{-1}x_t)^{\gamma}}\right)\right\} = \sum_{t=1}^{n}\left\{\log\left(\frac{\gamma}{\psi_t}\right) + (\gamma-1)\log\left(\frac{x_t}{\psi_t}\right) - \left(\frac{x_t}{\psi_t}\right)^{\gamma}\right\}$$

که در آن ψ_t عبارت است از:

$$\psi_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\psi_{t-1}$$

به‌منظور ساده‌سازی مسئله پارامتر γ مرتبط با توزیع وایبول را برابر ۱ قرار می‌دهیم . بنابراین توزیع جملات خطا در این حالت عبارت است از نمایی استاندارد. در این صورت تمامی روند حل مسئله در بالا با قرار دادن $\gamma = 1$ قابل‌دستیابی است و داریم:

$$X_{N(t)+1} \,|H_t \sim Wib\left(\psi_t^{-1},\gamma = 1\right) \equiv E\left(\psi_t^{-1}\right)$$
$$P\left(\{N\,(t,t+h) = 0 \,|H_t\}\right) = P\left(X_{N(t)} > h \,|H_t\right) = \exp\{-h\lambda\,(t \,|H_t)\} = \exp\left\{-\left(h\psi^{-1}_{N(t)}\right)\right\}$$
$$f_{X_1}(x_1) = \psi_0^{-1}e^{-(\psi_0^{-1}x_1)}$$
$$f\left(X_t \,|X_{[1,\ldots,t-1]}\right) = \psi_t^{-1}e^{-(\psi_t^{-1}x_t)}$$
$$\ell\,(\psi_t) = Log\left\{\left(\prod_{t=1}^{n}\psi_t^{-1}e^{-(\psi_t^{-1}x_i)}\right)\right\} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{Log\,(\psi_t) + \left(\frac{x_t}{\psi_t}\right)\right\}$$

به‌منظور پس‌آزمایی مدل پس از برازش می‌توان از باقی‌مانده‌های مدل استفاده نمود. باقی‌مانده‌های مدل از رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$X_t = \psi_t \varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{X_t}{\psi_t} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_t = \frac{X_t}{\hat{\psi}_t}, \hat{\psi}_t = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\left(\frac{X_{t-1}}{\hat{\psi}_{t-1}}\right) + \hat{\beta}\hat{\psi}_{t-1}.$$

۹. مدل‌های $ACP(p,q)$[1]

در سال۲۰۰۳ هاینن و دیگران[۱] برای مشاهدات شمارش پذیر با دو خاصیت وابستگی سریالی و بیش پراکنشی مدلی را پیشنهاد دادند به طوری که ساختار مدل پیشنهاد شده برگرفته از مدل‌های $ACD(p,q)$ مطرح شده توسط انگل و راسل بود. مدل $ACP(p,q)$ با فرض تبعیت سری زمانی شمارش پذیر از توزیع پواسون برای براورد پارامتر لامبدای مربوطه از مدل‌های اتورگرسیو شرطی دوره‌ای استفاده نموده و داریم :

$$N_t \sim Poisson(\mu_t)$$
$$E(N_t \,|H_{t-1}) = \mu_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j N_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu_{t-j}$$

در این مدل q عبارت است از مرتبه‌ی میانگین شرطی مدل و می‌بایست همواره شرط های $\omega > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0$ برقرار باشند. به این مدل مدل‌های اتورگرسیو شرطی پواسون گفته و در ادامه به برخی از خواص این مدل اشاره می‌شود.

I. امید ریاضی شرطی مدل $ACP(p,q)$:

$$E\{N_t \,|H_{t-1}\} = \mu_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j N_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu_{t-j}$$

به‌وضوح دینامیک زمانی و اثرات آن بر مقدار میانگین فرآیند در آینده به کمک اطلاعات گذشته و شرطی نمودن روی این اطلاعات حاصل می‌گردد.

II. امید ریاضی غیرشرطی مدل $ACP(p,q)$:

$$E\{N_t\} = \mu = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^{\max(p,\alpha)} (\alpha_j + \beta_j)}$$

برهان :به مرجع هاینن [۱] مراجعه شود.

یادآوری می‌شود که به‌منظور مانا بودن مدل $ACD(p,q)$ می‌بایست همواره شرط $\sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) < 1$ را داشته باشیم و با توجه به شباهت این مدل با مدل $ACP(p,q)$ تمام مفروضات برای مدل دوم نیز برقرار است.

III. واریانس غیرشرطی مدل $ACP(1,1)$:

$$Var(N_t) = \sigma^2 = \frac{\mu\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1{}^2\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \geq \mu$$

برهان: به مرجع هاینن [۱] مراجعه شود.

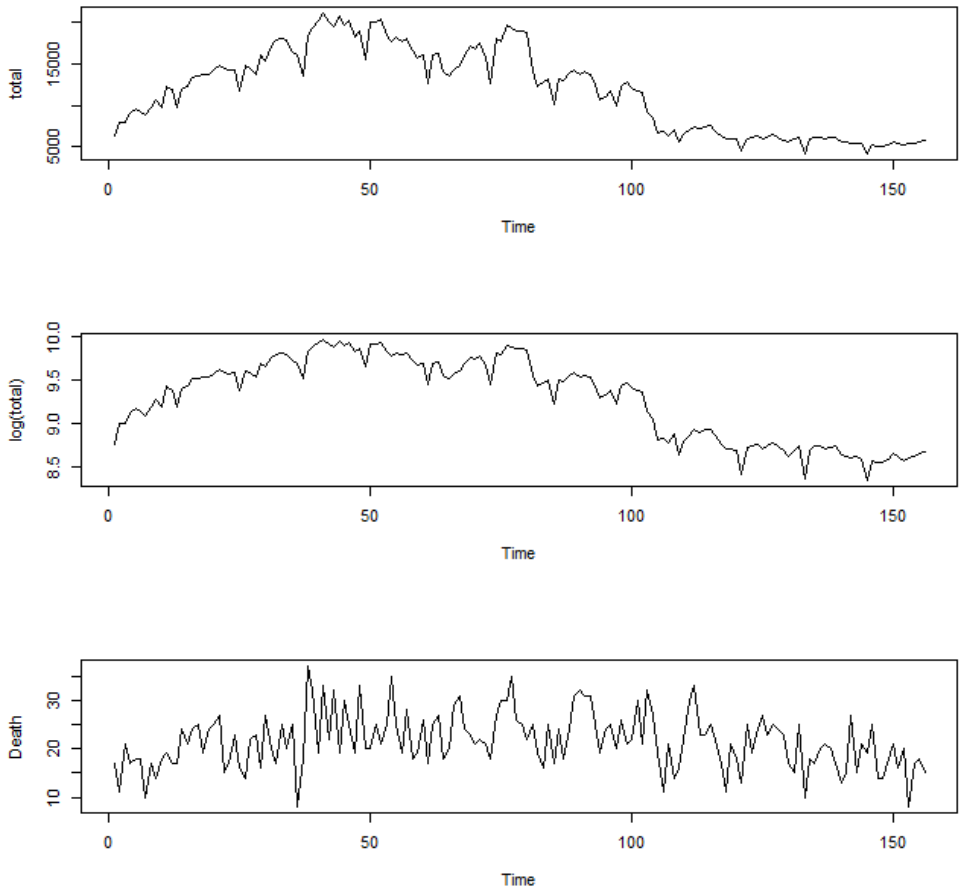
با توجه به مقدار واریانس غیرشرطی مربوط به مدل $ACP(p,q)$ این مدل به‌خوبی توانایی مدل‌سازی مشاهدات با خاصیت بیش پراکنش را دارد.

IV. تابع خودهمبستگی غیر شرطی مدل $ACP(1,1)$:

$$Cov(N_t, N_{t-s}) = (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} \frac{\alpha_1(1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1{}^2} s = 1, 2, 3, \ldots..$$

برهان : به مرجع هاینن [۱] مراجعه شود .

پس از برآورد پارامترهای مدل می‌توان به کمک خواص مدل‌های $ACP(p,q)$ امید ریاضی شرطی و غیرشرطی، واریانس و تابع خودهمبستگی مدل مرتبط با فرآیند نقطه‌ای مطرح‌شده را محاسبه نمود



شکل ۱: نمودارهای سری زمانی تصادفات کل ، لگاریتم تصادفات کل و تصادفات منجر به فوت

۱۰. کاربرد عددی

در ادامه قصد داریم به تعداد تصادفات منجر به فوت مربوط به شهر تهران که طی سال‌های ۸۲ تا ۹۳ ثبت شده‌اند مدلی مناسب برازش دهیم. بدین منظور از مدلهای مطرح شده $ACP(p,q)$ و فرآیندهای نقطه‌ای پواسون استفاده کرده تا بهترین مدل را شناسایی و معرفی نماییم. ابتدا جهت درک شهودی و بررسی ساختار مشاهدات نمودار مربوط به سری زمانی تعداد تصادفات منجر به فوت (در شهر تهران)و تعداد کل تصادفات و لگاریتم تعداد کل تصادفات را به کمک نرم‌افزار رسم می‌نماییم.

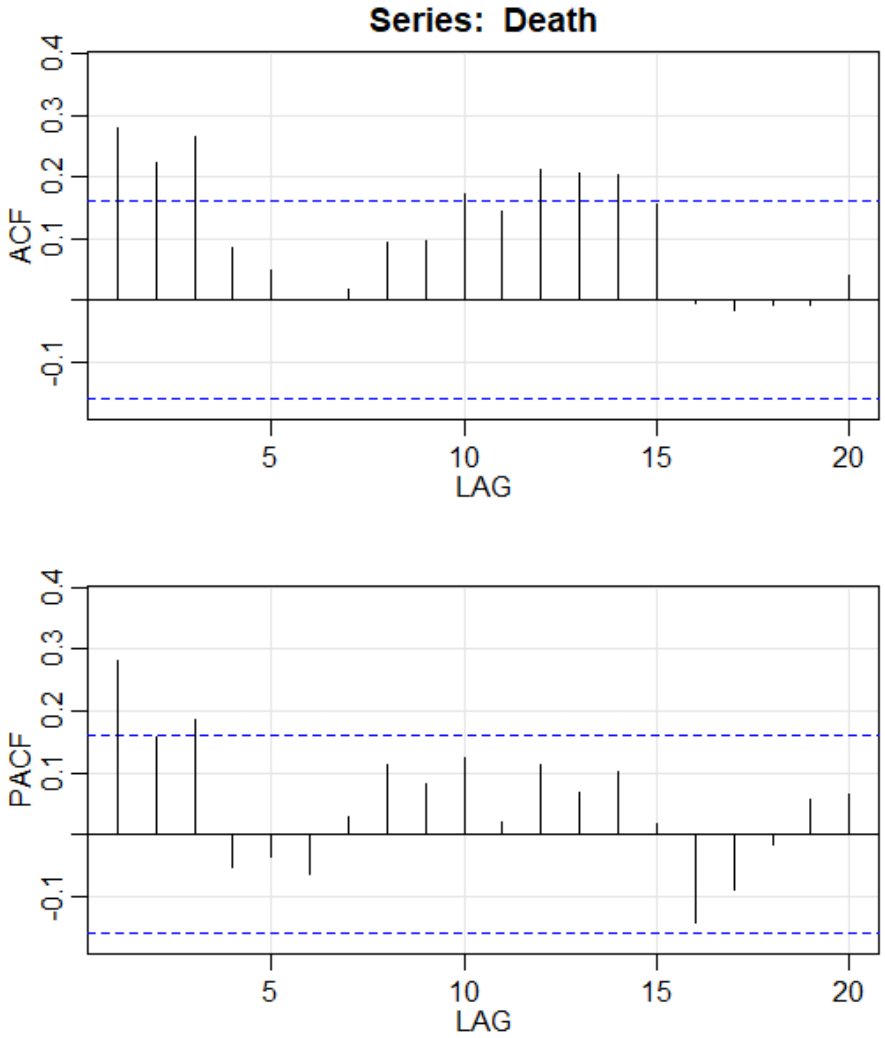
با توجه به سری زمانی رسم شده تعداد تصادفات منجر به فوت (شکل ۳)ابتدا روندی روبه افزایش داشته و پس‌ازآن این روند ثابت مانده و پس از گذشت مدتی این روند به‌صورت کاهشی ادامه میابد. یک دلیل منطقی جهت تفسیر این واقعه می‌توان مرتبط ساختن تعداد تصادفات منجر به فوت به‌کل تصادفات باشد چراکه تعداد کل تصادفات از سال ۱۳۸۳ تا آذرماه سال ۱۳۸۷ روندی روبه افزایش داشته و پس‌ازآن به دلیلی این روند کاملاً تغییر کرده و کاهش‌یافته است. بنابراین یکی از علل مرتبط با این کاهش را می‌توان کاهش کل تصادفات دانست. در زیر جدول آمار توصیفی مرتبط با تعداد تصادفات فوتی ارائه می‌گردد.

با توجه به مقادیر میانگین و واریانس و تفاوت نسبتا زیاد این دو نسبت به مدل پواسون بیش پراکنش داده‌ها مشاهده شده و استفاده از مدل‌هایی چون $ACP(p,q)$ جهت پوشش این ساختار پیشنهاد می‌گردد. به‌منظور بررسی همبستگی سری زمانی مشاهدات مرتبط با تعداد تصادفات منجر به فوت خودهمبستگی و خودهمبستگی جزعی مربوطه در زیر رسم می‌گردد:

[1] Autoregressive conditional poisson

جدول ۱: جدول آمار توصیفی تعداد تصادفات منجر به فوت در شهر تهران

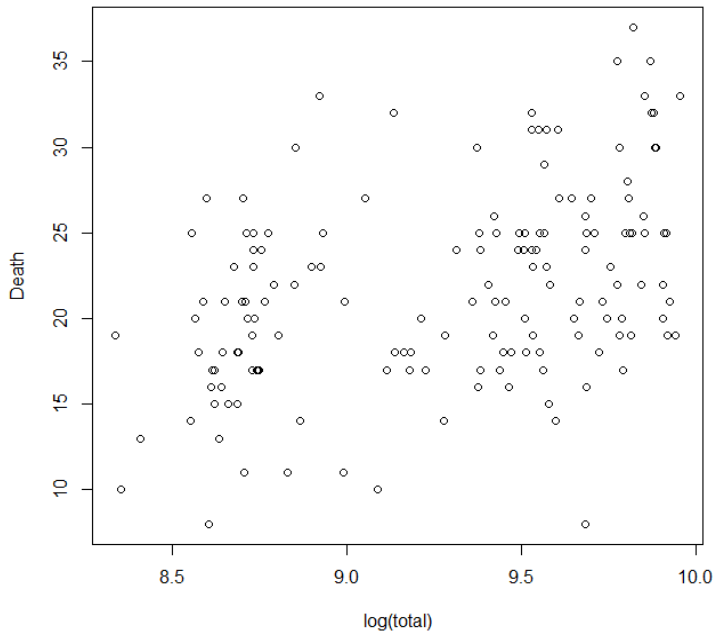
	تعداد	مینیمم	ماکسیمم	میانگین	انحراف استاندارد	واریانس	چولگی	کشیدگی
تصادفات منجر به فوت	۱۵۶	۸٫۰۰	۳۷٫۰۰	۲۱٫۶۱۵۴	۵٫۷۴۵۶۴	۳۳٫۰۱۲	۰٫۲۳۱	−۰٫۰۹۳



شکل ۲: نمودار خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی تعداد تصادفات منجر به فوت

با توجه به نمودارها، خودهمبستگی مشاهدات به‌صورت موج کسینوسی میرا ظاهر شده و خودهمبستگی جزعی نیز تا مرتبه۳ معنی‌دار است که نشان‌دهنده وابستگی سریالی مشاهدات است. همان‌طور که قبل عنوان شد از تعداد کل تصادفات رخ‌داده در هرماه می‌توان به‌عنوان نشانه‌ای برای فرایند اصلی تحت مطالعه یعنی تعداد تصادفات منجر به فوت استفاده نمود به‌طوری‌که زوج‌های مرتب (N_t, Y_t) مصداق یک فرایند نقطه‌ای نشان‌دار است که در آن N_tنشان‌دهنده فرایند اصلی (تعداد تصادفات منجر به فوت) و Y_t نشان‌دهنده نشانه‌های فرایند است و تعداد کل تصادفات را نمایش می‌دهد. در این مقاله ابتدا بدون در نظر گرفتن نشانه‌های تعریف‌شده یک مدل $ACP(p,q)$ به مشاهدات برازش داده و معیارهای نیکویی برازش مرتبط با آن را ارائه می‌دهیم سپس به‌منظور بهبود مدل از تعداد کل تصادفات رخ‌داده به‌عنوان نشانه‌های فرایند در برازش مدل استفاده نموده و معتقدیم که تعداد کل تصادفات می‌تواند به‌عنوان یک عامل مؤثر در برانگیختگی فرایند نقطه‌ای مورد نظر معرفی گردد به‌گونه‌ای

که با افزایش تعداد کل تصادفات تابع شدت مدل بندی شده به کمک مدل‌های $ACP(p,q)$ دچار برانگیختگی شده به طوری که احتمال افزایش تعداد تصادفات منجر به فوت را نتیجه دهد. برای اثبات این نکته ابتدا می‌بایست نشان داد که تعداد تصادفات منجر به فوت و تعداد کل تصادفات دارای رابطه‌ای مستقیم‌اند. به کمک شکل رسم شده () و همبستگی اسپیرمن میان این دو فرایند صحت ایده مطرح شده اثبات می‌گردد.



شکل ۳: نمودار نقطه‌ای توام تعداد تصادفات کل و تعداد تصادفات منجر به فوت

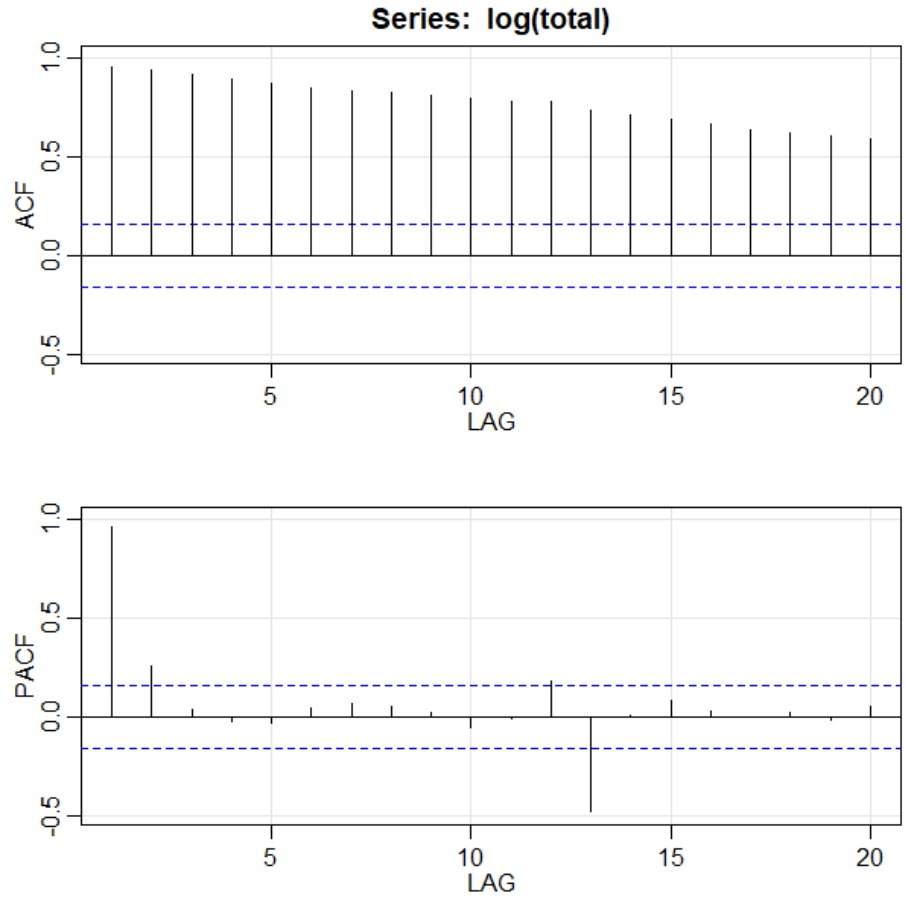
به‌وضوح شکل رسم شده نشان می‌دهد که مقادیر بزرگ تعداد فوتی‌ها عموماً به دنبال تعداد تصادفات بزرگ آمده و بلعکس. همچنین همبستگی اسپیرمن میان این دو فرایند عبارت است از:

جدول ۲: ضریب همبستگی بین تصادفات کل و تصادفات منجر به فوت

لگاریتم تعداد تصادفات	همبستگی	
۰/۴۳۲	همبستگی پیرسون	تصادف منجر به فوت
۰/۰۰۰	p.value	
۱۵۶	تعداد مشاهدات	

بنابراین همبستگی میان این دو فرایند کاملاً معنی‌دار بوده و می‌تواند به‌عنوان نشانه‌هایی برای فرایند اصلی تحت مطالعه به‌منظور بهبود مدل مورداستفاده قرار گیرد. ازآنجایی‌که نشانه‌های در نظر گرفته به‌منظور بهبود مدل خود یک سری زمانی است و مقادیر آینده آن می‌بایست پیش‌بینی شوند پس ابتدا به این مشاهدات مدلی مناسب برازش داده تا به کمک آن مقادیر آینده مربوط به تعداد کل تصادفات پیش‌بینی‌شده و سپس از آن به‌عنوان نشانه‌هایی برای فرایند اصلی تحت مطالعه در مدل $ACP(p,q)$ استفاده گردد. به‌منظور درک ساختار تعداد کل تصادفات سری زمانی مربوطه در شکل (۱) رسم گردد با توجه به نوسانات این سری زمانی خصوصا در اواسط نمودار یک تبدیل لگاریتمی می‌تواند جهت بهبود فرایند مدلسازی مناسب باشد. در زیر نمودار خودهمبستگی و خودهمبستگی جزعی مربوط به لگاریتم تصادفات کل رسم شده است :

به‌وضوح سری مشاهده‌شده و آزمون ریشه واحد دیکی ـ فولر ($P.V = ۰/۲۷۴۴$) (فرض صفر برابر عدم مانایی مدل) نشان از عدم مانایی مدل داشته و به‌منظور مدلسازی آن می‌بایست ازسری‌های زمانی نامانایی چون سری‌های زمانی ARIMA استفاده نمود. با توجه به نمودار سری زمانی رسم شده به‌وضوح یک‌روند فصلی مشاهده می‌شود و این مسئله نشان‌دهنده وجود یک الگو در تعداد تصادفات رخ‌داده طی ماه‌های سال است به‌طور مثال ماه فروردین همواره کمترین تصادفات را به خود اختصاص داده و این می‌تواند به دلیل مسافرت مردم در ایام تعطیلات و خلوت بودن شهر در این مدت است. علاوه بر معنی‌داری خودهمبستگی مرتبه اول و دوم ،خودهمبستگی مرتبه ۱۲ نیز به‌شدت معنی‌دار بوده



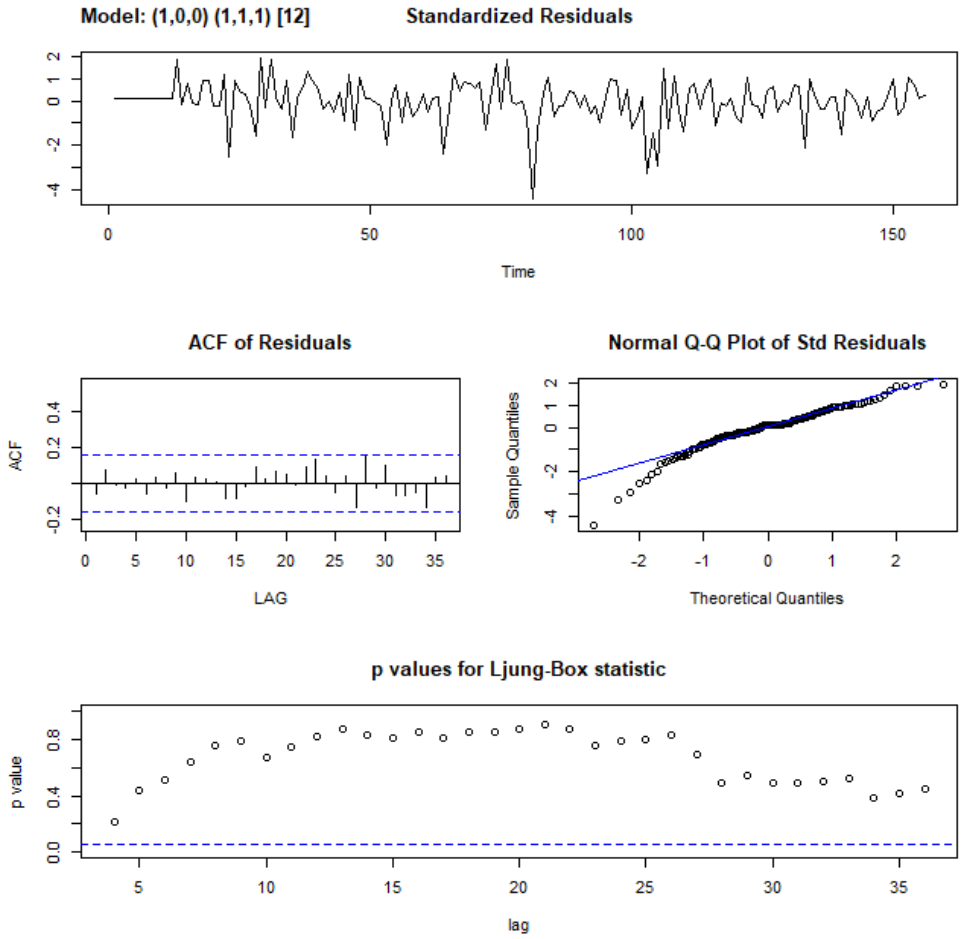
شکل ۴: نمودار خودهمبستگی و خوهمبستگی جزئی لگاریتم تعداد تصادفات کل

که نشان‌دهنده وجود یک الگوی فصلی با دوره $s = ۱۲$ است. بنابراین مدل‌های SARIMA می‌توانند یک انتخاب مناسب باشند. با توجه به مدل‌های متنوع برازش شده بهترین مدل میان کاندیدهای موجود به‌منظور مدل بندی تعداد کل تصادفات مدل معرفی شده در زیر است. در این مدل مقدار پارامتر ثابت معنی‌دار نبوده و از مدل حذف گردید.

جدول ۳: براورد پارامترهای مدل و معیارهای سنجش مدل

مدل	$SARIMA(۱,۰,۰)(۱,۱,۱)_{۱۲}$					
$-\log.lik$	$-۲۱۰/۲۲$	پارامتر		SE	$t.valu$	$p.valu$
AIC	۴/۳۳	$ar/۱$	/۹۹۲۷	/۰۱۴	۷۰/۲۲	/۰۰۰
$AICc$	۴/۳۲	$sar/۱$	/۲۱۹۱	/۰۹۴	۲/۳۱	/۰۲
BIC	۵/۲۸	$sma/۱$	-۱	/۱۲	$-۷/۹۲$	/۰۰۰
AIC	۴۲۸	-	-	-	-	-

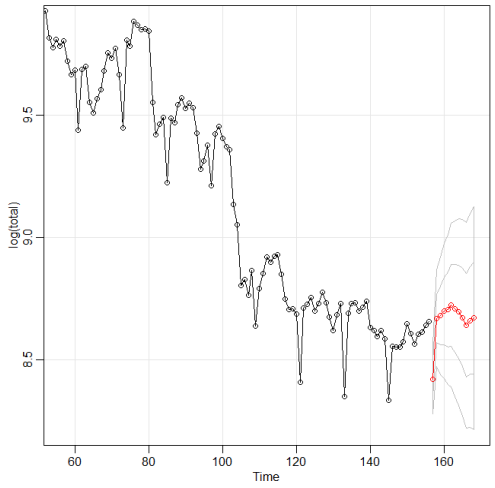
با توجه به خروجی‌های مدل برازش شده تمامی مفروضات ازجمله معنی‌داری پارامترها، تصادفی بودن روند باقی‌مانده‌ها و عدم معنی‌داری خودهمبستگی مربوطه معنی‌داری و آزمون Lj-Box اعتبار مدل مورد تایید قرار می‌گیرد تنها در نمودار چندک–چندک توزیع نرمال در نقاط ابتدایی اندکی انحراف مشاهده شده که این امر به دلیل وجود مشاهدات پرت در مجموعه مشاهدات است. حال به کمک مدل به دست آمده به پیش‌بینی تعداد کل تصادفات رخداده در شهر تهران میپردازیم.



شکل ۵: نمودارهای مرتبط با نیکویی برازش مدل $ARIMAS(۱,۰,۰)(۱,۱,۱,۱۲)$

جدول ۴: تعداد کل تصادفات پیش بینی شده در شهر تهران

ماه	مقادیر پیش‌بینی‌شده
فروردین	۴۵۴۸
اردیبهشت	۵۸۳۵
خرداد	۵۹۱۴
تیر	۶۰۴۳
مرداد	۶۰۸۵
شهریور	۶۲۰۵
مهر	۶۱۳۱
آبان	۶۰۵۴
آذر	۵۹۲۹
دی	۵۷۵۶
بهمن	۵۸۸۱
اسفند	۵۹۴۸



شکل ۶: نمودار مقادیر پیش بینی شده به عنوان تعداد کل تصادفات در شهر تهران

۱۱. مدل برازش شده

در آخر به سراغ برازش مدل اصلی رفته و به مشاهدات سری زمانی تصادفات منجر به فوت مدل‌های زیر برازش داده می‌شود. باید دقت شود که در مدل نهایی از تعداد کل تصادفات به‌عنوان نشانه‌های فرایند نقطه‌ای اصلی استفاده نموده. این متغیر به عنوان عامل برانگیختگی فرایند اصلی موجب بهبود مدل $ACP(p,q)$ برازش شده می‌گردد. باید خاطرنشان کرد که در این مدل تعداد کل تصادفات ابتدا بر مقدار ۱۰۰۰۰ تقسیم‌شده و سپس مقادیر مربوطه در مدل وارد شده‌اند.

جدول ۵: براورد پارامترهای مدل و معیارهای سنجش مدل برازش شده

مدل	$P(\mu)$	$ACP1(1,1)^{*}$			$ARMA(1,1)$			$ACP2(1,1)^{**}$				
AIC	۱۰۰۳٫۹۲	۶٫۲۸			۴٫۴			۶٫۱۷				
BIC	۱۰۰۶٫۹۷	۶٫۳۴			۳٫۴۵			۶٫۲۴				
log.lik	−۵۰۰٫۹۶	−۴۸۷٫۰۷			−۴۸۳			−۴۷۷٫۲۶				
$parameter$	μ	ω	α	β	intercept	AR	MA	intercept	ω	α	β	φ
$estimate$	۲۱٫۶۱	۳٫۸۲۳۳	٫۲۱۳۳	٫۶۱۰	۲۰٫۵۳	٫۹۶۷	−٫۸۵	−٫۴۸۱	٫۰۶۷۴	٫۰۲۳۵	٫۹۷۷	٫۲۷
$Std.E$	−	۲٫۶۲	٫۰۶۸۴	٫۱۶۹	۲٫۰۳	٫۰۴	٫۰۹۷	٫۰۹۸۲	۵۱۷۶	٫۰۱۳	٫۰۱	٫۰۴۸
$t.valu$	−	۱٫۴۵	۳٫۱۱	۳٫۶۰	۱۰٫۱	۲۰٫۸	−۸٫۷۲	−۴٫۸۸	٫۱۳	۱٫۷۷	۹۰٫۴	۵٫۶
$p.valu$	۰٫۰۰۲	۰٫۱۴	۰٫۰۰۲۱	۰٫۰۰	٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	٫۰۰	٫۸۹	٫۰۷	۰٫۰۰	۰٫۰۰

محاسبه برخی معیارهای مرتبط با مدل تفسیر و پیش بینی :
با توجه به مدل نهایی برازش شده و مقدار پارامتر مرتبط با نشانه‌ی فرایند نقطه‌ای به‌عنوان متغیر تبعینی خواهیم داشت :

$$\hat{\lambda}_t = (٫۰۶۷۴) + (٫۰۲۳۵)\, N_{t-۱} + (٫۹۷۷)\, \hat{\lambda}_{t-۱} + \{-٫۴۸۱ + (٫۲۷)\, Y_t\}$$
$$\frac{\Delta\lambda(t|H_{t-۱})}{\lambda(t|H_{t-۱})} = \varphi\,(\Delta Y_t) = ٫۲۷\,(\Delta Y_t)$$

بنابراین به ازای تغییرات $\Delta Y_t = ۱$ (افزایش ۱۰۰۰۰ واحدی تصادفات کل) در تعداد کل تصادفات میزان تابع شدت تصادفات منجر به فوت در آینده به اندازه‌ی ٫۲۷ واحد افزایش خواهد یافت. با توجه به مقادیر پارامترهای برآورد شده‌ی مدل $ACP1(۱,۱)$ مقدار امید ریاضی و واریانس غیرشرطی مرتبط با آن عبارت است از :

$$E\{N_t\} = \mu = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^{\max(p,q)}(\alpha_j + \beta_j)} = \frac{3/8233}{1 - (/2133 + /6101)} = 21/64$$

$$Var(N_t) = \sigma^2 = \frac{\mu\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} = \frac{(21/64)(1 - (/2133 + /6101)^2 + (/2133)^2)}{1 - (/2133 + /6101)^2} = 24/7$$

$$Cov(N_t, N_{t-1}) = (\alpha_1 + \beta_1)^{1-1}\ \frac{\alpha_1(1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} = \frac{(/2133)(1 - (/6101)(/2133 + /6101)}{1 - (/2133 + /6101)^2 + /2133^2} = /2888$$

باید دقت نمود که به‌منظور پیش‌بینی تعداد تصادفات منجر به فوت (λ_t) در زمان t می‌بایست مقدار متغیر نشانه‌ی Y_t پیش‌بینی شود. بنابراین به کمک مدل سری زمانی مربوط به Y_t ابتدا مقدار کل تصادفات در زمان t پیش‌بینی‌شده و سپس آن مقدار در معادله $ACP2(1,1)$ بالا قرار گیرد پس خواهیم داشت :

$$\hat{\lambda}_t = (/0674) + (/0235)\, N_{t-1} + (/977)\, \hat{\lambda}_{t-1} + \left\{-/481 + (/27)\, \hat{Y}_t\right\}$$

$$\hat{Z}_t = \log\left(\hat{Y}_t\right)$$

$$(1 - /9927B)(1 - /2191B^{12})\nabla_{12} Z_t = (1 - B^{12})e_t$$

به‌منظور پیش‌بینی تعداد تصادفات منجر به فوت ماه آینده به کمک مقدار پیش‌بینی‌شده تعداد کل تصادفات خواهیم داشت:

$$\hat{y}_{t+1} = 4548, \hat{\lambda}_t = 17/91, N_t = 15$$

$$\hat{\lambda}_{t+1} = /0674 + (/0235)\, 15 + (/977)\, 17/91 + \{-/481 + (/27)\, /4548\} = 17/577773$$

در معادله بالا می‌بایست دقت شود که مقدار تعداد تصادفات کل بر ۱۰۰۰۰ تقسیم می‌گردد.

۱۲. نتیجه‌گیری

همان‌طور که قبل عنوان شد مدل‌های $ACP(p,q)$یکی از مدل‌های مناسب جهت مدلسازی مشاهدات با خاصیت بیش پراکنده و خوشه‌ای است. در این مقاله نشان دادیم که تعداد تصادفات منجر به فوت در شهر تهران علاوه بر ساختار بیش پراکندگی داده‌ها بین مشاهدات ثبت‌شده به‌صورت ماهیانه وابستگی سریالی معنی‌داری وجود دارد. با توجه به نتایج اریه شده، برازش مدل $ACP(p,q)$ موجب بهبود عملکرد مدل شده و این مسئله دور از انتظار نیست. مدل $ACP(p,q)$ با مدل $ARMA(1,1)$ رقابت نزدیکی دارد و در برخی از معیارها مدل $ARMA$ رجحان دارد. سپس ثابت شد که تعداد کل تصادفات می‌تواند به‌عنوان نشانه‌هایی در کنار فرایند نقطه‌ای اصلی یعنی تعداد تصادفات منجر به فوت بهبود عملکرد مدل نهایی را به دنبال دارد به‌طوری‌که افزایش تعداد کل تصادفات موجب برانگیختگی تابع شدت فرایند تحت مطالعه شده و وقوع بیشتر تعداد تصادفات منجر به فوت را محتمل‌تر می‌سازد.. در نهایت نتایج حاصل همگی نشان از عملکرد بسیار مناسب مدل‌های ACP داشته به طوری که این مدل می‌تواند رقیب خوبی برای مدل‌های سری زمانی مرسوم فرض شود. در مورد تعداد کل تصادفات رخ داده با توجه به مدل برازش شده می‌توان گفت که ماه فروردین کمترین میزان تصادف را در شهر تهران به خود اختصاص داده و از دلایل این پدیده علاوه بر نکته ذکر شده قبل (مسافرت افراد به خارج تهران و خلوت شدن شهر) می‌توان به نظارت بیشتر پلیس و مدیریت بهتر شهر در این ماه خاص اشاره نمود. سایر ماه‌های سال از نظر تعداد تصادفات کل به صورت معنی‌دار با یکدیگر تفاوت ندارند و این موضوع خود برهانی است بر دلایل ارایه شده .
مراجع:

مراجع

[1] Heinen, A. (2003). Modelling time series count data: an autoregressive conditional Poisson model.

[2] Hamidieh, K., Stoev, S., & Michailidis, G. (2013). Intensity-based estimation of extreme loss event probability and value at risk. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 29(3), 171-186.

[3] Engle, R. F., & Russell, J. R. (1998). Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data. Econometrica, 1127-1162

[4] Bauwens, L., & Giot, P. (2000). The logarithmic ACD model: an application to the bid-ask quote process of three NYSE stocks. Annales d'Economie et de Statistique, 117-149

[5] Cox, D. R., & Isham, V. (1980). Point processes (Vol. 12). CRC Press.

[6] Daley, D. J., & Vere-Jones, D. (2007). An introduction to the theory of point processes: volume II: general theory and structure. Springer Science & Business Media.

[7] Tsay, R. S. (2009). Autoregressive conditional duration models. In Palgrave handbook of econometrics (pp. 1004-1024). Palgrave Macmillan UK.
[8] engel1982, R. F., & Russell, J. R. (1997). Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange prices with the autoregressive conditional duration model. Journal of empirical finance, 4(2-3), 187-212.
[9] Davis, R. A., Dunsmuir, W. T., & Wang, Y. (1999). Modeling time series of count data. Statistics Textbooks and Monographs, 158, 63-114.
[10] Davis, R. A., Dunsmuir, W. T., & Wang, Y. (2000). On autocorrelation in a Poisson regression model. Biometrika, 491-505.
[11] Bollerslev, T., Engle, R. F., & Nelson, D. B. (1994). ARCH models. Handbook of econometrics, 4, 2959-3038.
[12] Efron, B. (1986). Double exponential families and their use in generalized linear regression. Journal of the American Statistical Association, 81(395), 709-721.
[13] Bauwens, L., Galli, F., & Giot, P. (2003). The moments of log-ACD models
[14] Bollerslev, T., Engle, R. F., & Nelson, D. B. (1994). ARCH models. Handbook of econometrics, 4, .2959-3038
[15] Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series (Vol. 543). John Wiley & Sons.
[16] Davis, R. A., Dunsmuir, W. T., & Wang, Y. (1999). Modeling time series of count data. Statistics Textbooks and Monographs, 158, .63-114
[17] Zeger, S. L. (1988). A regression model for time series of counts. Biometrika, 75(4), 621-629.
[18] Liesenfeld, R., Nolte, I., & Pohlmeier, W. (2006). Modelling financial transaction price movements: a dynamic integer count data model. Empirical Economics, 30(4), 795-825.
[19] Tsay, R. S. (2009). Autoregressive conditional duration models. In Palgrave handbook of econometrics (pp. 1004-1024). Palgrave Macmillan UK.
[20] Hautsch, N. (2003). Assessing the risk of liquidity suppliers on the basis of excess demand intensities. Journal of Financial Econometrics, 1(2), 189-215
[۲۱] تحلیل سری‌های زمانی با برنامه‌های کاربردی در R تألیف جاناتان دی. کرایر، کونگ ـ سیک چن، ترجمه دکتر محمدرضا مشکانی، نشر دانشگاهی، سال ۱۳۷۱

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–205، صص. ۲۰۴–۲۰۸

برآورد پارامتر توزیع لیندلی وارون برای داده‌های سانسور شده‌ی نوع اول

نسرین بلوچ رودباری*[آ]، امیر علی یان[ب]

[آ] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ص پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
[ب] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
سانسور نوع اول
تکنیک مونت کارلویی زنجیره مارکف

چکیده

چکیده: در یک آزمایش طول عمر در طرح سانسور شده‌ی نوع اول ، آزمایش زمانی متوقف می‌شود که به زمان از پیش تعیین شده‌ی T برسیم. در این مقاله برآورد پارامتر توزیع لیندلی وارون را هم در حالت کلاسیک و هم در حالت بیزی با استفاده از این طرح به دست می‌آوریم. در حالت کلاسیک برآورد پارامتر را هم از روش ماکسیمم درستنمایی و هم با استفاده از ماکسیمم حاصلضرب فاصله‌ها و در حالت بیزی برآورد نقطه‌ای را با استفاده از تابع زیان مربع خطا با استفاده از زنجیره مارکف مونت کارلو محاسبه می‌کنیم.

۱. مقدمه

در آزمایش‌های طول عمر و نظریه قابلیت اعتماد، مشاهده زمان‌های شکست در کل نمونه مورد مطالعه غیر متعارف است . این موضوع ممکن است به دلیل محدودیت‌های متفاوتی باشد که بر آزمایش‌هایی نظیر مقرون بصرفه بودن ، زمان کل آزمایش ، سادگی آزمایش‌ها و ... اعمال می‌شود. این محدودیت‌ها توسط یک محقق بر نمونه تحمیل می‌شود که منجر به سانسور داده‌های ناشی از آزمایش می‌گردد. دو نوع از اولین و ساده‌ترین سانسورها، سانسور نوع اول و نوع دوم هستند.

تحت طرح سانسور شده‌ی نوع دوم ، آزمایش زمانی متوقف می‌شود که به تعداد واحدهای شکست (که آن را با r نشان می‌دهیم) از پیش تعیین شده برسیم. طبق این طرح زمان توقف آزمایش معلوم نیست و ممکن است بسیار طولانی باشد. اما برطبق طرح سانسور نوع اول آزمایش زمانی متوقف می‌شود که به زمان از پیش تعیین شده‌ی $T_{\circ}$ برسیم . تعداد شکست های مشاهده تا زمان $T_{\circ}$ تصادفی هستند.

توزیع لیندلی وارون یک پارامتری است ، دارای نرخ خطر بالا به پایین وان حمامی و عکس توزیع نمایی است با این حال تابع نرخ خطر آن ثابت است.

$$F(x;\theta) = \left[1 + \frac{\theta}{x(1+\theta)}\right] e^{-\frac{\theta}{x}} x, \theta > \circ \qquad (1)$$

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^{2}}{1+\theta}\left(\frac{1+x}{x^{2}}\right) e^{-\frac{\theta}{x}} x, \theta > \circ \qquad (2)$$

این توزیع توسط شارما و همکاران [۱] پیشنهاد شد .آن ها با یک آزمایش بر روی بیماران سرطانی سر و گردن پس از درمان با پرتودرمانی و شیمی درمانی ، مناسب بودن این توزیع به عنوان یک تابع بقا را اثبات کردند.

*سخنران
پست الکترونیک: N_roodbary@yahoo.com (نسرین بلوچ رودباری)، Aliyan.amir1404@gmail.com (امیر علی یان)

۲. طرح سانسورشده نوع اول

فرض کنید n واحد تکی که در یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند دارای توزیع لیندلی وارون که آن را به اختصار با IPD (θ) نشان می دهیم، باشند. بر طبق طرح سانسور شده‌ی نوع اول ، زمان از پیش تعیین شده را با T_0 نشان می‌دهیم. در بین n واحد، k مشاهده مرتب شده تا زمان T_0 را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

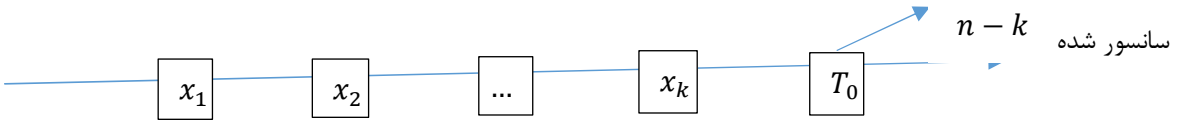
$$x_{1:n} < x_{2:n} < \dots < x_{k:n} < T_0 < \infty$$

K متغیر تصادفی و زمان طول عمر واحد های باقیمانده یعنی واحد $x_{i:n}$ ام که $i = \overline{k+1}\,(1)\,n$ ، مشاهده نشده باقی می‌ماند. بدیهی است که $x_{i:n} \geq T_0$ برای $i = \overline{k+1}\,(1)\,n$.

برای سادگی، در سرتاسر متن $x_{i:n}$ و $f(x;\theta), F(x;\theta)$ را به ترتیب با $f(x), F(x), x$ نشان می‌دهیم .

$$n-k$$

با توجه به اطلاعات قبلی و نظر کارشناسانه ، T_0 را طوری انتخاب می‌کنیم که تا زمان T_0 حداقل یک واحد شکست را مشاهده کنیم. و واحدهای بعد از T_0 را سانسور می‌کنیم. یک نمایش شماتیک از طرح سانسور شده ی نوع اول به صورت زیر است:



شکل ۱: نمایش طرح سانسور شده‌ی نوع اول

۲. برآورد کلاسیک

۲ .۱ . *برآورد ماکسیمم درستنمایی*

تابع درستنمایی طرح سانسور شده‌ی نوع اول توسط کوهن[۲] ارائه شد و ما آن را بکار خواهیم‌گرفت. x_i طول عمر i امین واحد مشاهده شده است تنها اگر $x_i < T_0$ ، $i = 1, \dots, n$ باشد.

فرض کنید

$$\delta_i = \begin{cases} 1; & x_i < T_0 \\ 0; & x_i > T_0 \end{cases}$$

یک تابع نشانگر است که نشان دهنده این است که واحد سانسور شده است یانه . اگر ۰ باشد یعنی واحد سانسور شده و درغیر اینصورت مشاهده شده است.

$$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

تابع درستنمایی برای زمان‌های طول عمر مرتب شده ، به صورت

$$L(\theta|x) = A\prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}\,[1-F(T_0)]^{1-\delta_i} = \frac{n!}{(n-k)!}\prod_{i=1}^{k} f(x_i)\,[1-F(T_0)]^{n-k}; k \geq 1$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta}\right)^k \left[1-e^{-\frac{\theta}{T_0}}\left(1+\frac{\theta}{T_0(1+\theta)}\right)\right]^{n-k} \prod_{i=1}^{k} e^{-\frac{\theta}{x_i}}\left(1+\frac{x_i}{x_i^2}\right); k \geq 1 \quad (۳)$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) θ با می‌نیمم کردن لگاریتم تابع درستنمایی معادله (۳) حاصل می‌شود:

$$logL \propto 2klog\theta - klog(1+\theta) + \sum_{i=1}^{k} \log\left(1+\frac{x_i}{x_i^2}\right) - \theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + (n-k)\log\left[1-e^{-\frac{\theta}{T_0}}\left(1+\frac{\theta}{T_0(1+\theta)}\right)\right] \quad (۴)$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی MLE)) θ با حل معادله‌ی غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial logL}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{2k}{\theta} - \frac{k}{1+\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \frac{(n-k)\left[\theta\,(2T_0+1) + \theta^2\,(T_0+1)\,e^{-\frac{\theta}{T_0}}\right]}{[T_0\,(1+\theta)]^2\left[1 - e^{-\frac{\theta}{T_0}}\left(1+\frac{\theta}{T_0(1+\theta)}\right)\right]} \qquad (5)$$

بدیهی است که معادله بالا را نمی‌توان با روش های تحلیلی حل نمود. برای حل معادله فوق از روش نیوتن رافسون استفاده می‌کنیم. حدس اولیه برای θ را با ردیابی منحنی $-logL\,(\theta|x)$ در نظر می‌گیریم و مقدار تقریبی θ ای که $-logL\,(\theta|x)$ را حداقل می‌کند ، شناسایی می‌کنیم.

۲.۲ . *برآورد ماکسیمم حاصل ضرب فاصله ها*

روش برآورد حداکثر حاصلضرب فاصله ها (MPS) توسط چنگ و امین [۳] پیشنهاد شد و رانبی [۴] آن را بعنوان جایگزینی برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پیشنهاد کرد. چنگ و تریلور [۵] اظهار داشتند که MLE در برآورد توزیع‌های سه پارامتری مثل گاما و وایبول و لگ نرمال ناموفق است. همچنین MLE برای توزیع های دم کلفت با پارامترهای مقیاس و مکان نامشخص به خوبی اجرا نمی‌شود. آناتولیو و کسونگ [۶] نشان دادند که این روش در نمونه‌های کوچک کاراتر از روش برآورد ماکسیمم درستنمایی است.

شرط کلی برای استفاده از روش حاصل ضرب فاصله ها کراندار و مثبت بودن فاصله‌ها و همچنین مثبت بودن تابع چگالی در فاصله (a,b) است. در طرح سانسور شده‌ی نوع اول، افرازهای ناشی از اطلاعات نمونه در فاصله $[0,\infty)$ به صورت $(T_0,\infty),(x_k,T_0],(x_{k-1},x_k],\dots,(x_1,x_2],[0,x_1]$ هستند. بر طبق این افرازها، فاصله‌های D_i از فواصل فوق الذکر به صورت $D_i = F(x_i) - F(x_{i-1})\;\forall i = 1,\dots,k$ که $x_0 = 0$ است، تعریف شده اند. تمام واحدهای حذف شده در این طرح ، اطلاعات مشابهی که منجر به فاصله یکسان $D_i = (1 - F(T_0)), i = \overline{k+1}\,(1)\,n$ می‌شود را ارائه می‌دهند. و بنابراین بعنوان مشاهدات هم رتبه در نظر گرفته می‌شوند. (هان وشائو [۷]و چنگ و استفان[۸] و سینگ و همکاران [۹]) .

یک روش برای حل مشکل هم‌رتبه بودن مشاهدات ، ساختن حاصلضرب فاصله ای برای همه مشاهدات هم‌رتبه است بطوریکه مجموع توزیع ناشی از همه مشاهدات باقیمانده با مشاهدات جداافتاده یکی باشد. بنابراین:

$$D_{k+j} = \frac{1 - F(T_0)}{n-k} \forall j = 1,2,\dots,(n-k)$$

مجموع D_i ها در افراز (T_0,∞) حاوی مشاهده x_i است ، لذا قرار می دهیم $(1-F(T_0))$ و فاصله بین T_0 و x_k را با $D_\xi = F(T_0) - F(x_k)$ نشان می‌دهیم .اگر فاصله بین آنها خیلی کوچک باشد یعنی $|T_0 - x_k| < \varepsilon$ ، آن فاصله را با $f(T_0)$ تقریب می‌زنیم .

بنابراین،

$$s(\theta|x) \propto \begin{cases} f(T_0)\left\{\prod_{i=1}^{k} D_i\right\}\left\{\prod_{j=1}^{n-k} D_{k+j}\right\} & if\ |T_0 - x_k| < \varepsilon \\ D_\xi\left\{\prod_{i=1}^{k} D_i\right\}\left\{\prod_{j=1}^{n-k} D_{k+j}\right\} & o.w. \end{cases} \qquad (6)$$

برای برآورد کردن پارامتر θ از روش MPS کافیست لگاریتم تابع $s(\theta|x)$ را ماکسیمم کنیم. یعنی،

$$s_L(\theta|x) = logs(\theta|x)$$

با مشتق گرفتن ازلگاریتم تابع حاصل ضرب فاصله ها و مساوی صفر قراردادن آن ، برآورد θ حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} s_L(\theta|x)\;\alpha \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \frac{F(\acute{x}_i) - F(\acute{x}_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})} - \frac{(n-k)F(\acute{T}_0)}{1-F(T_0)} + \frac{f(\acute{T}_0)}{f(T_0)} & if\ |T_0 - x_k| < \varepsilon \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{F(\acute{x}_i) - F(\acute{x}_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})} - \frac{(n-k)F(\acute{T}_0)}{1-F(T_0)} + \frac{F(\acute{T}_0) - F(\acute{x}_k)}{F(T_0) - F(x_k)} & o.w. \end{cases} \qquad (7)$$

که

$$\acute{F}(x) = \frac{\partial}{\partial\theta} F(x) = -\frac{e^{-\frac{\theta}{x}}}{x^2\,(1+\theta)^2}\left\{\theta^2\,(x+1) + \theta\,(2x+1)\right\}$$

$$f(\acute{x}) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(x) = \frac{1+x}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}\left\{\frac{\theta\,(\theta+2)}{(1+\theta)^2} - \frac{\theta^2}{x\,(1+\theta)}\right\}$$

همانطور که مشاهده می‌شود معادلات بالا را نمی‌توان با استفاده از روش‌های غیرعددی حل کرد. لذا، برآورد پارامتر را با استفاده از روش نیوتن – رافسون به دست می‌آوریم. می‌توانیم همان حدس اولیه‌ای که برای روش ماکسیمم درستنمایی بکار بردیم را در نظر بگیریم. یک معیار کافی برای اطمینان از این که θ برآورد شده، تابع را ماکسیمم می کند ، مشتق دوم کوچکتر یا مساوی صفر است.

۳.۲ . *فواصل اطمینان مجانبی*

توزیع دقیق برآوردگر ML $\left(\hat{\theta}_{ML}\right)$ و برآوردگر MPS $\left(\hat{\theta}_{MPS}\right)$ به راحتی قابل محاسبه نیستند. بنابراین، برای ساختن برآورد فاصله ای از نظریه نمونه بزرگ استفاده می‌گردد.

بدون نقض شرایط نظم، توزیع مجانبی هر دو برآورد را به صورت زیرمیتوان بدست آورد:

$$\left(\tilde{\theta}-\theta\right)\sim N\left(۰,I^{-۱}\left(\tilde{\theta}\right)\right) \tag{۸}$$

که $\tilde{\theta}$ ، $\hat{\theta}_{ML}$ یا $\hat{\theta}_{MPS}$ است.

بنابراین یک فاصله اطمینان مجانبی $(۱-\alpha)$٪ درصد برای θ ، $\tilde{\theta}\pm z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{v\left(\tilde{\theta}\right)}$ است که $z_{\frac{\alpha}{۲}}$ کران بالای $\frac{\alpha}{۲}\%$ توزیع نرمال استاندارد است.

$v\left(\hat{\theta}_{ML}\right)$و $v\left(\hat{\theta}_{MPS}\right)$ به صورت زیر است:

$$v\left(\hat{\theta}\right)=-E\left(\frac{\partial^{۲}logL}{\partial\theta^{۲}}\right)^{-۱}_{\theta=\tilde{\theta}} \tag{۹}$$

$$\frac{\partial^{۲}logL}{\partial\theta^{۲}}=\frac{k}{(۱+\theta)^{۲}}-\frac{۲k}{\theta^{۲}}+\frac{(n-k)}{I_{۲}^{۲}}\left[I_{۲}\times I_{۱}-W\left(\frac{۲I_{۲}}{۱+\theta}+W\right)\right]$$

$$W=e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left[\theta^{۲}\left(T_{۰}+۱\right)+\theta\left(۲T_{۰}+۱\right)\right]$$

$$I_{۱}=e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left[۲\theta\left(T_{۰}+۱\right)+۲T_{۰}+۱\right]-\frac{W}{T_{۰}},I_{۲}=\left[T_{۰}\left(۱+\theta\right)\right]^{۲}\left[۱-e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left(۱+\frac{\theta}{T_{۰}\left(۱+\theta\right)}\right)\right]$$

۳. برآورد بیزی

در این بخش، برآورد پارامتر را از نقطه نظر بیزی بر اساس داده های سانسور شده نوع اول بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید θ دارای توزیع گاما با ابر پارامترهای a،b باشد:

$$\pi\left(\theta\right)\propto\theta^{a-۱}e^{-b\theta}\theta,a,b>۰ \tag{۱۰}$$

حال با ترکیب کردن درستنمایی (۳) و پیشین (۱۰) ، چگالی پسین برابر است با:

$$p\left(\theta|x\right)\propto\frac{\theta^{۲k+a-۱}}{\left(۱+\theta\right)^{k}}\left[۱-e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left(۱+\frac{\theta}{T_{۰}\left(۱+\theta\right)}\right)\right]e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{x_{i}}+b\right\}} \tag{۱۱}$$

برآورد بیز را تحت زیان مربع خطا $(SELF)$ محاسبه می‌کنیم:

$$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\lambda\left(\theta-\hat{\theta}\right)^{۲}\lambda>۰$$

که $\hat{\theta}$ برآورد پارامتر θ است. برآورد بیز $\hat{\theta}_{B}$ تحت تابع زیان مربع خطا، امید پسین است. بنابراین

$$\hat{\theta}_{B}=E\left(\theta|x\right)=c_{۱}^{-۱}\int\frac{\theta^{a+۲k}}{\left(۱+\theta\right)^{k}}e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{x_{i}}+b\right\}}\left[۱-e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left(۱+\frac{\theta}{T_{۰}\left(۱+\theta\right)}\right)\right]d\theta \tag{۱۲}$$

$$c_{۱}=\int\frac{\theta^{a+۲k-۱}}{\left(۱+\theta\right)^{k}}e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{x_{i}}+b\right\}}\left[۱-e^{-\frac{\theta}{T_{۰}}}\left(۱+\frac{\theta}{T_{۰}\left(۱+\theta\right)}\right)\right]d\theta \tag{۱۳}$$

با توجه به غیرخطی بودن انتگرال‌های فوق، ما از روش زنجیره مارکف مونت کارلو برای محاسبه آن‌ها استفاده می‌کنیم.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله ما برآورد کلاسیک و بیزی توزیع لیندلی وارون را در حضور داده های سانسور شده ی نوع اول بدست آوردیم. در برآورد بیزی توزیع پیشین گاما انعطاف پذیری خوبی از خود نشان می دهد .
ما مطالعات شبیه سازی را برای n=۳۰،۴۰،۵۰ و $\theta = ۰/۵, ۱, ۱/۵, ۳$ و با مقادیر متفارت $T_۰$انجام دادیم و MSE ها را مقایسه نمودیم . در تمامی طرح ها در حالی که داده های سانسور شده داریم ، با افزایش n ، میانگین مربع انحرافات (MSE) کم می شود. و همچنین مشاهده می شود که با افزایش $T_۰$ نیز MSE کاهش می یابد.
در حضور داده های سانسور شده برآورد بیز دارای مخاطره کمتری نسبت به برآورد کلاسیک می باشد.
طول فواصل اطمینان روش ماکسیمم حاصلضرب فاصله ها کوتاهتر از طول فاصله اطمینان پارامتر با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی است .
در کل نتیجه گیری میشود که برآوردها براساس ماکسیسم حاصلضرب فاصله ها دارای میانگین مربع خطا و طول فاصله اطمینان کمتری نسبت به برآوردها با توجه به روش ماکسیمم درستنمایی هستند.

مراجع

[1] Sharma VK, Singh SK, Singh U, Agiwal V (2015) The inverse Lindley distribution : a stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. J Ind Prod Eng 32(3):162–173.
[2] Cohen AC (1965) Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. Techno metrics 7(4):579–588.
[3] Cheng R, Amin N (1983) Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin.J R Stat Soc. Ser B (Methodological) 45(3):394–403.
[4] Ranneby B(1984) The maximum spacing method. An estimation method related to the maximum likelihood method. Scand J Stat 11(2):93–112.
[5] Cheng R,TraylorL(1995) Non-regular maximum likelihood problems. J R Stat Soc. SerB(Methodological) .57(1):3–44.
[6] Anatolyev S, Kosenok G (2005) An alternative to maximum likelihood based on spacings. Econom Theory 21(2):472–476.
[7] ShaoY, HahnMGet al (1999) Maximum product of spacings method: a unified formulationwith illustration of strong consistency. Ill J Math 43(3):489–499
[8] Cheng R, Stephens MA (1989) A goodness-of-fit test using Moran's statistic with estimated parameters.Biometrika 76(2):385–392.
[9] Chen MH, Shao QM (1999) Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. J Comput Gr Stat 8(1):69–92.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–206، صص. ۲۰۹–۲۱۵

تابع مولد اطلاع مبتنی بر مقادیر رکورد

زهره زمانی *[آ]، امید خوارزمی [ب]

[آ] بخش آمار،دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان
[ب] بخش آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تابع مولد اطلاع
رکورد
ترتیب تصادفی

2020 MSC:
62N05
62E10
94A17

چکیده

در این مقاله، تابع مولد اطلاع برای مقادیر رکورد محاسبه شده و یکنوایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین تأثیر تبدیلات یکنوا بر تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که ترتیب تابع مولد اطلاع بین متغیرهای تصادفی، ترتیب تابع مولد اطلاع بین رکوردهای متناظر آن‌ها را نتیجه می‌دهد. در پایان نیز کران‌هایی برای تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد ارائه خواهد شد.

۱. مقدمه

در آزمایش‌های دنباله‌ای مواردی وجود دارد که کل مشاهدات ثبت نمی‌شود، داده‌هایی در نظر گرفته می‌شود که از مقادیر ماقبل خود کوچکتر یا بزرگترند. این گونه داده‌ها به داده‌های رکوردی معروف هستند که در طیف وسیعی از مسائل از جمله رشته‌های ورزشی، هواشناسی، بیماری‌های همه‌گیر، زلزله‌شناسی و اقتصاد کاربرد دارند. فرض کنید $\{X_i,\ i \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. X_j را یک رکورد بالا گوییم اگر مقدار آن از همه مشاهدات قبلی بزرگتر باشد. بنابراین X_j یک مقدار رکورد بالا است اگر $X_j > X_i$ برای همه مقادیر $i < j$. طبق قرارداد $X_۱$ را اولین رکورد بالا تعریف می‌کنیم. یک مشاهده در صورتی به عنوان یک رکورد پایین شناخته می‌شود که مقدار آن از مقادیر قبلی کوچکتر باشد. زمانی که در آن رکورد رخ می دهد، خود یک متغیر تصادفی است که زمان رکورد نامیده می‌شود. زمان‌های رکورد، توسط T_j نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T_۱ = ۱,\ \ T_n = \min\{n : X_n > X_{T_{n-۱}}\}.$$

فرض کنید $U_۱$، ... و U_n مقادیر n رکورد بالا از یک توزیع با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. در این صورت چگالی توأم n رکورد اول بالا و همچنین چگالی حاشیه‌ای U_n (رکورد n ام بالا برای $n \geq ۱$) به ترتیب توسط روابط

$$q(u) = \prod_{i=۱}^{n} r(u_i) f(u_n),\ \ u_۱ < \cdots < u_n,$$

*سخنران
پست الکترونیک: z.zamani@uk.ac.ir (زهره زمانی)، omid.kharazmi@vru.ac.ir (امید خوارزمی)

و

$$f_{U_n}(u_n) = \frac{R^{n-1}(u_n)}{(n-1)!} f(u_n), \quad -\infty < u_n < \infty, \tag{1}$$

محاسبه می‌شود که در آن $R(t) = -\log(1 - F(t))$ و $r(t) = R'(t) = f(t)/1 - F(t)$ تابع نرخ خطر است.
فرض کنید L_1، ... و L_n، مقادیر n رکورد پایین از تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. چگالی حاشیه‌ای L_n (رکورد n ام پایین) برای $n \geq 1$ عبارت است از

$$f_{L_n}(l_n) = \frac{\tilde{R}^{n-1}(l_n)}{(n-1)!} f(l_n), \quad -\infty < l_n < \infty, \tag{2}$$

که در آن $\tilde{R}(t) = -\log F(t)$.
برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد تئوری و کاربرد آماره‌های رکوردی، می‌توان به آرنولد [1] و همکاران [۱] مراجعه نمود.
در نظریه اطلاع، توابع مولد برای چگالی‌های احتمال تعریف می‌شوند تا کمیت‌هایی مانند اطلاع شانون و واگرایی کولبک لیبر را توسعه دهند. تابع مولد اطلاع برای تابع چگالی f توسط گلمب [2] [۲] به صورت زیر معرفی شد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی f باشد. تابع مولد اطلاع (IG) از چگالی f برای هر $\alpha > 0$ به صورت

$$G_\alpha(X) = G_\alpha(f) = \int f^\alpha(x)dx, \tag{3}$$

تعریف می‌شود، مشروط بر اینکه انتگرال وجود داشته باشد.

گلمب [۲] نشان داد که $G_\alpha(X)$ دارای ویژگی‌های زیر است
الف. $G_1(X) = 1$.
ب. $\frac{\partial}{\partial\alpha} G_\alpha(X)\Big|_{\alpha=1} = -H(f)$،
که در آن $H(f) = -\int f(x)\log f(x)dx$ آنتروپی شانون متغیر تصادفی است که توسط شانون [3] [۶] در سال ۱۹۴۸ معرفی شد.
تمرکز ما در این مقاله بر محاسبه تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد است. در بخش ۲، مقدار تابع مولد اطلاع برای رکوردهای بالا و پایین محاسبه شده و یکنوایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نشان داده می‌شود که ترتیب تابع مولد اطلاع بین متغیرهای تصادفی، ترتیب تابع مولد اطلاع بین رکوردهای متناظر آن‌ها را نتیجه می‌دهد. کران‌هایی برای تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد نیز در بخش ۳ ارائه شده است.

۲. تابع مولد اطلاع رکوردها و بررسی ویژگی‌هایی از آن

در این بخش تابع مولد اطلاع برای مقادیر رکورد بالا و پایین حاصل از دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی محاسبه شده و ویژگی‌هایی از آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در لم بعد نشان داده شده است که تابع مولد اطلاع n امین رکورد بالا از یک توزیع دلخواه، بر اساس تابع مولد اطلاع رکورد n ام بالا از توزیع نمایی استاندارد بیان می‌شود.

لم ۱.۲. *فرض کنید $\{X_n,\ n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F(x)$، تابع چگالی $f(x)$ و تابع چندک $F^{-1}(.)$ باشد. تابع مولد اطلاع رکورد n ام بالا عبارت است از*

$$G_\alpha(U_n) = G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1} E_{g_n}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1 - e^{-V_n}))], \tag{4}$$

که در آن $U_n^* \sim \Gamma(n, 1)$، رکورد n ام بالا از توزیع نمایی استاندارد است. همچنین V_n از توزیع گاما با پارامترهای $(\alpha(n-1)+1, 1)$ پیروی می‌کند و تابع چگالی آن با g_n نشان داده می‌شود.

[1] Arnold
[2] Golomb
[3] Shannon

اثبات. با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۳) و استفاده از تغییر متغیر $v = -\log(1 - F(x))$ داریم

$$\begin{aligned} G_\alpha(U_n) &= \int_0^\infty \frac{v^{\alpha(n-1)}e^{-v}}{\Gamma^\alpha(n)} f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-v}))dv \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma^\alpha(n)} \int_0^\infty \frac{v^{\alpha(n-1)}e^{-v}}{\Gamma(\alpha(n-1)+1)} f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-v}))dv. \end{aligned} \quad (۵)$$

حال فرض کنید U_n^* رکورد n ام بالا از توزیع نمایی استاندارد باشد، در این صورت

$$G_\alpha(U_n^*) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\alpha^{\alpha(n-1)+1}\Gamma^\alpha(n)}. \quad (۶)$$

با ساده کردن رابطه (۵) و استفاده از رابطه (۶)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

مثال ۲.۲. فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع پارتو II با تابع چگالی $f(x) = ca^c(x+a)^{-(c+1)}$, $a, c > 0$, $x > 0$ پیروی کند. در این صورت $F^{-1}(x) = a[(1-x)^{-\frac{1}{c}} - 1]$. حال طبق روابط (۴) و (۶)، مقدار تابع مولد اطلاع n امین رکورد بالا به صورت

$$G_\alpha(U_n) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma^\alpha(n)} (\frac{c}{a})^{\alpha-1} [\frac{c}{\alpha c + \alpha - 1}]^{\alpha(n-1)+1},$$

به دست می‌آید.

لم ۳.۲. *فرض کنید L_n رکورد n ام پایین از دنباله $\{X_n,\ n \geq 1\}$ بیان شده در لم ۱.۲ باشد. در این صورت مقدار تابع مولد اطلاع L_n برابر است با*

$$G_\alpha(L_n) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma^\alpha(n)} E_{g_n}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(e^{-V_n}))], \quad (۷)$$

که در آن $V_n \sim \Gamma(\alpha(n-1)+1, 1)$.

اثبات. شبیه لم ۱.۲ بوده و بنابراین حذف شده است. □

در قضیه بعد تأثیر تبدیلات یکنوا بر مقدار تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. همچنین فرض کنید ϕ تابعی اکیدا صعودی است به طوری‌که $\phi(0) = 0$ و $\phi(\infty) = \infty$. قرار دهید $Y = \phi(X)$، در این صورت*

$$G_\alpha(U_n^Y) = G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1} E\left[\frac{f(F^{-1}(1-e^{-V_n}))}{\phi'(F^{-1}(1-e^{-V_n}))}\right]^{\alpha-1}, \quad (۸)$$

که در آن $V_n \sim \Gamma(\alpha(n-1)+1, 1)$ و U_n^Y رکورد n ام بالا متناظر با متغیر تصادفی Y است.

اثبات. فرض کنید Y دارای تابع توزیع G و تابع چگالی g باشد. با جایگذاری $G(y) = F(\phi^{-1}(y))$ و $g(y) = \frac{f(\phi^{-1}(y))}{\phi'(\phi^{-1}(y))}$ در تعریف تابع مولد اطلاع برای U_n^Y داریم

$$\begin{aligned} G_\alpha(U_n^Y) &= \int_0^\infty \frac{[-\log(1-F(\phi^{-1}(y)))]^{\alpha(n-1)}[\frac{f(\phi^{-1}(y))}{\phi'(\phi^{-1}(y))}]^\alpha}{\Gamma^\alpha(n)} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{[-\log(1-F(x))]^{\alpha(n-1)} f^\alpha(x)}{(\phi'(x))^{\alpha-1}\Gamma^\alpha(n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma^\alpha(n)} E\left[\frac{f(F^{-1}(1-e^{-V_n}))}{\phi'(F^{-1}(1-e^{-V_n}))}\right]^{\alpha-1}, \end{aligned} \quad (۹)$$

که تساوی دوم و آخر به ترتیب توسط تبدیلات $x = \phi^{-1}(y)$ و $v = -\log(1-F(x))$ حاصل شده‌اند. حال نتیجه مطلوب با استفاده از رابطه (۶) به دست می‌آید. □

مثال ۵.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر λ باشد و برای $\beta \geq ۱$، قرار دهید $\phi(x) = \beta x$. لذا ϕ یک تابع اکیدا صعودی با دو شرط $\phi(۰) = ۰$ و $\phi(\infty) = \infty$ است. بنابراین با درنظر داشتن قضیه ۴.۲ می‌توان نشان داد که

$$G_\alpha(\phi(U_n^X)) = \frac{۱}{\beta^{\alpha-۱}} G_\alpha(U_n^X).$$

امروزه ترتیب‌های تصادفی مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته‌اند و به طور گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، اقتصاد ، بیمه و نظریه صف استفاده می‌گردند. مباحث جامعی از ترتیب‌های تصادفی و کابردهای آن‌ها در کتاب‌های شیکد و شانتیکومار [۴] و مولر و استویان [۵] گردآوری شده است. اکنون تعاریفی از برخی ترتیب‌های تصادفی مرور خواهد شد که در ادامه مورد نیاز است. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع بقا $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$ و توابع چگالی $f(x)$ و $g(x)$ باشند.

تعریف ۶.۲. الف. متغیر تصادفی X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی معمولی است ($X \leq_{st} Y$)، هرگاه به ازای همه مقادیر x، $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$.

ب. متغیر X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی است ($X \leq_{lr} Y$)، اگر $f(x)/g(x)$ تابعی غیرنزولی نسبت به x باشد.

ملاحظه ۷.۲. شیکد و شانتیکومار [۵] نشان دادند که اگر $X \leq_{st} Y$، آنگاه برای هر تابع غیرنزولی (غیر صعودی) h، با شرط وجود امید ریاضی، رابطه $E(h(X)) \leq (\geq) E(h(Y))$ برقرار است.

تعریف ۸.۲. متغیر X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی پراکندگی است، اگر و تنها اگر $g(G^{-۱}(x)) \leq f(F^{-۱}(x))$ برای همه مقادیر $x \in (۰,۱)$ که به صورت $X \leq_{disp} Y$ نمایش داده می شود.

خوارزمی و بالاکریشنان [۳] براساس تابع مولد اطلاع، ترتیبی به صورت زیر بیان کردند.

تعریف ۹.۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع مولد اطلاع $G_\alpha(X)$ و $G_\alpha(Y)$ باشند. گفته می‌شود که X کوچکتر از Y در تابع مولد اطلاع است اگر برای همه مقادیر $\alpha > ۰$ رابطه $G_\alpha(X) \leq G_\alpha(Y)$ برقرار باشد که با نماد $X \leq_{IG} Y$ نشان داده می‌شود.

در ادامه یکنوایی تابع مولد اطلاع مقادیر رکورد مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد. همچنین فرض کنید U_n رکورد nام بالا از دنباله ملکور باشد. اگر $f(x)$ تابعی غیر نزولی از x باشد، آنگاه $G_\alpha(U_n)$ به ازای $\alpha > ۱$ ($۰ < \alpha < ۱$) تابعی غیر نزولی (غیر صعودی) نسبت به n است.*

اثبات. با توجه به روابط (۴) و (۶)، می‌توان نوشت

$$G_\alpha^*(U_n) = \log G_\alpha(U_n) = c_n + \log E_{g_n}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))], \qquad (۱۰)$$

که در آن $c_n = \log \Gamma(\alpha(n-۱)+۱) - \alpha \log \Gamma(n)$. بنابراین

$$G_\alpha^*(U_{n+۱}) - G_\alpha^*(U_n) = (c_{n+۱} - c_n) + \log \frac{E_{g_{n+۱}}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_{n+۱}}))]}{E_{g_n}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))]}. \qquad (۱۱)$$

با در نظر گرفتن n به عنوان متغیری پیوسته و مشتقگیری از c_n نسبت به n داریم

$$\frac{dc_n}{dn} = \alpha[\psi(\alpha(n-۱)+۱) - \psi(n)],$$

که در آن $\psi(x) = \frac{d}{dx}[\log \Gamma(x)] = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ تابع دایگاما است. به ازای $\alpha > ۱$ ($۰ < \alpha < ۱$)، نامساوی $\alpha(n-۱)+۱ > (<) n$ برقرار است. بنابراین با توجه به صعودی بودن تابع $\psi(x)$ می‌توان نشان داد که c_n تابعی صعودی (نزولی) نسبت به n است. از طرفی می‌توان ثابت کرد که $\frac{g_n(v)}{g_{n+۱}(v)}$ تابعی نزولی نسبت به v است یعنی $V_n \leq_{lr} V_{n+۱}$ و در نتیجه $V_n \leq_{st} V_{n+۱}$. از طرفی $f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-x}))$ نیز تابعی غیرنزولی (غیرصعودی) از x به ازای $\alpha > ۱$ ($۰ < \alpha < ۱$) است. بنابراین طبق ملاحظه ۷.۲، داریم

$$E_{g_{n+۱}}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_{n+۱}}))] > (<) E_{g_n}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))],$$

و لذا $\log \frac{E_{g_{n+۱}}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-V_{n+۱}}))]}{E_{g_n}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-V_n}))]} \geq (\leq) ۰$. بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

[4] Shaked and Shantikumar
[5] Muler and Stoyan

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنید $\{X_n,\ n\geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مشابه قضیه ۱۰.۲ و L_n رکورد nام پایین از دنباله ملکور باشد. اگر $f(x)$ تابعی غیر نزولی از x باشد، آنگاه $G_\alpha(L_n)$ به ازای $\alpha>۱$ $(۰<\alpha<۱)$ تابعی غیر نزولی (غیر صعودی) نسبت به n است.*

در قضیه بعد با استفاده از تابع مولد اطلاع متغیرهای تصادفی، تابع مولد اطلاع رکوردهای متناظر آن‌ها تعیین می‌گردد.

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته به ترتیب با توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$ و توابع چگالی $f(x)$ و $g(x)$ باشند. همچنین فرض کنید $\inf A_۱ \geq \sup A_۲$ و*

$$A_۱=\left\{\nu>۰\Big|\frac{g(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))}{f(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))}\leq ۱\right\}, \tag{۱۲}$$

$$A_۲=\left\{\nu>۰\Big|\frac{g(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))}{f(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))}> ۱\right\}. \tag{۱۳}$$

۱. *اگر $۰<\alpha<۱$ و $X\leq_{IG} Y$، آنگاه $U_n^X\leq_{IG} U_n^Y$.*
۲. *اگر $\alpha>۱$ و $X\geq_{IG} Y$، آنگاه $U_n^X\geq_{IG} U_n^Y$.*

اثبات. اگر هریک از مجموعه های $A_۱$ یا $A_۲$ تهی باشند، نتیجه بدیهی و واضح است. بنابراین فرض کنید $A_۱\neq\emptyset$ و $A_۲\neq\emptyset$. ترتیب تصادفی $X\leq_{IG} Y$ به ازای هر $\alpha>۰$ معادل است با $G_\alpha(X)-G_\alpha(Y)\leq ۰$. در نتیجه

$$\int f^\alpha(x)dx-\int g^\alpha(x)dx=\int_۰^\infty e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu\leq ۰, \tag{۱۴}$$

که تساوی با استفاده از تبدیلات $\nu=-\log(۱-F(x))$ و $\nu=-\log(۱-G(x))$ حاصل شده است. برای هر $۰<\alpha<۱$ بایستی ثابت کرد که

$$\begin{aligned} G_\alpha(U_n^X)-G_\alpha(Y_n^Y) &= \int f_{U_n^X}^\alpha(x)dx-\int g_{U_n^Y}^\alpha(x)dx=\frac{۱}{\Gamma^\alpha(n)}\int[-\log(۱-F(x))]^{\alpha(n-۱)}f^\alpha(x)dx \\ &- \frac{۱}{\Gamma^\alpha(n)}\int[-\log(۱-G(x))]^{\alpha(n-۱)}g^\alpha(x)dx=\frac{۱}{\Gamma^\alpha(n)}D\leq ۰. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $\nu=-\log(۱-F(x))$ و $\nu=-\log(۱-G(x))$ داریم

$$\begin{aligned} D &= \int_۰^\infty \nu^{\alpha(n-۱)}e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &= \int_{A_۱} \nu^{\alpha(n-۱)}e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &+ \int_{A_۲} \nu^{\alpha(n-۱)}e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &\leq (\inf A_۱)^{\alpha(n-۱)}\int_{A_۱} e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &+ (\sup A_۲)^{\alpha(n-۱)}\int_{A_۲} e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &\leq (\inf A_۱)^{\alpha(n-۱)}\int_{A_۱} e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &+ (\inf A_۱)^{\alpha(n-۱)}\int_{A_۲} e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu \\ &= (\inf A_۱)^{\alpha(n-۱)}\int_۰^\infty e^{-\nu}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱-e^{-\nu}))-g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(۱-e^{-\nu}))]d\nu\leq ۰, \end{aligned}$$

که نامساوی دوم و تساوی آخر به ترتیب با استفاده از فرض $\inf A_۱\geq\sup A_۲$ و رابطه (۱۴) حاصل شده‌اند.
برای $\alpha>۱$، اثبات به طور مشابه انجام می‌شود. □

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنید X و Y طبق قضیه ۱۲.۲ تعریف شوند. همچنین فرض کنید*

$$A_1 = \left\{ \nu > 0 \Big| \frac{g(G^{-1}(e^{-\nu}))}{f(F^{-1}(e^{-\nu}))} \leq 1 \right\}, \tag{۱۶}$$

$$A_2 = \left\{ \nu > 0 \Big| \frac{g(G^{-1}(e^{-\nu}))}{f(F^{-1}(e^{-\nu}))} > 1 \right\}, \tag{۱۷}$$

و $\inf A_1 \geq \sup A_2$. در این صورت

۱. *اگر $0 < \alpha < 1$ و $X \leq_{IG} Y$، آنگاه $L_n^X \leq_{IG} L_n^Y$.*
۲. *اگر $\alpha > 1$ و $X \geq_{IG} Y$، آنگاه $L_n^X \geq_{IG} L_n^Y$.*

۳. کرانهایی برای تابع مولد احتمال مقادیر رکورد

در این بخش به محاسبه کران‌هایی از تابع مولد احتمال برای مقادیر رکورد در دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پرداخته می‌شود.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع مولد اطلاع متناهی $G_\alpha(X) < \infty$ باشد. آنگاه تابع مولد اطلاع n امین رکورد بالا، U_n، دارای کران زیر است.*

$$G_\alpha(U_n) \leq G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1} B_n \int_{-\infty}^{\infty} r(x) f^{\alpha-1}(x)dx, \tag{۱۸}$$

که در آن $U_n^* \sim \Gamma(n,1)$ و $B_n = (\alpha(n-1))^{\alpha(n-1)}/\Gamma(\alpha(n-1)+1)e^{-\alpha(n-1)}$، مشروط بر اینکه انتگرال وجود داشته باشد.

اثبات. به راحتی می توان نشان داد که $m_n = \alpha(n-1)$ مد چگالی g_n با توزیع گاما است و بنابراین $g_n(\nu) \leq B_n = g_n(m_n)$. در نتیجه

$$E_{g_n}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-V_n}))] \leq B_n \int_0^{\infty} f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-\nu}))d\nu = B_n \int_{-\infty}^{\infty} r(x) f^{\alpha-1}(x)dx,$$

که تساوی فوق با استفاده از تبدیل $x = F^{-1}(1-e^{-\nu})$ حاصل شده است. حال با جایگذاری رابطه بالا در (۴)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

مثال ۲.۳. فرض کنید $\{X_i,\ i \geq 1\}$ یک دنباله ازمتغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع نمایی با تابع چگالی

$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ \theta > 0, x > 0,$$

باشد. در این صورت $r(x) = \theta$ و برای هر $\alpha > 1$ داریم $\int_0^{\infty} r(x) f^{\alpha-1}(x)dx = \theta^{\alpha-1}/(\alpha-1)$. بنابراین

$$G_\alpha(U_n) \leq G_\alpha(U_n^*) B_n \frac{\alpha^{\alpha(n-1)+1}\theta^{\alpha-1}}{\alpha-1}. \tag{۱۹}$$

قضیه ۳.۳. *تحت فرضیات قضیه ۱.۳، برای هر $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$) می توان ثابت کرد که*

$$G_\alpha(U_n) \leq (\geq) G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1} M^{\alpha-1}, \tag{۲۰}$$

که در آن $M = f_X(m) < \infty$ و $m = \sup\{x : f_X(x) \leq M\}$ مد توزیع است.

مثال ۴.۳. مثال. فرض کنید $\{X_i,\ i \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع پارتو با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{\theta\beta^\theta}{x^{\theta+1}},\ x \geq \beta > 0,\ \theta > 0.$$

باشند، آن‌گاه $M = \theta\beta^{-1}$ و $r(x) = \frac{\theta}{x}$. در نتیجه طبق قضیه ۱.۳ کران زیر برای تابع مولد اطلاع به دست می‌آید

$$G_\alpha(U_n) \leq G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1}B_n\frac{\theta^\alpha}{(\alpha-1)(\theta+1)\beta^{\alpha-1}}.$$

از طرفی به ازای $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$) نیز می‌توان نشان داد

$$G_\alpha(U_n) \leq (\geq)G_\alpha(U_n^*)\alpha^{\alpha(n-1)+1}(\frac{\theta}{\beta})^{\alpha-1}.$$

با استفاده از روابط (۴) و (۶) نیز مقدار تابع مولد اطلاع رکورد nام بالا در دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی از این توزیع عبارت است از

$$G_\alpha(U_n) = \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma^\alpha(n)}\frac{\theta^{n\alpha}}{\beta^{\alpha-1}[\alpha\theta+(\alpha-1)]^{\alpha(n-1)+1}}.$$

مراجع

[1] Barry C Arnold, Narayanaswamy Balakrishnan, and Haikady N Nagaraja. *Records*, volume 768. John Wiley & Sons, 2011.

[2] S Golomb. The information generating function of a probability distribution (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 12(1): 75–77, 1966.

[3] Omid Kharazmi and Narayanaswamy Balakrishnan. Information generating function for order statistics and mixed reliability systems. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, pages 1–10, 2021.

[4] A Müller and D Stoyan. Comparison methods for stochastic models and risks. john willey & sons. *Inc., New York*, 2002.

[5] Moshe Shaked and J George Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer, 2007.

[6] Claude Elwood Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3):379–423, 1948.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–209، صص. ۱–۱۹

مطالعه‌ی رفتار خوشه‌ای فرایندهای نقطه‌ای زیان و محاسبه‌ی برخی از معیارهای سنجش ریسک

سامان سپهوند[آ]، سجاد رامندی[ب]، فاطمه نصیری اردلی[ج]

[آ] کارشناس ارشد اکچوئری، کارشناس توسعه محصول شرکت بیمه دی، تهران، ایران
[ب] دکتری اقتصاد بهداشت، معاون فنی شرکت بیمه دی، تهران، ایران
[ج] کارشناسی ارشد مهندسی نرم افزار، دانشگاه علوم و تحقیقات تهران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
فرایند نقطه‌ای خود انگیزشی
توزیع تعمیم‌یافته‌ی پارتو (GPD)
ارزش در معرض مخاطره (VaR)
احتمال پیشامد زیان کرانگین (ELEP)
توزیع‌های دم‌سنگین
مدل‌های دوره‌ی شرطی خود بازگشتی

چکیده

به زبان ساده پیشامد کرانگین به پیشامدی نادر گفته می‌شود که در مباحث مالی و بیمه‌ای منجر به رخداد زیان‌های بسیار بزرگ می‌گردد. به دلیل مخاطره گریز بودن شرکت‌ها مدل‌سازی زیان‌های کرانگین از اهمیت بسیاری برخوردار است. با این مقدمه برای سنجش و کنترل مخاطره‌ی این نوع از محصولات باید از معیارهای مناسب و دقیقی بهره جست. ازآنجایی‌که شاخص‌های مالی و قیمت سهام به‌شدت تحت تأثیر رفتار گذشته‌ی خود و دینامیک زمانی است، لذا عدم توجه به این مقوله موجب وقوع بحران‌های مالی می‌شود. در این مقاله با رویکردی نوین برخی از معیارهای سنجش مخاطره‌ی بازارهای مالی را موردمطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از فرایند نقطه‌ای خود انگیزشی (هاوکس، ۱۹۷۱) و تابع شدت مرتبط با آن، نرخ وقوع پیشامدهای زیان کرانگین در آینده را براورد می‌کنیم. سپس به کمک این تابع شدت براوردگرهایی از معیار مخاطره‌ی VaR و ELEP شرطی یک‌روزه ارائه می‌دهیم. این براوردگرها اولین بار توسط حمیدیه و همکاران (۲۰۱۲) معرفی و پیشنهاد شدند. در این براودگرها به‌خوبی اثر دینامیک زمانی و تاریخچه‌ی رفتار گذشته‌ی فرایند انعکاس داده می‌شود. همچنین از خصوصیات ارزشمند این براوردگرها تفسیرپذیری آن‌هاست. در انتها به کمک ۱۰ سری از مجوعه‌مشاهدات مرتبط با بازار سهام ایران این براوردها محاسبه و با چند روش کلاسیک مقایسه می‌شوند.

۱. مقدمه

امروزه مفاهیمی چون سهام، اوراق قرضه، اوراق مشارکت و ابزارهای مالی ازاین‌دست برای همگان مفاهیمی آشناست و تقریباً زندگی تمامی افراد، حتی شرایط اقتصادی کشور به‌طور مستقیم و یا غیرمستقیم تحت تأثیر این مقوله مالی قرار می‌گیرد. بی‌شک فقدان درک و نگرش تخصصی مناسب در انجام مطالعات بازار موجب ایجاد خسارت‌های جبران‌ناپذیر شده و شرکت‌ها را دچار معضل می‌کند.
برای سنجش میزان مخاطره‌ی این نوع از محصولات می‌بایست از معیارهای دقیق و مناسب بهره جست. البته هریک از معیارهای سنجش مخاطره‌ی موجود دارای نقاط ضعف و قوت مختص خود هستند. برای مثال معیار VaR در سطح $q \in (۰,۱)$ عبارت است از صدک qام توزیع خسارت‌ها و از آن به‌عنوان شاخصی برای سنجش مخاطره‌ی تعهدات استفاده می‌شود. این معیار تنها از روی توزیع حاشیه‌ای اطلاعات شکل می‌گیرد، ازاین‌رو این معیار از دینامیک زمانی و اثرات آن بر بازار مالی چشم‌پوشی می‌نماید (مک‌نیل، ۲۰۱۵) این مسئله می‌تواند نتایج نامناسبی به همراه داشته باشد. هدف اصلی این مقاله توسعه و اصلاح براوردگرهای معیار مخاطره‌ی مالی به کمک مدل پیشنهادشده‌ی حمیدیه و

پست الکترونیک: S_sepahvand@dayins.com (سامان سپهوند)، s_ramandi@dayins.com (سجاد رامندی)، fatemenasiri70@yahoo.com (فاطمه نصیری اردلی)

همکاران (۲۰۱۲) است. با ایجاد یک رابطه میان تابع شدت [۱] فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه و زیان‌های کرانگین [۲] رخ‌داده به‌عنوان نشان‌های [۳] فرایند، می‌توان قدرت پیش‌گویی مدل را افزایش داد. همچنین تابع شدت فرایند موردمطالعه به کمک مدل‌های دوره‌ی شرطی خود بازگشتی معرفی‌شده توسط انگل و راسل (۱۹۹۸) مدل‌سازی می‌شود. سپس به کمک تابع شدت براورد شده براوردگرهایی از معیارهای مخاطره ارائه می‌شود.

۲. پیشینه‌ی تحقیق

به زبان ساده معیار ارزش در معرض مخاطره یک مقداری عددی است، به‌طوری‌که این مقدار خلاصه‌ای از وضعیت مخاطره‌ی داشتمان [۴] موردمطالعه را عنوان می‌نماید. این معیار مخاطره در اواخر دهه‌ی ۱۹۹۰ پس‌ازآنکه برخی از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری و صندوق‌های بازنشستگی زیان‌های ناگهانی بزرگی متحمل شدند، موردتوجه قرار گرفت. هری‌مارکویز (۱۹۵۳) برنده‌ی جایزه‌ی نوبل با ارائه‌ی مدلی کمی، برای سرمایه‌گذاری بهینه‌ی یک داشتمان علاوه بر بازده، استفاده از معیار ارزش در معرض مخاطره را پیشنهاد داد. معیار ارزش در معرض مخاطره در صنعت به‌طور عملی و برای اولین بار توسط شرکت جی.پی.مورگان (۱۹۹۳) برای سنجش میزان مخاطره مورداستفاده قرار گرفت. پس از معرفی معیار ارزش در معرض مخاطره و کسب مقبولیت فراوان، برای بهبود عملکرد آن، تاکنون روش‌های متنوع بسیاری پیشنهادشده است. به‌طور مثال با توجه به وابستگی بازده‌های مالی و وقوع پیشامدهای زیان کرانگین به‌صورت خوشه‌ای، انگل (۱۹۸۲) مدل‌های ناهم‌واریانس آرچ را برای محاسبه‌ی ارزش در معرض مخاطره پیشنهاد داد (انگل و راسل، ۱۹۸۲). پس‌ازآن بولرسلو (۱۹۸۷) برای بهبود دقت این براوردگر با تعمیم مدل پیشنهادشده‌ی انگل مدل‌های ناهم‌واریانس گارچ را معرفی و مورداستفاده قرارداد (بولرسلو، ۱۹۸۷). با توجه به کرانگین بودن بازده‌های مالی و دم‌سنگین بودن توزیع این مشاهدات، کریستیانسن (۱۹۹۹) برای بهبود عملکرد مدل به‌جای توزیع نرمال موجود در مدل گارچ از توزیع دم‌سنگین t به‌عنوان توزیع جمله‌ی نوفه‌ی مدل استفاده کرد. این اقدام موجب بهبود چشمگیر دقت براورد ارزش در معرض مخاطره شد. همچنین مک‌نیل و فری (۲۰۰۰) با به‌کارگیری نظریه مقادیر کرانگین و مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی، مدل مناسبی برای محاسبه‌ی این معیار پیشنهاد دادند (مک‌نیل، ۲۰۰۰). همچنین روش شدت‌مبنا ارائه‌شده توسط حمیدیه و همکاران (۲۰۱۲) یکی از بهترین و جدیدترین روش‌های موجود برای محاسبه‌ی معیار ارزش در معرض مخاطره به شمار می‌رود. در مقاله‌ی حمیدیه و همکاران (۲۰۱۲) براوردهای شدت‌مبنا [۵] و براوردهای خطی‌مبنا به‌صورت گسترده‌ای مورد مقایسه قرار می‌گیرند. پیشنهاد می‌شود برای آشنایی بیشتر با این براوردگرها این مقاله (حمیدیه، ۲۰۱۲) موردمطالعه قرار گیرد.

۳. بازده و لگاریتم بازده

به‌طورکلی سود یا زیان یک داشتمان، به‌صورت تغییر قیمت آن در طول دوره‌ای معین از زمان تعریف می‌شود. درصورتی‌که ارزش یک سرمایه‌گذاری در زمان t را به‌صورت P_t نشان دهیم، آنگاه تغییر ارزش یک داشتمان را به‌صورت $\delta P_t = P_t - P_{t-1}$ تعریف می‌کنیم. درصد بازده یک سرمایه‌گذاری در طول یک دوره عبارت است از

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\delta P_t}{P_t} \quad (1)$$

در دوره‌های کوتاه‌مدت شاخص درصد بازده به‌خوبی توسط لگاریتم بازده تقریب زده می‌شود و داریم

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},\ R_t + 1 = \frac{P_{t-1}}{P_t} \Rightarrow \ln(R_t + 1) = \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_t}\right) \quad (2)$$

و درصورتی‌که $R_t \to 0$ آنگاه

$$\ln\left\{\frac{P_{t-1}}{P_t}\right\} \simeq \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (3)$$

بنابراین هنگامی‌که بازه‌ی زمانی بسیار کوتاه باشد، تفاضل لگاریتم داشتمان‌ها بسیار نزدیک به بازده داشتمان است و این دو معیار را می‌توان به‌جای یکدیگر مورداستفاده قرارداد (سی، ۲۰۰۵).

[1] intensity function
[2] Extreme
[3] Marked
[4] portfolio
[5] intensity base

۴. مشاهدات کرانگین و توزیع‌های دم‌سنگین

خسارت‌های بسیار بزرگ و زمان وقوع آن‌ها در مباحث مالی و بیمه‌ای بسیار حائز اهمیت است. به این مقادیر اصطلاحاً زیان‌های کرانگین می‌گویند. زیان‌های کرانگین اثر زیادی بر روی سیاست‌ها و شرایط مالی شرکت‌ها دارند و متعلق به دم توزیع خسارت‌ها هستند. در نظریه احتمال به توزیع‌هایی دم‌سنگین[۶] می‌گویند که دم آن‌ها دارای شکل تابع‌نمایی نیست. توزیع‌های وایبول، پارتو، فرهشه و ... مثال‌هایی از توزیع‌های دم‌سنگین به شمار می‌روند. با توجه به متون آماری مشاهدات کرانگین عموماً به ۲ صورت زیر ایجاد می‌شوند:

- **روش ماکسیمم بلوک‌ها:** در این رویکرد بزرگ‌ترین مشاهده‌ی موجود در هر دوره را به‌عنوان مقدار کرانگین آن دوره در نظر می‌گیریم، سپس به مجموعه‌ی مقادیر کرانگین جمع‌آوری‌شده در چندین دوره، مشاهدات کرانگین حاصل‌شده به روش ماکسیمم بلوک‌ها گوییم.
- **روش قله‌های فراتر از آستانه:** در این رویکرد با تعیین یک مقدار u به‌عنوان حد آستانه[۷]، به‌تمامی مشاهدات بزرگ‌تر از u مشاهدات کرانگین حاصل‌شده به روش قله‌های فراتر از آستانه یا مشاهدات دمی گوییم.

قضیه۱- : (بالکما ـ دی‌هان ـ پیکاندس) فرض کنید X یک متغیر تصادفی مثبت مقدار با تابع توزیع F_X باشد. متغیر تصادفی Y را به‌صورت

$$Y = \begin{cases} \text{تعریف نشده}, X < u \\ X - u, X \geq u \end{cases} \quad ; \tag{۴}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن u متعلق به دامنه‌ی سمت راست دم توزیع X است. در این صورت توزیع متغیر تصادفی Y عبارت است از

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y + u \,|X \geq u) = ۱ - \frac{S_X(y+u)}{S_X(u)}$$
$$\lim_{u\to\infty} P(Y \leq y) = \lim_{u\to\infty} P(X \leq y + u \,|X \geq u) \to ۰$$

(۵)

بنابراین به ازای مقادیر بسیار بزرگ u توزیع متغیر تصادفی Y که همان توزیع مشاهدات کرانگین حاصل‌شده به روش قله‌های فراتر از آستانه است، به صفر میل نموده و تباهیده می‌شود. در این صورت اگر به ازای ثابت‌های $c_n > ۰$ ، $d_n \in Rc_n$ ، تابع توزیع حدی W_γ به‌صورت

$$F(c_n y + d_n) \xrightarrow{d} W_{\gamma,\alpha,\theta}(x). \tag{۶}$$

موجود باشد، آنگاه W_γ به یکی از ۳ توزیع معرفی‌شده‌ی

$$W_{\gamma,\alpha,\mu,\theta}(x) = \begin{cases} ۱ - \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\theta}\right\}, x \geq \mu \\ ۱ - \left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}, x \geq \mu + \theta, \alpha, \theta > ۰ \\ ۱ - \left\{\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right\}, \mu - \theta < x < \mu; \end{cases} \tag{۷}$$

تعلق دارد. $W_۰(x)$را توزیع نمایی، $W_۱(x)$را توزیع پارتو و $W_۲(x)$را توزیع بتا گویند. به‌طورکلی این۳ توزیع را خانواده‌ی توزیع‌های کرانگین پارتو تعمیم‌یافته (GPD[۸]) می‌نامند .

برهان: به مدل‌های زیان کلاگمن (کلاگمن ،۲۰۱۲ صفحه‌ی ۸۴) و همکاران مراجعه شود.

در ادامه برای مدل‌سازی زیان‌های کرانگین از خانواده‌ی توزیع‌های دم‌سنگین GPD بهره‌ی زیادی می‌گیریم.

۵. مدل دوره‌ی شرطی خود بازگشتی (ACD[۹])

مدل ACD یا دوره‌ی شرطی خود بازگشتی اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط انگل و راسل مطرح شد. از این مدل برای مطالعه و تحلیل زمان انجام معاملاتی که به‌صورت نامنظم و تصادفی صورت می‌گرفت استفاده شد. به‌طورکلی در علوم مالی و اقتصادسنجی از این مدل برای مدل‌سازی

[6] Heavy-tailed distribution
[7] Threshold
[8] Generalized Pareto distribution
[9] Autoregressive conditional duration

مدت‌زمان سپری‌شده تا وقوع پیشامدهای متوالی در بازارهای مالی استفاده می‌شود. به کمک ساختار خاص این مدل و با به‌روزرسانی اطلاعات می‌توان قدرت پیش‌گویی را افزایش داد (باونس و جیوت، ۱۹۹۸). از قابلیت‌های این مدل می‌توان به توانایی آن در مدل‌سازی فرایندهای خوشه‌ای و مشاهدات بیش پراکنده اشاره کرد. پس از انگل و راسل مشتقات بسیاری از مدل‌های ACD توسط پژوهشگران ایجاد شد. مدل Log-ACD یکی از این مشتقات به شمار می‌رود (باونس و جیوت ، ۱۹۹۷و ۲۰۰). این مدل توسط جیوت و همکاران (۲۰۰۰)پیشنهاد گردید. در این مقاله از این مدل برای تشریح تابع شدت فرایند نقطه‌ای موردمطالعه بهره می‌گیریم.

فرض کنید که دنباله‌ی $0 = T_0 \le T_1 \le T_2 \le \dots \le T_n \le \dots$ نشان‌دهنده‌ی زمان وقوع پیشامدهایی دلخواه باشند. همچنین تعداد پیشامدهای رخ‌داده تا زمان t را به‌صورت $N(t)$نشان می‌دهیم. بنابراین $\{N(t),\ t \ge 0\}$نشان‌دهنده‌ی فرایند نقطه‌ای موردمطالعه است. تابع شدت شرطی فرایند $\{N(t),\ t \ge 0\}$ را به‌صورت

$$\lambda(t|F_t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(N\{t, t+h\} > 0 | F_t)}{h} \qquad (۸)$$

نشان می‌دهیم. همچنین فرایند تصادفی $\{X_j\ ,\ j \ge 1\}$ را به‌صورت $X_j = T_{j+1} - T_j$ تعریف می‌کنیم. فرایند تصادفی X_j نشان‌دهنده‌ی مدت‌زمان سپری‌شده تا وقوع $j+1$امین پیشامد متوالی است و هدف این مقاله مدل‌سازی این فرایند تصادفی است. جیوت و همکاران (۲۰۰۰) مدل زیر را برای تشریح $\{X_j\ ,\ j \ge 1\}$ پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\{\psi_t\}\varepsilon_t \\ \psi_t &= \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \psi_{t-1} \\ E(X_t | F_{t-1}) &= \exp\{\psi_t\} E(\varepsilon_t) \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن F_tیک پالایه و $\theta = \{\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}$ نشان‌دهنده‌ی بردار پارامترهای مجهول و قابل براورد مدل است. جمله‌های نوفه‌ی ε_tرا مستقل و هم توزیع با میانگین واحد فرض می‌کنند و به آن‌ها توزیع‌هایی با دامنه‌ی مثبت مانند وایبول، نمایی، گاما و لگ نرمال نسبت می‌دهند. با در نظر گرفتن p=۱ و q=۱ ، مدل Log- ACD به‌صورت

$$= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\psi_{t-1}, \varepsilon_{t-1} = \frac{X_{t-1}}{\exp\{\psi_{t-1}\}} \Rightarrow \psi_t = \omega + \alpha\left(\frac{X_{t-1}}{\exp\{\psi_{t-1}\}}\right) + \beta\psi_{t-1} \qquad (t)$$

حاصل می‌شود. این مدل ازنظر ساختاری مشابه مدل نمایی گارچ معرفی‌شده توسط نلسون (۱۹۹۱) است. برای مانای کوواریانسی این مدل باید شرط $|\beta| < 1$ برقرار باشد (پکیورا، ۲۰۰۸).

۱-۵-تفسیر تابع شدت فرایند $\{N(t), t \ge 0\}$ از طریق نرخ مخاطره‌ی $\{X_j, j \ge 1\}$

با توجه به نرخ مخاطره‌ی فرایند تصادفی $\{X_j\ ,\ j \ge 1\}$تابع شدت شرطی فرایند نقطه‌ای $\{N(t),\ t \ge 0\}$را می‌توان به‌صورت زیر مطرح نمود. درصورتی‌که توزیع جمله‌های نوفه‌ی مدل را به‌صورت $Wibull(1,\gamma)$فرض کنیم، داریم

$$\begin{aligned} &P\left(X_{N(t)+1} < x | F_t\right) = P(\exp\{\psi_{N(t)+1}\}\varepsilon_{N(t)+1} < x | F_t) = P(\varepsilon_{N(t)+1} < x \exp\{-\psi_{N(t)+1}\} | F_t) \Rightarrow \\ &f_{X_{N(t)+1}}(x | F_t) = \gamma \exp\{-\psi_{N(t)+1}\}(\exp\{-\psi_{N(t)+1}\}x)^{\gamma-1} \exp(-x \exp\{-\psi_{N(t)+1}\})^{\gamma} \Rightarrow (11) \\ &X_{N(t)+1} | F_t \sim Wibull(\mathrm{e}^{-\psi_t}, \gamma) \end{aligned}$$

بنابراین نرخ مخاطره‌ی $X_{N(t)}$به‌صورت

$$\lambda(x_t | F_t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} P\left(X_{N(t)+1} \le x | F_t\right)}{P\left(X_{N(t)+1} > x | F_t\right)} = \left(\mathrm{e}^{-\psi_t}\right)^{\gamma} (x_t)^{\gamma-1} \gamma \qquad (۱۲)$$

حاصل می‌شود. برای براورد پارامترهای β ،α ،ωاز روش ماکسیمم درستنمایی بهره می‌گیریم. با توجه به اینکه X_jها به‌صورت شرطی مستقل‌اند، تابع درستنمایی به‌صورت

$$\ell(\theta | x) = log\left\{f(x_1) \prod_{t=2}^{n} f\left(x_t | x_{[1,2,\dots,t-1]}\right)\right\} \qquad (۱۳)$$

حاصل می‌شود. عبارت $x_{[1,2,\dots,t-1]}$ نشان‌دهنده‌ی بردار مشاهدات $(x_1, x_2, \dots, x_{t-1})$ است. با توجه به اینکه X_jها به‌صورت شرطی دارای توزیع

وایبول هستند، با جایگذاری توزیع X_jها در تابع درستنمایی داریم

$$\ell(\theta|x) = \log\left\{\prod_{t=1}^{n}\left\{\left(\gamma e^{-\psi_{N(t)}}\right)\left(x_t e^{-\psi_{N(t)}}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(e^{-\psi_{N(t)}}x_i\right)^{\gamma}}\right\}\right\}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\left\{\log\left(\gamma e^{-\psi_{N(t)}}\right) + (\gamma-1)\log\left(x_t e^{-\psi_{N(t)}}\right) - \left(x_t e^{-\psi_{N(t)}}\right)^{\gamma}\right\} \quad (۱۴)$$

پس از برازش مدل برای پس آزمایی می‌توان از مانده‌های مدل استفاده کرد. مانده‌های مدل از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شوند:

$$X_t = \exp\{\psi_t\}\varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{X_t}{\exp\{\psi_t\}} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_t = \frac{x_t}{\exp\{\hat{\psi}_t\}}, \hat{\psi}_t = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{\varepsilon}_{t-1} + \hat{\beta}\hat{\psi}_{t-1} \quad (۱۵)$$

۶. مدل‌سازی زیان‌های کرانگین به کمک فرایند نقطه‌ای

فرض کنید $\{Z_t\}_{t\geq 0}$نشان‌دهنده‌ی منفی لگاریتم بازده‌های داشتمان تحت مطالعه باشد به‌طوری‌که $t \in \mathbb{Z}^+$سری زمانی $\{Z_t\}_{t\geq 0}$دارای توزیعی مطلقاً پیوسته است. بنابراین اگر ارزش داشتمان تحت مطالعه را در زمان t به‌صورت P_t نشان دهیم آنگاه

$$Z_t = -\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \Rightarrow Z_t \simeq -\ln(R_t) \quad (۱۶)$$

ازاین‌پس به‌جای بازده داشتمان از مقادیر Z_t استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن یک مقدار مناسب به‌عنوان حد آستانه‌ی u، به مقادیر $Z_t > u$ زیان کرانگین گوییم. زیان‌های کرانگین رخ‌داده را به‌صورت Z_{T_i} نشان می‌دهیم. اندیس T_i نشان‌دهنده‌ی زمان وقوع i امین زیان کرانگین است. بنابراین همواره داریم

$$\{Z_{T_i} > u, T \in \mathbb{Z}^+, i \in \mathbb{N}\}$$

همچنین متغیر Y_i وابسته به Z_{T_i} را به‌صورت

$$Y_i = Z_{T_i} - u$$

تعریف می‌کنیم. Y_iها زیان‌های مازاد[10] بر حد آستانه‌ی u تعریف می‌شوند. بنابراین هرچه مقدار مشاهده‌شده‌ی Y_iبزرگ‌تر باشد، مقدار زیان کرانگین متناظر با آن در انتهای دم سمت راست توزیع Z_iها قرار می‌گیرد. بردار دوتایی $\{(T_i, Y_i)\}_{i\geq 1}$را برای ایجاد فرایند نقطه‌ای نشان‌دار موردنظر معرفی می‌کنیم. Y_iها به‌عنوان نشان‌های فرایند نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شوند.
فرایند تصادفی $X_{i+1} = T_{i+1} - T_i, i \geq 1$نشان‌دهنده‌ی مدت‌زمان سپری‌شده تا وقوع پیشامدهای زیان کرانگین متوالی تعریف می‌شود. با این تفاسیر فرایند نقطه‌ای نشان‌دار $\{N(t),\ t \geq 0\}$ تعریف‌شده بر $\{(T_i, Y_i)\}_{i\geq 1}$ را به‌صورت

$$N(t) \equiv \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\ ,\ t > 0\} \quad (۱۷)$$

نشان می‌دهیم. تاریخچه و رفتار گذشته‌ی فرایند نقطه‌ای نشان‌دار $\{N(t),\ t \geq 0\}$را به‌صورت پالایه‌ی F_t نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$F_t \equiv \sigma\{(X_j, Y_j), j \leq t\}$$

تعریف می‌کنیم. F_n نشان‌دهنده‌ی سیر افزایشی اطلاعات نسبت به گذشت زمان و یک سیگما میدان است، به‌طوری‌که فرایند نقطه‌ای $\{N(t),\ t \geq 0\}$ نسبت به آن اندازه‌پذیر است. تابع شدّت شرطی فرآیند نقطه‌ای $\{N(t),\ t \geq 0\}$را به‌صورت

$$\lambda(t|F_t) = \lim_{h\to 0}\frac{P(N\{t, t+h\} > 0|F_t)}{h} \quad (۱۸)$$

$$X_{t+1} = T_{t+1} - T_t, t \geq 1$$
$$X_t = \exp\{\psi_t\}\varepsilon_t$$
$$\psi_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\psi_{t-1} + \eta Y_t$$

نشان می‌دهیم. می‌دانیم که اگر $\lambda(t) \equiv c, t \in [0, \infty)$ که در آن c مقداری ثابت است، آنگاه فرایند نقطه‌ای ایجادشده را همگن می‌نامند. برای مدل‌سازی تابع شدت شرطی $\lambda(t|F_t)$ با اضافه کردن یک متغیر خارجی به‌صورت Y_t به‌عنوان نشان‌های فرایند نقطه‌ای $\{N(t),\ t \geq 0\}$ به مدل Log-ACD مطرح‌شده در بخش قبل داریم

[10] Excess Loss

(۱۹)
برای محاسبه‌ی معیارهای مخاطره به کمک این مدل، به جمله‌ی نوفه‌ی ε_t توزیع‌های بسیاری ازجمله نمایی، گاما، وایبول و...برازش شد. تغییر توزیع نوفه‌ی مدل در بهبود عملکرد براوردگرها اثر معنی‌داری نداشت، ازاین‌رو برای سادگی، در ادامه توزیع جمله‌ی نوفه‌ی مدل را نمایی استاندارد فرض می‌کنیم. برای به دست آوردن تابع درستنمایی و براورد پارامترهای مدل در این حالت، کافی است در تابع درستنمایی .... مقدار پارامتر γ را برابر۱قرار دهیم. در این صورت توزیع شرطی جمله‌ی نوفه‌ی مدل از $Wibull(۱,\gamma)$ به $Exp(۱)$تغییریافته و داریم

$$X_{N(t)+۱}\,|F_t \sim Wibull(e^{-\psi_t},\gamma=۱) \equiv Eep(e^{-\psi_t})$$
$$f_{X_۱}(x_۱) = e^{-\psi_۰}e^{-(e^{-\psi_۰}x_۱)}$$
$$f_{X_t}(x_t\,|x_{[۱,\dots,t-۱]},y_{[۱,\dots,t-۱]}) = e^{-\psi_t}e^{-(e^{-\psi_t}x_t)}, t\in\{۲,۳,\dots\}$$

(۲۰)

بنابراین با جایگذاری این توزیع‌ها در تابع درستنمایی، این تابع به‌صورت

$$\ell(\theta|x,y) = Log\left\{\prod_{t=۱}^{n}\left(e^{-\psi_t}e^{-(e^{-\psi_t}x_t)}\right)\right\} = -\sum_{t=۱}^{n}\left\{Log(\psi_t)+\left(\frac{x_t}{\exp\{\psi_t\}}\right)\right\} \quad (۲۱)$$

تقلیل می‌یابد. برای براورد پارامترها باید از روش‌های عددی مناسب بهره گرفت، زیرا شکل بسته‌ی مشتقات جزئی تابع موجود نیست. با توجّه به توزیع شرطی $X_{N(t)}$ها و خاصیت عدم حافظه‌ی توزیع نمایی داریم

$$P(\{N(t,t+h)=۰\,|F_t\}) = P(X_{N(t)}>h\,|F_t)(۲۲)$$
$$= \exp\{-h\lambda(t|F_t)\}$$
$$= \exp\{-(he^{-\psi_{N(t)}})\}$$

و با قرار دادن h=۱ داریم

$$P(\{N(t,t+h)=۰\,|F_t\}) = \exp\{-(e^{-\psi_{N(t)}})\}(۲۳)$$

بنابراین به کمک مدلLog-ACD تابع شدت فرایند نقطه‌ای$\{N(t),\ t\geq ۰\}$ به‌صورت

$$\lambda(t|F_t) = \exp\{-\psi_t\}$$

به دست می‌آید.

۷. براورد معیارهای مخاطره‌ی ELEP[11] و VaR شرطی

با توجه به ثبت بازده داشتمان به‌صورت روزانه، معیارهای مخاطره‌ی موردمطالعه را می‌توان برای روز آتی محاسبه نمود. در ادامه نحوه‌ی محاسبه‌ی این معیارهای مخاطره به کمک تابع شدت براورد شده تشریح می‌شود.

۱.۷ . *معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی*

احتمال پیشامد زیان کرانگین یا ELEP یکی از معیارهای سنجش مخاطره‌ی بازارهای مالی به شمار می‌رود. با در نظر گرفتن یک مقدار زیان کرانگین به‌صورت u این معیار به‌صورت

$$\rho_u(t) = P(Z_{t+۱}>u|F_t)\ (۲۴)$$

تعریف می‌شود. در این قسمت قصد داریم تا به کمک مدل مطرح‌شده و تابع شدت فرایند نقطه‌ای، این معیار مخاطره را براورد نماییم. با توجّه به فرایند نقطه‌ای$\{N(t),\ t\geq ۰\}$دو پیشامد

$$\{N(t,t+۱)=۱|F_t\} = \{Z_{t+۱}>u|F_t\}(۲۵)$$

[11] extreme loss event probability

معادل هستند. در حقیقت وقوع یک زیان کرانگین مازاد بر u در زمان t+۱، معادل آن است که در همین زمان فرآیند نقطه‌ای$\{N(t),\ t \geq ۰\}$یک ورودی داشته باشد. با این تفاسیر داریم

$$\begin{aligned}&\rho_u(t) = P(Z_{t+۱} > u|F_t)\\&= ۱ - P(\{N(t,t+۱) = ۰\}|F_t)\\&= ۱ - \exp\{-\lambda(t|F_t)\}\\&\hat{\lambda}\,(t|F_t) = \exp\left\{-\left(\hat{\omega} + \hat{\alpha}\varepsilon_{N(t)} + \hat{\beta}\psi_{N(t)} + \hat{\eta}y_{N(t)}\right)\right\}\end{aligned} \quad (۲۶)$$

بنابراین به کمک تابع شدّت براورد شده، می‌توان یک براوردگر مناسب برای براورد معیار مخاطره‌ی ELEP تعریف کرد.

۲.۷ . تقریب معیار مخاطره‌ی *ELEP*

$\lim_{u\to\infty} \rho_u\,(t) = P\,(\{Z_{t+۱} > u\}\,|F_t) \to ۰$ (۲۷) بدیهی است که به ازای مقادیر بزرگ u به‌عنوان مقدار حد آستانه، مقدار ELEP شرطی کاهش می‌یابد و داریم

$$\rho_u(t) \simeq \lambda(t|F_t) + o(\lambda(t|F_t)) \quad (۲۸)$$

ازاین‌رو به ازای مقادیر بسیار بزرگ ،u مقدار براورد $\lambda(t|F_t)$را می‌توان به‌طور مستقیم به‌عنوان تقریبی از براورد$\rho_u(t)$مورداستفاده قرارداد. در این صورت داریم
که در آن$o(h)$ تابعی به‌صورت

$$\lim_{h\to۰} \frac{o(h)}{h} = ۰$$

است. ازاین‌رو تابع شدت براورد شده به کمک اطلاعات گذشته، به‌عنوان تقریبی از معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی برای روز آینده مورداستفاده قرار می‌گیرد. برای تفسیر این رابطه داریم

$$\frac{\delta\rho_u(t)}{\rho_u(t)} = \frac{۱ - \exp\{-\delta\lambda(t|F_t)\}}{\exp\{\lambda(t|F_t)\} - ۱} \simeq \frac{\delta\lambda(t|F_t)}{\lambda(t|F_t)} \quad (۲۹)$$

بنابراین تغییرات نسبی ایجادشده در مقدار ELEP شرطی را می‌توان به کمک تغییرات نسبی تابع شدّت برآورد شده تفسیر نمود. اکنون یک سؤال مهم این است که وقوع پیشامدهای کرانگین تا چه اندازه در معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی مؤثر واقع می‌شوند و این اثر به چه شکل است؟ برای پاسخ به این سؤال باید رابطه‌ی بین مقدار زیان کرانگین و تابع شدّت را موردبررسی قرارداد.

$$\begin{matrix}\lambda(t|F_t) = \exp\{-(\omega + \alpha\varepsilon_{N(t)} + \beta\psi_{N(t)} + \eta Y_{N(t)})\} \Rightarrow\\ \frac{\delta\lambda(t|F_t)}{\lambda(t|F_t)} \simeq \exp\left\{-\eta\left(\delta Y_{N(t)}\right)\right\} - ۱ \simeq -\eta\left(\delta Y_{N(t)}\right)\end{matrix} \quad (۳۰)$$

با توجه به‌تقریب نهایی، تغییرات نسبی تابع شدّت تقریباً برابر با مقدار تغییر در میزان زیان کرانگین با ضریب$\eta-$است. به عبارتی در صورت۰٫۰۱ افزایش در مقدار زیان کرانگین، میزان تغییرات نسبی تابع شدّت برابر$\eta(۰٫۰۱)-$خواهد بود. از طرفی طبق رابطه‌ی ....داریم

$$\frac{\delta\rho_u(t)}{\rho_u(t)} \simeq \frac{\delta\lambda(t|F_t)}{\lambda(t|F_t)} \simeq -\eta\left(\delta Y_{N(t)}\right) \quad (۳۱)$$

بنابراین در صورت تغییر مقدار زیان کرانگین به‌اندازه‌ی$\delta Y_{N(t)} = ۰٫۰۱$ تغییرات نسبی معیارELEP شرطی برابر$-\eta(\delta Y_{N(t)})$ است.

۳.۷ . معیار مخاطره‌ی *VaR* شرطی

در مقدمه معیار سنجش مخاطره‌ی یاVAR ارزش در معرض مخاطره مورد توصیف قرار گرفت.در این قسمت پس از تعریف دقیق این معیار مخاطره نحوه‌ی براورد آن به کمک تابع شدت ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن$\{Z_t\}_{t\geq۰}$به‌عنوان بازده‌های داشتمان تحت مطالعه ارزش در معرض مخاطره‌ی شرطی صدکqام توزیع این بازده‌ها را به‌صورت$VAR_q(t)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$VAR_q(z) = \inf\{z \in Z : P\,(\{Z > z\}|F_t) \leq ۱ - q\} \quad (۳۲)$$

با توجه به متغیر تصادفیY_i(مقادیر زیان مازاد بر u) و رابطه‌ی آن با بازدهZ_{T_i}، توزیع این متغیر به‌صورت

$$F_Y(y_i) = P(Y_i < y_i) = P(Z_{T_i} - u < y_i|Z_{T_i} > u), Y_i = Z_{T_i} - u|Z_{T_i} > u \quad (۳۳)$$

بیان می‌شود. با توجه به قضیه‌ی مقادیر کرانگین (پیکاند ـ بالکما ـ دی‌هان، ۱۹۷۵)، توزیع مشاهدات کرانگین Y_iبه‌صورت

$$P(Y_i < x) = W_{\kappa,\xi}(x) \equiv ۱ - \left(۱ + \xi\frac{x}{\kappa}\right)_+^{-\frac{۱}{\xi}} \quad (۳۴)$$

قابل‌تعریف است. متغیرهای Y_iمستقل فرض می‌شوند. شرط استقلال ممکن است فرضی غیرواقعی باشد، ولیکن در نظر گرفتن وابستگی میان این متغیرها موجب بهبود عملکرد و افزایش دقّت براوردگر VaR شرطی نمی‌شود، ازاین‌رو این وابستگی را نادیده می‌گیریم. بازده‌ها عموماً از طریق توزیع‌های کران‌دار مدل‌سازی نمی‌شوند اگرچه در مسائل نظری همواره زیان‌های ادعاشده دارای کران بالا هستند. درهرحال خانواده‌ی توزیع‌های پارتو تعمیم‌یافته برای مدل‌سازی Y_iها خانواده‌ای منعطف و دارای خواص آماری مناسبی است (هاسکین و والیس، ۱۹۸۷). پس از محاسبه‌ی مقدار مناسب حد آستانه‌یu به کمک روش‌های مناسب ازجمله روش هیل[۱۲] (هیل، ۱۹۷۵) و براورد پارامترهای $\kappa > ۰, \xi \in \mathbb{R}^+$، به سراغ محاسبه‌ی معیار مخاطره‌ی VaR شرطی می‌رویم. این مقدار را به‌صورت $\zeta_q(t)$نشان می‌دهیم. به کمک احتمال شرطی، احتمال پیشامد $\{Z_{t+۱} > \zeta_q(t)\}$را می‌توان به‌صورت

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Z}_{t+۱} > \zeta_q(t)\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{Z}_{t+۱} - u > \zeta_q(t) - \mathrm{u}\}|\mathrm{Z}_{t+۱} > u)\mathrm{P}(\{\mathrm{Z}_{t+۱} > u\}), \zeta_q(t) > \mathrm{u} \quad (۳۵)$$

بیان کرد. از طرفی با توجه به معادل بودن دو پیشامد $\{N(t,t+۱) = ۱|F_t\} = \{Z_{t+۱} > u|F_t\}$به کمک معادله‌ی عنوان‌شده داریم

$$\begin{aligned} &P(\{Z_{t+۱} > \zeta_q(t)\}|F_t) = \\ &= P(\{Z_{t+۱} - u > \zeta_q(t) - u\}|Z_{t+۱} > u, F_t)P(\{Z_{t+۱} > u\}|F_t) \\ &= P(\{Y_{N(t)+۱} > \zeta_q(t) - u\}|Y_{N(t)+۱} > ۰, F_t)P(\{N(t.t+۱) = ۱\}|F_t) \\ &= ۱ - q \end{aligned} \quad (۳۶)$$

با توجّه به توزیع متغیر Y_iو مستقل فرض کردن آن‌ها داریم

$$\begin{aligned} &P\left(\{Z_{t+۱} > \zeta_q(t)\}|F_t\right) = \left(۱ + \xi\frac{\zeta_q - u}{\kappa}\right)^{\frac{-۱}{\xi}} \{۱ - P(\{N(t,t+۱) = ۰\}|F_t)\} \\ &= \left(۱ + \xi\frac{\zeta_q - u}{\kappa}\right)^{\frac{-۱}{\xi}} \left(۱ - \exp\{-\lambda(t|F_t)\}\right) \\ &= ۱ - q \end{aligned} \quad (۳۷)$$

بنابراین با این ترفند معیار مخاطره‌ی VaR به تابع شدّت فرایند نقطه‌ای $\{N(t),\ t \geq ۰\}$مرتبط می‌شود. درنهایت با حل معادله‌ی بالا و معکوس کردن آن داریم

$$\zeta_q(t) = u + \frac{\kappa}{\xi}\left\{\left(\frac{۱ - \exp(-\lambda(t|F_t))}{۱ - q}\right)^{\xi} - ۱\right\} \quad (۳۸)$$

۸. تفسیر مدل

با توجه به براوردگر به‌دست‌آمده برای بررسی و تفسیر مدل در معادله‌ی.... ، عبارت $۱ - \exp\{-\lambda(t|F_t)\}$را می‌توان به‌صورت

$$۱ - \exp\{-\lambda(t|F_t)\} = P(\{Z_{t+۱} > u|F_t\}) \quad (۳۹)$$

نوشت. بنابراین این براوردگر را می‌توان به‌صورت

$$\zeta_q(t) = u + \frac{\kappa}{\xi}\left\{\left(\frac{P(\{Z_{t+۱} > u|F_t\})}{۱ - q}\right)^{\xi} - ۱\right\} \quad (۴۰)$$

بازنویسی نمود. براوردگر غیرشرطی صدک qام توزیع زیان‌ها به‌صورت

$$\zeta_q^{un}(t) = u + \frac{\kappa}{\xi}\left\{\left(\frac{P(\{Z_{t+۱} > u\})}{۱ - q}\right)^{\xi} - ۱\right\} \quad (۴۱)$$

[12] Hill

قابل‌دستیابی است، که در آن un مختصر شده‌ی عبارت غیرشرطی (unconditonal) است. تفاوت این دو براوردگر، در شرطی کردن احتمال پیشامد $\{Z_{t+1} > u\}$ روی پالایه‌ی F_t است. این تفاوت بیانگر ایده‌ی مطرح‌شده توسط حمیدیه و همکاران (۲۰۱۲) برای بهبود عملکرد براوردگر معیار مخاطره‌ی VaR است. در حقیقت استفاده از براوردگر (۳۵) موجب توجه به دینامیک زمانی و تاریخچه‌ی رفتار گذشته‌ی فرایند در براورد معیار مخاطره‌ی VaR است.

۹. پس آزمایی و اعتبار سنجی مدل

بعد از توسعه‌ی مدل، قبل از استفاده از آن باید اعتبار آن موردسنجش و بررسی قرار گیرد. یکی از مؤلفه‌های کلیدی برای سنجش اعتبار مدل، استفاده از شیوه‌ی پس آزمایی[13] است (پلتیر، ۲۰۰۴). این شیوه شامل کاربرد روش‌های کمّی برای بررسی مطابقت مفروضات اولیه‌ای است که مدل بر مبنای آن ایجادشده.
به لحاظ نظری مفهوم پس آزمایی بسیار نوپا است زیرا مفهوم ارزش در معرض مخاطره به‌طور رسمی در سال ۱۹۹۳ معرفی و مورداستفاده قرار گرفت. دو تن از پیشگامان پس آزمایی به نام‌های کریستوفرسن و پلتیر (۱۹۹۸) اذعان نمودند که تاکنون تعداد بسیار کمی روش مناسب برای پس آزمایی براورد معیار ارزش در معرض مخاطره، ایجاد و توسعه‌یافته است. برای پس آزمایی به کمک سری زمانی $\{Z\}_{1\le t\le N}$ که در آن N نشان‌دهنده‌ی حجم نمونه‌ی استفاده‌شده در مطالعه است، پنجره‌هایی متحرک از مشاهدات به‌صورت $\{Z_{t-\ell+1}, Z_{t-\ell+2}, \dots, Z_t\},\ t \in \{\ell, \ell+1, \dots, N-1\}$ ایجاد می‌نماییم. در عبارت بالا ℓ نشان‌دهنده‌ی طول بردار مشاهدات است. حال به هر یک از پنجره‌های متحرک ایجادشده به‌طور مستقل مدل Log-ACD مطرح‌شده را برازش و به کمک آن مقادیر ELEP و VaR شرطی براورد می‌شوند. بنابراین به تعداد پنجره‌های متحرک، مقادیری به‌عنوان براورد ELEP و VaR شرطی یک‌روزه در اختیارداریم. در ادامه نحوه‌ی انجام آزمون‌های فرض و اعتبار سنجی براوردگرهای موردمطالعه ارائه می‌شود.

۱.۹ . نحوه‌ی پس آزمایی براورد معیار مخاطره‌ی *ELEP* شرطی

ازآنجایی‌که قادر به مشاهده‌ی مقدار دقیق معیار مخاطره‌ی ELEP نیستیم، لذا به کمک براورد مقدار ELEP به ازای هر پنجره‌ی $\{Z_{t-\ell+1}, Z_{t-\ell+2}, \dots, Z_t\},\ t \in \{\ell, \ell+1, \dots, N-1\}$ و مقایسه‌ی آن با مقدار مشاهده‌شده‌ی Z_{t+1} میزان دقّت براوردگر را می‌توان موردبررسی قرارداد. مقادیر بزرگ براورد شده‌ی معیار ELEP به‌منزله‌ی افزایش احتمال وقوع پیشامد زیان کرانگین است (و برعکس). پس از تعیین مقدار حد آستانه‌ی u به ازای تمام پنجره‌های به‌دست‌آمده، مشاهدات Z_{t+1} ،$t \in \{\ell, \ell+1, \dots, N-1\}$ را مورد مقایسه قرار می‌دهیم. درصورتی‌که پیشامد $\{Z_{t+1} > u\}$ محقق شده باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر را یادداشت می‌کنیم. بنابراین دنباله‌ای از مقادیر ۰ و ۱ ایجاد می‌شود، به دنباله‌ی ایجادشده یک دنباله‌ی برنولی می‌گویند. اعضای این دنباله با احتمال θ_{t+1} مقدار ۱ را می‌پذیرند. به‌طورکلی داریم

$$X_1, X_2, \dots, X_{N-\ell}$$
$$P(X_t = k) = \begin{cases} \theta_{t+1} = P(\{Z_{t+1} > u | F_t\}), k = 1 \\ 1 - \theta_{t+1} = P(\{Z_{t+1} \le u | F_t\}), k = 0 \end{cases} \Rightarrow X_t \sim Ber(\theta_{t+1}) \quad (۴۲)$$

برای سنجش اعتبار براوردهای ELEP شرطی، از مدل رگرسیونی لوژستیک به‌صورت

$$\log\left(\frac{\theta_{t+1}}{1-\theta_{t+1}}\right) = \phi_0 + \phi_1 \rho_u(t) \quad (۴۳)$$

استفاده می‌شود. در این مدل پارامتر ϕ_1 نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی آماری میان براوردهای ELEP شرطی و احتمال پیشامد زیان کرانگین است. بنابراین به کمک آزمون‌های فرض دوطرفه و مقدار-p مرتبط با آن، در مورد معنی‌داری پارامتر ϕ_1 می‌توان قضاوت نمود. بدیهی است که معنی‌دار بودن پارامتر ϕ_1 به معنی توانایی و موفقیت متغیر پیش‌گو $\rho_u(t)$ در پیش‌گویی ELEP است و این نیز به معنی صحت عملکرد براوردگر مورداستفاده در این مقاله است.

۲.۹ . نحوه‌ی پس آزمایی براورد معیار مخاطره‌ی *VaR*

برای پس آزمایی و سنجش اعتبار براوردهای VaR شرطی و مقادیر حاصل‌شده‌ی $\zeta_q(t)$ پس از ایجاد پنجره‌های متحرک و محاسبه‌ی مقادیر $\zeta_q(t)$ به ازای هر پنجره، این براوردها با مقدار Z_{t+1} $t \in \{\ell, \ell+1, \dots, N-1\}$ مقایسه می‌شوند. درصورتی‌که پیشامد $\{Z_{t+1} > \zeta_q(t)\}$ مشاهده شود، گوییم تخطی[14] به وقوع پیوسته است و عدد ۱ را متناظر با آن ثبت می‌کنیم، در غیر این صورت عدد ۰ را یادداشت می‌کنیم. مجدداً

[13] Backtesting
[14] violation

دنباله‌ای از مقادیر ۰ و ۱ را داریم. علی‌رغم شباهت روند این آزمون با قبل باید گفت، نحوه‌ی ایجاد دنباله‌های برنولی در اینجا کاملاً متفاوت با قبل است زیرا در حالت قبل معیار تخطی ثابت و همواره برابر u در نظر گرفته می‌شود، ولیکن احتمالات مرتبط با دنباله‌ی برنولی ایجادشده متفاوت است. امّا در اینجا معیار تخطی دنباله‌ها برابر $\zeta_q(t)$ است که این مقدار به ازای هر پنجره مقداری متفاوت است ولیکن احتمال وقوع این تخطی‌ها برای تمامی دنباله‌های برنولی ایجادشده ثابت و برابر $q - ۱$است.
ازآنجایی‌که دنباله‌های برنولی ایجادشده مستقل فرض می‌شوند، درصورتی‌که براوردهای VaR شرطی به‌درستی صورت گرفته باشند، تعداد موفقیت‌ها (تعداد تخطی‌های $\{Z_{t+۱} > \zeta_q(t)\}$) برابر امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &X_۱, X_۲, \dots, X_{N-\ell} \\ &P(X_t = k) = \begin{cases} P(\{Z_{t+۱} > \zeta_q(t)|F_t\}) = ۱ - q, k = ۱ \\ P(\{Z_{t+۱} \le \zeta_q(t)|F_t\}) = q, k = ۰ \end{cases} \Rightarrow X_t \sim Ber(۱ - q) \\ &\sum_{i=۱}^{N-\ell} X_i = Y \sim Bin(N - \ell, ۱ - q) \Rightarrow E\{Y\} = (N - \ell)(۱ - q) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

بنابراین درصورتی‌که مقادیر VaR شرطی به‌درستی براورد شده باشند، تعداد تخطی‌های رخ‌داده یا به عبارتی تعداد ۱های موجود در دنباله‌ی برنولی ایجادشده برابر $(N - \ell)(۱ - q)$ است.
برای سنجش اعتبار براوردهای حاصل‌شده از آزمون‌های دوطرفه می‌توان بهره گرفت، زیرا هر دو پدیده‌ی کم براوردی و بیش براوردی مقدار معیار مخاطره‌ی VaR شرطی می‌تواند بحران‌زا باشد. همچنین از آزمون لیونگ باکس[۱۵] برای بررسی خودهمبستگی میان زمان‌های وقوع تخطّی از مقدار VaR شرطی و فرض استقلال این مقادیر استفاده می‌شود و مقدار-p این آزمون گزارش می‌گردد.

۱۰. کار عددی

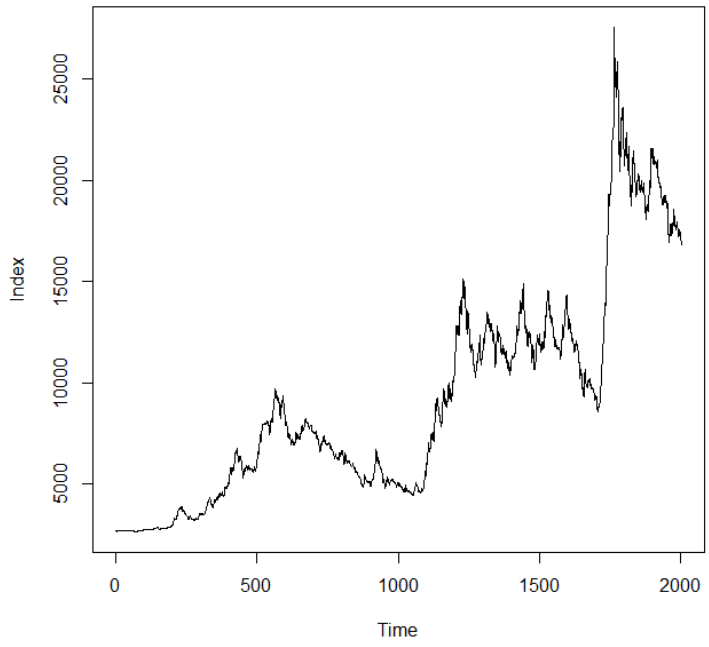
در این قسمت از مقاله مقادیر معیارهای مخاطره وELEP VAR شرطی یک‌روزه را محاسبه و سپس به کمک روش‌های مناسب پس آزمایی اعتبار آن‌ها را موردبررسی قرار می‌دهیم. برای براورد معیارهای مخاطره VAR و ELEP شرطی از مجموعه‌مشاهدات مالی بسیاری استفاده شد. از میان این مجموعه مشاهدات ۱۰ سری معرفی‌شده در جدول زیر شرایط ایدآلی را برای به‌کارگیری و ایجاد براوردهای معتبر داشتند و مورداستفاده قرار گرفتند. مشخصات این مجموعه مشاهدات در جدول زیر ارائه می‌شود.

جدول ۱: مجموعه‌مشاهدات مورداستفاده برای محاسبه‌ی معیارهای مخاطره

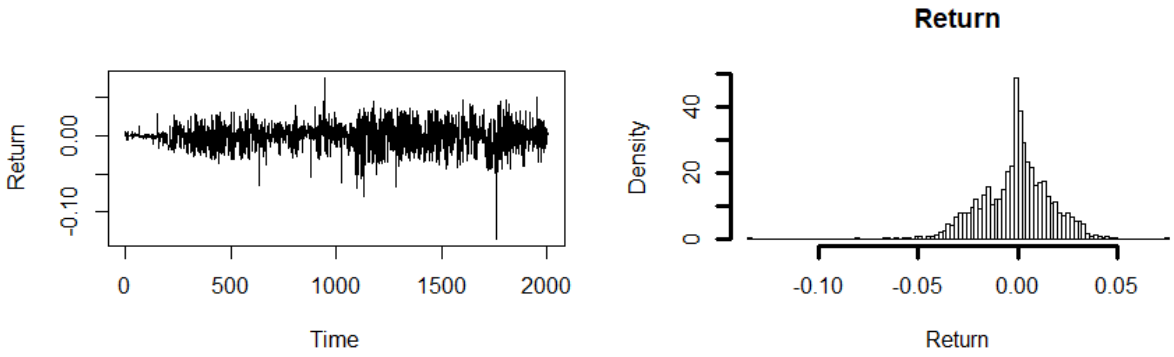
متغیر مورداستفاده	تعداد شرکت‌های عضو	تاریخ	بازار مالی
نرخ تبدیل	-	۱۳۹۶/۰۱/۰۱ تا ۱۳۸۵/۰۱/۰۱	دلار آمریکا
نرخ تبدیل	-	۱۳۹۶/۰۱/۰۱ تا ۱۳۸۵/۰۱/۰۱	دینار کویت
نرخ تبدیل	-	۱۳۹۶/۰۱/۰۱ تا ۱۳۸۵/۰۱/۰۱	کرون سوئد
شاخص	۱	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۷/۰۹/۱۵	انتشار و چاپ
شاخص	۳۱	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۷/۰۹/۱۵	خودرو
شاخص	۱	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۷/۰۹/۱۵	زراعت
شاخص	۱۶	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۷/۰۹/۱۵	سرمایه‌گذاری
شاخص	۱۱	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۷/۰۹/۱۵	کانی‌های غیرفلزی
قیمت سهام	-	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۰/۰۱/۰۵	شرکت وصنعت
قیمت سهام	-	۱۳۹۵/۱۲/۲۸ تا ۱۳۸۲/۰۱/۳۱	شرکت ونفت

با توجه به حجم زیاد محاسبات قادر به ارائه نتیجه‌ی تمام مجموعه مشاهدات نیستیم. در ادامه تنها به ازای صنعت خودرو نتایج و روند محاسبه‌ی معیارهای مخاطره به‌صورت کامل ارائه می‌شود. نتایج سایر مجموعه مشاهدات در جداول انتهای بخش نشان داده می‌شوند. برای محاسبه‌ی معیارهای مخاطره نیازمند مقدار مناسب حد آستانه‌یu هستیم. انتخاب این مقدار بسیار مهم و اثرگذار است به‌طوری‌که تمام محاسبات پس‌ازآن ازجمله مقدار براوردهای VAR و ELEP شرطی وابسته به آن است. به کمک نرم‌افزارR و رسم نمودارهای مناسب برای مجموعه مشاهدات مالی صنعت خودرو نتایج زیر راداریم. شاخص صنعت خودرو از تاریخ ۱۳۸۷/۰۹/۱۵ تا ۱۳۹۵/۱۲/۲۸ در نمودار زیر رسم می‌شود.
پس از محاسبه‌ی منفی لگاریتم بازده‌ها، شکل توزیع این مقادیر در نمودار زیر نشان داده می‌شود. مقادیر بزرگ Z_t به معنای کاهش ارزش سهام است و این به نفع کسانی است که در موقعیت فروش (position short) قرار دارند.

[15] Ljung–Box test



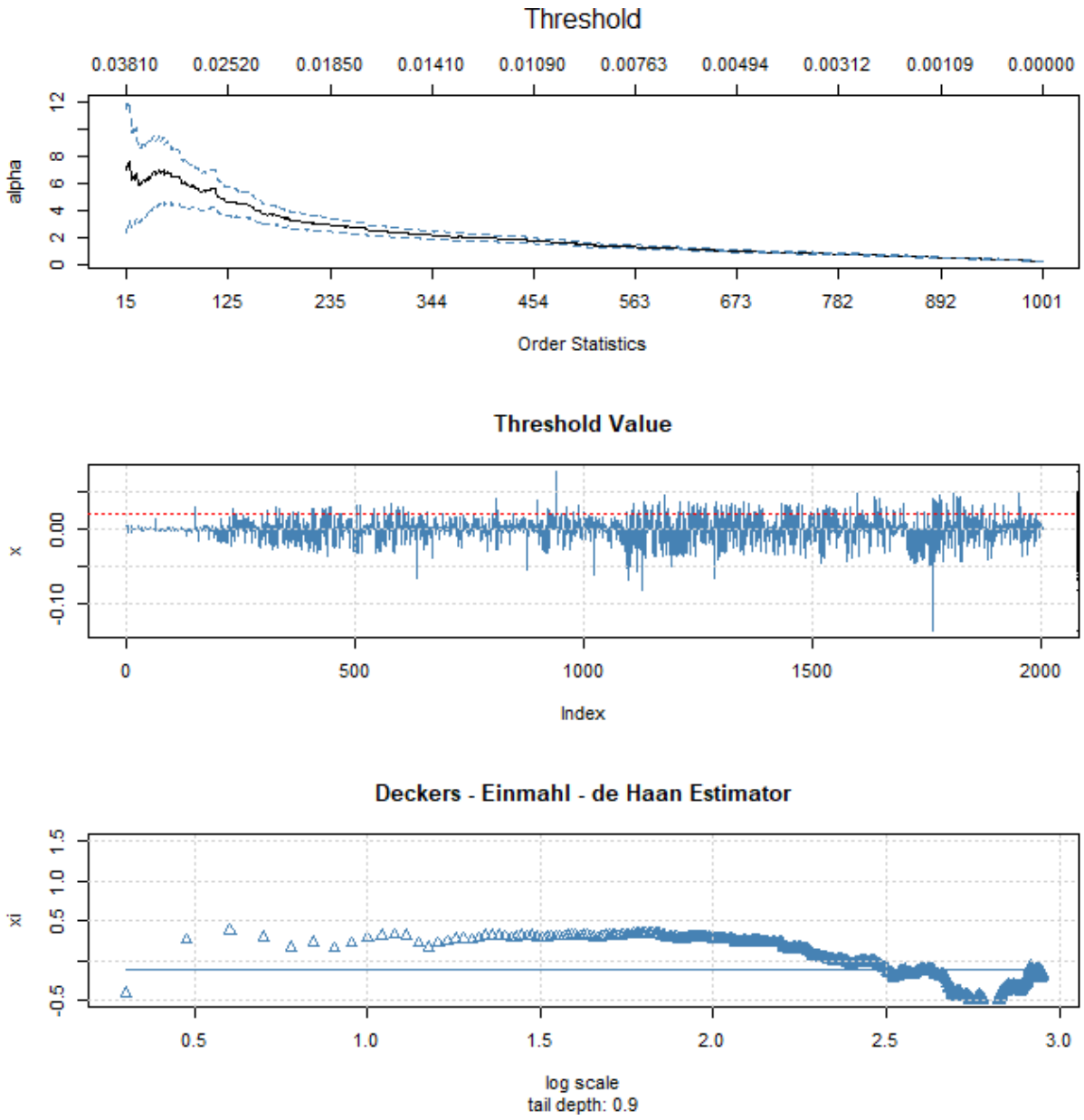
شکل ۱: نمودار تغییرات روزانه‌ی شاخص صنعت خودرو



شکل ۲: سری زمانی بازده‌های مالی صنعت خودرو و شکل توزیع آن‌ها

همان‌طور که انتظار داریم توزیع بازده‌های مالی حول صفر تقریباً متقارن و دارای دمی سنگین است. حال به کمک روش‌های مناسب مقدار حد آستانه‌ی بازده‌های صنعت خودرو را به دست آوریم. به کمک نمودارهای گرافیکی ایجادشده، ساختار دم توزیع و رفتار بازده‌های کرانگین را موردبررسی قرار می‌دهیم.

نمودار اول نشان‌دهنده مقدار بهینه‌ی حد آستانه به روش هیل است. شکل دوم نیز مقدار مناسب پارامتر ξ توزیع پارتو را به ازای خط‌چین رسم شده نشان می‌دهد. مقادیر پیشنهادشده متناظر با صدک ۹۰ام توزیع بازده‌ها است. بازه‌ی پیشنهادشده برای مقدار پارامتر شکل توزیع توسط نمودار آخر نیز برابر $\xi \in (-۰/۱, ۰/۲۴)$ است. درنهایت به کمک این ۳ نمودار و صدک ۹۰ام توزیع بازده‌ها، مقدار حد آستانه‌ی مناسب ۰۱۹.۰ تعیین می‌شود. نمودارهای زیر شکل توزیع بازده‌های قبل و بعد از مقدار حد آستانه را نشان می‌دهد.

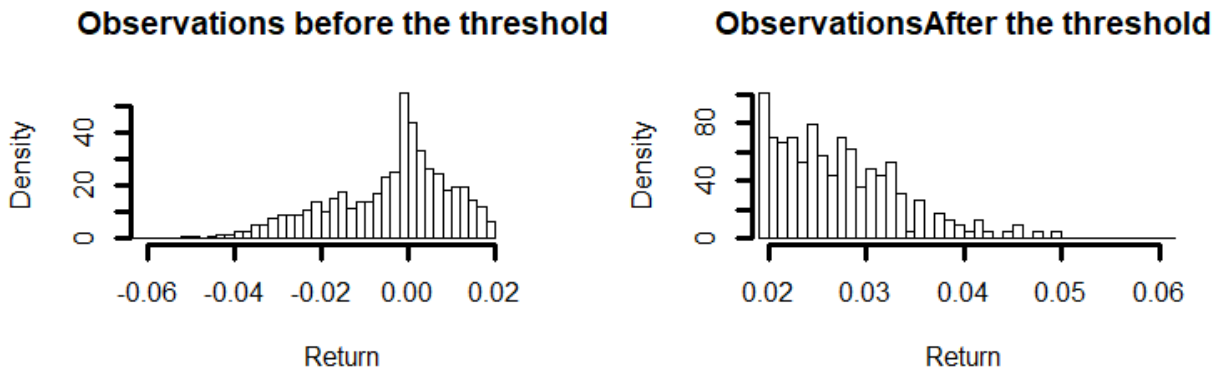


شکل ۳: تعیین مقدار حد آستانه به کمک براوردگر هیل

مقدار u به‌خوبی دم توزیع بازده‌ها را مشخص می‌نماید. در مرحله‌ی بعد به مشاهدات کرانگین بازده‌ها(بازده‌های بزرگ‌تر از u) توزیع دم‌سنگین پارتو برازش می‌دهیم. پارامترهای این توزیع را به روش ماکسیمم درستنمایی براورد می‌شوند .مجدداً به کمک نرم‌افزار R، برای مجموعه مشاهدات مالی صنعت خودرو پارامترهای براورد شده عبارت‌اند از $\xi = -0.09860, \kappa = 0.00909$. نمودارهای زیر برای سنجش اعتبار مدل برازش شده ارائه می‌شوند.

نمودار Q-Q و سایر نمودارهای رسم شده همگی نشان از مناسب بودن مدل برازش شده دارند و آن را موردحمایت قرار می‌دهند. در گام بعد به سراغ برازش مدلACD .می‌رویم-Log همان‌طور که قبل عنوان شد یکی از مفروضات اصلی این مدل پیروی توزیع جمله‌های نوفه‌ی مدل از توزیع نمایی استاندارد است. نمودار زیر نشان‌دهنده شکل توزیع مانده‌های حاصل‌شده از برازش مدل Log-ACD است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع مانده‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌نماید (میانگین مشاهدات برابر ۰.۹۹۸۷ است).

نمودار زیر نرخ مخاطره‌ی تجربی فرایند $\{X_t\}_{t\geq 1}$را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود فرایند نقطه‌ای مرتبط با وقوع زیان‌های کرانگین



شکل ۴: تفکیک بازده‌های قبل و بعد از حد آستانه

در مشاهدات مالی صنعت خودرو فرایندی ناهمگن است . نمودار قرمزرنگ نشان‌دهنده‌ی نرخ مخاطره‌ی ثابت است .
در مرحله‌ی بعد تابع شدت فرایند نقطه‌ای را می‌توان به کمک مدل Log- ACD برازش شده براورد نمود. برای مشاهدات مالی صنعت خودرو پارامترهای براورد شده‌ی مدل LOG-ACD عبارت‌اند از

$$\hat{\omega} = ۰٫۶۹۷, \hat{\alpha} = ۰٫۱۶۶, \hat{\beta} = ۰٫۶۸۷, \hat{\eta} = -۱۵٫۷۹$$

بنابراین تابع شدت براورد شده به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{N(t)} &= ٫۶۹۷ + ٫۱۶۶\varepsilon_{N(t)} + ٫۶۸۷\psi_{N(t)} - ۱۵٫۷۹y_{N(t)} \\ \hat{\lambda}\,(t|F_t) &= \exp\{-\left(٫۶۹۷ + ٫۱۶۶\hat{\varepsilon}_{t-۱} + ٫۶۸۷\hat{\psi}_{t-۱} - ۱۵٫۷۹y_{t-۱}\right)\} \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

حاصل می‌شود. با توجه به تابع شدت براورد شده براوردگر معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی یک‌روزه برای بازار مالی صنعت خودرو عبارت است از

$$\rho_u\,(t) = ۱ - \exp\{-\left(\exp\{-\left(٫۶۹۷ + ٫۱۶۶\varepsilon_{t-۱} + ٫۶۸۷\hat{\psi}_{t-۱} - ۱۵٫۷۹y_{t-۱}\right)\}\right)\} \qquad (۴۶)$$

با توجه به مقادیر متغیرها در پایان دوره، یعنی تاریخ ۹۵/۱۲/۲۸ داریم

$$y_{t-۱} = ۱٫۲۲۳۹۸۰ \times ۱۰^{-۳}, \hat{\psi}_{t-۱} = ۲٫۶۲, \hat{\varepsilon}_{t-۱} = ۱٫۵۲۷۱۰۰۴۸$$

با جایگذاری این مقادیر در براوردگر ELEP داریم

$$\rho_u(t) = ۰٫۰۶۳۰۶۷$$

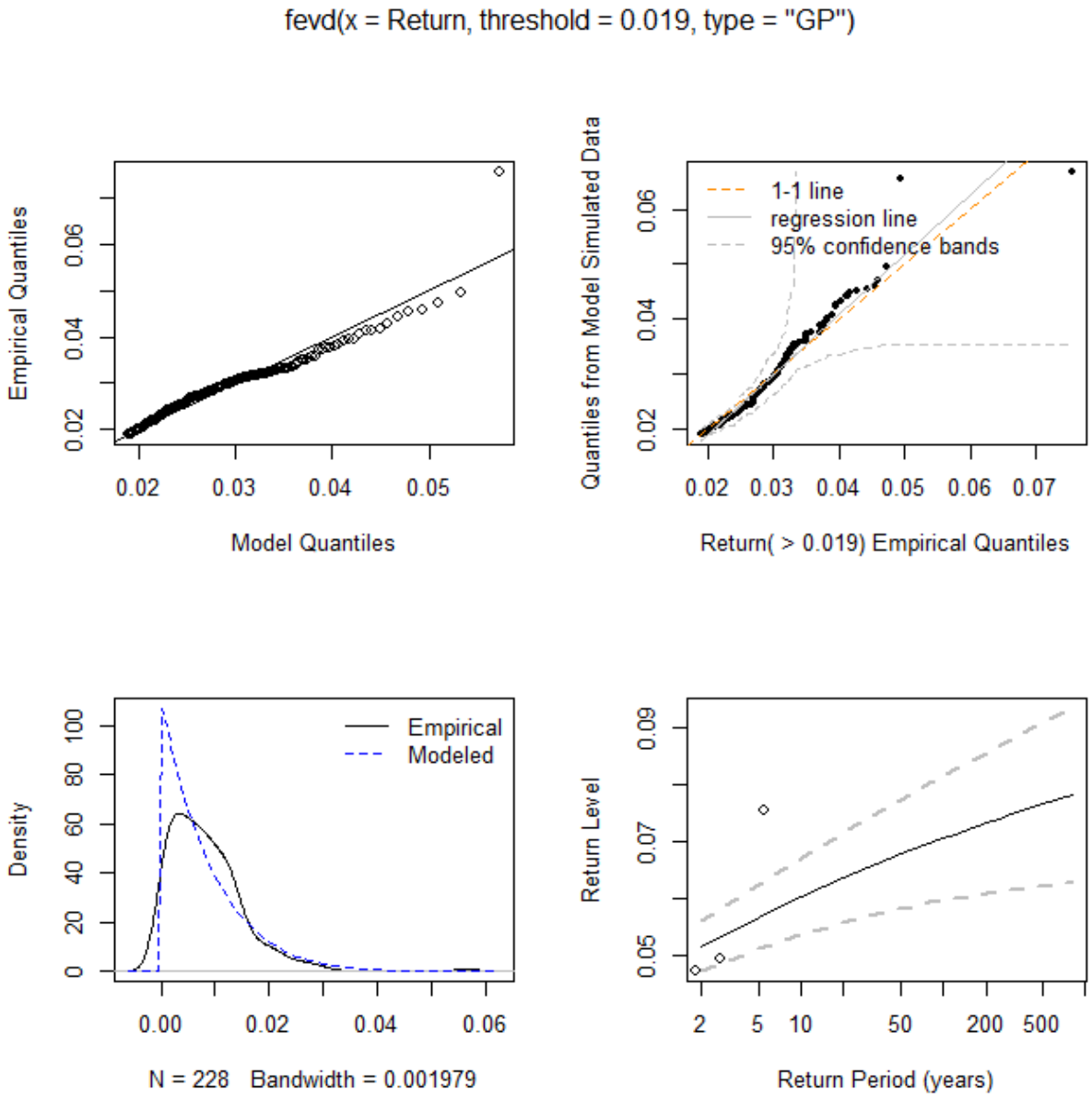
بنابراین احتمال اینکه در تاریخ ۹۵/۸/۲۹ با زیانی فراتر از مقدار ۰۱۹.۰ مواجه شویم برابر ۰۶۳.۰ است. برای بررسی میزان اثر پیشامد زیان کرانگین در مقدار معیار مخاطره‌ی ELEP داریم

$$\frac{\delta\rho_u(t)}{\rho_u(t)} \simeq \frac{\delta\lambda(t)}{\lambda(t)} \simeq -\left(-۱۵٫۷۹\right)\left(\delta y_t\right)$$

بنابراین ۰۱.۰ تغییر در مقدار زیان کرانگین، موجب افزایش تقریبی ٫۱۵۷۹ = ۰٫۰۱ × ۱۵٫۷۹ احتمال پیشامد زیان کرانگین می‌گردد. همچنین مقدار براورد معیار ارزش در معرض مخاطره‌ی شرطی یک‌روزه‌ی صدک ۹۵ام مشاهدات مالی صنعت خودرو به‌صورت

$$\begin{aligned} \zeta_q\,(t) &= u + \frac{\kappa}{\xi}\left\{\left(\frac{۱-\exp\{-\lambda(t|F_t)\}}{۱-q}\right)^{\xi} - ۱\right\} \\ &= ۰٫۰۱۹ + \frac{-۰٫۰۹۸۶۱}{۰٫۰۰۹۰۹}\left\{\left(\frac{۱-\exp(-۰٫۰۶۵۱۴۳)}{۰٫۰۵}\right)^{-۰٫۰۹۹} - ۱\right\} = ۰٫۰۲۱۱ \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

حاصل می‌شود. درنهایت پس از محاسبه و براورد پارامترهای موردنیاز به ازای تمام ۱۰ مجموعه مشاهدات به‌کاررفته شده و محاسبه‌ی معیارهای مخاطره‌ی VAR و ELEP شرطی ۱ روزه، به کمک روش‌های مناسب پس آزمایی، اعتبار براوردهای ایجادشده را موردبررسی قرار می‌دهیم.

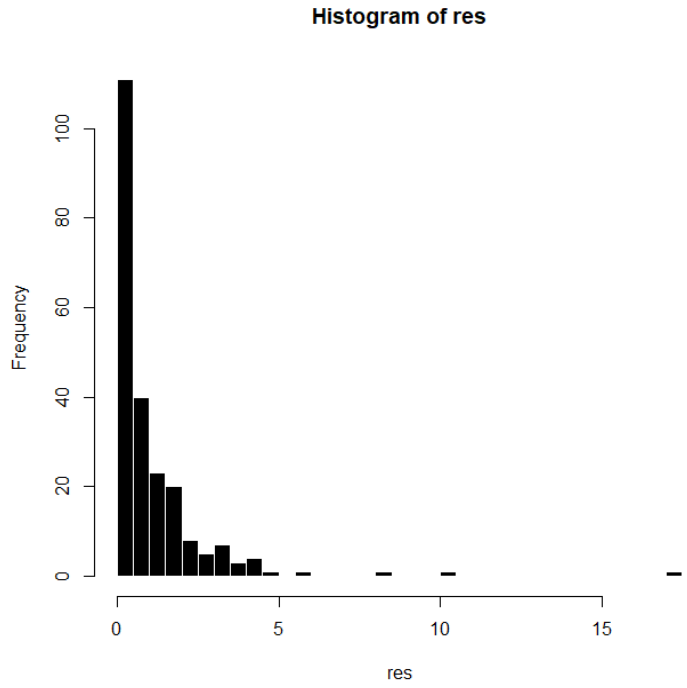


شکل ۵: اعتبار سنجی مدل برازش شده‌ی GPD به بازده‌های کرانگین

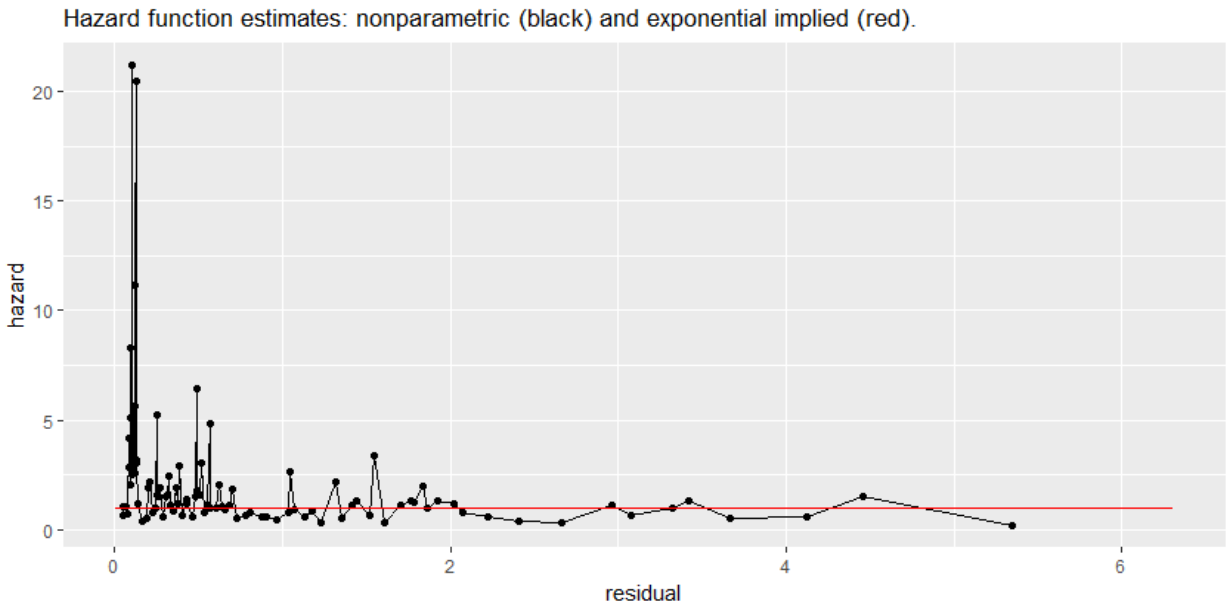
۱۰ .۱ . *تعیین حد آستانه و برازش توزیع GPD*

در جدول زیر مقدار حد آستانه‌ی مناسب هر یک از مجموعه مشاهدات مالی به‌کارگرفته شده نشان داده می‌شود. پس از تعیین مقدار حد آستانه‌ی مناسب به زیان‌های کرانگین مازاد بر آن، توزیع دم‌سنگین GPD برازش و پارامترهای این توزیع به روش ماکسیمم درستنمایی براورد می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از این مدل‌سازی به همراه چند معیار نیکویی برازش در این جدول ارائه می‌گردد.

پارامتر براورد شده‌ی $\hat{\xi}$ در تمام موارد در شرط $-0.5 < \hat{\xi} < 1$ صدق می‌کند. بنابراین می‌توان از متناهی بودن امید ریاضی نشان‌های Y_t اطمینان حاصل کرد. با توجه به اسمیت (۱۹۹۰) براوردگرهای حاصل‌شده به روش ماکسیمم درستنمایی تحت این شرایط به‌صورت مجانبی دارای توزیع نرمال هستند (داویسون و اسمیت، ۱۹۹۰).



شکل ۶: توزیع مانده‌های مدل برازش شده‌ی Log-ACD



شکل ۷: نرخ مخاطره‌ی تجربی فرایند$\{X_j \ , \ j \geq ۱\}$

جدول ۲: تعیین مقدار حد آستانه و نتیجه‌ی برازش توزیع دم‌سنگین GPD به زیان‌های کرانگین

داده‌های مالی	حد آستانه	ξ	κ	$\log - lik$	ACI	BIC
دلار آمریکا	۰۰۲۲.۰	۲۴۳۰.۰	۰۰۲۸.۰	۹۵۸-	۱۹۱۳	۱۹۰۷
دینار کویت	۰۰۳۰.۰	۳۵۹۷.۰	۰۰۲۳.۰	۱۰۸۲-	۲۱۶۰	۲۱۵۳
کرون سوئد	۰۰۶۵.۰	۰۷۹۴.۰	۰۰۵۰.۰	۹۵۹	۱۹۱۵	۱۹۰۸
انتشار و چاپ	۰۱۸۰.۰	۱۸۹۹.۰	۰۱۴۹.۰	۶۲۱-	۱۲۳۹	۱۲۳۲
خودرو	۰۱۹۰.۰	۰۹۸۶.۰-	۰۰۹۱.۰	۸۶۶-	۱۷۲۸	۱۷۲۱
زراعت	۰۱۸۰.۰	۲۵۴۳.۰-	۰۱۸۷.۰	۶۶۵-	۱۳۲۷	۱۳۲۱
سرمایه‌گذاری	۰۰۹۴.۰	۱۲۴۹.۰-	۰۰۶۲.۰	۹۰۷-	۱۸۱۰	۱۸۰۴
کانی‌های غیرفلزی	۰۱۱۰.۰	۲۰۶۷.۰	۰۰۵۰.۰	۷۱۱-	۱۴۱۸	۱۴۱۲
شرکت وصنعت	۰۱۹۵.۰	۴۳۵۷.۰	۰۱۰۴.۰	۱۰۳۴-	۲۰۶۵	۲۰۵۷
شرکت ونفت	۰۲۱۰.۰	۲۱۴۳.۰	۰۱۴۳.۰	۹۵۰-	۱۸۹۷	۱۸۸۹

۲.۱۰ . *مدل‌سازی تابع شدت و برازش مدل* $\text{Log} - \text{ACD}$

در جدول زیر نتایج مربوط به برازش مدل لگاریتم دوره‌ی شرطی خود بازگشتی $\text{Log} - \text{ACD}$ نشان داده می‌شود. در هر ستون مقابل مقدار ضرایب براورد شده $-\text{p}$ مقدار آن نیز ارائه می‌گردد. در تمام مدل‌های برازش شده مقدار ضریب $\hat{\eta}$در سطح ۵% معنی‌دار و حضور نشان‌های Y_t در بهبود عملکرد مدل مؤثر شناخته می‌شود.

جدول ۳: نتیجه‌ی برازش مدل Log-ACD(۱،۱) به فرایند$\{X_j\ ,\ j \geq ۱\}$و پارامترهای براورد شده

داده‌های مالی	ω	α	β	η	$\log - lik$	ACI	BIC
دلار آمریکا	۰٫۶۶۳(۰٫۰)	۰٫۰۱۰۹(۰٫۳۸)	۰٫۷۹۵۲(۰٫۰)	−۶۲٫۸۷(۰٫۰)	−۶۸۸	۱۳۸۴	۱۳۹۷
دینار کویت	۰٫۳۷۸(۰٫۰)	۰٫۰۱۰۹(۰٫۵۸)	۰٫۷۹۵۲(۰٫۰)	−۶۲٫۸۷(۰٫۰)	−۶۸۸	۱۳۸۴	۱۳۹۷
کرون سوئد	۰٫۴۱۳(۰٫۰)	۰٫۰۴۹۱(۰٫۲۵)	۰٫۸۷۹۹(۰٫۰)	−۲۳٫۹۶(۰٫۰)	−۸۴۴	۱۶۹۶	۱۷۱۰
انتشار و چاپ	۰٫۰۴۱(۰٫۵۱)	۰٫۰۹۲۹(۰٫۰)	۰٫۸۹۷۸(۰٫۰)	۵٫۰۶(۰٫۰۳)	−۶۸۵	۱۳۷۹	۱۳۹۲
خودرو	۰٫۶۹۷(۰٫۰)	۰٫۱۶۶(۰٫۰)	۰٫۶۸۷(۰٫۰)	−۱۵٫۷۹(۰٫۰۳)	−۷۸۲	۱۵۷۲	۱۵۸۶
زراعت	۰٫۲۷۱(۰٫۰)	۰٫۱۰۲(۰٫۰)	۰٫۹۳۶(۰٫۰)	−۱۴٫۹۲(۰٫۰)	−۷۱۳	۱۴۳۵	۱۴۴۸
سرمایه‌گذاری	۰٫۶۳۳(۰٫۰)	۰٫۰۷۹۶(۰٫۰)	۰٫۷۸۷۲(۰٫۰)	−۳۸٫۲۷(۰٫۰)	−۷۴۸	۱۵۰۴	۱۵۱۸
کانی‌های غیرفلزی	۰٫۰۹۰(۰٫۰۹)	۰٫۱۷۰۳(۰٫۰)	۰٫۹۱۴۷(۰٫۰)	−۸٫۹۸(۰٫۰۴)	−۷۱۶	۱۴۴۰	۱۴۵۴
شرکت وصنعت	۰٫۰۳۲(۰٫۴۸)	۰٫۰۷۲۸(۰٫۰)	۰٫۹۵۱۹(۰٫۰)	۱٫۱۵(۰٫۰۲)	−۱۱۹۸	۲۴۰۲	۲۴۱۷
شرکت ونفت	۰٫۰۴۲(۰٫۵۳)	۰٫۲۰۹(۰٫۰)	۰٫۸۵۹۷(۰٫۰)	۳٫۶۷(۰٫۰)	−۱۰۲۶	۲۰۶۱	۲۰۷۶

با توجه به مدل$\text{Log} - \text{ACD}$داریم

$$\lambda(t|F_t) = \exp\{-(\omega + \alpha\varepsilon_{N(t)} + \beta\psi_{N(t)} + \eta Y_{N(t)})\} \qquad (۴۸)$$

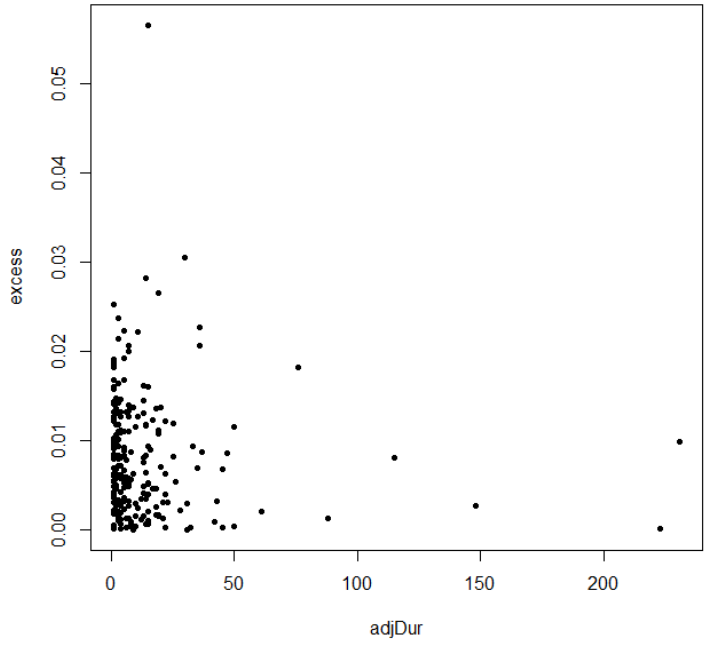
به‌وضوح وابسته به علامت پارامترηمقدار نشان‌هایمی‌توانند اثر مستقیم و یا معکوس بر مقدار تابع شدت براورد شده داشته باشند. در صورت منفی بودن علامت ضریب$\hat{\eta}$، افزایش مقادیر زیان کرانگین موجب افزایش مقدار تابع شدت فرایند نقطه‌ای می‌گردد. به زبان آماری در صورت منفی بودن علامت ضریب$\hat{\eta}$، میان متغیرهایو همبستگی منفی و رابطه‌ای معکوس وجود دارد. لذا افزایشY_t کاهش$X_{t+۱}$را به دنبال خواهد داشت. حال فرض کنید علامت ضریب$\hat{\eta}$ مثبت باشد، در این صورت مقادیر بزرگY_t موجب کاهش شانس وقوع پیشامدهای کرانگین در آینده‌ی نزدیک می‌شوند. ازاین‌رو متغیرهایوباهم رابطه‌ای مستقیم دارند. در جدول .... ضریب$\hat{\eta}$به ازای مجموعه‌های (انتشار و چاپ، وصنعت، ونفت) دارای علامت نامنفی و به ازای سایر مجموعه مشاهدات دارای علامت منفی است. برای حمایت از صحت مطلب ارائه‌شده، همبستگی میان دو متغیرY_tو محاسبه و $-\text{p}$ مقدار آن ارائه می‌شود. با توجه به این‌که توزیع هر دو متغیر نام‌برده دم‌سنگین است، به دلیل نامتناهی بودن گشتاورهای دوم ممکن است محاسبه‌ی همبستگی پی‌یرسون مقدور نباشد. بنابراین از همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن بهره می‌گیریم.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در مجموعه مشاهدات (انتشار و چاپ، وصنعت، ونفت) همبستگی اسپیرمن محاسبه‌شده مقداری نامنفی است. ضریب همبستگی محاسبه‌شده در این جدول به‌خوبی نتایج به‌دست‌آمده از جدول .... را توجیه و موردحمایت قرار می‌دهد.

نمودار زیر نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی معکوس دو متغیرواست. بنابراین مقدار بزرگ نشان‌ها موجب کوتاه شدن زمان وقوع این رده از پیشامدها در آینده می‌شود. ازاین‌رو زیان‌های کرانگین به‌صورت خوشه‌ای و در مدت‌زمان کوتاهی به‌صورت متوالی ظاهر می‌شوند.

جدول ۴: محاسبه‌ی همبستگی اسپیرمن دو متغیر Y_tو x_{t+1}

داده‌های مالی	همبستگی (x_{t+1}, y_t)	$p-v$
دلار آمریکا	−۰/۲۱۹	۰/۰
دینار کویت	−۰/۲۳۰	۰/۰
کرون سوئد	−۰/۱۸۱	۰/۰
انتشار و چاپ	۰/۰۴۶	۰/۵۱
خودرو	−۰/۱۸۱	۰/۰
زراعت	−۰/۰۵۴	۰/۴۳
سرمایه‌گذاری	−۰/۲۰۳	۰/۰
کانی‌های غیرفلزی	−۰/۲۱۷	۰/۰
شرکت وصنعت	۰/۰۴۶	۰/۴۱
شرکت ونفت	۰/۰۵۵	۰/۳۲



شکل ۸: نمودار پراکنش دو متغیر Y_tو در بازار مالی صنعت خودرو

۳.۱۰ . *نتایج پس آزمایی براورد معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی*

در این جدول نتیجه‌ی پس آزمایی براورد معیار مخاطره‌ی ELEP شرطی یک‌روزه ارائه می‌گردد. در تمام ۱۰ مورد هر دو ضریب $\hat{\phi}_0$ و $\hat{\phi}_1$ مدل در سطح ۵ % معنی‌دار و حضور متغیر پیشگو $\rho_u(t)$ در بهبود عملکرد مدل مؤثر شناخته می‌شود.

مقدار براورد شده‌ی ضریب $\hat{\phi}_0$ در اکثر موارد مقداری نزدیک به عدد ۳- است. برای توجیه این مسئله با توجه به مدل رگرسیونی لوژستیک داریم

$$\log\left(\frac{\theta_{t+1}}{1-\theta_{t+1}}\right) = \phi_0 + \phi_1\rho_u(t), \quad \hat{\theta}_{t+1} = 0/1 \Rightarrow \log\left(\frac{0/1}{0/9}\right) \simeq -3, \ \hat{\theta}_{t+1} \simeq \frac{e^{-3}}{1-e^{-3}} \simeq 0/1 \qquad (50)$$

و این به دلیل انتخاب مقدار حد آستانه‌ی متناسب با صدک ۹۰ام توزیع مشاهدات است. پارامتر $\hat{\phi}_0$ نشان‌دهنده‌ی متوسط احتمال وقوع تخطی‌هاست، درحالی‌که پارامتر $\hat{\phi}_1$ به‌عنوان یک تعدیل گر عمل می‌نماید و دارای رابطه‌ای مستقیم با مقدار احتمال پیشامد زیان کرانگین است.

جدول ۵: نتیجه‌ی برازش مدل رگرسیونی لوژستیک و اعتبار سنجی براوردهای معیار مخاطره‌ی ELEP

داده‌های مالی	ϕ_0	ϕ_1	$p-v(\phi_0)$	$p-v(\phi_1)$	AIC
دلار آمریکا	−۹٫۲۱	۶۰٫۰۱	۰٫۰	۰٫۰	۱۲۰
دینار کویت	−۶٫۳۸	۳۲٫۳۲	۰٫۰	۰٫۰۱	۹۳
کرون سوئد	−۴٫۲۵	۲۶٫۱۴	۰٫۰	۰٫۰۳	۱۰۶
انتشار و چاپ	−۴٫۰۹	۲۰٫۰۷	۰٫۰	۰٫۰	۱۶۸
خودرو	−۳٫۷۲	۱۹٫۰۴	۰٫۰	۰٫۰۴	۱۱۶
زراعت	−۳٫۶۴	۱۶٫۶۱	۰٫۰	۰٫۰	۱۶۲
سرمایه‌گذاری	−۴٫۷۷	۳۲٫۱۶	۰٫۰	۰٫۰	۱۲۲
کانی‌های غیرفلزی	−۳٫۹۷	۲۴٫۰۷	۰٫۰	۰٫۰۳	۱۳۷
شرکت وصنعت	−۲٫۵۳	۱۲٫۲۶	۰٫۰	۰٫۰۴	۱۷۶
شرکت ونفت	−۳٫۹۶	۲۲٫۱۴	۰٫۰	۰٫۰۲	۷۸

۴.۱۰ . *نتایج پس آزمایی معیار مخاطره‌ی* VAR *شرطی*

در جدول زیر نتایج پس آزمایی براوردهای معیار مخاطره‌ی VAR شرطی یک‌روزه ارائه می‌گردد. در این جدول معیار مخاطره‌ی VAR علاوه بر روش شدت‌مبنا به چند روش دیگر محاسبه و پس آزمایی می‌شود. در این جدول آزمون‌های فرض دوطرفه‌ی دوجمله‌ای و آزمون لیونگ باکس به ازای ۴ روش متفاوت محاسبه‌ی VAR ارائه می‌گردد. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در ۴ مورد از ۱۰ مورد (کانی‌های غیرفلزی، خودرو، دینار کویت و دلار امریکا)روش شدت‌مبنا نسبت به ۴ روش دیگر برتری مطلق و در ۴ مورد دیگر (کرون سوئد، انتشار و چاپ، سرمایه‌گذاری و صنعت) برتری نسبی دارد. درنهایت رویکرد پیشنهادشده توسط حمیدیه و همکاران (۲۰۱۲)روشی مؤثر شناخته می‌شود. در حقیقت این براوردگرها به‌عنوان براوردگرهایی پویا با در نظر گرفتن دینامیک زمانی و تاریخچه‌ی رفتار گذشته‌ی فرایند، نتایج مناسبی در رابطه با براورد معیارهای مخاطره از خود نشان می‌دهند.

جدول ۶: پس آزمایی معیار مخاطره‌ی VAR و مقایسه‌ی رویکرد شدت‌مبنا با چند براوردگر کلاسیک دیگر

آزمون‌ها	ونفت	وصنعت	کانی‌ها	سرمایه‌گذاری	زراعت	خودرو	انتشار و چاپ	کرون سوئد	دینار کویت	دلار آمریکا
مشاهدات	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸	۱۵۹۸
پنجره	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
مورد انتظار	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۷٫۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
شدت (تخطی)	۱۵	۲۱	۱۰	۱۳	۲۱	۱۴	۱۶	۱۰	۵	۴
دوجمله‌ای	۰٫۱۴۴	۰٫۰۰۰۷	۰٫۸۷	۰٫۴۲	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۲۵	۰٫۰۷۵	۰٫۸۷	۰٫۰۷۵	۰٫۰۳۵
لیونگ باکس	۰٫۶۶	۰٫۵۰	۰٫۸۸	۰٫۶۳	۰٫۲۶	۰٫۳۲	۰٫۹۱	۰٫۲۳	۰٫۵۴	۰٫۹۴
تاریخی (تخطی)	۱۳	۲۳	۸	۱۰	۲۱	۲۳	۱۶	۱۲	۵	۴
دوجمله‌ای	۰٫۴۲	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۴۱۷	۰٫۸۷	۰٫۰۰۰۷	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۰۷۵	۰٫۶۲۶	۰٫۰۷۵	۰٫۰۳۵
لیونگ باکس	۰٫۰۰۷۲	۰٫۸۵۴	۰٫۵۴	۰٫۳۹۲	۰٫۸۰۲۴	۰٫۲۱۴	۰٫۸۹۶	۰٫۱۱	۰٫۵۴	۰٫۹۵
گوسین (تخطی)	۴	۰	۴	۵	۱۷	۲۳	۷	۱۰	۳	۲
دوجمله‌ای	۰٫۰۳۵	۰	۰٫۰۳۵	۰٫۷۵	۰٫۰۳۵	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۲۵۶	۰٫۸۷	۰٫۰۱۵	۰٫۰۰۶
لیونگ باکس	۰٫۹۷	—	۰٫۱	۰٫۱۴	۰٫۸۵۲	۰٫۲۱۴	۰٫۳۰	۰٫۸۲	۰٫۱۶	—
EVT(تخطی)	۱۳	۲۴	۹	۱۱	۲۳	۲۶	۱۹	۱۱	۵	۴
دوجمله‌ای	۰٫۴۲	۰٫۰۰۰۰۱	۰٫۶۹	۰٫۸۷	۰٫۰۰۰۵	۰	۰٫۰۰۵۸	۰٫۸۷	۰٫۰۷۴	۰۳۵.۰
لیونگ باکس	۰٫۰۰۷	۰٫۸۱	۰٫۶۶	۰٫۴۱	۰٫۶۱	۰٫۳۶	۰٫۱۱	۰٫۲۲	۰٫۵۳۸	۰٫۹۴۸

۱۱. بحث و نتیجه‌گیری

هدف اصلی این مقاله استفاده از شیوه‌ای نوین برای براورد معیارهای مخاطره‌ی VAR و ELEP شرطی یک‌روزه است. اساس این ایده ایجاد تعامل میان زیان‌های کرانگین رخ‌داده درگذشته و نرخ وقوع این رده از پیشامدها در آینده است، به‌طوری‌که وقوع یک زیان کرانگین افزایش تابع شدت فرایند نقطه‌ای تحت مطالعه را به دنبال دارد. یک سؤال اساسی در رابطه با مدل ایجادشده این است که مدل‌های شدت‌مبنا دارای چه خصوصیاتی هستند و اساساً با مدل‌های مطرح‌شده توسط مک‌نیل و فری (۲۰۰۰)چه تفاوتی دارند و به‌طورکلی آیا ایجاد این مدل‌ها ضرورتی دارد؟ برای پاسخ دادن به این سؤال باید گفت که این مدل بر پایه‌ی ۲ هدف زیر تشکیل‌شده:

۱. تابع شدت ایجادشده برای مدل‌سازی وقوع پیشامدهای زیان کرانگین یک تابع کاملاً تفسیرپذیر است و به کمک آن می‌توان میان زیان‌های کرانگین رخ‌داده درگذشته و نرخ وقوع این رده از پیشامدها در آینده تعاملی معنی‌دار برقرار نمود.
۲. به کمک تابع شدت معرفی‌شده می‌توان براورد معیارهای مخاطره‌ی VAR و ELEP شرطی یک‌روزه را بهبود بخشید. این بهبود به کمک توجه به دینامیک زمانی و تاریخچه‌ی رفتار گذشته‌ی فرایند تحقق میابد.

همان‌طور که نشان دادیم مقادیر زیان کرانگین به‌عنوان نشان‌های فرایند نقطه‌ای می‌تواند به دو شکل متفاوت بر تابع شدت اثر بگذارد. درصورتی‌که علامت پارامتر براورد شده‌ی $\hat{\eta}$ به‌عنوان ضریب نشان‌های Y_t منفی باشد افزایش مقادیر زیان کرانگین افزایش مقدار تابع شدت را به دنبال خواهد داشت. در این حالت پیشامدهای زیان کرانگین در بازه‌های زمانی کوتاهی به‌صورت متوالی ظاهرشده و خوشه‌هایی از مقادیر زیان را ایجاد می‌کنند و موجب وقوع بحران‌های مالی می‌شوند. در حالت عکس، اگر علامت ضریب $\hat{\eta}$ نامنفی باشد تمام تحلیل‌های ارائه‌شده‌ی قبل به شکل معکوسی برقرار است. البته تجربه ثابت کرده که در بازارهای مالی عموماً پیشامدهای زیان کرانگین دارای اثر متقابل جذبی هستند. درهرصورت استفاده از اطلاعات گذشته و توجه به دینامیک زمانی موجب بهبود عملکرد مدل و افزایش دقت براوردگرهای معیار مخاطره شده و چشم‌پوشی از این عوامل عواقب جبران‌ناپذیری را به دنبال دارد

مراجع

[1] Bauwens, L., & Giot, P. (2000). ”The logarithmic ACD model: an application to the bid-ask quote process of three NYSE stocks”. *Annales d’Economie et de Statistique*, 117-149.
[2] Bauwens, L., & Giot, P. (1998). *Asymmetric ACD models: introducing price information in ACD models with a two state transition model*
[3] Bollerslev, T. (1987). ”A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return”. *The review of economics and statistics*, 542-547
[4] Bauwens, L., & Giot, P. (1997). *The logarithmic ACD model: An application to market microstructure and NASDAQ*. Université Catholique de Louvain. Center for Operations Research and Econometrics.
[5] Christoffersen, P., & Pelletier, D. (2004). ”Backtesting value-at-risk: A duration-based approach”. *Journal of Financial Econometrics*, 2.1, 84-108.
[6] Davison, A. C., & Smith, R. L. (1990). ”Models for exceedances over high thresholds”. *Journal of the Royal Statistical Society.* Series B (Methodological), 393-442.
[7] Engle, R. F., & Russell, J. R. (1998). ”Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data”. *Econometrica*, 1127-1162.
[8] Hamidieh, K., Stoev, S., & Michailidis, G. (2013). ”Intensity-based estimation of extreme loss event probability and value at risk”. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 29.3 , 171-186.
[9] Hawkes, A. G. (1971).” Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes”. *Biometrika*, 58.1., 83-90.
[10] Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. Technometrics,29(3), .339-349
[11] Hill, B. M. (1975).” A simple general approach to inference about the tail of a distribution”. *The annals of statistics*.1163-117.
[12] Klugman, S. A., Panjer, H. H.(2012). *Loss models: from data to decisions*(Vol. 715). *John Wiley & Sons*.
[13] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton university press.
[14] McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of empirical finance*, 7(3), 271-300.
[15] Pacurar, M. (2008). ”Autoregressive conditional duration models in finance: a survey of the theoretical and empirical literature”. *Journal of Economic Surveys*, 22.4., 711-751.
[16] Pickands III, J. (1975).” Statistical inference using extreme order statistics”. *the Annals of Statistics*, .119-131
[17] Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series* (Vol. 543). John Wiley & Sons.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–229، صص. ۲۳۵–۲۴۲

روند سری زمانی شاخص‌های جمعیتی کشور (دوره زمانی ۱۳۶۵–۱۳۹۵)

رضا مؤمنی *،آ

آعضو هیأت علمی گروه آمار دانشگاه زابل

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تراکم نسبی جمعیت
سری‌های زمانی
شاخص‌های جمعیتی
روند تغییرات
میزان شهرنشینی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

امروزه شاخص‌های جمعیتی و دانستن ابعاد خانوارها و نیز روند تغییرات دوره‌ای آنها به دلایل مختلف در تمام دنیا یکی از مسائل روز برنامه‌ریزی متخصصان هر کشوری است که در برنامه‌ریزی هرچه بهتر آن کشور نقش به سزایی ایفا می‌کند، به گونه‌ای که اخیراً تحلیل دقیق‌تر آن باعث رشد اقتصادی و اجتماعی و متقابلا نیز عدم ارائه صحیح یک برنامه حمایتی –جمعیتی تبدیل به یک معضل اجتماعی می‌شود. ضعف عدم وجود برخی تحلیل‌های جمعیتی و استنباط صحیح از شاخص‌های مهم جمعیتی همچون نرخ رشد جمعیت و تراکم آن، میزان شهرنشینی و معضل مهاجرت بی رویه به شهرها، هرم سنی و ترکیب سنی جوان کشورها، بعد خانوارها و از همه مهم‌تر روند تغییرات دوره‌ای هریک از شاخص‌های مهم جمعیتی مذکور، هزینه و آسیب‌های زیادی را به جامعه تحمیل می‌کند. از این‌رو در این مقاله به بررسی و تحلیل هریک از متغیرهای جمعیتی در طول یک دوره زمانی مناسب پرداخته‌ایم. سپس روند تغییرات هریک از سری‌های زمانی ایجاد شده در طول دوره‌های زمانی مناسب را نشان داده و بر اساس آزمون‌های مناسب آماری (t-test و ANOVA) معناداری هریک از عوامل موثر بر شاخص‌های جمعیتی را مشخص نموده‌ایم. جهت بررسی میزان و شدت همبستگی این شاخص‌ها از ضریب پیرسون استفاده شده است. نتایج و یافته‌های این تحقیق نشان از تفاوت معنادار و همچنین همبستگی تقریباً قوی اکثریت شاخص‌های مهم جمعیتی را دارد که بنا به سیاست‌های جمعیتی در صورت بهبود تعداد اندکی از آنها (بنا به وجود همبستگی‌های معنادار) برخی دیگر از شاخص‌های جمعیتی با هزینه ناچیزی بهبود و ارتقا خواهند یافت.

۱. مقدمه

مطالعه در مورد شهر و شهرنشینی دارای تاریخچه‌ای بسیار قدیمی است. به عبارتی شهرنشینی بیش از پنج هزار سال قدمت دارد. تا سال ۱۹۰۰ میلادی از هر ۸ نفر فقط یک نفر در مناطق شهری زندگی می‌کرد اما در حال حاضر حدود نیمی از جمعیت جهان شهرنشین هستند. پیش بینی می‌شود که تا سال ۲۰۳۰ از هر ۱۰ نفر ۶ نفر ساکن شهرها خواهند بود یعنی از مجموع ۹ میلیارد جمعیت در سال ۲۰۳۰ ، ۵ میلیارد نفر ساکن شهرها خواهند بود این در حالی است که اکنون جمعیت شهرنشین ۳٫۳ میلیارد نفر است. به علت توسعه صنعت در کشورهای غربی افزایش جمعیت شهرهای آنها قابل توجیه است اما مهاجرت از روستاها به شهرها در کشورهای در حال توسعه یکی از چالش‌های موجود محسوب می‌شود. نتایج سرشماری عمومي نفوس و مسکن ۱۳۸۵ نشان می‌دهد ایران در آستانه افزایش جمعیت شهری به دو سوم کل جمعیت کشور قرار گرفته و پیش‌بینی می‌شود طی دهه‌های بعد همچنان افزایش داشته باشد. آمارها و اطلاعات حاکی از این است که بخش زیادی از جمعیت شهری کشورمان در تعداد محدودی کلان‌شهر کشور متمرکز شده‌اند [۲]. اگر چه افزایش جمعیت شهری به عنوان یکی از شاخص‌های توسعه اقتصادی –اجتماعی و جمعیتی مورد توجه است اما رشد سریع جمعیت شهری و الگوی استقرار نامتعادل جمعیت در شهرها نشان از این رشد بی‌رویه دارد که سبب ایجاد آسیب‌های متعددی در شهرها و به وجود آمدن مشکل‌ها و تنگناهایی در زمینه‌های اقتصادی و اجتماعی در روستاها

*رضا مؤمنی
پست الکترونیک: rezamomeni@uoz.ac.ir (رضا مؤمنی)

خواهد شد که چنین روندی با هدف‌های توسعه متوازن اقتصادی و اجتماعی جامعه سازگار نیست [۴]. در سطح جهان در سال ۲۰۰۸ برای نخستین بار، انتقال شهری به وقوع پیوست، در واقع بیش از نیمی از جمعیت جهان (۳ میلیارد و ۳۰۰ میلیون نفر) در مناطق شهری زندگی می‌کردند، براساس این، سازمان ملل سال ۲۰۰۸ را سال شهرنشینی نامید. این موضوع در حالی است که انتقال شهری برای ایران در سال ۱۳۵۹ رخ داد. به بیانی دیگر طی ۵۰ سال گذشته روند شهرنشینی و روستانشینی در ایران یك الگوی ضربدری را به تصویر می‌کشد.

میزان شهرنشینی و تراکم نسبی جمعیت، دو شاخص عمده در بحث جمعیت شناسی و تغییرات جمعیتی می‌باشد. شهرنشینی کلاً در معنی زندگی یک جمعیت در شهرها به‌کار می‌رود ولی معمولاً به افزایش شمار ساکنان شهرها نسبت به ساکنان روستایی یک کشور یا منطقه اشاره دارد. شهرنشینی و افزایش آن، بر اقتصاد و محیط زیست یک منطقه تأثیر زیادی دارد. همچنین روحیات و شیوه زندگی مردم شهرنشین با گسترش شهرنشینی دستخوش دگرگونی‌های نسبتاً زیادی می‌شود. شهرنشینی بی‌رویه و گسترش پرشتاب پدیده شهرنشینی در بسیاری کشورها باعث به‌وجود آمدن پدیده‌هایی همچون حاشیه‌نشینی، زاغه‌نشینی، تکدی‌گری، تشکیل شهرهای خوابگاهی و شهرک‌های جدید، افزایش بیکاری و بزهکاری و مشکلات و ناسازگاری‌های فرهنگی می‌شود. شهرنشینی تمام عرصه‌های زندگی انسان از جمله روابط انسانی و تعاملات متقابل اجتماعی را تحت تأثیر قرار داده است. این فرایند نوعی تغییر و دگرگونی اجتماعی محسوب می‌گردد و با نوعی عقلانیت، حسابگری، دقت و نظم در ارتباطات اجتماعی و انسانی روبرو است. رشد سریع جمعیت شهری، تراکم و افزایش آن منجر به پیامدهای آسیب زای ارتباطی و تعاملی گردیده است. لذا این موضوع خود نیز مقوله افزایش تراکم نسبی جمعیت را بدنبال خواهد داشت. بررسي نتایج سرشماری‌ها نشان می‌دهد که نسبت شهرنشینی در کل کشور در فاصله سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۸۵ روندی صعودی داشته است. طی نیم قرن گذشته تعداد جمعیت در نقاط شهری ۸٫۱ برابر شده، در حالی که طی همین مدت جمعیت روستایی ۱٫۷ برابر شده است [۳]. از جمله عوامل مؤثر در این امر تمرکز سرمایه در شهرهای بزرگ، عدم ایجاد فرصت‌های شغلی در مناطق روستایی، گسترش فعالیت‌های خدماتی در مناطق شهری، ایجاد برخی از صنایع در حاشیه شهرها و مکانیزه‌شدن کشاورزی در برخی از نقاط روستایی و در نتیجه مهاجرت روستاییان به شهرها، ادغام تعدادی از نقاط روستایی اطراف شهرها به مجموعه شهرها و تبدیل برخي از نقاط روستايي به شهر هستند. مطالعه‌ها نشان می‌دهد که تعداد شهرهای کشور از ۶۱۲ نقطه در سال ۱۳۷۵ به ۱۰۱۶ نقطه در سال ۱۳۸۵ افزایش یافته است [۳].

۲. روش تحقیق

پژوهش حاضر یک مطالعه توصیفی ـ تحلیلی می‌باشد که به صورت مقطعی ـ زمانی بر روی داده‌های خام برگرفته از سایت مرکز آمار ایران [۱] که حاصل از سرشماری عمومی نفوس و مسکن در طول دهه‌های ۱۳۹۵-۱۳۶۵ می‌باشد، انجام شده است. متغیرهای مورد بررسی در این تحقیق همان شاخص‌های مهم جمعیتی مانند نرخ رشد جمعیت و تراکم آن، میزان شهرنشینی و معضل مهاجرت بی رویه به شهرها، هرم سنی و ترکیب سنی جوان کشورها، بعد خانوارها و از همه مهم‌تر روند تغییرات دوره‌ای هر یک از شاخص‌های مهم جمعیتی مذکور در طول این دوره زمانی می‌باشد. با استفاده از یافته‌های حاصل از سرشماری دوره‌های زمانی مذکور، شاخص‌های توصیفی را برای هر یک از این متغیرها به دست آورده‌ایم، سپس اطلاعات حاصل توسط نرم افزارهای آماری SPSS و MINITAB با استفاده از آزمون‌های آماری مناسب (آزمون t، ANOVA و ضرائب همبستگی) مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. تفاوت‌های آماری میزان شهرنشینی و تراکم نسبی جمعیت در بین استان‌های کشور را بررسی نموده و اختلافات معنادار این شاخص‌ها را در بین استان‌های کشور مشخص می‌نماییم و با کمیت‌های متناظر با سرشماری‌های دوره‌های قبلی مقایسه و تفاوت آنها را آزمون نموده‌ایم. در ادامه نیاز به تعریف برخی از شاخص‌های مهم جمعیتی است:

تعریف ۱.۲. میزان شهرنشینی عبارت است از تعداد جمعیت ساکن در نقاط شهری به جمعیت کل کشور، به عبارتی دیگر:

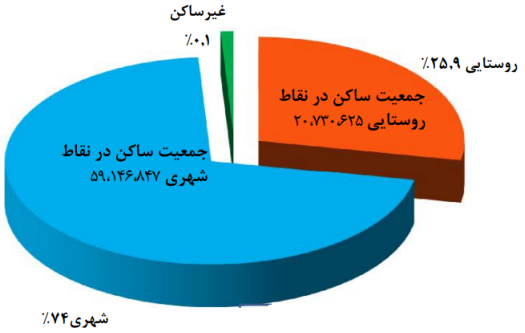
$$\text{میزان شهرنشینی} = \frac{\text{جمعیت ساکن در نقاط شهری}}{\text{جمعیت کل کشور}} \times ۱۰۰$$

تعریف ۲.۲. تراکم نسبی جمعیت عبارت است از متوسط تعداد افراد جمعیت یك منطقه در هر کیلومتر مربع از مساحت آن منطقه به عبارتی دیگر:

$$\text{تراکم جمعیت} = \frac{\text{جمعیت}}{\text{مساحت (کیلومتر مربع)}}$$

۳. نتایج و یافته‌های تحقیق

در سرشماری اخیر در سال ۱۳۹۵ تقریباً نیمی از افراد (۴۹٪) زنان و نیمی از آنان (۵۱٪) مردان تشکیل داده‌اند. توزیع سکونت افراد به صورت زیر است: با توجه به توزیع سکونت افراد در سال ۱۳۹۵، جمعیت شهری ۷۴٪ است که این رقم در سال ۱۳۹۰، برابر با ۷۱٫۴٪ بوده است. به طور کلی تحولات جمعیتی و خانوار در طول سرشماری‌های دوره‌های ۱۳۹۵-۱۳۶۵ در قالب جدول فراوانی زیر ارائه شده است: با توجه به جدول ۱ متغیر بعد خانوار دارای روند نزولی بوده به طوری که از ۵ نفر به ۳ نفر کاهش یافته است. این عدد (به طور متوسط ۳٫۳ نفر) در بین خانوارهای روستایی و شهری در سطح خطای آماری یک درصد تقریبا یکسان بوده و اختلاف معناداری ندارد. به عبارتی تعداد افراد خانوار در



شکل ۱: توزیع سکونت جمعیت

جدول ۱: تحولات جمعیت و خانوار دوره های مختلف سرشماری

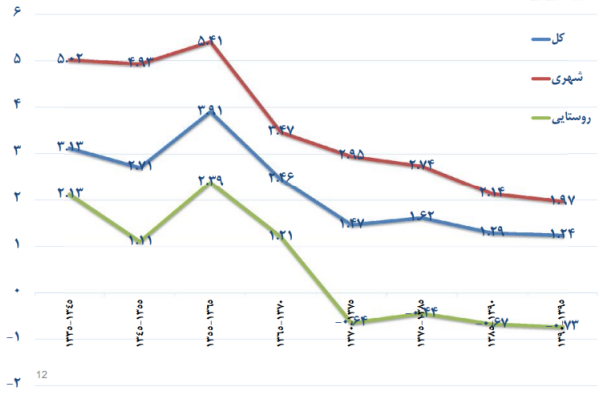
سال	جمعیت	مرد	زن	نسبت جنسی	خانوار	بعد خانوار
۱۳۹۵	۷۹, ۹۲۶, ۲۷۰	۴۰, ۴۹۸, ۴۴۲	۳۹, ۴۲۷, ۸۲۸	۱۰۳	۲۴, ۱۹۶, ۰۳۵	۳/۳
۱۳۹۰	۷۵, ۱۴۹, ۶۶۹	۳۷, ۹۰۵, ۶۶۹	۳۷, ۲۴۴, ۰۰۰	۱۰۲	۲۱, ۱۸۵, ۶۴۷	۳/۵
۱۳۸۵	۷۰, ۴۹۵, ۷۸۲	۳۵, ۸۶۶, ۳۶۲	۳۴, ۶۲۹, ۴۲۰	۱۰۴	۱۷, ۵۰۱, ۷۷۱	۴
۱۳۷۵	۶۰, ۰۵۵, ۴۸۸	۳۰, ۵۱۵, ۱۵۹	۲۹, ۵۴۰, ۳۲۹	۱۰۳	۱۲, ۳۹۸, ۲۳۵	۴/۸
۱۳۶۵	۴۹, ۴۴۵, ۰۱۰	۲۵, ۲۸۰, ۹۶۱	۲۴, ۱۶۴, ۰۴۹	۱۰۵	۹, ۶۷۳, ۹۳۱	۵/۱

جدول ۲: روند تغییرات تعداد و بعد خانوار به تفکیک سکونت

سال	تعداد خانوار			بعد خانوار		
	کل	شهری	روستایی	کل	شهری	روستایی
۱۳۹۵	۲۴, ۱۹۶, ۰۳۵	۱۸, ۱۲۵, ۴۸۸	۶, ۰۷۰, ۵۴۷	۳/۳	۳/۳	۳/۴
۱۳۹۰	۲۱, ۱۸۵, ۶۴۷	۱۵, ۴۲۷, ۸۴۸	۵, ۷۵۷, ۷۹۹	۳/۵	۳/۵	۳/۷
۱۳۸۵	۱۷, ۵۰۱, ۷۷۱	۱۲, ۴۰۵, ۵۸۴	۵, ۰۹۶, ۱۸۷	۴	۳/۹	۴/۴
۱۳۷۵	۱۲, ۳۹۸, ۲۳۵	۷, ۹۴۸, ۹۲۵	۴, ۴۴۹, ۳۱۰	۴/۸	۴/۶	۵/۲
۱۳۶۵	۹, ۶۷۳, ۹۳۱	۵, ۵۲۸, ۵۴۲	۴, ۱۴۵, ۳۸۹	۵/۱	۴	۵/۵

مناطق شهری و روستایی تقریباً برابر با ۳/۳ نفر در سال ۱۳۹۵ گزارش شده است. در مجموع می‌توان این تحولات و روند تغییرات دو سری زمانی تعداد و بعد خانوار را به تفکیک شهری و روستایی در طول سال‌های مختلف به صورت جدول فراوانی زیر نشان داد: نرخ رشد جمعیت یکی دیگر از شاخص‌های مهم جمعیتی است که برای برنامه‌ریزی در بلند مدت مورد توجه اقتصاددانان است. این سری زمانی در طول دوره‌های زمانی ۱۳۹۵-۱۳۳۵ که داده‌های آن در سایت مرکز آمار ایران موجود بوده را می‌توان به صورت نمودار سری زمانی زیر به تصویر کشید: البته می‌توان متغیر نرخ رشد سالیانه جمعیت را به تفکیک استان‌های کشور در نظر گرفت که چون داده‌های برخی از دوره‌های زمانی خیلی دور، موجود نمی‌باشد یا اینکه تعداد استان‌ها در آن زمان‌ها کمتر از تعداد آنها در زمان حاضر بوده است لذا تنها متوسط نرخ رشد جمعیت برای دو دوره سرشماری ۱۳۹۵ و ۱۳۹۰ به صورت جدول زیر محاسبه شده است: برای به تصویر کشیدن روند تغییرات متوسط نرخ رشد جمعیت به تفکیک استانی در طی دوره‌های ۹۵-۱۳۹۰ ، نمودار میله‌ای آن را جهت سهولت در نمایش در شکل زیر ارائه داده‌ایم: در طول دوره زمانی ۹۵-۱۳۹۰ به جمعیت کل کشور تعداد ۴۷۷۶۶۰۱ نفر اضافه گردیده است. میزان رشد جمعیت برای کل کشور عدد ۱/۲۴ درصد به عبارتی دیگر به طور متوسط سالیانه تعداد ۹۵۵۳۲۰ نفر به جمعیت کل کشور اضافه گردیده است. در حالت جزئی اگر به مساله نگاه شود، افزایش جمعیت را می‌توان در طول دوره‌های زمانی ده ساله از سال‌های ۸۵-۱۳۳۵ و دوره زمانی پنج ساله از سال‌های ۹۵-۱۳۸۵ به شرح جدول فراوانی زیر ارائه داد: هرم سنی جمعیت یکی از نمودارهای مهم تشخیصی توزیع سنی جمعیت در گروه‌های مختلف سنی است که برای برنامه‌ریزی اقتصاددانان و همچنین تنظیم جمعیت در سطح خرد و کلان توسط جمعیت شناسان از نقش بسزایی برخوردار است. در شکل زیر هرم سنی جمعیت برای سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۵ ترسیم شده است: با توجه به شکل ۴ همانطور که ملاحظه می‌شود، افراد بین سنین ۲۵ تا ۳۵ سال که در واقع متولدین دهه ۶۰ هستند، دارای بیشترین فراوانی یا همان نمای نمودار ستونی را تشکیل می‌دهند.

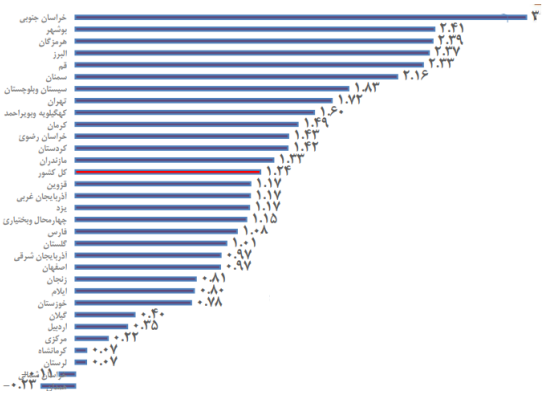
ترکیب سنی جمعیت در طول این دهه یعنی دهه ۶۰ با بیشترین فراوانی جمعیتی تا سرشماری ۱۳۹۵ در قالب جدول فراوانی زیر نشان داده شده است: در شکل زیر، روند تغییرات هریک از ۴ گروه عمده سنی (به عبارتی ۴ سری زمانی) نشان داده شده است: با توجه به شکل ۵ ملاحظه می‌شود که گروه سنی خردسالان و نوجوانان از سال ۱۳۶۵ به بعد دارای روند نزولی بوده است و متقابلا گروه سنی میانسال و سالخورده روند



شکل ۲: روند در سری‌های زمانی نرخ رشد جمعیت به تفکیک سکونت

جدول ۳: متوسط نرخ رشد سالیانه جمعیتی به تفکیک استان‌ها در سرشماری ۹۵-۱۳۹۰

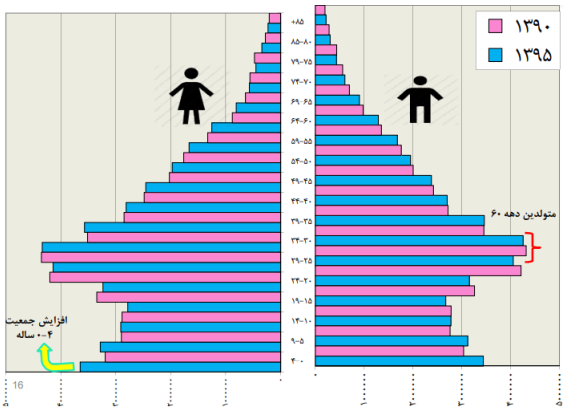
استان	نرخ رشد (درصد)	استان	نرخ رشد (درصد)
کل کشور	۱٫۲۴	یزد	۱٫۱۷
خراسان جنوبی	۳٫۰۲	چهارمحال و بختیاری	۱٫۱۵
بوشهر	۲٫۴۱	فارس	۱٫۰۸
هرمزگان	۲٫۳۷	گلستان	۱٫۰۱
البرز	۳٫۰۲	آذربایجان شرقی	۰٫۹۷
قم	۲٫۳۳	اصفهان	۰٫۹۷
سمنان	۲٫۱۶	زنجان	۰٫۸۱
سیستان و بلوچستان	۱٫۸۳	ایلام	۰٫۸۰
تهران	۱٫۷۲	خوزستان	۰٫۷۸
کهگیلویه و بویراحمد	۱٫۶۰	گیلان	۰٫۴۰
کرمان	۱٫۴۹	اردبیل	۰٫۳۵
خراسان رضوی	۱٫۴۳	مرکزی	۰٫۲۲
کردستان	۱٫۴۲	کرمانشاه	۰٫۰۷
مازندران	۱٫۳۳	لرستان	۰٫۰۷
قزوین	۱٫۱۷	خراسان شمالی	−۰٫۱۱
آذربایجان غربی	۱٫۱۷	همدان	−۰٫۲۳



شکل ۳: نمودار نرخ رشد سالیانه جمعیت استان‌ها در دوره زمانی ۹۵-۱۳۹۰

جدول ۴: افزایش جمعیت (مطلق و سالیانه) در طول دوره‌های زمانی مختلف سرشماری

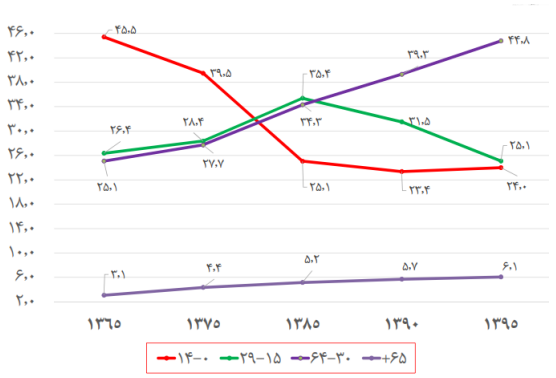
دوره	افزایش مطلق	افزایش سالانه جمعیت
۱۳۳۵ – ۴۵	۶۸۳۴۰۱۸	۶۸۳۴۰۲
۱۳۴۵ – ۵۵	۷۹۲۰۰۲۲	۷۹۲۰۰۲
۱۳۵۵ – ۶۵	۱۵۷۳۶۲۶۶	۱۵۷۳۶۲۷
۱۳۶۵ – ۷۰	۶۳۹۲۱۵۳	۱۲۷۸۴۳۱
۱۳۷۰ – ۷۵	۴۲۱۸۳۵۲	۸۴۳۶۶۵
۱۳۷۵ – ۸۰	۱۰۴۴۰۲۹۴	۱۰۴۴۰۲۹
۱۳۸۵ – ۹۰	۴۶۵۳۸۸۷	۹۳۰۷۷۷
۱۳۹۰ – ۹۵	۴۷۷۶۶۰۱	۹۵۵۳۲۰



شکل ۴: هرم سنی جمعیت در سال‌های ۱۳۹۵ و ۱۳۹۰

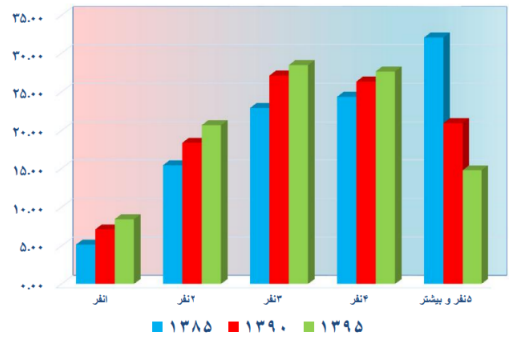
جدول ۵: گروه‌های مختلف سنی در دوره‌های ۹۵-۱۳۶۵

گروه‌های عمده سنی	۱۳۹۵	۱۳۹۰	۱۳۸۵	۱۳۷۵	۱۳۶۵
۰ – ۱۴	۲۴٫۰	۲۳٫۴	۲۵٫۱	۳۹٫۵	۴۵٫۵
۱۵ – ۲۹	۲۵٫۱	۳۱٫۵	۳۵٫۴	۲۸٫۴	۲۶٫۴
۳۰ – ۶۴	۴۴٫۸	۳۹٫۳	۳۴٫۳	۲۷٫۷	۲۵٫۱
+۶۵	۶٫۱	۵٫۷	۵٫۲	۴٫۴	۳٫۱



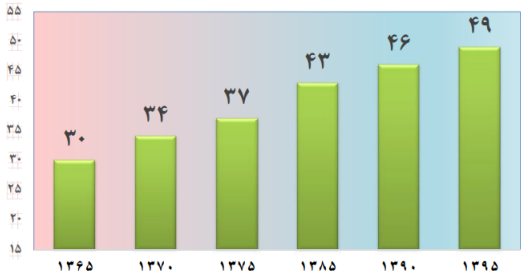
شکل ۵: روند تغییرات چهار سری زمانی (چهار گروه عمده سنی)

صعودی داشته است که این خود نیز دلیلی بر ایجاد یک جامعه سالخورده در این سال‌ها می باشد.
از طرفی، یکی دیگر از شاخص‌های مهم جمعیتی، توزیع نسبی خانوارها بر حسب تعداد افراد خانواده‌ها در دوره زمانی ۹۵-۱۳۸۵ می‌باشد که نمودار آن به تفکیک سه دوره سرشماری در سال‌های ۸۵، ۹۰ و ۹۵ به شکل زیر است: همانطور که از روی شکل ۶ ملاحظه می‌شود، خانوارهای



شکل ۶: توزیع فراوانی خانوارها در طول دوره ده ساله ۹۵-۱۳۸۵

۵ نفره و بیشتر در طول این دهه کاهش داشته‌اند و متقابلا نیز خانواده‌های ۳ نفره نیز افزایش داشته‌اند. بنابراین ملاحظه می‌شود که اکثر خانواده‌ها به سمت کم جمعیتی یا بعد پائین روی آورده‌اند که باید جمعیت شناسان و متخصصان، این مسأله را بررسی و آسیب شناسی نمایند.
همانطور که در بخش مقدمه ذکر شد، تراکم نسبی جمعیت عبارت است از متوسط تعداد افراد جمعیت یک منطقه در هر کیلومتر مربع از مساحت آن منطقه. به طور کلی روند تغییرات تراکم نسبی جمعیت کشور در طی دوره‌های ۹۵-۱۳۶۵ به شکل زیر است: مشابهاً نیز در جدول ۶



شکل ۷: تراکم نسبی جمعیت کل کشور در طی سال‌های ۹۵-۱۳۶۵

تراکم نسبی جمعیت را به تفکیک استان‌های کشور در سال ۱۳۹۰ ارائه نموده‌ایم: با توجه به محاسبات انجام شده، میانگین میزان شهرنشینی در سرشماری ۱۳۸۵ برابر با ۶۳/۴۹ و در سرشماری ۱۳۹۰ برابر با ۶۸/۷۴ می باشد به طوری که با استفاده از آزمون آماری t دو جامعه وابسته اختلاف معناداری داشته‌اند ($p < ۰/۰۰۵$). میانگین کلی این اختلافات به طور متوسط ۴/۸۹ بوده که این به معنای آنست که میزان شهرنشینی در هر یک از استان‌های کشور به طور متوسط ۴/۸۹ درصد افزایش داشته است که این رقم قابل ملاحظه می‌باشد. اکثر استان‌های کشور در سرشماری ۱۳۸۵ دارای میزان شهرنشینی ۵۹/۴ و در سال ۱۳۹۰ دارای میزان شهرنشینی ۶۴ درصد و نیز در سال ۱۳۹۵ تقریباً دارای ۶۷ درصد بوده است. در سرشماری ۱۳۸۵ حداقل و حداکثر این میزان به ترتیب برابر با ۴۷/۱ (استان هرمزگان) و ۹۳/۹ (استان قم) بوده و همین پارامترها در سرشماری ۱۳۹۰ به ترتیب برابر با ۴۹ (استان سیستان و بلوچستان) و ۹۵/۲ (استان قم) می‌باشد. تنها استان کرمان به اندازه یک درصد کاهش میزان شهرنشینی از سرشماری ۱۳۸۵ به سرشماری ۱۳۹۰ داشته و بیشترین مقدار افزایش شهرنشینی مربوط به استان چهار محال و بختیاری که به اندازه ۶/۷ درصد افزایش داشته است. از طرفی دیگر، پراکندگی یکسانی در بین میزان شهرنشینی سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ موجود می‌باشد که تقریباً برابر با ۱۲/۷ تخمین زده شده است. به طور کلی استان‌های همجوار با استان تهران همانند استان قم و البرز از میزان شهرنشینی بالایی (بیشتر از ۷۰ درصد) برخوردارند که این خود نشاندهنده مهاجرت به مرکز می‌باشد و متناظر با آن کمترین میزان شهرنشینی به ترتیب مربوط به استان‌های هرمزگان، گلستان، خراسان شمالی و سیستان و بلوچستان می‌باشد. از طرفی به کمک ضریب همبستگی پیرسون، شدت وابستگی بین دو متغیر میزان شهرنشینی سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ برابر با ۰/۹۸ بدست آمده است که نشاندهنده همبستگی قوی بین میزان شهرنشینی در سرشماری دو دوره متوالی می‌باشد. در مورد تراکم نسبی جمعیت که ارتباط تنگاتنگی با میزان شهرنشینی در استان‌های کشور دارد، یافته‌های زیر در یک دوره ده ساله ۹۵-۱۳۸۵ به دست آمده است:
با توجه به جدول ۶، میانگین تراکم نسبی جمعیت در سرشماری ۱۳۸۵ برابر با ۹۰/۵۲ نفر در کیلومتر مربع و در سرشماری ۱۳۹۰ برابر با ۹۷/۴۵

جدول ۶: تراکم نسبی جمعیت به تفکیک استان‌ها در سال ۱۳۹۵

استان	جمعیت	مساحت	تراکم
کل کشور	۷۹۹۲۶۲۷۰	۱۶۲۸۷۶۲	۴۹٫۱
تهران	۱۳۲۶۷۶۳۷	۱۳۶۸۹	۹۶۹٫۲
البرز	۲۷۱۲۴۰۰	۵۱۲۴	۵۲۹٫۴
گیلان	۲۵۳۰۶۹۶	۱۴۰۴۲	۱۸۰٫۲
مازندران	۳۲۸۳۵۸۲	۲۳۸۴۲	۱۳۷٫۷
قم	۱۲۹۲۲۸۳	۱۱۵۲۶	۱۱۲٫۱
گلستان	۱۸۶۸۸۱۹	۲۰۳۶۷	۹۱٫۸
همدان	۱۷۳۸۲۳۴	۱۹۳۶۸	۸۹٫۷
آذربایجان غربی	۳۲۶۵۲۱۹	۳۷۴۱۱	۸۷٫۳
آذربایجان شرقی	۳۹۰۹۶۵۲	۴۵۶۵۰	۸۵٫۶
قزوین	۱۲۷۳۷۶۱	۱۵۵۶۷	۸۱٫۱
کرمانشاه	۱۹۵۲۴۳۴	۲۵۰۰۹	۷۸٫۱
خوزستان	۴۷۱۰۵۰۹	۶۴۰۵۴	۷۳٫۵
اردبیل	۱۲۷۰۴۲۰	۱۷۷۹۹	۷۱٫۴
لرستان	۱۷۶۰۶۴۹	۲۸۲۹۴	۶۲٫۲
چهارمحال و بختیاری	۹۴۷۷۶۳	۱۶۳۲۸	۵۸٫۰
کردستان	۱۶۰۳۰۱۱	۲۹۱۳۷	۵۵٫۰
خراسان رضوی	۶۴۳۴۵۰۱	۱۱۸۸۵۱	۵۴٫۱
بوشهر	۱۱۶۳۴۰۰	۲۲۷۴۲	۵۱٫۲
مرکزی	۱۴۲۹۴۷۵	۲۹۱۲۷	۴۹٫۱
زنجان	۱۰۵۷۴۶۱	۲۱۷۷۳	۴۸٫۶
اصفهان	۵۱۲۰۸۵۰	۱۰۷۰۱۷	۴۷٫۹
کهگیلویه و بویراحمد	۷۱۳۰۵۲	۱۵۵۰۴	۴۶٫۰
فارس	۴۸۵۱۲۷۴	۱۲۰۶۰۸	۴۰٫۲
خراسان شمالی	۸۶۳۰۹۲	۲۸۴۳۴	۳۰٫۴
ایلام	۵۸۰۱۵۸	۲۰۱۳۲	۲۸٫۸
هرمزگان	۱۷۷۶۴۱۵	۷۰۶۹۷	۲۵٫۱
کرمان	۳۱۶۴۷۱۸	۱۸۲۷۲۶	۱۷٫۳
سیستان و بلوچستان	۲۷۷۵۰۱۴	۱۸۱۷۸۵	۱۵٫۳
یزد	۱۱۳۸۵۳۳	۱۲۹۲۸۵	۸٫۸
خراسان جنوبی	۷۶۸۸۹۸	۹۵۳۸۴	۸٫۱
سمنان	۷۰۲۳۶۰	۹۷۴۹۰	۷٫۲

نفر می‌باشد به طوری که متوسط تراکم نسبی ۷ نفر در کیلومتر مربع از سال ۱۳۸۵ به سال ۱۳۹۰ افزایش معناداری داشته است ($p < ۰٫۰۲$). اکثر استان‌های کشور در سرشماری ۱۳۸۵ دارای تراکم نسبی ۴۴ نفر و در سال ۱۳۹۰ دارای تراکم نسبی ۸۲ نفر و در سرشماری ۱۳۹۵ دارای تراکم ۸۷ نفر در کیلومتر مربع بوده است. در سرشماری ۱۳۸۵ حداقل و حداکثر این تراکم به ترتیب برابر با ۶ نفر (استان سمنان) و ۸۲۹ نفر (استان تهران) بوده و نیز در سرشماری ۱۳۹۰ به ترتیب برابر با ۶ نفر (استان سمنان) و ۸۹۰ نفر (استان تهران) می باشد که در مورد سرشماری ۱۳۹۵ نیز به ترتیب برابر با ۷٫۲ نفر (استان سمنان) و ۹۶۲ نفر (استان تهران) محاسبه شده است. تنها استان‌های یزد، سمنان و خراسان جنوبی تغییری در تراکم نسبی جمعیت آنها از سرشماری ۱۳۸۵ به سرشماری ۱۳۹۰ وجود نداشته است اما بیشترین مقدار تغییر در افزایش تراکم نسبی مربوط به استان‌های البرز و تهران که به ترتیب به اندازه ۶۵ و ۶۱ نفر در کیلومتر مربع افزایش داشته است. بقیه استان‌های کشور کمتر از ۱۰ نفر در کیلومتر مربع افزایش تراکم نسبی از سرشماری ۱۳۸۵ به سرشماری ۱۳۹۰ داشته‌اند. پراکندگی یا انحرافات تراکم نسبی در سرشماری ۱۳۹۰ به تعداد ۱۴ نفر در کیلومتر مربع بیشتر از سرشماری ۱۳۸۵ می‌باشد. در مورد روند تغییرات این شاخص در سرشماری ۱۳۹۵ تفسیر نتایج نیز مشابه با همین تغییرات پنج ساله ۹۰-۱۳۸۵ است که از ذکر دوباره آن خودداری می‌کنیم. به طور کلی استان‌های همجوار با استان تهران از تراکم نسبی بالایی برخوردارند که نمونه این استان‌ها می‌توان به استان البرز، گیلان، مازندران و قم نام برد. همچنین استان‌های سمنان، یزد و خراسان جنوبی نیز دارای کمترین تراکم نسبی از بین کلیه استان‌های کشور می‌باشند. از طرفی به کمک ضریب همبستگی پیرسون، شدت وابستگی بین دو متغیر تراکم نسبی سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ برابر با ۰٫۹۹ به دست آمده است که نشان دهنده همبستگی قوی بین دو تراکم نسبی در سرشماری ۱۳۸۵ با سرشماری ۱۳۹۰ می‌باشد. در پایان نیز شدت همبستگی بین دو متغیر میزان شهرنشینی و تراکم نسبی جمعیت به کمک ضریب همبستگی پیرسون برآورد گردید که این مقدار برابر با ۰٫۶۳ بدست آمده است که در سطح ۰٫۰۱ نیز معنادار می‌باشد.

۴. بحث و نتیجه گیری

در پژوهش حاضر بر اساس یافته‌های سرشماری عمومی نفوس و مسکن، میزان شهرنشینی و تراکم نسبی جمعیت را در استان‌های مختلف کشور استخراج نمودیم و سپس شاخص‌های توصیفی (میانگین و انحراف معیار) را برای این مقیاس‌ها به دست آورده شد. اطلاعات حاصل توسط نرم افزارهای آماری SPSS و MINITAB با استفاده از آزمون‌های آماری مناسب (آزمون t، ANOVA و ضرائب همبستگی) مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده‌اند. تفاوت‌های آماری میزان شهرنشینی و تراکم نسبی جمعیت در بین استان‌های کشور بررسی گردید وسپس اختلافات معنادار این شاخص‌ها را در بین استان‌های کشور مشخص نمودیم و با کمیت‌های متناظر با سرشماری سال ۱۳۸۵ مقایسه و آزمون آماری مناسب انجام دادیم. یافته‌های حاصل گویای این واقعیت است که متوسط میزان رشد سالانه جمعیت شهری کشور در طول دوره‌های مختلف سرشماری‌ها یکسان نبوده است. حداکثر میزان رشد سالانه در طی این سال‌ها مربوط به سال‌های ۱۳۶۵-۱۳۵۵، با مقدار ۵/۴ درصد وحداقل آن مربوط به سال‌های ۱۳۸۵- ۱۳۷۵ با مقدار ۲/۷ درصد بوده است. تحقیقات و بررسی‌های صورت گرفته نشان می‌دهد که در ۵۰ سال گذشته میانگین جمعیت شهرهای کشور از الگوی معینی پیروی نکرده است. به این ترتیب که از سال ۱۳۳۵ تا ۱۳۷۰ این روند افزایشی بوده و سپس از سال ۱۳۷۰ به بعد سیر نزولی خود را طی کرده است. در سرشماری ۱۳۸۵ استان‌های قم، تهران، اصفهان، یزد و سمنان به ترتیب با ۹۳/۹، ۹۱/۳، ۸۳/۳، ۷۹/۷ و ۷۴/۷ درصد از بیشترین میزان شهرنشینی برخوردار بودند. در مقابل استان‌های هرمزگان، کهگیلویه و بویراحمد، خراسان‌شمالی، گلستان و سیستان و بلوچستان به ترتیب با ۴۷/۱، ۴۷/۶، ۲/۴، ۴۹/۵ و ۴۹/۶ درصد، کمترین میزان شهرنشینی را داشته‌اند. از طرفی در سرشماری ۱۳۹۰، استان‌های قم، تهران، البرز ، اصفهان و یزد به ترتیب با ۹۵/۲، ۹۲/۸، ۹۰/۵، ۸۵/۴ و ۸۲/۸ درصد، از میزان شهرنشینی بالایی برخوردار بودند و متناظر با آن کمترین میزان شهرنشینی به ترتیب مربوط به استان‌های هرمزگان (۵۰ درصد)، گلستان (۵۱ درصد)، خراسان شمالی (۵۱/۵ درصد) و سیستان و بلوچستان (۴۹ درصد) می‌باشد . پرجمعیت‌ترین شهرهای کشور در سال ۱۳۸۵ با بیش از یک میلیون نفر جمعیت به ترتیب تهران، مشهد، اصفهان، تبریز، کرج و شیراز بوده‌اند که در مجموع ۱۵/۸ میلیون نفر یا ۳۲/۸ درصد از جمعیت شهرنشین کشور را در خود جای داده‌اند. جمعیت این ۶ شهر در سال ۱۳۷۵ درمجموع بالغ بر ۱۳ میلیون نفر و ۳۵/۶ درصد از جمعیت شهرنشین کشور بوده است. با ملاحظه و بررسی روند تغییرات جمعیت شش شهر بزرگ کشور و درصد آن نسبت به کل جمعیت شهرنشین طی سال‌های ۱۳۸۵-۱۳۳۵ دلالت بر ناهماهنگی بین اندازه شهرها و تمرکز جمعیت شهری در چند شهر بزرگ است. به طوری که در سال ۱۳۳۵ حدود ۴۲/۲ درصد، در سال ۱۳۴۵ معادل ۴۳/۶ درصد، در سال ۱۳۵۵ برابر ۴۴/۳ درصد و در سال‌های ۱۳۶۵، ۱۳۷۵ و ۱۳۸۵ به ترتیب ۳۹/۴، ۳۵/۶ و ۳۲/۸ درصد کل جمعیت نقاط شهری کشور در این شش شهر متمرکز بوده‌اند. می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که یکی از ویژگی‌های شهرنشینی در ایران، وجود تعداد زیادی شهر با جمعیت اندک و تعداد اندکی شهر با جمعیت بسیار است. توزیع نسبی تعداد و جمعیت و شهرهای کمتر از ۵۰ هزار نفر طی نیم قرن اخیر حاکی از آن است که درصد کل شهرهای کم جمعیت به تدریج رو به کاهش نهاده است، به این ترتیب که جمعیت آنها در یک دوره ۵۰ ساله از ۳۸/۶ درصد به ۱۹/۸۴ درصد کل جمعیت شهرنشین کشور کاهش یافته است (فتحی، ۱۳۹۰). با توجه به یافته‌های این پژوهش ملاحظه گردید که استان‌های همجوار پایتخت دارای بیشترین تراکم نسبی جمعیت و همچنین به نسبت بقیه استان‌ها از میزان شهرنشینی بالایی برخوردار می‌باشند. بی‌گمان رشد ناموزون و تراکم نسبی شدید جمعیت در پایتخت کشورهای در حال توسعه یا توسعه نیافته یکی از مشکلات بزرگ پیش روی این کشورها است. در این بین آنچه قابل توجه و با اهمیت می‌باشد، ذکر این نکته است که تمام برنامه‌ریزی‌های کلان در کشورهای کمتر توسعه یافته باید با هدف جلوگیری از رشد نامتوازن شهرها ارائه گردد. توزیع منابع اعتباری و سرمایه‌ای در اطراف و اکناف کشور و با توجه به نیازهای واقعی کشور برطبق یک الگوی فراگیر ملی می‌تواند از رشد بی‌رویه و بزرگ شدن این شهرها جلوگیری کند. البته بدیهی است که معکوس نمودن مهاجرت در این شهرها کار سخت و زمان‌بری است که تنها با داشتن یک برنامه ملی و عزم نخبگان جامعه برای رسیدن به توسعه‌ای پایدار ممکن خواهد شد.

مراجع

[۱] سایت اینترنتی مرکز آمار ایران. http://www.amar.org.ir.

[۲] فاطمه بهفروز. *زمینه‌های غالب در جغرافیای انسانی*. انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۷۴.

[۳] الهام فتحی. *مروری بر روند شهرنشینی در ایران طی نیم قرن اخیر*. شماره ۴۰۶. هفته نامه خبری – تحلیلی برنامه، ۱۳۹۰.

[۴] زهره فنی. *نقش شهرهای کوچک در توسعه منطقه‌ای*. چاپ اول. انتشارات سازمان شهرداری‌های کشور، ۱۳۸۲.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–248، صص. ۲۴۳–۲۴۸

خوشه‌بندی با تصویرسازی در راستای کشیدگی اکستریمم

فرشته شیخ‌ویسی *[آ]، مجید عظیم محسنی[آ]، مهناز خلفی[آ]

[آ] دانشگاه گلستان گروه آمار

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
خوشه بندی
تصویر سازی
ضریب کشیدگی

2020 MSC:
62H30

چکیده

خوشه‌بندی یکی از روش‌های مهم در تحلیل داده‌های چندمتغیره، تابعی، سری‌های زمانی، طول و شکل می‌باشد. در این مقاله با تصویرسازی در راستاهایی که در آن کشیدگی مشاهدات دارای کمترین یا بیشترین مقدار می‌باشد، علاوه بر کاهش بعد به خوشه‌بندی با دقت بالا می‌پردازیم که بسیاری از محدودیت‌های روش‌های رایج در خوشه‌بندی را که مانع از استفاده آنها در داده‌ها با ابعاد بالا است از بین می‌برد. براساس مشاهدات شبیه‌سازی و واقعی به ارزیابی این روش در مقایسه با روش‌های رایجی چون خوشه‌بندی فازی و بیزی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

خوشه‌بندی یک روش بدون ناظر برای افراز مشاهدات به چند گروه مجزا می‌باشد. روش‌های معمول برای خوشه‌بندی معمولا براساس بهینه کردن معیارهایی از جمله تغییرات درون گروه‌ها و بین گروه‌ها شکل می‌گیرد. انتخاب این معیارها معمولا مبتنی بر فرضیات بر ساختار کوواریانس مشاهدات می‌باشد که باعث می‌شود محدودیت‌هایی را در خوشه‌بندی ایجاد کند. به عبارت دیگر معیارهای انتخابی ممکن است متناسب با ساختار کوواریانس مشاهدات نباشد.
از دیگر محدودیت‌های این روش‌ها، مقدار از پیش تعیین شده تعداد گروه‌ها می‌باشد که باعث محدودیت‌های زیادی درخوشه‌بندی می‌گردد. ایراد دیگری که به این روشها وارد است این است که با افزایش بعد مشاهدات چندگانه به نسبت تعداد مشاهدات کارایی این روشها به شدت کاهش پیدا می‌کند. همچنین اگر در مولفه‌های بردار چندگانه وابستگی شدید وجود داشته باشد معیارهای انتخابی توانایی انعکاس همه اطلاعات این وابستگی را ندارند. دو ایراد آخر ذکر شده باعث شده نتوان از روش‌های معمول برای مشاهدات تابعی یا سری‌های زمانی که به ترتیب مشاهدات با بعد بالا و دارای وابستگی زمانی می‌باشند استفاده کرد. هر چند که در عمل داده‌های تابعی و سری‌های زمانی به صورت گسسته ثبت می‌شوند اما در نظر نگرفتن ساختار اصلی باعث می‌شود اطلاعات زیادی از دست رود.
خوشه‌بندی در راستای کشیدگی اکستریمم توسط پنا و پریتو (۲۰۰۱) معرفی گردیده و جزئیات بیشتر از آن توسط پنا و همکاران (۲۰۱۰) ارائه گردیده است.
در این روش راستاها یا به عبارت دیگر ترکیبات خطی از مشاهدات در نظر گرفته می‌شود که دارای بیشترین میزان کشیدگی یا کمترین مقدار کشیدگی در آن راستاها اتفاق افتاد. در واقع پنا و پریتو (۲۰۰۱) نشان دادند که در راستایی که میزان کشیدگی به کمترین مقدار خود می‌رسد بیشترین تفکیک در مشاهدات تفکیک پذیر رخ می‌دهد.
همچنین در راستایی که میزان کشیدگی به حداکثر مقدار خود می‌رسد مشاهدات پرت که ممکن است گروه‌های جداگانه‌ای را بوجود آورند شناسایی می‌شوند. تشخیص این مشاهدات باعث می‌شود که افراز سایر گروه‌ها با دقت بیشتری انجام گیرد.

*سخنران
پست الکترونیک: fereshteh.shv.1997@gmail.com (فرشته شیخ‌ویسی)، m.azim@gu.ac.ir (مجید عظیم محسنی)، m.khalafi@gmail.com (مهناز خلفی)

استفاده هدفمند از کاهش بعد در این روش باعث شده که این روش برای مشاهدات با بعد بالا همچون مشاهدات تابعی ریورا (۲۰۱۷) و سری‌های زمانی مایتینن و همکاران (۲۰۱۵) مورد استفاده قرار گیرد و استفاده از آن باعث افزایش چشمگیر دقت و صحت خوشه بندی این مشاهدات گردد.

در این مقاله بر اساس مشاهدات شبیه‌سازی از داده‌های تابعی و سری‌های زمانی، روش تصویرسازی در راستای کشیدگی اکستریمم با روش‌های رایج شامل خوشه‌بندی فازی و بیزی مقایسه می‌گردد. همچنین براساس یک مجموعه از مشاهدات واقعی تابعی، دقت الگوریتم خوشه‌بندی ارائه شده بر مبنای تصویرسازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای ارائه الگوریتم تصویرسازی ابتدا به مبانی روش مذکور می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. تصویرسازی در راستای کشیدگی اکستریمم:

دو بردار $X_1, X_2 \in R^p$ با توابع توزیع F_1, F_2 را به صورت خطی تفکیک‌پذیر با توان $1-\varepsilon$ گویند اگر دو مجموعه محدب A_1, A_2 وجود داشته باشد بطوریکه

$$P(X_1 \in A_1) \geq 1-\varepsilon$$

و

$$P(X_2 \in A_2) \geq 1-\varepsilon$$

باشد. به عبارت‌دیگر دو بردار X_1 و X_2 را تفکیک‌پذیر بصورت خطی گویند اگر بتوان یک بردار یکه d $(d'd=1)$ را یافت بطوریکه

$$P(X_1'd \leq c) \geq 1-\varepsilon$$

و

$$P(X_2'd \geq c) \geq 1-\varepsilon$$

که در آنها $c = c(F_1, F_2)$ یک مقدار ثابت است که به توزیع X_1 و X_2 بستگی دارد.

برای اینکه مشاهدات چندگانه $X_1, \dots, X_n \in R^p$ را بخواهیم در k گروه مجزا به روش تصویرسازی تقسیم کنیم باید فرض کنیم که این مشاهدات از یک توزیع آمیخته از k تابع توزیع $F_1, \dots, F_k$ ایجاد شده‌اند که به ازای $i = 1, \dots, k$ دارای میانگین $\mu_i = E(X \mid X \sim F_i)$ و ماتریس واریانس $V_i = Var(X \mid X \sim F_i)$ و ضرایب آمیختگی $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ می‌باشد بطوریکه $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

برای تعمیم تعریف تفکیک پذیری خطی برای k گروه ذکر شده ثابت‌ها $c_i = g_i(F_1, \dots, F_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon_i)$ را تعریف می‌کنیم که در آن $1-\varepsilon_i$ مقدار توان تفکیک پذیری می‌باشد. در این صورت می‌گوییم مشاهده X_i با توزیع F_i از سایر توزیع‌ها به طور خطی تفکیک پذیر است اگر به ازای بردار یکه $d_i \in R^p$ که $d_i'd_i = 1$ است داشته باشیم

$$P(X'd_i \leq c_i \mid X \sim F_i) \geq 1-\varepsilon_i$$

و

$$P(X'd_i \geq c_i \mid X \sim F_{(i)}) \geq 1-\varepsilon_i$$

که در آن $F_{(i)} = \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{F_j}{\alpha_i}$ می‌باشد.

با تعریف $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ می‌توانیم توان تفکیک پذیری را مقدار ثابت $1-\varepsilon$ تعریف کنیم.

برای بیان ساده‌تر قضیه اصلی که درآن بردار d مشخص می‌گردد فرض می‌کنیم که تعداد خوشه‌ها $k = 2$ باشد.

قضیه ۲.۱. *فرض کنید $X \in R^p$ دارای توزیع آمیخته $(1-\alpha)f_1(X) + \alpha f_2(X)$ باشد بطوریکه $\alpha \in (0,1)$ است. اگر V_i و μ_i به ترتیب ماتریس واریانس و بردار میانگین مربوط به توزیع f_i باشد و $d \in R^p$ یک بردار یکه باشد و قرار دهیم $z = d'X$. جهت‌هایی که میزان کشیدگی را به حداقل یا حداکثر می‌رساند بردار d را در اختیار می‌گذارد که از رابطه زیر حاصل می‌شود*

$$V_m d = \lambda_3(\mu_2 - \mu_1) + \lambda_4((1-\alpha)\phi_1 + \alpha\phi_2) + \lambda_5(\tau_2 - \tau_1)$$

که در آن $V_m = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ و $\lambda_i, i = 1, \dots, 5$ ضرایبی ثابت هستند و $\phi_i = 4\int_{R^p}(d'X - d'\mu_i)^3(X-\mu_i)f_i(X)dX$ و $\tau_i = 3\int_{R^p}(d'X - d'\mu_i)^2(X-\mu_i)f_i(X)dX$ می‌باشند.

در حالت توزیع نرمال قضیه فوق به فرم ساده زیر در می‌آید.

اگر بردار $X \in R^p$ از توزیع آمیخته $(1-\alpha)f_1(X) + \alpha f_2(X)$ تولید شده باشد که در آن $f_i, i = 1,2$ توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس مشترک V باشد در این‌صورت بردار d از رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$Vd = \tilde{\lambda}(\mu_2 - \mu_1)$$

برای یک مقدار ثابت $\tilde{\lambda}$. همچنین اگر در این حالت $|\alpha - \frac{۱}{۲}| < \frac{۱}{\sqrt{۱۲}}$ باشد بردار d راستایی را مشخص می‌کند که در آن کشیدگی به حداقل می‌رسد و در غیر اینصورت بردار d راستایی را مشخص می کند که کشیدگی به حداکثر مقدار خود می‌رسد.
توجه داشته باشید که ممکن است یک راستا برای تصویرسازی کفایت نکند و مجبور باشیم از راستاهای بیشتری برای تفکیک بهتر مشاهدات استفاده کنیم. در اینصورت بهترین شیوه استفاده از حداکثر ظرفیت برای تصویرسازی یعنی $۲p$ جهت ممکن برای مشاهدات p متغیره که در هر راستا ضریب کشیدگی یا به حداکثر و یا به حداقل می‌رسد و همچنین هر راستا با حفظ ویژگی مذکور بر راستاهای قبلی عمود است.
الگوریتم بازگشتی مربوط به یافتن راستاهای مذکور به صورت زیر می‌باشد.
فرض کنید $X_i, i = ۱, ..., n$ مشاهدات p متغیره باشند. در گام اول یعنی $m = ۱$ قرار می‌دهیم $y_i^{(۱)} = X_i$ و همچنین

$$\bar{y}^{(m)} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} y_i^{(m)}$$

و

$$S_m = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(y_i^{(m)} - \bar{y}^{(m)})(y_i^{(m)} - \bar{y}^{(m)})'$$

گام دوم: بردار d_k را به گونه‌ای بدست می‌آوریم که داشته باشیم

$$d_m = \arg\max \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(d_m' y_i^{(m)} - d_m' \bar{y}_m)^۴$$

بطوریکه $d_m' S_m d_m = ۱$ باشد. به‌عبارت‌دیگر d_m راستایی را مشخص می‌کند که در آن کشیدگی به حداکثر خود می‌رسد.
گام سوم: مشاهدات را برفضایی که بر فضای S_m عمود باشد تصویر می‌کنیم. اگر $m < p$ باشد تعریف می‌کنیم

$$y_i^{(m+۱)} = (I - \frac{۱}{d_m' S_m d_m} d_m d_m' S_m) y_i^{(m)}$$

همچنین قرار می‌دهیم $m = m + ۱$ و سایر جهت‌ها را با برگشتن به گام دوم می‌یابیم. در غیراینصورت الگوریتم متوقف می‌شود.
گام چهارم: بردارهای $d_{p+۱}, ..., d_{۲p}$ را مانند گام‌های دوم و سوم می‌یابیم با این تفاوت که به جای حداکثرسازی از حداقل سازی استفاده می‌کنیم.
به این ترتیب $۲p$ راستای مذکور را می‌یابیم و با مشاهدات یک متغیره حاصل و در مجموع $۲p$ مقدار از تصویرسازی می‌توانیم خوشه‌بندی را انجام دهیم.
توجه کنید که برای انجام گام دوم نیاز به روشهای عددی است که بتواند بردار d را محاسبه کند. برای این کار می‌توان از روش‌هایی مانند روش نیوتون ـ رافسون و الگوریتم ژنتیک استفاده کرد.

الگوریتم خوشه‌بندی

یک روش ابتکاری برای خوشه‌بندی وقتی که از تصویرسازی استفاده می‌شود توجه به فواصل مشاهدات در فضای تصویر شده است. به این صورت که اگر برای یک مجموعه مشاهدات تصویر شده اگر فاصله بین دو دسته زیاد باشد به این معنی است که می‌توان آنها را به دو خوشه تقسیم کرد. این ایده، روش جدیدی برای خوشه‌بندی را ارائه می‌دهد که در ادامه به آن می‌پردازیم.
فرض کنید $z_{mi} = X_i' d_m, m = ۱, ..., ۲p$ مقادیر تصویر شده بر راستاهای کشیدگی ماکزیمم و مینیمم باشد. همچنین به ازای مقدار ثابت m فرض کنید $z_{m(i)}$ مقادیر مرتب شده مشاهدات تصویرشده بر یک راستا باشد. فواصل مرتبه اول نمونه‌ها در این فضا را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$w_{ki} = z_{k(i+۱)} - z_{k(i)} \qquad i = ۱, ..., n$$

در این روش خوشه‌بندی براساس مقادیر w_{ki} انجام می‌شود و در هر مرتبه کنترل می‌شود که آیا مقداری از w_{ki} ها از یک مقدار مشخصی بیشتر می‌شود یا نه که نشان از ایجاد یک فاصله نسبت به سایر مشاهدات می‌باشد. الگوریتم تشخیص یک مشاهده با فاصله زیاد نسبت به بقیه به صورت زیر خلاصه می‌شود.
گام اول: برای هر $m = ۱, ..., ۲p$، مقادیر تصویر محاسبه می‌شود

$$u_{mi} = X_i' d_m$$

گام دوم: مقادیر محاسبه شده را استاندارد می‌کنیم

$$z_{mi} = \frac{u_{mi} - \mu_m}{s_m}$$

که در آن $\mu_m = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} u_{mi}$ و $s_m = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(u_{mi} - \mu_m)^۲$ می‌باشد.
گام سوم: مقادیر مرتب شده z_{mi} را محاسبه و $z_{m(i)}$ می‌نامیم.
گام چهارم: مقادیر فواصل استاندارد شده را محاسبه می‌کنیم

$$w_{mi} = w_{m(i+۱)} - w_{m(i)} \qquad i = ۱, \dots, n-۱$$

گام پنجم: بر اساس مقدار مرزی $\nu = ۱ - (۱-\alpha)^{\frac{۱}{n}}$ که در آن α یک مقدار سطح آزمون می‌باشد مقدار r را از رابطه زیر تعیین می‌کنیم

$$r = \min_j\{n > j > i_{\circ m} : w_{mj} > \nu\}$$

در این گام $i_{\circ m} = ۰$ در نظر گرفته می‌شود.
اگر $r < \infty$ باشد نشان از وجود خوشه‌ها در داده‌ها می‌دهد. درغیراینصورت مقدار m را تغییر می‌دهیم و یا به عبارت دیگر در راستای دیگر حرکت می‌کنیم.
گام ششم: مقادیری که $z_{ml} \le z_{mr}$ را در یک خوشه قرار می‌دهیم و مقادیری که $z_{ml} > z_{mr}$ در خوشه دیگر و $i_{\circ m} = r$ قرار می‌دهیم و مراحل بالا را تکرار می‌کنیم.
براساس الگوریتم بالا به خوبی می‌توان تعداد خوشه‌ها یعنی k را مشخص کرد اما ممکن است بعضی از این خوشه‌ها را بتوان با یکدیگر ادغام کرد و یا ممکن است بعضی از آنها مربوط به تک مشاهدات پرتی باشد که در یکی از راستاها شناسایی شده باشد و ممکن است بتوان این مشاهدات را به یکی از خوشه‌ها تخصیص داد و تعداد خوشه‌ها را تا حد امکان کاهش داد. بنابراین الگوریتم بالا برای رسیدن به خوشه‌بندی نهایی نیاز به اصلاح دارد.
برای اصلاح نتایج از فاصله مهالانوبیس استفاده می‌شود که بر اساس فاصله اقلیدسی استاندارد شده مشاهدات شکل می‌گیرد. الگوریتم اصلاح خوشه‌بندی به صورت زیر می‌باشد.
گام اول: k خوشه که از الگوریتم قبل شناسایی شد را به ترتیب تعداد اعضای آنها مرتب می‌کنیم. (خوشه l بیشترین تعداد عضو را دارد) مشاهدات را نیز بر همین اساس شماره‌گذاری می‌کنیم بطوریکه مشاهدات $i_{l-۱}+۱$ تا i_l به خوشه l ام تعلق داشته باشد:($i_{\circ} = ۰$ و $i_k = n$)
گام دوم: برای هر خوشه $l = ۱, \dots, k$ مراحل زیر را طی می‌کنیم
الف) اگر تعداد عناصر خوشه l ام بیشتر از $p+۱$ باشد، مقادیر میانگین و ماتریس واریانس خوشه را یعنی μ_l و S_l را از مشاهدات هر خوشه برآورد می‌کنیم. اگر تعداد عناصر خوشه کمتر از $p+۱$ باشد عملیات را متوقف می‌کنیم.
ب) فاصله مهالانوبیس همه مشاهدات که به خوشه l ام تعلق ندارد را نسبت به این خوشه تعیین می‌کنیم

$$\delta_j = (x_j - \mu_l)' S_l^{-۱}(x_j - \mu_l), \qquad j \le i_{l-۱}, j > i_l$$

ج) مشاهداتی که در آن $\delta_j \le \chi^۲_{p,۰/۹۹}$ را به خوشه l ام تخصیص دهیم.
د) اگر هیچ مشاهده جدیدی به خوشه l ام تخصیص داده نشد مقدار l را یک واحد افزایش می‌دهیم و گام‌های بالا را برای خوشه بعدی انجام می‌دهیم. اما اگر خوشه l ام با یک یا چند مشاهده جدید تغییر کرد مانند گام اول خوشه‌ها را مرتب و مقادیر آن را نام گذاری می‌کنیم و مراحل بالا را مجدد برای خوشه l ام تکرار می‌کنیم.
مراحل فوق آنقدر ادامه پیدا می‌کند که دیگر تخصیص جدیدی به هیچ خوشه‌ای نداشته باشیم.

۲. نتایج اصلی

در این بخش براساس داده‌های شبیه‌سازی شده و واقعی به بررسی روش این مقاله پرداخته می‌شود.

مطالعه شبیه‌سازی

برای مطالعه شبیه‌سازی از داده‌های تابعی که از سه ساختار زیر برخوردارند استفاده می‌شود.
ساختار اول تابعی که دارای نمایش زیر است

$$X_i^{(۱)}(t_j) = a_i + ۰/۳ + ۰/۲۵\sin(۱/۳t_j) + t_j^۳$$

که در آن $a_i \sim U(\frac{-۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$.
ساختار دوم تابعی که دارای نمایش زیر است

$$X_i^{(۲)}(t_j) = a_i + ۱/۱ + \sin(۱/۵t_j) + t_j^۳$$

که در آن $a_i \sim U(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$.
ساختار سوم تابعی که دارای نمایش زیر است

$$X_i^{(۳)}(t_j) = a_i + ۱/۷ + ۱/۵\sin(۱/۷t_j) + t_j^۳$$

که در آن $a_i \sim U(-۱, ۱)$.
برای انتخاب t_j ها، فاصله $[۰, \frac{\pi}{۳}]$ را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم همچنین برای هر خوشه ۱۵۰ منحنی به ازای $i = ۱, ..., ۱۵۰$ تولید می‌کنیم.
جدول ۱ درصد تخصیص درست را براساس سه روش بیزی، فازی و تصویرسازی در راستای کشیدگی ماکزیمم و مینیمم را نمایش می‌دهد. براي خوشه بندي فازي و بيزي بهترين حالت پارامترهاي ورودي تنظيم و مورد استفاده قرار گرفت. براي اين سه نوع خوشه بندي به ترتيب از بسته هاي fclust، bclust و SLBDD در نرم افزار R استفاده گرديد. با توجه به جدول ۱ مشخص مي گردد كه روش تصوير سازي به طور قابل توجهي داراي دقت بالاتري در خوشه بندي نسبت به روش هاي فازي و بيزي مي باشد. قابل ذكر است كه در اين مطالعه از روشهاي كلاسيك بيزي و فازي براي مقايسه استفاده گرديد نه روش هاي كه براي خوشه بندي داده هاي تابعي طراحي شده است. براي ارزيابي صحيح تر، در مطالعات آينده مقايسه روش تصوير سازي با روشهاي طراحي شده براي خوشه بندي داده هاي تابعي پيشنهاد مي گردد هرچند كه با دقت بالايي كه روش تصوير سازي نشان ميدهد مي تواند به عنوان يك روش مورد اطمينان مورد استفاده قرار گيرد.

جدول ۱: نتایج مقایسه روشهای خوشه‌بندی تابعی

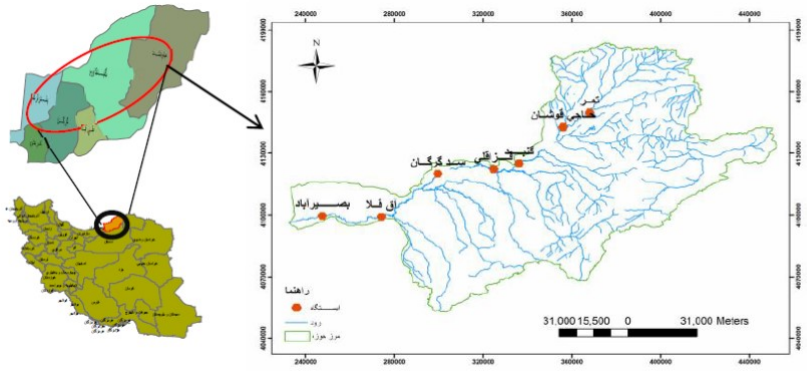
روش	بیزی	فازی	تصویرسازی
درصد تخصیص درست	۷۹	۶۵	۹۴

داده هاي واقعي

برای بررسی دقت روش تصویرسازی در راستای کشیدگی ماکزیمم و مینیمم در حالتی که داده های سری زمانی در اختیار داشته باشیم، از میزان رسوب معلق اندازه گیری شده از ایستگاه های گرگانرود در یک دوره زمانی ۲۵ ساله استفاده گردید. تعداد ۴ ایستگاه در پایین دست سد گلستان (تمر، حاجی قوشان، گنبد و قزاقلی) و دو ایستگاه در بالا دست سد (آق قلا و بصیر آباد) واقع می باشند (شکل ۱). روش تصویر سازی برای دقت در تفکیک ایستگاه های بالادست و پایین دست سد که به نظر دارای رسوب معلق متفاوتی هستند مورد استفاده قرار گرفت. جدول ۲ میانگین رسوب معلق بر حسب هزار تن در ماه را نشان می دهد. با طبقه بندی انجام شده دو خوشه شناسایی شد و ایستگاه های تمر و بصیر آباد و حاجی قوشان در یک خوشه و سه ایستگاه دیگر در خوشه دیگر قرار گرفت. ایستگاه تمر به دلیل میزان دبی پایین رسوب معلق کمتری را داشت بنابراین در خوشه ایستگاه های پایین دست قرار گرفت. یک ایده قابل بررسی در این مطالعه می تواند مقایسه خوشه بندی با تصویرسازی با روش های معمول خوشه بندی سری های زمانی در دامنه زمان و طیف باشد که می تواند در مطالعات بعدی مورد توجه قرار گیرد.

جدول ۲: میانگین رسوب معلق در ایستگاه ها

ایستگاه	بصیر آباد	آق قلا	تمر	قزاقلی	گنبد	حاجی قوشان
میانگین	۴۰	۶۰	۳۰	۱۶۰	۱۰۰	۱۰۰



شکل ۱: موقعیت ایستگاه های مورد بررسی در گرگانرود

مراجع

[1] Miettinen, J., Taskinen, S., Nordhausen, K., & Oja, H. (2015). Fourth moments and independent component analysis. *Statistical science*, 30(3), 372-390.

[2] Peña, D., & Prieto, F. J. (2001). Cluster identification using projections. Journal of the American Statistical Association, 96(456), 1433-1445.

[3] Peña, D., Prieto, F. J., & Viladomat, J. (2010). Eigenvectors of a kurtosis matrix as interesting directions to reveal cluster structure. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(9), 1995-2007.

[4] Rivera, D. P. S. (2017). Clustering in high dimension for multivariate and functional data using extreme kurtosis projections (Doctoral dissertation, Universidad Carlos III de Madrid).

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–274، صص. ۲۴۹–۲۵۵

ارزیابی کارایی شعب شرکت بیمه معلم در سال ۱۳۹۹ با روش تحلیل پوششی داده ها

امیر مسعود کاظمی راد[آ]

مدیر بیمه معلم شعبه مراغه، ایران، مدرس دانشگاه، مراغه، ایران

[آ] *دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی*

۱. مقدمه

از لحظه آفرینش انسان، امنیت همواره از اصلی‌ترین دغدغه‌های نوع بشر بوده‌است. چرا که اتفاقات و بلایای طبیعی از همان لحظه ظهور انسان بر روی زمین تا به امروز گریبانگیر او بوده‌است. از این رو بشر همیشه به دنبال یافتن چاره‌ای برای تامین امنیت جان و مال خویش بوده و شاید همین موضوع شروع تاریخچه بیمه است.
باور عمومی بر این است که برای اولین بار بیمه به معنای واقعی کلمه برای پشتیبانی از تجارت و حمایت از کشتیرانی در برابر خطرات و دزدان دریایی و در واقع در زمان تجارت با کشتی شکل گرفت و به بیمه باربری دریایی معروف است.

۲. تاریخچه بیمه در جهان

در تاریخچه بیمه، نخستین نوع بیمه که مربوط به قبل از سده نوزدهم مورد عمل قرار گرفته، بیمه باربری دریایی است . سایر رشته‌های بیمه‌ای کم و بیش بعد از انقلاب صنعتی به تدریج شروع شده است. کشتیرانان فینیقی را مبتکر این نوع بیمه یعنی بیمه باربری دریایی می‌دانند. اینگونه که کشتیرانان و دریانوردان از بازرگانان و تجار وام دریافت می‌کردند و اگر سفر خود را به سلامت به سرانجام می‌رساندند باید در مدت زمان معلوم اصل پول دریافتی را به همراه سودش به آن بازرگان بازگشت می‌دادند. در تمام این مدت هم کالاهای این دریانورد مقروض نزد بازرگان گرو می‌ماند و اگر طلبش به موقع وصول نمی‌شد می‌توانست آنها را به حراج بگذارد اما چنانچه کشتی با اتفاقات دریایی رو به رو میشد یا دزدان دریایی کالاها را غارت میکردند دریانورد هیچ وظیفه‌ای نسبت به عودت دادن وام دریایی نداشت. این نوع بیمه چیزی حدود پانصد الی ششصد سال پیش از میلاد مسیح در کشورهای حوزه مدیترانه رواج داشت. بنا به برخی روایات این نوع از بیمه حدود دو هزار سال قبل از میلاد در هند و حتی هزار سال قبل از آن یعنی سه هزار سال پیش از میلاد مسیح در چین مرسوم بوده است.
اما بیمه به معنای امروزی از قرن چهاردهم میلادی به وجود آمد. زیرا در دین مسیح سود گرفتن حرام بود و از طرفی سرمایه‌داران حاضر نبودند پولشان را بدون سود قرض بدهند و از طرف دیگر تجار هم نمی‌توانستند بدون وام به تجارت خود ادامه بدهند. این الزام و ضرورت بود که ایشان را به سمت روشی جدید سوق داد که در واقع شرط همراه با قرض بود که برای اولین بار در سال ۱۳۴۷ میلادی در شهر ژن ایتالیا در میان رومیان مرسوم شد. برای جلوگیری از بهانه‌گیری‌های کلیسا وام گیرنده به جای پرداخت سود جایزه‌ای می داد که در واقع هم قیمت همان بهره قبلی بود ولی کلیسا نمی‌توانست از آن جلوگیری کند. بیمه علی رغم این مخالفت‌ها به سرعت توسعه یافت و به گونه‌ای پیش رفت که شواهد حاکی از آن است که در دفتر بیمه‌ای در ژنو در سال ۱۳۹۳در مدت یک ماه هشتاد قرار داد بیمه امضا شد. بازرگانان و کشتی‌داران انگلیسی در ابتدای قرن هفدهم میلادی، پیمانی را در کافه‌ای در لندن به نام لویدز[۱] پایه‌گذاری کردند که می‌توان این پیمان را اولین شکل از بیمه امروزی

پست الکترونیک: kazemierad@yahoo.com (امیر مسعود کاظمی راد)

[۱] Lloyd's

دانست. در حقیقت آن‌ها در این پیمان شرکت بیمه لویدز را پایه‌گذاری نمودند. امروزه این شرکت به عنوان یکی از بزرگترین شرکت‌های فعال در صنعت بیمه شناخته می‌شود. دومین رشته بیمه‌ای، بیمه آتش سوزی است که پس از آتش‌سوزی مهیب و فاجعه بار لندن در سال ۱۶۶۷ تاسیس شد. نخستین رشته بیمه که وارد ایالات متحده آمریکا شد، بیمه آتش‌سوزی بود. پس از جنگ جهانی دوم بیمه‌های اجتماعی توسعه پیدا کرد. در دهه ۸۰ قرن نوزدهم بیمه اجتماعی در آلمان اجرا شد و در سال ۱۹۱۱ قانون بیمه ملی در بریتانیا هم به تصویب رسید [۱].

۳. تاریخچه بیمه در ایران

نخستین بار در سال ۱۲۷۰ شمسی، ناصرالدین شاه قاجار امتیاز "<تاسیس اداره حمل و نقل و سازمان بیمه در ایران">" را به فردی روس به نام "<لازار پولیاکف[۲]">" واگذار کرد، اما این طرح اجرا نشد. بعد از آن در زمان حکومت احمد شاه قاجار در سال ۱۲۸۹، دو فرد روسی با نام "<کافکاز مرکوری[۳]">" فعالیت‌های بیمه‌ای را در ایران آغاز کردند. به تدریج شرکت‌های خارجی بیمه وارد این حوزه در ایران شدند و نزدیک به ۲۵سال خارجی‌ها بازار بیمه ایران را در دست گرفتند. طوری که در سال ۱۳۱۴ حدود ۲۹ شرکت بیمه خارجی در ایران مشغول به کار بودند. که از میان آن‌ها دو شرکت به نام‌های "<اینگستراخ[۴]">" و "<یورکشایر[۵]">" از سایر شرکت‌ها فعال‌تر بودند و تا قبل از پیروزی انقلاب، در ایران فعالیت داشتند.

در سال ۱۳۱۴ شمسی "<الکساندر آقایان">" و "<علی‌اکبر داور">"، با بهره‌گیری از سرمایه دولتی ۲۰ میلیون ریالی، شرکت سهامی بیمه ایران را تاسیس کردند. این را می‌توان نقطه آغاز تحولات بیمه در ایران دانست. قبل از تشکیل شرکت بیمه ایران، هیچ شرکتی صد در صد ملی در خاورمیانه و حتی هند وجود نداشت.

در تاریخ ۱۳۱۶، قانونی در مجلس شورای ملی تصویب شد که طبق آن، بیمه سازمان‌های دولتی به شرکت بیمه ایران واگذار شد و بدین ترتیب اولین شرکت بیمه در ایران تاسیس شد. و شرکت‌های دولتی می‌بایست ۲۵ درصد از بیمه‌های خود در ایران را در شرکت بیمه ایران، بیمه اتکایی می‌کردند [۱].

۳. ۱. *ورود شرکت‌های خصوصی بیمه در ایران*

در سال ۱۳۲۹ اولین شرکت خصوصی بیمه ای ایرانی با نام بیمه شرق تاسیس شد و بین سال‌های ۱۳۲۹ تا ۱۳۴۳ شمسی، ۸ شرکت بیمه‌ای ایرانی خصوصی در کشور تاسیس شد و فعالیت این شرکت‌ها، نسبت به بنیادهای خارجی، پررنگ‌تر شد. در سال ۱۳۴۹ مدرسه عالی بیمه تاسیس شد و در سال ۱۳۵۰، قانون تاسیس بیمه مرکزی به تصویب رسید. در همین سال شرکت‌های بیمه‌ای مانند: بیمه تهران، بیمه دانا، بیمه حافظ و بیمه ایران و آمریکا با مشارکت سرمایه‌گذاران خارجی تاسیس شد. بدین ترتیب تا پیروزی انقلاب، علاوه بر شرکت سهامی بیمه ایران، ۱۳ شرکت بیمه خصوصی و ۲ نمایندگی خارجی در این صنعت در کشور فعال بودند.

۳. ۲. *صنعت بیمه با انقلاب اسلامی*

در سال ۱۳۵۸ همه شرکت‌های بیمه ایرانی توسط شورای انقلاب، ملی اعلام شد و بر اساس اصل ۴۴ قانون اساسی، تمامی فعالیت‌های شرکت‌های بیمه‌ای زیر نظر دولت قرار گفت. در سال‌های ۶۰ و ۶۱ فقط سه شرکت بیمه ایران، آسیا و البرز مجوز صدور بیمه‌نامه داشتند. در سال ۶۷ نیز ۱۰ شرکت بیمه‌ای با یکدیگر ادغام شدند و بدین ترتیب شرکت بیمه دانا شکل گرفت. بیمه معلم یکی از شرکت‌های بیمه خصوصی در ایران است. بیمه معلم با عنوان اولیه "شرکت بیمه صادرات و سرمایه گذاری" در بیستم دی ماه سال ۱۳۷۳ با مشارکت نظام بانکی و به منظور کاهش اثرات منفی ریسک‌های سیاسی و تجاری و همچنین توسعه فعالیت‌های صادراتی و ارائه پوشش‌های بیمه‌ای لازم در مقابل ریسک‌های موجود، تأسیس گردید. در قدم نخست، این شرکت، فعالیت خود را در زمینه بیمه‌های اعتباری آغاز نمود و سپس به تدریج، دامنه فعالیت‌های خود را در سایر رشته‌های بیمه توسعه داد. پس از واگذاری بخش عمده سهام شرکت در سال ۱۳۸۶، بر اساس تصمیم مجمع عمومی صاحبان سهام، نام شرکت به "<بیمه معلم">" تغییر یافت. هم اکنون شرکت بیمه معلم با مشارکت سهامداران عمده خود شامل شرکتهای "<ساختمانی معلم">"، "<بازرسی مهندسی و صنعتی ایران">"، "<سرمایه‌گذاری کشتیرانی">"، "<سرمایه‌گذاری فرهنگیان">"، "<بانک سرمایه">"، "<کشتیرانی اقیانوس خروشان کیش">" و "<شرکت سرمایه گذاری راستین نوین کیش">"، در کلیه رشته‌های بیمه زندگی و غیر زندگی فعالیت می‌نماید و دامنه فعالیت آن در سراسر کشور گسترده است [۲].

یکی از بحث های مطرح در بیمه، بررسی کارایی شعب بیمه ها است. به عبارتی کدام شعبه نسبت به موجودی بهترین خروجی را داشته است. در این موضوع مطالعات و پژوهشهایی سالانه در کشور انجام می شود. گلستانی در سال ۱۳۸۶ تحقیقی با بررسی روند کارایی[۶] شرکت‌های بیمه دولتی ایران از سال ۱۳۸۰تا ۱۳۸۴ پرداخته و بر اساس نتیجه تحقیق، عملکرد شرکت‌های بیمه دولتی در بازه زمانی مورد بررسی کاملاً کارا نبوده بلکه تنها نیمی از واحدهای تصمیم‌گیر عملکرد کارا داشتند. همچنین عبادی و باقرزاده (۱۳۸۷) در مقاله کارایی فنی[۷] و بازدهی نسبت به مقیاس

---

[۲] Polyakov Lazar
[۳] Mercury Kafkaz
[۴] Ingestrakh
[۵] Yorkshire
[۶] efficiency
[۷] efficiency Technical

تولید را برای تعدادی از شرکت‌های بیمه موجود در بازار بیمه کشوراندازه گیری کرده اند نتایج به دست آمده در این تحقیق نشان می‌دهد که با فرض وجود بازدهی متغیر نسبت به مقیاس شرکت‌های بیمه ایران توسعه و رازی در مقایسه با سایر شرکت های بیمه دارای بیشترین میانگین کارهای فنی و شرکت‌های بیمه کارآفرین و آسیا دارای کمترین کارایی فنی هستند. از بین شرکت‌های منتخب شرکت بیمه رازی مطلوب ترین عملکرد را نسبت به سایر شرکت‌ها داشته است. به عبارتی این شرکت در سال های مورد بررسی کامل از نظر فنی کارا بوده و همچنین در مقیاس بهینه اقتصادی بازدهی ثابت نسبت به مقیاس قرار دارد.

فلاح (۱۳۸۶) در مقاله ای به بررسی کارایی شعب شرکت‌های بیمه ایران البرز و آسیا پرداخت، با نظربه اینکه شعبه ای کاراتر است که با توجه به ورودی هایش، خروجی و ستادی بیشتری داشته باشد. ایشان ۱۵۳ شعبه ۲۰۴ شعبه بیمه ایران را بررسی کرد و آن را به دو دسته ۶۹ و ۸۴ شعبه بر اساس تعداد نمایندگی شعب تقسیم کرد که در بین ۶۹ شعبه دست اول درحالت بازده متغیر نسبت به مقیاس، تعداد ۱۲ واحد کارا بود. میانگین کارایی در این دسته برابر ۵۱ درصد بود. در دسته دوم شعب بیمه ایران (که شامل ۸۳ شعبه است) مشاهده می‌شود که تعداد ۸ واحد آن کارا هستند. در شرکت بیمه البرز، ۴۳ شعبه بررسی شد که در این میان ۶ واحد کارایی نسبی ۱۰۰ درصد داشتند. میانگین کارایی شعب در حال بازدهی متغیر نسبت به مقیاس برابر ۵۰ درصد بود.

فن و همکارانش[۸] در مقاله به تخمین تابع هزینه و کارایی شرکت های بیمه ای ۱۴ کشور اروپایی با استفاده از روش حداکثر درستنمایی)جهت تخمین پارامترهای الگو و همچنین اثرات ناکارایی (طی دوره ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۱ پرداختند به این منظور مرزهای جداگانه تولید راه برای شرکت های بیمه زندگی، غیر زندگی و مختلط در نظر گرفتند آنها اثرات ناهمسانی بنگاه‌ها را برای تخمین مقیاس اقتصادی و همچنین اثرات اندازه بنگاه و ساختار بازار روی کارایی اقتصادی بررسی کرده‌اند.

کامیینس و همکارانش[۹] در مقاله‌ای به ارزیابی کارایی فنی شرکت‌های بیمه آمریکا پرداختند. آنها به تخمین جداگانه بنگاه‌ها در قالب صندوق کوچک متوسط و بزرگ با استفاده از تابع مرزی برای دوره زمانی ۱۹۸۰ تا ۱۹۸۸ پرداختند. تابع هزینه مرزی را با استفاده از تکنیک های حداکثر درستنمایی تخمین زدند نتایج تحقیقات حاکی از آن است که بنگاه‌های بزرگ به طور متوسط از کارآیی فنی ۹۰ درصد برخوردارند و بنگاه های متوسط و کوچک کارهای فنی ۸۸ درصد دارد.

الینگ و لانن[۱۰] در مقاله‌ای به بررسی کارایی ۶۴۶۲ شرکت بیمه در ۳۱ کشور جهان طی یک دوره ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۶ با استفاده از روش تحلیل پوششی داده ها پرداختند. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که هیچ یک از شرکت های مورد بررسی از کارایی ۱۰۰ درصد برخوردار نیستند و میانگین کارایی فنی در بیمه‌های غیرزندگی ۵۰ درصد و در بیمه‌های زندگی برابر ۷۱ درصد است. همچنین میانگین کارآیی هزینه کمتر از کارایی فنی به دست آمده و مقدار آن برای بیمه‌های غیرزندگی برابر سی و هشت صدم و برای بیمه‌های زندگی برابر پنجاه و نه صدم به دست آمده است.

با توجه به اینکه تا به امروز کارایی و رتبه بندی شعب شرکت بیمه معلم مورد مطالعه قرار نگرفته است به همین منظور برای اولین بار در این مقاله کارایی شعب را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

مفهوم کارایی:

کارایی عبارتست از دستیابی یک واحد اقتصادی به سطح تولید بهینه یا میزان دسترسی یک بنگاه به سطح مطلوب تولید با توجه به ورودیهای در دسترس میباشد. به عبارتی کارایی بیانگر این مفهوم است که یک سازمان به چه خوبی از منابع خود در راستای تولید نسبت به بهترین عملکرد در مقطعی از زمان استفاده کرده است.

انواع کارایی:

کارایی فنی: کارایی فنی یا تکنیکی عبارت است از توانایی یک واحد در بدست آوردن حداکثر خروجی با یک دسته از ورودیهای ثابت. این کارایی متأثر از عملکرد مدیریتی و مقیاس آن واحد (بنگاه) میباشد. به عبارت دیگر کارایی فنی، اختلاف بین نسبت خروجی به ورودی مشاهده شده با نسبت بین خروجی به ورودی در بهترین شرایط است.

کارایی تخصیصی: نشان دهنده ابعاد تخصیص بهینه عوامل موجود میباشد، به طوری که به کار گرفتن حداقل هزینه را برای بنگاه به همراه داشته باشد و به تعبیری ساده تر میتوان گفت که کارایی تخصیصی نتیجه به کار گرفتن نهادهها به نسبت مناسب است که موجب می‌شود هزینه تولید به حداقل میزان ممکن برسد.

کارایی اقتصادی: این نوع کارایی، حاصل ضرب کارایی فنی و کارایی تخصیصی است طبق تعریف، کارایی اقتصادی را توانایی واحدهای تصمیم گیری در به دست آوردن حداکثر سود ممکن با توجه به قیمت و سطوح ورودیها میباشد و در حقیقت کارایی اقتصادی در صورتی تحقق میبابد که علاوه بر عدم اتلاف منابع، بهترین استفاده از آنها صورت گیرد، دستیابی به این مرتبه معمولاً مستلزم انتخابی ترکیبی از ورودیهاست که این ترکیب کمترین هزینهها را در بر داشته باشد. امامی میبدی (۱۳۸۴).

۴. معرفی روش تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها، روشی ناپارامتری بوده و این روش نیازی به تعیین تابع تولید ندارد. فرض کنید در یک صنعت تنها دو ورودی و یک خروجی وجود داشته باشد. اگر اطلاعات مقادیر ورودی و خروجی را برای تمامی واحدهای تولیدی فعال در آن صنعت در یک فضای دو

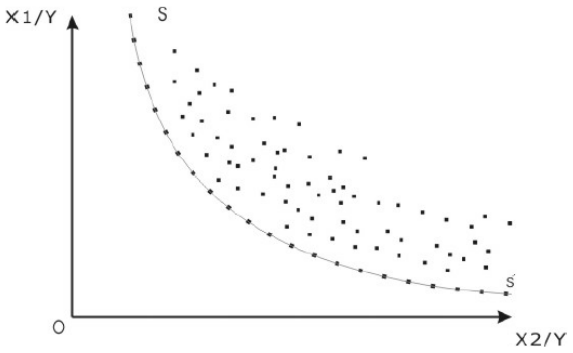
---

[۸] Fenn et al

[۹] Cummins et al

[۱۰] Luhnen Eling_&

بعدی مانند شکل زیر نشان دهیم، با اتصال نقاطی که به محورها و مبدأ مختصات نزدیکتر هستند، تابع محدبی بدست می آید که به آن منحنی تولید مرزی)کارا(گفته میشود. واحدهایی که بالاتر از این منحنی قرار گیرند برای تولید همان مقدار محصول)خروجی(از مقادیر بیشتر ورودی استفاده کردهاند.



نمودار ۱. استخراج منحنی تولید یکسان به روش DEA

هرچه تعداد واحدهای تولیدی در یک صنعت بیشتر باشد، منحنی تولید مرزی دقیق تر محاسبه میشود. این روش با مقایسه مقادیر ورودی و خروجی یک واحد تولیدی (مثلا واحد A با سایر واحد ها تعیین میکند.که آیا واحد A در مقایسه با سایرین کارا عمل کرده است یا خیر. در شرایط واقعی که تعداد ورودیها و خروجیها بیشتر است این محاسبات با استفاده از برنامه ریزی خطی انجام میگیرد. مجموعه واحدهایی که فعالیت آنها کارا بوده و بر روی منحنی تولید مرزی واقع میشوند.

تحلیل پوششی دادهها روشی ناپارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیمگیری است که اولین مدل آن توسط چارنس[۱۱] و همکاران (۱۹۷۸) مطرح شد. مدل آنها CCR نام گرفتهاست که شامل حرف اول هر کدام از نویسندگان است. شکل اصلی با رویکرد ورودی این مدل برای ارزیابی کارایی واحد تصمیم گیری k ام بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\
&\text{Subject to} \\
&\sum_{r=1}^{k} v_i x_{ik} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \geq 0; \qquad (1) \\
&v_i, u_r \geq 0, \\
&i = 1, 2, \ldots, m, \\
&j = 1, 2, \ldots, n, \\
&r = 1, 2, \ldots, s.
\end{aligned}
$$

که در آن n تعداد واحدهای تصمیمگیری با m ورودی بصورت x_{ik} و دارای s خروجی است که با y_{rk} نشان داده شده است. v_i و u_r به ترتیب وزنهای ورودی i ام و خروجیr ام هستند. مدل تغییر یافته و یا به عبارتی بهبود یافته CCR، توسط بنکر[۱۲] و همکاران (۱۹۸۴) ارائه شد و با حرف اول نویسندگان مقاله مدل BCC نام گرفت. این مدل با استفاده از مرز کارایی، مقدار کارایی محض واحدهای تصمیمگیری را مشخص میکند. فرم اولیه با رویکرد ورودی این مدل برای ارزیابی کارایی واحد تصمیم گیری k ام بصورت زیر است:

---

۱۱ charnes
۱۲ benker

$$\begin{aligned} &\min \theta_k \\ &\text{Subject to} \\ &\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1} \lambda_j x_{ij} \geq 0 \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{rk} \geq 0 \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن θ_k مقدارکارایی واحد تصمیم گیریk ام و n تعداد واحد های تصمیم‌گیری با m ورودی بصورت x_{ik} و همینطور $i=1,2,...,m$ و دارای s خروجی به صورت $y_{rk}, r=1,2,...,s$ و نیز λ_k شدت یا وزن واحد تصمیم گیری k ام است. اگر θ_k برابر یک به دست آید به این معناست که آن واحد تصمیمگیری، کارا است.

مفاهیم ورودی و خروجی:

انتخاب ورودی و خروجی ها در تحلیلهای کارایی از مباحث ساختاری و اساسی تحلیل میباشد. در مورد بنگاههای مالی مانند بانکها و مؤسسات بیمه اهمیت این بحث دوچندان است. بطور کلی در واحدهای تولیدی و صنعتی از ورودی، به منابعی مانند نیروی کار، سرمایه تلقی میشود که در راستای تولید به آنها نیاز می شود. از خصوصیات ورودی ها این است که هزینه های تولید را افزایش می دهد و از سوی دیگر خروجی به کالا و خدماتی اطلاق میگردد که متقاضی داشته و مصرف کنندگان حاضر به خرید آن بوده و فروش آن برای بنگاه درآمدزا باشد. بنگاه ها با حفظ ثبات سایر شرایط عموماً خواستار مقادیر کمتری از ورودی ها و مقادیر بیشتر خروج هستند. آنها این نکته را در تحلیلهای سنجش کارایی منعکس کردند. در مؤسسات بیمه، نه تنها ورودیها و خروجیها ناملموس هستند، بلکه این مؤسسات همواره از عامل دیگری به نام ریسک متأثر میباشند. یک بخش کلیدی از موفقیت بانکها و بیمه ها به کارایی آنها در مدیریت ریسک بستگی دارد.

با توجه به نوع فعالیت شرکت های بیمه، میتوان این مطلب را اظهار داشت که در بازار فروش خدمات بیمه ای، شرکتی موفق خواهد بود که با بهرهگیری از تنوع در خدمات، سرعت در ارائه خدمات، کسب رضایتمندی مشتریان، شناخت نیازهای متقاضیان محصولات خود، مشتریان بیشتری را جلب کرده و موجب رشد تقاضای خدمات بیمهای در بازار بیمه شود. لذا در این بررسی ما با رویکرد حداکثرسازی محصولات به بررسی کارایی شعب شرکت بیمه معلم در سال ۱۳۹۹ خواهیم پرداخت.

پارامترهایی که در ارزیابی شعب شرکت بیمه معلم مورد استفاده قرار می گیرد عبارتند از:

ورودیها : حق بیمه نامه های صادر شده، تعداد پرسنل، خسارتهای پرداختی و میزان بدهی درهر شعبه

خروجی: میزان رضایتمندی هر شعبه

برای ارزیابی کارایی شعب از روش تحلیل پوششی دادهها با مدلهای(CCR وBCC) استفاده شده‌است. بدین منظور در این دادهها، تعداد حق بیمههای تولیدی، تعداد پرسنل و خسارتهای پرداختی و میزان بدهی هر شعبه به عنوان ورودی و میزان رضایتمندی هر شعبه به عنوان خروجی انتخاب شدند. برای محاسبات کارایی تکنیکی با روش تحلیل پوششی دادهها از نرم افزار EMS استفاده شده‌است.

در جدول (۲) نتایج محاسبات کارایی شعب بیمه معلم در سال ۱۳۹۹ آورده شده است. در ارزیابی کارایی با تحلیل پوششی داده‌ها دو مدل ناپارامتری CCR و BCC هر دو با رویکرد ورودی مدنظر قرار گرفت. با روش CCR شعب کارا عبارتند از: کاشان، سمنان و خراسان جنوبی که به ترتیب در رتبههای یک تا سه قرار گرفتهاند. این در حالی است که با روش BCC نیز هشت شعبه به عنوان شعب کارا معرفی شدند و مجتمع فرهنگیان، اردبیل، سمنان، کشتیرانی، کاشان، همدان، خراسان جنوبی و کرمانشاه به ترتیب در رتبههای یک تا هشت قرار گرفتهاند و با مقایسه نتایج دو روش تحلیل پوششی داده ها، شعبه های خراسان جنوبی، سمنان و کاشان در هر دو روش کارا می باشند و برای سایر شعب نیز میتوان با استفاده از این روش و تغییراتی در عوامل ورودی با کمک شعب کارا بقیه را نیز کارا کرد.

۵. جمع بندی و نتیجه گیری

برای محاسبه و ارزیابی کارایی روش های مختلفی وجود دارد ولی روش تحلیل پوششی داده ها به دلیل اینکه تمامی داده ها و آمارهای شعب را پوشش می دهد بیشتر مورد توجه واقع شده است. همچنین برای ارزیابی کارایی ۳۶ شعبه بیمه معلم در سال ۱۳۹۹ از روشهای تحلیل پوششی دادهها (مدلهای CCR و BCC) استفاده شد و تعداد حق بیمههای صادره، تعداد پرسنل، خسارتهای پرداختی و میزان بدهی هر شعبه به عنوان ورودی و میزان رضایتمندی هر شعبه به عنوان خروجی انتخاب شدند. محاسبات نشان داد که نتیجه کارایی و رتبه حاصل از هر یک از روش برای شعب متفاوت است. در این روش با استفاده از مجموعه اطلاعات مربوط به شعب و کلیه عوامل و ورودی های موثر و مورد استفاده در فرآیند ارائه خدمات، بر اساس عملکرد شعب کارا یک حد استاندارد برای تولید، برآورد و به کمک همین روش، کارایی دیگر شعب در مقایسه با آن سنجیده و بهبود داده میشود. با روش CCR شعب کارا عبارتند از: کاشان، سمنان و خراسان جنوبی که به ترتیب در رتبههای یک تا سه قرار گرفتهاند. این در حالی است که با روش BCC نیز هشت شعبه به عنوان شعب کارا معرفی شدند و مجتمع فرهنگیان، اردبیل، سمنان،

جدول ۱: مشخصات شعب بیمه معلم مورد مطالعه درسال ۱۳۹۹

نام شعبه	کل بیمه نامه صادره (میلیون ریال)	کل خسارت پرداختی (میلیون ریال)	تعداد کارکنان	بدهی (میلیون ریال)	میزان رضایتمندی
شعبه آذربایجان شرقی	۱,۰۷۰,۱۳۵	۹۹۷,۶۸۲	۲۲	۳٫۵۲۱	۶۵٫۵
شعبه آذربایجان غربی	۶۰۱,۱۸۱	۴۷۰,۸۰۶	۱۳	۱٫۷۲۶	۶۵٫۸
شعبه اردبیل	۳۸۰,۰۲۸	۳۱۲,۲۶۷	۹	۲٫۸۳۷	۷۵٫۶
شعبه استان مرکزی	۳۶۸,۶۱۲	۲۹۱,۶۴۶	۱۲	۱٫۷۵۴	۶۶٫۳
شعبه اصفهان	۱,۲۷۹,۴۲۵	۷۸۹,۳۶۴	۲۱	۸٫۰۳۷	۷۰٫۲
شعبه البرز	۶۳۶,۶۳۲	۴۳۲,۳۵۹	۱۶	۲٫۷۵۵	۷۳٫۳
شعبه ایلام	۲۲۰,۹۹۵	۱۶۳,۵۰۷	۸	۲٫۸۷۶	۶۷٫۳
شعبه بوشهر	۳۰۱,۱۰۸	۲۳۳,۹۹۹	۱۲	۱٫۸۴۲	۷۱٫۳
شعبه چهارمحال و بختیاری	۳۶۰,۷۴۲	۲۳۳,۷۶۸	۱۲	۳٫۴۹۸	۶۹٫۶
شعبه خراسان جنوبی	۳۳۶,۵۹۸	۱۶۳,۷۰۵	۷	۱٫۳۰۱	۷۲
شعبه خراسان رضوی	۱,۲۸۰,۷۴۴	۸۳۵,۲۹۶	۲۳	۸٫۷۴۲	۶۹٫۵
شعبه خراسان شمالی	۳۰۷,۲۷۳	۱۸۴,۹۷۷	۱۰	۴٫۰۴	۷۲٫۷
شعبه خوزستان	۱,۱۵۲,۵۲۵	۹۳۰,۸۱۳	۱۸	۵٫۴۸	۶۸٫۷
شعبه زنجان	۳۲۷,۶۰۲	۲۴۳,۷۴۹	۱۱	۱٫۴۹۵	۷۱٫۵
شعبه سمنان	۱۸۰,۷۲۴	۱۲۷,۵۰۷	۱۰	۱٫۰۵۲	۷۲
شعبه سیستان و بلوچستان	۴۴۲,۳۱۲	۵۱۵,۱۰۷	۱۳	۱٫۱۰۶	۶۵
شعبه شرق تهران	۷۵۸,۴۸۶	۱۸۳,۷۹۰	۲۰	۷٫۰۰۹	۶۵٫۴
شعبه غرب تهران	۵۰۵,۳۲۷	۱۶۰,۶۸۷	۱۹	۷٫۵۴	۶۹٫۱
شعبه فارس	۱,۶۳۱,۹۷۴	۱,۲۵۲,۷۴۲	۲۴	۱۰٫۷۹۸	۶۸٫۸
شعبه قزوین	۴۳۱,۶۵۸	۲۴۹,۴۶۰	۱۰	۲٫۱۴۴	۷۱٫۳
شعبه قم	۳۳۰,۵۹۶	۲۳۶,۲۳۲	۱۲	۲٫۲۶	۷۰٫۲
شعبه کاشان	۱۸۶,۱۵۱	۱۴۶,۳۷۸	۷	۱٫۰۹۹	۷۰٫۷
شعبه کردستان	۳۸۵,۹۵۴	۲۴۰,۷۷۰	۱۰	۳٫۳۰۹	۷۰٫۹
شعبه کرمان	۱,۱۵۹,۹۶۹	۸۵۱,۵۵۱	۱۶	۱٫۹۹۶	۶۹٫۹
شعبه کرمانشاه	۵۹۴,۸۱۰	۴۶۱,۲۲۸	۱۱	۱٫۶۳۶	۷۴٫۹
شعبه کهگیلویه و بویراحمد	۴۱۸,۷۶۲	۴۱۰,۱۵۴	۹	۳٫۲۴۵	۶۸٫۲
شعبه گلستان	۳۹۱,۶۷۰	۲۷۴,۶۵۵	۱۲	۲٫۳۲۲	۶۹٫۴
شعبه گیلان	۹۲۶,۸۷۱	۶۵۳,۷۵۷	۲۶	۴٫۹۸۳	۷۲٫۹
شعبه لرستان	۴۲۶,۱۶۸	۳۱۲,۳۲۳	۱۲	۳٫۳۷۹	۷۰٫۶
شعبه مازندران	۹۹۲,۷۵۴	۶۵۳,۳۹۲	۱۹	۲٫۲۱	۶۶٫۶
شعبه هرمزگان	۶۹۶,۴۹۱	۵۳۶,۹۵۰	۱۹	۴٫۸۹۸	۷۳٫۶
شعبه همدان	۵۳۲,۲۱۶	۳۱۴,۵۶۴	۱۲	۱٫۸۴۳	۷۵٫۲
شعبه یزد	۷۱۲,۶۵۲	۳۷۱,۶۰۰	۱۷	۲٫۸۸۳	۷۰
کشتیرانی جمهوری اسلامی	۶۵۶,۲۹۷	۲۰۹,۶۹۲	۱۴	۳٫۱۶۶	۷۵٫۲
مجتمع تهران بزرگ	۲,۳۳۰,۵۱۷	۴,۹۴۲,۹۸۸	۴۵	۴۱٫۸۱۵	۷۵
مجتمع فرهنگیان	۷۷۸,۷۶۴	۲۳۹,۸۷۸	۹	۶۰۵	۸۱٫۵

کشتیرانی، کاشان، همدان، خراسان جنوبی و کرمانشاه به ترتیب در رتبههای یک تا هشت قرار گرفتند. بعبارتی شعبه های خراسان جنوبی، سمنان و کاشان در هر دو روش کارا معرفی شدند.

مراجع

[۱] دانشنامه بیمه، ج. یکم، ذیل<< تاریخچه بیمه>>. ۱۳۹۳

[۲] کریمی، کلیات بیمه. ۱۳۸۸

[۳] امامی میبدی، علی، اصول و اندازه گیری کارایی و بهره وری (علمی – کاربردی)، چاپ دوم، موسسه مطالعات و پژوهشهای بازرگانی، ۱۳۸۴

[۴] فلاح، سعید (۱۳۸۶")،ارزیابی کارآیی شعب شرکتجهای بیمه با روش تحلیل پوششی داده ها"، تازه های جهان بیمه، شماره۱۱۵ و ۱۱۶ ،دیماه و بهمن ماه

[5] Fenn, P, Vencappa ,D, Diacon, S, Klumpes, P & O'Brien, C 2007, 'Market structure and the efficiency of European insurance companies: a stochastic frontier analysis', Journal of Banking & Finance, vol. 32, no. 1.

جدول ۲: کارایی شعب مورد مطالعه با تحلیل پوششی داده ها

نام شعبه	CCR	رتبه	BCC	رتبه
شعبه آذربایجان شرقی	%۴۲.۲۹	۳۲	۰/۳۱۸۲	۳۳
شعبه آذربایجان غربی	۵۷/۸۹٪	۲۲	۰/۶۲۶۴	۱۹
شعبه اردبیل	%۰۷.۸۲	۷	۱	۲
شعبه استان مرکزی	۵۸/۲۰٪	۲۱	۰/۶۲۲۴	۲۰
شعبه اصفهان	۳۲/۵۰٪	۳۱	۰/۳۳۳۳	۳۱
شعبه البرز	۴۴/۹۲٪	۲۶	۰/۵۷۰۵	۲۵
شعبه ایلام	۸۴/۷۰٪	۶	۰/۸۹۰۵	۱۱
شعبه بوشهر	۶۱/۹۶٪	۱۸	۰/۶۵۲۴	۱۸
شعبه چهارمحال و بختیاری	۶۰/۴۷٪	۲۰	۰/۶۱۵۷	۲۱
شعبه خراسان جنوبی	۱	۳	۱	۷
شعبه خراسان رضوی	۲۹/۳۸٪	۳۳	۰/۳۰۴۳	۳۴
شعبه خراسان شمالی	۷۸/۶۶٪	۸	۰/۹۱۴	۱۰
شعبه خوزستان	۳۷/۱۱٪	۳۰	۰/۳۸۸۹	۳۰
شعبه زنجان	۷۲/۸۸٪	۱۱	۰/۷۴۹۳	۱۴
شعبه سمنان	۱	۲	۱	۳
شعبه سیستان و بلوچستان	۸۵/۸۷٪	۵	۰/۹۵۱۲	۹
شعبه شرق تهران	۶۳/۰۲٪	۱۷	۰/۶۹۳۸	۱۷
شعبه غرب تهران	۷۶/۱۵٪	۹	۰/۷۹۳۵	۱۲
شعبه فارس	۲۷/۸۷٪	۳۴	۰/۲۹۱۷	۳۵
شعبه قزوین	۶۹/۶۱٪	۱۳	۰/۷	۱۵
شعبه قم	۶۰/۵۳٪	۱۹	۰/۶۱۰۸	۲۲
شعبه کاشان	۱	۱	۱	۵
شعبه کردستان	۶۹/۴۸٪	۱۴	۰/۷	۱۶
شعبه کرمان	۵۲/۶۷٪	۲۵	۰/۵۳۸	۲۶
شعبه کرمانشاه	۷۰/۶۶٪	۱۲	۱	۸
شعبه کهگیلویه و بویراحمد	۷۳/۷۷٪	۱۰	۰/۷۷۷۸	۱۳
شعبه گلستان	۵۶/۹۷٪	۲۴	۰/۵۸۳۳	۲۳
شعبه گیلان	۲۷/۵۵٪	۳۵	۰/۳۲۳۴	۳۲
شعبه لرستان	۵۷/۸۱٪	۲۳	۰/۵۸۳۳	۲۴
شعبه مازندران	۴۴/۸۱٪	۲۷	۰/۴۸۲	۲۷
شعبه هرمزگان	۳۸/۰۳٪	۲۹	۰/۴۳۹۶	۲۸
شعبه همدان	۶۳/۲۴٪	۱۶	۱	۶
شعبه یزد	۴۰/۴۸٪	۲۸	۰/۴۱۱۸	۲۹
کشتیرانی جمهوری اسلامی	۶۷/۲۱٪	۱۵	۱	۴
مجتمع تهران بزرگ	۱۶/۲۰٪	۳۶	۰/۱۹۱۹	۳۶
مجتمع فرهنگیان	۸۸/۰۴٪	۴	۱	۱

[6] Cummins, JD, Weiss, MA, Zi, H 1992, 'Economies of scope in financial services: a DEA efficiency analysis of the US insurance industry', Journal of Banking & Finance, vol. 34, no, 7.

[7] Eling, M & Luhnen, M 2010, 'Efficiency in the international insurance industry: a cross-country comparison', Journal of Banking & Finance, vol.

[8] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984). "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis". Management Science. 30(1), 1078–1092

[9] Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978). "Measuring the Efficiency of Decision Making Units". *European Journal of Operation Research*. 2(1), 429–444

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–300، صص. ۲۵۶–۲۶۰

مدل افراز ضربی و کاربرد آن در خوشه‌بندی داده‌های دمای ایران

پریسا جعفرزاده*[آ]، فیروزه ریواز[ب]

[آ] دانشگاه شهید بهشتی
[ب] دانشگاه شهید بهشتی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
خوشه‌بندی
افراز تصادفی
داده‌های فضایی
تابع شباهت.

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

در چارچوب خوشه‌بندی مدل‌مبنای بیزی، تعیین یک توزیع احتمال پیشینی مناسب برای افرازهای تصادفی بسیار حائز اهمیت است. این مقاله به مطالعه مدل افراز ضربی به عنوان پیشینی برای توزیع افرازهای تصادفی می‌پردازد که برخلاف پیشین‌های دیگر مانند فرایند دیریکله، به‌طور مستقیم یک توزیع احتمال به افرازهای ممکن منتسب می‌کند. این مدل دارای خواص نظری جالبی از جمله مزدوج بودن است که باعث می‌شود محاسبات پسینی سرراست باشد. با توسعه مدل افراز ضربی به حالت فضایی، نحوه افراز مکان‌های مشاهدات به خوشه‌های همبسته فضایی بیان می‌شود. در ادامه، کاربرد این مدل در خوشه‌بندی ایستگاه‌های سینوپتیک بر اساس داده‌های دما ارائه می‌شود.

۱. مقدمه

تحلیل داده‌ها و دستیابی به اطلاعات نهفته در آن سالهاست به موضوعی مهم و چالش‌برانگیز تبدیل شده است. یکی از روش‌های مهم تحلیل داده‌ها که از سال‌ها پیش بسیار مورد توجه بوده است، خوشه‌بندی نام دارد. خوشه‌بندی عبارت است از گروه‌بندی داده‌ها به گروه‌های همگن، که در طی آن، داده‌ها به خوشه‌هایی که اعضای آن مشابه یکدیگر هستند افراز می‌شوند. تاکنون روش‌های مختلفی برای خوشه‌بندی داده‌ها و کشف اطلاعات نهفته در داده‌ها ابداع شده‌اند که به دو دسته‌ی روش‌های فاصله و مدل ـ‌مبنا می‌توان تقسیم نمود. روش‌های فاصله ـ‌مبنا از نوعی متر که فاصله‌ی بین نقاط داده‌ها را محاسبه می‌کند، استفاده می‌کند و به مدل احتمال تولید داده‌ها نیازی ندارند. در حالی که روش‌های مدل ـ‌مبنا متکی بر آمیخته‌ای گسسته از مدل‌هایی هستند که فرض می‌شود داده‌ها در خوشه‌های مختلف از هسته‌هایی با مقادیر پارامتر مختلف تولید شده‌اند. در روش‌های مدل ـ‌مبنا، اکثر نوشتگان آماری مبتنی بر روش ماکسیمم درستنمایی هستند که عموما از الگوریتم EM برای تعیین برآورد پارامترهای خوشه‌ها استفاده می‌شود. رهیافت‌های بیزی که هدفشان تقریب توزیع پسینی خوشه‌هاست دارای مزایایی از جمله بحساب آوردن عدم حتمیت و همچنین اطلاعات پیشینی را دارد. اما یکی از چالش‌های روش بیزی، انتخاب پیشینی مناسب برای توزیع افرازهای تصادفی است. اغلب روش های موجود از فرض تبادل‌پذیری استفاده می‌کنند به این معنی که احتمال پیشینی یک افراز از مشاهدات، تنها به تعداد و اندازه خوشه‌ها بستگی دارد و شاخص خوشه نقشی ندارد. تحت فرض تبادل‌پذیری، تابع احتمال افراز تبادل‌پذیر [۱۰] تعریف می‌شود که به‌عنوان توزیع پیشینی برای افرازهای تصادفی از مشاهدات بکار برده می‌شود. یک روش برای ساخت یک تابع احتمال افراز تبادل‌پذیر، استفاده از مدل‌های فرایند دیریکله آمیخته است [۶]. رهیافتی دیگر، بر اساس مدل‌های افراز تصادفی ساخته می‌شود و به‌طور مستقیم با توزیع احتمال افرازها کار می‌کند. یکی از مدل‌هایی که توجه ویژه‌ای به آن در ادبیات آماری شده است، مدل‌های افراز ضربی است [۱] که در آن توزیع هر افراز به‌صورت حاصلضرب توابعی وابسته به خوشه به نام تابع شباهت در نظر گرفته می‌شود. مدل‌های افراز ضربی دارای ویژگی‌های نظری جالبی از جمله سازگاری و

*پریسا جعفرزاده
پست الکترونیک: pjafarzadeh2020@yahoo.com (پریسا جعفرزاده)، rivaz.f@gmail.com (فیروزه ریواز)

مزدوج بودن هستند. از این‌رو از این پیشینی در حوزه‌های مختلف توسط محققین مورد استفاده قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به [۹]، [۷]، [۲]، [۳] و [۸] اشاره کرد. در این مقاله، ضمن معرفی مدل افراز ضربی، نحوه استفاده از آن در خوشه‌بندی داده‌های فضایی بیان می‌شود. سپس کاربردی از آن در خوشه‌بندی ایستگاه‌های سینوپتیک بر اساس داده‌های دما ارائه می‌شود.

۲. مدل افراز ضربی

در این بخش از مقاله به بیان مدل افراز ضربی (PPM) که توسط [۵] معرفی شد، می‌پردازیم.
فرض کنید n آزمودنی به شماره‌های $I_n = \{1, ..., n\}$ به k خوشه مجزای $S^* = \{S_1{}^*, ..., S_k{}^*\}$ افراز شده‌اند به طوری‌که عناصر $S_h{}^*$ متناظر است با شماره‌های آزمودنی‌هایی که در خوشه hام قرار می‌گیرند و k تعداد خوشه‌هاست که می‌تواند از ۱ تا n تغییر کند. مدل افراز ضربی در دو مرحله به صورت زیر تعریف می‌شود:
ابتدا یک توزیع پیشینی برای S^* به صورت حاصلضرب توابع شباهت نامنفی، $S_h{}^* \in S^*$، $h = 1, ..., k$ تعریف می‌شود:

$$\pi(S^*) = c_0 \prod_{h=1}^{k} C(S_h{}^*) \qquad (1)$$

که c_0 ثابت نرمال‌ساز است. به ۱ پیشینی افراز ضربی [۵] می‌گویند. به شرط S^* فرض کنید $y_h = \{y_i : i \in S_h{}^*\}$ مشاهدات خوشه‌ی hام، برای $h = 1, ..., k$ باشد.
مرحله دوم مشخص‌سازی PPM با تعیین تابع درستنمایی $y = (y_1, ..., y_n)'$ به شرط S^* یعنی

$$f(\mathbf{y}|S^*) = \prod_{h=1}^{k} f_h(y_h) \qquad (2)$$

تعیین می‌شود بطوریکه

$$f_h(y_h) = \int \prod_{i \in S_h} f(y_i|\theta_h) dG_0(\theta_h)$$

که $f(.|\theta)$ تابع درستنمایی وابسته به پارامتر θ است، و عناصر $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)'$ مستقل و هم‌توزیع از توزیع پیشینی G_0 فرض می‌شوند.
لازم به ذکر است این شیوه مدل‌بندی، خوشه‌بندی داده‌ها را براساس پارامتر ویژه‌ی هر آزمودنی تعیین می‌کند. همچنین فرض می‌شود که مشاهدات در هر خوشه به شرط پارامتر ویژه‌ـخوشه مستقل هستند. درحالی که داده‌های موجود در خوشه‌های مختلف، به‌صورت حاشیه‌ای مستقل هستند.
مدل افراز ضربی معرفی شده در (۱) و (۲) دارای ویژگی‌های جالبی از جمله سازگاری، همگنی حداکثری درون خوشه‌ای و حداقلی بین خوشه‌ای و مزدوج بودن است. خاصیت مزدوج بودن، بیان می‌کند که توزیع پسینی نیز یک مدل افراز ضربی است، از اینرو محاسبات پسینی سرراست خواهد بود.
یک تابع شباهت معروف که (۱) را به توزیع پیشینی حاشیه‌ای افرازهای القاء شده توسط فرایند دیریکله مرتبط می‌کند عبارت است از $C(S_h{}^*) = M \times \Gamma(|S_h{}^*|)$ با $\Gamma(|S_h{}^*|) = (k_h{}^* - 1)!$ که $k_h{}^*$ تعداد اعضای خوشه‌ی $S_h{}^*$ است. این تابع شباهت از تعداد کم خوشه با اندازه بزرگ حمایت می‌کند و از ایجاد خوشه‌های تک عضو پرهیز می‌کند.

۳. پیشین افراز ضربی فضایی

هنگامی که علاوه بر پاسخ اندازه‌گیری شده، مجاورت افراد یا واحدهای آزمایش بر افراز آزمودنی‌ها تاثیر بگذارد، به آن خوشه‌بندی فضایی گفته می‌شود. هنگامی که همبستگی فضایی بین تحقق‌های متغیرهای پاسخ اندازه‌گیری شده در مکان‌های مختلف وجود دارد، انتظار می‌رود مقادیر اندازه‌گیری شده در مکان‌های نزدیک به یکدیگر، شبیه‌تر از مکان‌های دور از هم باشند. گرچه این موضوع، این امکان را که دو مکان دور از یکدیگرند اما با پاسخ‌های مشابه را نقض نمی‌کند. گروه‌بندی در غیاب اطلاعات فضایی، این دو پاسخ را در یک خوشه قرار می‌دهد. از منظر فضایی این طبیعی بنظر می‌رسد که مکان‌های دور از هم در خوشه‌های مجزا قرار بگیرند، یعنی خوشه‌های فضایی بایستی موضعی باشند. در این مفهوم اعضایی که در یک خوشه قرار می‌گیرند در یک فاصله از پیش تعیین شده صدق می‌کنند. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید s_h^* شامل مکان‌هایی است که در خوشه‌ی $S_h{}^*$ قرار دارند یعنی $s_h^* = \{s_i : i \in S_h{}^*\}$ و $S_h{}^* \subset \{1, ..., n\}$. همچنین فرض کنید $d(.,.)$ متری در فضای مختصات‌های فضایی باشد. گفته می‌شود $S_h{}^*$ به‌طور فضایی متصل است اگر وجود نداشته باشد $s_i' \in s_h^*$ و $s_i \in s_h^*$ به طوریکه برای هر $s_j \in s_h^*$، $d(s_i', s_i) < d(s_j, s_i)$. یک افراز متصل فضایی نامیده می‌شود هرگاه کلیه خوشه‌های آن، متصل فضایی باشند.

برای این منظور ۴ نوع پیشین افراز ضربی معرفی کردند که وابستگی فضایی درون مشاهدات در آنها لحاظ می‌شود. در ادامه این ۴ نوع تابع شباهت ارائه می‌شوند.

۱.۳ . *تابع‌های شباهت فضایی*

فرض کنید $\overline{s}_h^*$ مرکز خوشه $S_h{}^*$ باشد که مختصات آن از میانگین مختصات هندسی اعضای خوشه $S_h{}^*$ تعیین می‌شود. به عبارت دیگر

$$\overline{s}_h^* = (s^*{}_{h1}, s^*{}_{h2}); \qquad \overline{s}_{hk}^* = \frac{1}{n_h}\sum_{i\in S_h^*} s_{ik}^* \qquad k = 1,2$$

و $n_h = |S_h{}^*|$. همچنین فرض کنید $D_h = \sum_{i\in S_h^*} d(s_i{}^*, \overline{s_h}^*)$ مجموع کلیه‌ی فاصله‌ها تا مرکز را نشان دهد. اگر تابع شباهت را به صورت تابعی نزولی از D_h تعریف کنیم، آنگاه افرازهایی با خوشه‌های به‌طور موضعی، کوچک خواهد داشت. یعنی تعداد اعضای درون خوشه کم خواهد بود. اما بکارگیری چنین تابع شباهتی، منجر به ایجاد خوشه‌های تک عضوی می‌شود. برای پیشگیری، تابع شباهت علاوه بر تابعی از D_h، تابعی از $M \times \Gamma(|S_h{}^*|)$ نیز در نظر گرفته می‌شود. از این رو، برای اطمینان از اینکه $|S_h{}^*|$ و D_h دارای وزن مشابه هستند، بایستی از $\Gamma(D_h)$ استفاده شود. اما چون D_h روی R^+ پیوسته است و Γ تابع یکنوای صعودی روی $[0,1]$ نیست، به جای $\Gamma(D_h)$ [۸] پیشنهاد کردند از، $\Gamma(D_h)I[D_h \geq 1] + D_h I[D_h < 1]$ استفاده شود.
یک پارامتر تنظیم‌کننده پشتیبان کاربر (β) برای کنترل بیشتر روی جریمه فاصله‌ها نیز پیشنهاد کردند. و M پارامتر تنظیم کننده تعداد خوشه‌هاست. بدین ترتیب، تابع شباهت پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$C_1(S_h{}^*, s_h{}^*) = \begin{cases} \frac{M\times\Gamma(|S_h{}^*|)}{\Gamma(\beta D_h)I[D_h\geq 1]+(D_h)I[D_h<1]}, & if\ |S_h{}^*| > 1 \\ M, & if\ |S_h{}^*| = 1 \end{cases} \qquad (۳)$$

لازم به توضیح است که در نظر گرفتن $C_1(S_h{}^*, s_h{}^*) = M$ برای $|S_h{}^*| = 1$ برای این است که از مسائل مربوط به $D_h = 0$ جلوگیری شود. توضیح اینکه، وقتی تک خوشه داریم $D_h = 0$ و در این حالت اگر تابع شباهت را بصورت $\frac{M\times\Gamma(|S_h{}^*|)}{\Gamma(\beta D_h)I[D_h\geq 1]+(D_h)I[D_h<1]}$ درنظر بگیریم، مخرج کسر صفر می‌شود و کسر تعریف نشده می‌شود. برای همین در حالت $|S_h{}^*| = 1$ تابع شباهت برابر M انتخاب می‌شود که این مقدار M هم انتخابی منطقی است. از آنجا که کلیه موقعیت‌های نمونه‌ای $s_1{}^*, \dots, s_n{}^*$ مجزا هستند، $D_h = 0$ معادل است با $|S_h{}^*| = 1$. علاوه‌بر این، هنگامی که $|S_h{}^*| = 1$ ، $M \times \Gamma(|S_h{}^*|) = M$ که در نظر گرفتن $C_1(S_h{}^*, s_h{}^*) = M$ برای حالت $|S_h{}^*| = 1$ را تایید می کند.
دومین تابع شباهت پیشنهادی، مبتنی بر در نظر گرفتن یک کران از پیش تعیین شده $(a \geq 0)$ ، بصورت زیر است:

$$C_2(S_h{}^*, s_h{}^*) = M \times \Gamma(|S_h{}^*|) \times \prod_{i,j\in s_h{}^*} \mathbb{I}[||s_i{}^* - s_j{}^*|| \leq a]. \qquad (۴)$$

که $M \times \Gamma(|S_h{}^*|)$ مانند حالت قبل برای کنترل تعداد خوشه‌های تک عضوی در نظر گرفته می‌شود و $C_2(S_h{}^*, s_h{}^*)$ اعضایی را درون یک خوشه قرار می‌دهد که فاصله اقلیدسی آنها از مقدار a کمتر باشد.
تابع شباهت دیگری که توسط [۸] پیشنهاد شده است به صورت

$$C_3(S_h{}^*, s_h{}^*) = M \times \Gamma(|S_h{}^*|) \times \int \prod_{i\in S_h{}^*} q(s_i{}^*, \xi)q(\xi)d\xi_h. \qquad (۵)$$

است که ایده آن از [۷] گرفته شده است. [۷]، $q(s_i{}^*|\xi)q(\xi)$ را یک مدل کمکی نامید و توابع $q(.|.)$ و $q(.)$ در (۵) هر ترکیبی از توابع می‌تواند باشد.(برای دیدن جزییات بیشتر به [۷] مراجعه کنید). این توابع چگالی شرطی و حاشیه‌ای به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مزدوج باشند. بنابراین توزیع پیشین C_3 بردارهای مکان را جوری افرازبندی می‌کند که مقادیر درستنمایی حاشیه‌ای بزرگی ایجاد کند. به عبارتی تابع شباهت C_3 به نفع افرازبندی بردارهای مکانی است که مقادیر درستنمایی حاشیه‌ای بزرگ تولید کند. لازم به ذکر است که مکان‌ها تصادفی نیستند بلکه موقعیت‌های معلومی هستند که هدف، افرازبندی آنهاست.
در ادامه به عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری مجاورت فضایی و خوشه‌بندی مکان‌هایی که نزدیک یکدیگر هستند، مدل‌های مزدوج در نظر می‌گیریم. همچنین برای هر دو نوع داده‌های زمین آماری و داده‌های ناحیه‌ای می‌توانیم از تابع شباهت C_3 استفاده کنیم که در ادامه مدل مزدوج نرمال/نرمال ـ وارون ـ ویشارت را در نظر می‌گیریم. در واقع $\xi = (m, V)$ بردار میانگین و واریانس را نشان می‌دهد و $q(s^*|\xi) = N(s^*|m, V)$ توزیع

نرمال دومتغیره و $q(\xi) = NIW(m, V|\mu_\circ, \kappa_\circ, \nu_\circ, \Lambda_\circ)$ توزیع وارون ویشارت دو متغیره در نظر گرفته می‌شود. همانند دو تابع شباهت قبلی $M \times \Gamma(|S_h{}^*|)$ ، از تشکیل خوشه‌های تک عضوی جلوگیری می‌کند.
آخرین تابع شباهت دارای فرمی مشابه تابع شباهت $C_۳$ است، با این تفاوت که به جای در نظر گرفتن یک مدل مزدوج پیشگوی پیشینی، یک مدل مزدوج پیشگوی پسینی استفاده می‌شود. به طور دقیق‌تر

$$C_۴(S_h{}^*, s_h{}^*) = M \times \Gamma(|S_h{}^*|) \times \int \prod_{i \in S_h{}^*} q(s_i{}^*|\xi) q(\xi|s_h{}^*) d\xi_h. \qquad (۶)$$

علت استفاده از تابع شباهت $C_۴$ این است که چگالی پیشگوی پسینی، نسبت به پیشگوی پیشینی آگاهی بخش‌تر است. بنابراین $C_۴$ وزن بیشتری روی افرازهایی که به لحاظ مکانی هم‌رفتارند، می‌گذارد. درواقع چون $C_۴$ اطلاعات بیشتری در اختیار ما قرار می‌دهد، نسبت به $C_۳$ بهتر می‌تواند مکان‌ها را افرازبندی کند. در ادامه با استفاده از مدل افراز ضربی با استفاده از توابع شباهت فضایی ارائه شده در این بخش به خوشه‌بندی ایستگاه‌های سینوپتیک مبتنی بر داده‌های دما می‌پردازیم.

۴. مثال کاربردی

دما یکی از مهمترین پارامترهای هواشناسی است که در بسیاری از مطالعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. این پارامتر در بررسی تغییر اقلیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به طوری که کوچکترین تغییر در دمای یک مکان، تأثیرات کاملا محسوس و مهمی در اکوسیستم به دنبال خواهد داشت. از اینرو شناسایی نواحی دمایی کشور می‌تواند تأثیر بسزایی در مدیریت خطرات ناشی از تغییرات دما داشته باشد. داده‌های مورد بررسی، متوسط میزان دمای سالیانه برحسب سانتگیراد مربوط به سال ۲۰۱۶ میلادی است که از ۳۳۴ ایستگاه سینوپتیک اندازه‌گیری شده است. بنابراین تعداد مکان‌های فضایی برابر ۳۳۴ است. برای برازش مدل (۱) و (۲) به داده‌ها با استفاده از توابع شباهت ارائه شده در بخش ۳، ابتدا داده‌ها را استاندارد می‌کنیم تا اثر میانگین حذف شود و تنها وابستگی فضایی بین داده‌ها بر خوشه‌بندی تأثیرگذار باشد.
برای برازش مدل، از تابع $sppm$ در بسته نرم افزاری $ppmSuit$ استفاده شده است. به منظور ارزیابی ۴ تابع شباهت، ۳ شاخص معیار اطلاع آکائیکه ـ واتانابه $(WAIC)$ [۴]، میانگین توان دوم خطا (MSE) و لگاریتم شبه درستنمایی حاشیه‌ای $(LPML)$ [۱۱] محاسبه شد. نتایج در جدول ۱ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تابع $C_۱$ در دو شاخص $WAIC$ و $LPML$ از سایر توابع شباهت، عملکرد بهتری دارد.

جدول ۱: جدول نتایج خوشه‌بندی

تابع شباهت	$WAIC$	$LPML$	MSE
$C_۱$	۳۵۴/۲۹۶۸	−۲۲۸/۵۶۷	۱/۴۷۱۴۷۴
$C_۲$	۴۲۵/۰۹۹۷	−۲۶۱/۱۸۲۱	۱/۱۸۹۲۲۳
$C_۳$	۴۳۳/۸۱۰۴	−۲۶۱/۶۲۸۷	۱/۱۰۰۶۶
$C_۴$	۳۸۶/۰۰۸۵	−۲۳۳/۴۳۷۴	۱/۴۲۳۶۲۳

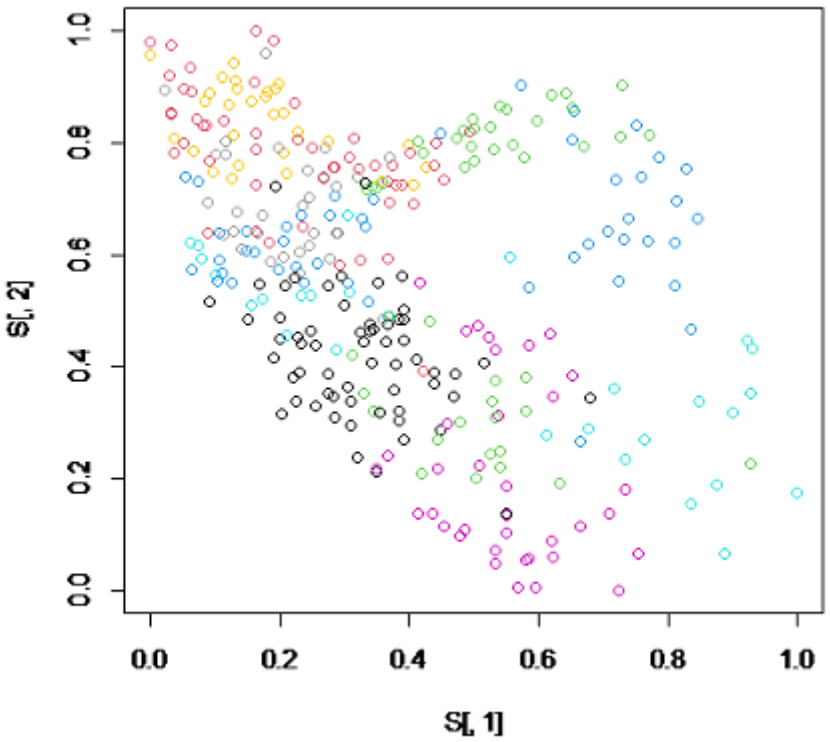
بر این اساس با استفاده از تابع شباهت $C_۱$ به خوشه‌بندی ایستگاه‌های سینوپتیک ایران می‌پردازیم. شکل ۱، الگوی خوشه‌بندی مناطق دمایی ایران براساس، تابع شباهت اول نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که داده‌های دما در ۸ خوشه از مناطق خیلی خشک به خیلی مرطوب، افرازبندی شده‌اند.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله، به مطالعه مدل‌های افراز ضربی و کاربرد آنها در افرازبندی دامنه فضایی پرداخت. با استفاده از این مدل، خوشه‌بندی ایستگاه‌های سینوپتیک براساس متغیر دما صورت گرفت. از آنجا که در این مطالعه تنها از یک متغیر در خوشه‌بندی دامنه فضایی استفاده شد، توسعه مدل به حالت چند متغیره برای در نظر گرفتن اطلاعات چند متغیر در افرازبندی ناحیه مورد مطالعه، از موضوعات موردتوجه است.

مراجع

[1] Daniel Barry and John A Hartigan. Product partition models for change point problems. *The annals of Statistics*, pages 260–279, 1992.
[2] David M Blei and Peter I Frazier. Distance dependent chinese restaurant processes. *Journal of Machine Learning Research*, 12(8), 2011.
[3] David B Dahl, Ryan Day, and Jerry W Tsai. Random partition distribution indexed by pairwise information. *Journal of the American Statistical Association*, 112(518):721–732, 2017.



شکل ۱: نمودار خوشه‌بندی داده‌ها براساس C_1

[4] Andrew Gelman, Jessica Hwang, and Aki Vehtari. Understanding predictive information criteria for bayesian models. *Statistics and computing*, 24(6):997–1016, 2014.
[5] John A Hartigan. Partition models. *Communications in statistics-Theory and methods*, 19(8):2745–2756, 1990.
[6] Peter Müller and Abel Rodriguez. *Nonparametric Bayesian inference*, volume 9. Institute of Mathematical Statistics; American Statistical Association, 2013.
[7] Peter Müller, Fernando Quintana, and Gary L Rosner. A product partition model with regression on covariates. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(1):260–278, 2011.
[8] Garritt L Page and Fernando A Quintana. Spatial product partition models. *Bayesian Analysis*, 11(1):265–298, 2016.
[9] Ju-Hyun Park and David B Dunson. Bayesian generalized product partition model. *Statistica Sinica*, pages 1203–1226, 2010.
[10] Jim Pitman. Some developments of the blackwell-macqueen urn scheme. *Lecture Notes-Monograph Series*, pages 245–267, 1996.
[11] Christian Robert, Ronald Christensen, Wesley Johnson, Adam Branscum, and Timothy Hanson. Bayesian ideas and data analysis, 2012.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–302، صص. ۲۶۱–۲۶۸

برآوردیابی پارامترهای مکان و مقیاس و پیش‌بینی خطی برای توزیع NH بر اساس kرکوردها ـ

مسعود بازاری جامخانه*[آ]، سیدمحمدتقی کامل میرمصطفائی[آ]، مرضیه جدیدی[آ]

[آ]گروه آمار، دانشگاه مازندران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
بهترین برآوردگر خطی نااریب
پیش‌بینی کننده‌ی خطی ناریب
توزیع NH
گشتاورهای k–رکوردها

2020 MSC:
62F10
60G25

چکیده

در این مقاله، k–رکوردهای برخاسته از توزیع NH مورد مطالعه قرار می‌گیرند. فرمول‌های مربوط به گشتاور مرتبه‌ی s–ام k–رکورد بالای n–ام و گشتاور حاصلضربی مرتبه‌ی (s,t)–ام n–امین و m–امین k–رکوردهای بالا ارائه می‌گردند. مقادیر میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس‌های k–رکوردهای بالا به ازای $n = ۱(۱)۹, k = ۱,\cdots,۴$ و $\theta = ۲$ محاسبه شده، در جداولی گزارش می‌شوند. بهترین برآوردگرهای خطی ناریب برای پارامترهای مکان و مقیاس بر اساس k–رکوردهای بالا تعیین می‌شوند و ضرایب مرتبط با این برآوردگرها در جداولی به ازای $n = ۲(۱)۹, k = ۱,\cdots,۴$ و $\theta = ۲$ ارائه می‌گردند. همچنین، یک پیش‌بینی‌کننده‌ی خطی ناریب برای k–رکورد بالای آینده مطرح می‌گردد. یک مجموعه داده‌ی واقعی برای نشان دادن کاربرد نتایج مقاله، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. مقاله با بخش جمع‌بندی و نتیجه‌گیری به پایان می‌رسد.

۱. مقدمه

فرض کنید که $\{X_i; i \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، آن‌گاه مشاهده‌ی X_j یک رکورد بالا از این دنباله گوییم، هرگاه مقدار X_j از تمام مقادیر مشاهده‌های قبل از آن بیشتر باشد، به عبارت دیگر به ازای هر $j < i$ داشته باشیم $X_j > X_i$. مشاهده‌ی نخست دنباله را به عنوان رکورد بالای اول در نظر می‌گیریم. آماره‌های k–رکوردی به عنوان تعمیمی از رکوردها معرفی می‌شوند. برای عدد صحیح و مثبت k، اولین زمان k–رکورد بالایی به صورت $T_{۱(k)} = k$ و برای $n \geq ۱$ داریم

$$T_{n(k)} = \min\{j : j > T_{n-۱(k)}, X_j > X_{T_{n-۱(k)}-k+۱:T_{n-۱(k)}}\},$$

که در آن $X_{i:m}$ نماد i–امین آماره‌ی مرتب در یک نمونه با اندازه‌ی m است. آن‌گاه دنباله‌ی k–رکوردهای بالا برای $n \geq ۱$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{n(k)} = X_{T_{n(k)}-k+۱:T_{n(k)}}.$$

به‌طور مشابه می‌توان k–رکوردهای پایین را نیز تعریف نمود. رکوردهای معمولی حالت خاصی از k–رکوردها هستند که به ازای $k = ۱$ به‌دست می‌آیند. از این پس در این مقاله، منظور از k–رکوردها، k–رکوردهای بالا می‌باشد. برای آشنایی بیشتر با تئوری و کاربردهای رکوردها و k–رکوردها به آرنولد و همکاران [۲] مراجعه کنید. محققان بسیاری به استنباط آماری برای توزیع‌های گوناگون بر اساس k–رکوردها پرداختند که از آن جمله می‌توان به چاکو و شای‌ماری [۴] و پول و توماس [۹] اشاره نمود.

*مسعود بازاری جامخانه
پست الکترونیک: masoud.bazari72@gmail.com (مسعود بازاری جامخانه)، m.mirmostafaee@umz.ac.ir (سیدمحمدتقی کامل میرمصطفائی)، marziyejadidi19@gmail.com (مرضیه جدیدی)

تابع چگالی احتمال $R_{n(k)}$ برای $n \geq ۱$ عبارت است از (رجوع کنید به [۲])

$$f_{R_{n(k)}}(x) = \frac{k^n}{(n-۱)!}\left[-\ln \bar{F}(x)\right]^{n-۱}\left[\bar{F}(x)\right]^{k-۱} f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{۱}$$

که $\bar{F}(x) = ۱ - F(x)$ تابع بقای توزیع مورد نظر است.
همچنین، تابع چگالی احتمال توأم m–امین و n–امین k–رکوردها که $m < n$ عبارت است از (رجوع کنید به [۲])

$$f_{R_{m(k)},R_{n(k)}}(x,y) = \frac{k^n}{(m-۱)!(n-m-۱)!}\left[\ln \bar{F}(x) - \ln \bar{F}(y)\right]^{n-m-۱}\left[-\ln \bar{F}(x)\right]^{m-۱}\frac{[\bar{F}(y)]^{k-۱}}{\bar{F}(x)} f(x)f(y), \qquad x > y. \tag{۲}$$

توزیع NH یکی از توزیع‌های طول عمر مهم آماری است و به عنوان جایگزین مناسبی برای توزیع‌های نمایی، گاما و وایبل مطرح می‌گردد. این توزیع توسط ناداراجاه و حقیقی [۸] مطرح گردید که حالت خاصی از توزیعی است که قبل از آن توسط دیمیتراکوپولو و همکاران [۶] معرفی گردید. تابع چگالی احتمال توزیع NH استاندارد عبارت است از

$$f(x) = \theta(۱+x)^{\theta-۱}\exp\{۱-(۱+x)^{\theta}\}, \quad x > ۰, \ \theta > ۰. \tag{۳}$$

همچنین، تابع توزیع تجمعی توزیع NH استاندارد برای $x > ۰$ عبارت است از

$$F(x) = ۱ - \exp\{۱-(۱+x)^{\theta}\}, \quad x > ۰, \ \theta > ۰. \tag{۴}$$

تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت زیر است

$$h(x) = \theta(۱+x)^{\theta-۱}, \qquad x > ۰, \ \theta > ۰.$$

شکل ۱ نمودار تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر توزیع NH استاندارد را به ازای مقادیر منتخب θ نمایش می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۱ مشاهده می‌شود، نمودار تابع چگالی احتمال این توزیع نزولی است، اما تابع نرخ خطر این توزیع می‌تواند صعودی یا نزولی باشد.
کومار و دی [۷] و الم و همکاران [۱] بر گشتاورهای k–رکوردها و روابط بازگشتی بین آن‌ها و مبحث مشخصه‌سازی به ترتیب در توزیع NH با پارامتر مقیاس و توزیع NH استاندارد کار کردند.
اکنون توزیع NH سه‌پارامتری را (که به آن پارامترهای مکان و مقیاس را اضافه کردیم) در نظر بگیرید که آن را با $NH(\mu,\sigma,\theta)$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال این توزیع عبارت است از

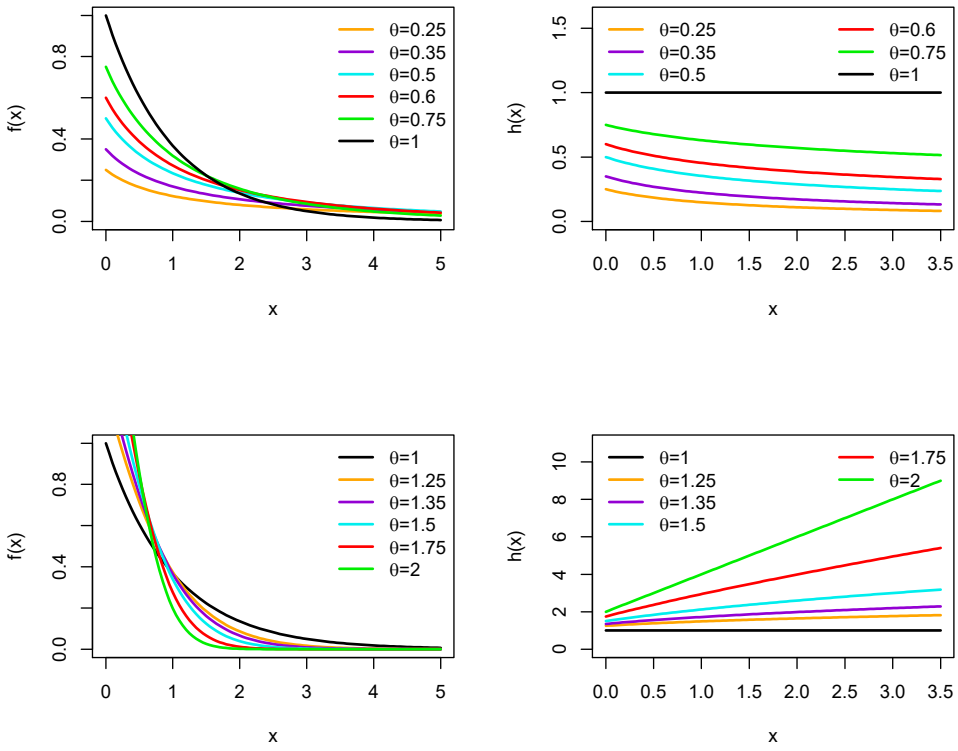
$$f(x;\mu,\sigma,\theta) = \frac{\theta}{\sigma}\left(۱+\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\theta-۱}\exp\left\{۱-\left(۱+\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\theta}\right\}, \quad x > \mu, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > ۰, \ \theta > ۰, \tag{۵}$$

که μ پارامتر مکان و σ پارامتر مقیاس است. اگر $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ باشد، توزیع NH استاندارد با تابع چگالی احتمال (۱) به دست می‌آید. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع NH است که به ازای $\theta = ۱$ به دست می‌آید.
در این مقاله، قصد داریم به برآوردیابی خطی و پیش‌بینی خطی در توزیع NH سه‌پارامتری بر اساس k–رکوردها بپردازیم. در بخش ۲، رابطه‌های مربوط به گشتاور مرتبه‌ی j–ام k–رکورد n–ام و گشتاور حاصلضربی مرتبه‌ی (s,t)–ام m– امین و n– امین k–رکوردها برای توزیع NH استاندارد را گزارش می‌کنیم و سپس جداولی را که در آن میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس‌های k–رکوردها را به ازای $k = ۱,\cdots,۴$، $۱(۱)۹ = n \leq m$ و $\theta = ۲$ محاسبه نموده‌ایم، ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، بهترین برآوردگرهای خطی ناریب برای پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع NH سه‌پارامتری زمانی که پارامتر θ معلوم است، تعیین می‌شوند. در بخش ۴، پیش‌بینی خطی k–رکورد آینده مورد توجه قرار می‌گیرد. یک مثال از داده‌های واقعی در بخش ۵ برای نشان دادن کاربرد نتایج تئوری مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۶ مبحث نتیجه و جمع‌بندی ارائه می‌گردد.

۲. گشتاورهای k–رکوردها

فرض کنید که $R_{n(k)}$، n–امین k–رکورد برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع NH استاندارد باشند، آن‌گاه از رابطه‌های (۱)، (۳) و (۴)، تابع چگالی احتمال $R_{n(k)}$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$f^{*}_{R_{n(k)}}(x) = \frac{k^n\theta}{(n-۱)!}(۱+x)^{\theta-۱}\left[(۱+x)^{\theta}-۱\right]^{n-۱}\mathrm{e}^{k-k(۱+x)^{\theta}}, \quad x > ۰, \quad \theta > ۰.$$



شکل ۱: نمودارهای تابع چگالی احتمال (سمت چپ) و تابع نرخ خطر (سمت راست) برای توزیع NH استاندارد به ازای مقادیر منتخب θ

در این صورت، گشتاور مرتبه‌ی j–ام $R_{n(k)}$ به صورت زیر است

$$\alpha_{n(k)}^{(j)} = E(R_{n(k)}^{j}) = \int_{0}^{\infty} x^{j} f_{R_{n(k)}}^{*} \mathrm{d}x. \qquad (۶)$$

با قرار دادن $j = ۱$ در (۶)، اولین گشتاور (میانگین) k–رکورد n–ام به دست می‌آید که آن را با $\alpha_{n(k)}$ نمایش می‌دهیم.
ما مقادیر میانگین برای توزیع NH استاندارد را به ازای $k = ۱, \cdots, ۴$، $n = ۱(۱)۹$ و $\theta = ۲$ تا سه رقم اعشار محاسبه کرده‌ایم و نتایج در جدول ۱ گزارش شده‌اند.

جدول ۱: مقادیر میانگین‌های k–رکوردهای توزیع NH استاندارد به ازای $\theta = ۲$

k	n								
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۰٫۳۷۹	۰٫۶۸۹	۰٫۹۵۷	۱٫۱۹۴	۱٫۴۰۹	۱٫۶۰۶	۱٫۷۹۱	۱٫۹۶۴	۲٫۱۲۷
۲	۰٫۲۱۱	۰٫۳۹۵	۰٫۵۵۹	۰٫۷۰۹	۰٫۸۴۸	۰٫۹۷۷	۱٫۰۹۹	۱٫۲۱۴	۱٫۳۲۴
۳	۰٫۱۴۷	۰٫۲۷۹	۰٫۴۰۱	۰٫۵۱۳	۰٫۶۱۸	۰٫۷۱۷	۰٫۸۱۰	۰٫۸۹۹	۰٫۹۸۵
۴	۰٫۱۱۳	۰٫۲۱۷	۰٫۳۱۴	۰٫۴۰۴	۰٫۴۸۹	۰٫۵۷۰	۰٫۶۴۷	۰٫۷۲۰	۰٫۷۹۱

علاوه بر این، واریانس k–رکورد n– ام به صورت $\beta_{n(k)}^{۲} = \alpha_{n(k)}^{(۲)} - (\alpha_{n(k)})^{۲}$ تعریف می‌شود. مقادیر واریانس‌ها نیز برای توزیع NH استاندارد به ازای $k = ۱, \cdots, ۴$، $n = ۱(۱)۹$ و $\theta = ۲$ تا سه رقم اعشار محاسبه شده‌اند و نتایج در جدول ۲ گزارش شده‌اند.

اکنون فرض کنید که $R_{m(k)}$ و $R_{n(k)}$ به ترتیب m–امین k–رکورد و n–امین k–رکوردهای برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع NH استاندارد باشند که $m < n$، آن‌گاه از رابطه‌های (۲)، (۳) و (۴)، تابع چگالی احتمال توأم $R_{m(k)}$ و $R_{n(k)}$ به صورت

زیر به دست می‌آید

$$f^*_{R_{m(k)},R_{n(k)}}(x,y)=\frac{k^n\theta^{۲}}{(m-۱)!(n-m-۱)!}\left[(۱+y)^{\theta}-(۱+x)^{\theta}\right]^{n-m-۱}\left[(۱+x)^{\theta}-۱\right]^{m-۱}\left[(۱+x)(۱+y)\right]^{\theta-۱}\mathrm{e}^{k-k(۱+y)^{\theta}},\quad x<$$

گشتاور حاصلضربی مرتبه‌ی (s,t)–ام n–امین و m–امین k–رکوردهای توزیع NH استاندارد برای $m<n$، به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\alpha^{(s,t)}_{m,n(k)}=E(R^s_{m(k)}R^t_{n(k)})=\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{y}x^s y^t f^*_{R_{m(k)},R_{n(k)}}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

در این صوت کوواریانس $R_{m(k)}$ و $R_{n(k)}$ به صورت $\beta_{m,n(k)}=\alpha^{(۱,۱)}_{m,n(k)}-\alpha_{m(k)}\alpha_{n(k)}$ تعریف می‌شود. مقادیر کوواریانس‌ها نیز برای توزیع NH استاندارد به ازای $k=۱,\cdots,۴$، $n=۱(۱)۹$ $m\le n$ و $\theta=۲$ تا سه رقم اعشار محاسبه شده‌اند و نتایج در جدول ۲ گزارش شده‌اند.

۳. بهترین برآوردگرهای خطی نااریب

فرض کنید $Y_{۱(k)},\cdots,Y_{n(k)}$ نمایانگر k–رکوردهای اول تا n–ام برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع NH سه‌پارامتری $NH(\mu,\sigma,\theta)$ با تابع چگالی احتمال (۵) باشند، آن‌گاه $R_{i(k)}=\frac{Y_{i(k)}-\mu}{\sigma}$ که $i=۱,\cdots,n$ هم توزیع با k–رکوردهای اول تا n–ام برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع NH استاندارد خواهند بود. در نتیجه $E(Y_{n(k)})=\mu+\sigma\alpha_{n(k)}$ و $Var(Y_{n(k)})=\sigma^{۲}\beta^{۲}_{n(k)}$. همچنین برای $m<n$ داریم $Cov(Y_{m(k)},Y_{n(k)})=\sigma^{۲}\beta_{m,n(k)}$.

قرار دهید $Y_{(k)}=(Y_{۱(k)},\cdots,Y_{n(k)})^T$، $\alpha=(\alpha_{۱(k)},\cdots,\alpha_{n(k)})^T$ و $۱=(۱,\cdots,۱)^T_{۱\times n}$. همچنین $\beta=((\beta_{i,j(k)}))$ که $۱\le i,j\le n$ ماتریس واریانس–کوواریانس $R_{۱(k)},\cdots,R_{n(k)}$ است. در این صورت، بهترین برآوردگرهای خطی نااریب برای پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ به ترتیب عبارتند از (برای مثال، رجوع کنید به [۳])

$$\mu^*=\frac{\alpha^T\beta^{-۱}\alpha ۱^T\beta^{-۱}-\alpha^T\beta^{-۱}۱\alpha^T\beta^{-۱}}{(\alpha^T\beta^{-۱}\alpha)(۱^T\beta^{-۱}۱)-(\alpha^T\beta^{-۱}۱)^{۲}}Y_{(k)}=\sum_{i=\circ}^{n}a_iY_{i(k)}$$

و

$$\sigma^*=\frac{۱^T\beta^{-۱}۱\alpha^T\beta^{-۱}-۱^T\beta^{-۱}\alpha ۱^T\beta^{-۱}}{(\alpha^T\beta^{-۱}\alpha)(۱^T\beta^{-۱}۱)-(\alpha^T\beta^{-۱}۱)^{۲}}Y_{(k)}=\sum_{i=\circ}^{n}b_iY_{i(k)}.$$

علاوه بر این، واریانس‌ها و کوواریانس برآوردگرهای فوق عبارتند از (برای مثال، رجوع کنید به [۷])

$$Var(\mu^*)=\sigma^{۲}\Big(\frac{\alpha^T\beta^{-۱}\alpha}{(\alpha^T\beta^{-۱}\alpha)(۱^T\beta^{-۱}۱)-(\alpha^T\beta^{-۱}۱)^{۲}}\Big),$$

$$Var(\sigma^*)=\sigma^{۲}\Big(\frac{۱^T\beta^{-۱}۱}{(\alpha^T\beta^{-۱}\alpha)(۱^T\beta^{-۱}۱)-(\alpha^T\beta^{-۱}۱)^{۲}}\Big)$$

و

$$Cov(\mu^*,\sigma^*)=\sigma^{۲}\Big(\frac{-\alpha^T\beta^{-۱}۱}{(\alpha^T\beta^{-۱}\alpha)(۱^T\beta^{-۱}۱)-(\alpha^T\beta^{-۱}۱)^{۲}}\Big).$$

ضرایب a_i و b_i برای $i=۱,\cdots,n$، $n=۲(۱)۹$، $k=۱,\cdots,۴$ و $\theta=۲$ تا سه رقم اعشار محاسبه شده‌اند و نتایج در جداول ۳ و ۴ گزارش شده‌اند.

جدول ۲: مقادیر واریانس‌ها و کوواریانس‌های $k-$رکوردهای توزیع NH استاندارد به ازای $\theta = ۲$

k	n	m								
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۰٫۰۹۹								
	۲	۰٫۰۸۴	۰٫۱۴۶							
	۳	۰٫۰۷۵	۰٫۱۲۹	۰٫۱۷۲						
	۴	۰٫۰۶۸	۰٫۱۱۶	۰٫۱۵۵	۰٫۱۸۸					
	۵	۰٫۰۶۲	۰٫۱۰۷	۰٫۱۴۳	۰٫۱۷۳	۰٫۱۹۹				
	۶	۰٫۰۵۸	۰٫۰۹۹	۰٫۱۳۳	۰٫۱۶۰	۰٫۱۸۵	۰٫۲۰۶			
	۷	۰٫۰۵۴	۰٫۰۹۳	۰٫۱۲۴	۰٫۱۵۰	۰٫۱۷۳	۰٫۱۹۴	۰٫۲۱۲		
	۸	۰٫۰۵۱	۰٫۰۸۸	۰٫۱۱۷	۰٫۱۴۲	۰٫۱۶۴	۰٫۱۸۳	۰٫۲۰۰	۰٫۲۱۷	
	۹	۰٫۰۴۹	۰٫۰۸۴	۰٫۱۱۲	۰٫۱۳۵	۰٫۱۵۵	۰٫۱۷۴	۰٫۱۹۰	۰٫۲۰۶	۰٫۲۲
۲	۱	۰٫۰۳۴								
	۲	۰٫۰۳۱	۰٫۰۵۵							
	۳	۰٫۰۲۸	۰٫۰۵۰	۰٫۰۶۸						
	۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۴۶	۰٫۰۶۳	۰٫۰۷۸					
	۵	۰٫۰۲۴	۰٫۰۴۳	۰٫۰۵۹	۰٫۰۷۲	۰٫۰۸۵				
	۶	۰٫۰۲۳	۰٫۰۴۰	۰٫۰۵۵	۰٫۰۶۸	۰٫۰۷۹	۰٫۰۹۰			
	۷	۰٫۰۲۱	۰٫۰۳۸	۰٫۰۵۲	۰٫۰۶۴	۰٫۰۷۵	۰٫۰۸۵	۰٫۰۹۴		
	۸	۰٫۰۲۰	۰٫۰۳۶	۰٫۰۵۰	۰٫۰۶۱	۰٫۰۷۱	۰٫۰۸۱	۰٫۰۸۹	۰٫۰۹۷	
	۹	۰٫۰۱۹	۰٫۰۳۵	۰٫۰۴۷	۰٫۰۵۸	۰٫۰۶۸	۰٫۰۷۷	۰٫۰۸۵	۰٫۰۹۳	۰٫۱
۳	۱	۰٫۰۱۸								
	۲	۰٫۰۱۶	۰٫۰۳۰							
	۳	۰٫۰۱۵	۰٫۰۲۷	۰٫۰۳۸						
	۴	۰٫۰۱۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۳۶	۰٫۰۴۴					
	۵	۰٫۰۱۳	۰٫۰۲۴	۰٫۰۳۴	۰٫۰۴۲	۰٫۰۴۹				
	۶	۰٫۰۱۲	۰٫۰۲۳	۰٫۰۳۲	۰٫۰۴۰	۰٫۰۴۷	۰٫۰۵۳			
	۷	۰٫۰۱۲	۰٫۰۲۲	۰٫۰۳۰	۰٫۰۳۸	۰٫۰۴۴	۰٫۰۵۰	۰٫۰۵۶		
	۸	۰٫۰۱۱	۰٫۰۲۱	۰٫۰۲۹	۰٫۰۳۶	۰٫۰۴۲	۰٫۰۴۸	۰٫۰۵۴	۰٫۰۵۹	
	۹	۰٫۰۱۱	۰٫۰۲۰	۰٫۰۲۸	۰٫۰۳۵	۰٫۰۴۱	۰٫۰۴۶	۰٫۰۵۱	۰٫۰۵۶	۰٫۰۶۱
۴	۱	۰٫۰۱۱								
	۲	۰٫۰۱۰	۰٫۰۱۹							
	۳	۰٫۰۰۹	۰٫۰۱۸	۰٫۰۲۵						
	۴	۰٫۰۰۹	۰٫۰۱۷	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۹					
	۵	۰٫۰۰۸	۰٫۰۱۶	۰٫۰۲۲	۰٫۰۲۸	۰٫۰۳۳				
	۶	۰٫۰۰۸	۰٫۰۱۵	۰٫۰۲۱	۰٫۰۲۶	۰٫۰۳۱	۰٫۰۳۶			
	۷	۰٫۰۰۸	۰٫۰۱۴	۰٫۰۲۰	۰٫۰۲۵	۰٫۰۳۰	۰٫۰۳۴	۰٫۰۳۸		
	۸	۰٫۰۰۷	۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۹	۰٫۰۲۴	۰٫۰۲۹	۰٫۰۳۳	۰٫۰۳۷	۰٫۰۴۰	
	۹	۰٫۰۰۷	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۹	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۸	۰٫۰۳۲	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۹	۰٫۰۴۲

۴. پیش‌بینی خطی

مسأله‌ی پیش‌بینی رکوردها و $k-$رکوردها مورد توجه آماردانان بسیاری قرار گرفته است. فرض کنید $Y_{۱(k)},\cdots,Y_{n(k)}$ نمایانگر $k-$رکوردهای اول تا $n-$ام برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع NH سه‌پارامتری $NH(\mu,\sigma,\theta)$ با تابع چگالی احتمال (۵) باشند و بخواهیم $k-$رکورد $q-$ام، $Y_{q(k)}$، را که $q > n$ است، پیش‌بینی کنیم. یک پیش‌بینی‌کننده‌ی خطی ناریب برای $Y_{q(k)}$ عبارت است از

$$Y^*_{q(k)} = \mu^* + \alpha_{q(k)}\sigma^*, \qquad (۷)$$

که μ^* و σ^* به ترتیب بهترین برآوردگرهای خطی ناریب پارامترهای μ و σ بر اساس $Y_{۱(k)},\cdots,Y_{n(k)}$ هستند و $\alpha_{q(k)}$ میانگین $k-$رکورد $q-$ام برگرفته از یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع NH استاندارد است. لازم به ذکر است که مرجع [۴] به اشتباه پیش‌بینی‌کننده‌ای که بر اساس رابطه‌ی (۷) به دست آید را بهترین پیش‌بینی‌کننده‌ی خطی ناریب نامیدند، در صورتی که این گونه نیست.

جدول ۳: ضرایب بهترین برآوردگرهای خطی نااریب پارامتر مکان μ در توزیع NH به ازای $\theta = ۲$

k	n	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$	$a_۵$	$a_۶$	$a_۷$	$a_۸$	$a_۹$
۱	۲	۲٫۲۲۰	−۱٫۲۲۰							
	۳	۱٫۶۱۳	۰٫۰۹۳	−۰٫۷۰۶						
	۴	۱٫۴۰۳	۰٫۰۷۲	۰٫۰۶۰	−۰٫۵۳۵					
	۵	۱٫۲۹۴	۰٫۰۶۰	۰٫۰۵۱	۰٫۰۴۴	−۰٫۴۴۹				
	۶	۱٫۲۲۶	۰٫۰۵۴	۰٫۰۴۵	۰٫۰۳۹	۰٫۰۳۴	−۰٫۳۹۸			
	۷	۱٫۱۷۸	۰٫۰۴۹	۰٫۰۴۲	۰٫۰۳۶	۰٫۰۳۱	۰٫۰۲۷	−۰٫۳۶۳		
	۸	۱٫۱۴۳	۰٫۰۴۶	۰٫۰۳۹	۰٫۰۳۴	۰٫۰۲۹	۰٫۰۲۶	۰٫۰۲۳	−۰٫۳۳۹	
	۹	۱٫۱۱۵	۰٫۰۴۳	۰٫۰۳۷	۰٫۰۳۲	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۴	۰٫۰۲۲	۰٫۰۲۰	−۰٫۳۲
۲	۲	۲٫۱۴۵	−۱٫۱۴۵							
	۳	۱٫۵۷۵	۰٫۰۶۲	−۰٫۶۳۷						
	۴	۱٫۳۸۱	۰٫۰۴۶	۰٫۰۴۰	−۰٫۴۶۸					
	۵	۱٫۲۸۲	۰٫۰۳۸	۰٫۰۳۴	۰٫۰۳۰	−۰٫۳۸۳				
	۶	۱٫۲۲۰	۰٫۰۳۳	۰٫۰۲۹	۰٫۰۲۶	۰٫۰۲۳	−۰٫۳۳۲			
	۷	۱٫۱۷۸	۰٫۰۳۰	۰٫۰۲۷	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۱	۰٫۰۱۹	−۰٫۲۹۸		
	۸	۱٫۱۴۷	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۵	۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۶	−۰٫۲۷۴	
	۹	۱٫۱۲۳	۰٫۰۲۶	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۵	۰٫۰۱۴	−۰٫۲۵۶
۳	۲	۲٫۱۱۰	−۱٫۱۱۰							
	۳	۱٫۵۵۷	۰٫۰۴۸	−۰٫۶۰۵						
	۴	۱٫۳۷۰	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۱	−۰٫۴۳۶					
	۵	۱٫۲۷۵	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۵	۰٫۰۲۳	−۰٫۳۵۲				
	۶	۱٫۲۱۷	۰٫۰۲۵	۰٫۰۲۲	۰٫۰۲۰	۰٫۰۱۸	−۰٫۳۰۱			
	۷	۱٫۱۷۷	۰٫۰۲۲	۰٫۰۲۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۵	−۰٫۲۶۷		
	۸	۱٫۱۴۸	۰٫۰۲۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۵	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۲	−۰٫۲۴۳	
	۹	۱٫۱۲۶	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۵	۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۲	۰٫۰۱۱	۰٫۰۱۱	−۰٫۲۲۵
۴	۲	۲٫۰۸۹	−۱٫۰۸۹							
	۳	۱٫۵۴۶	۰٫۰۳۹	−۰٫۵۸۵						
	۴	۱٫۳۶۳	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۶	−۰٫۴۱۷					
	۵	۱٫۲۷۱	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۱	۰٫۰۱۹	−۰٫۳۳۳				
	۶	۱٫۲۱۵	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۸	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۵	−۰٫۲۸۲			
	۷	۱٫۱۷۶	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۲	−۰٫۲۴۹		
	۸	۱٫۱۴۹	۰٫۰۱۶	۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۲	۰٫۰۱۱	۰٫۰۱۰	−۰٫۲۲۴	
	۹	۱٫۱۲۷	۰٫۰۱۴	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۲	۰٫۰۱۱	۰٫۰۱۰	۰٫۰۰۹	۰٫۰۰۹	−۰٫۲۰۶

۵. مثال کاربردی

در این جا، بخشی از داده‌های واقعی برگرفته از مرجع [۵] در نظر می‌گیریم که عبارتند از

۲۲٫۹ ۱٫۷ ۰٫۱ ۱٫۱ ۰٫۶ ۹٫۰ ۱٫۷ ۷٫۰ ۲۰٫۱ ۰٫۴ ۲٫۸ ۱۴٫۱ ۹٫۹
۱۰٫۴ ۱۰٫۷ ۳۰٫۰ ۳٫۶ ۵٫۶ ۳۰٫۸ ۱۳٫۳ ۴٫۲ ۲۵٫۵ ۳٫۴ ۱۱٫۹ ۲۱٫۵
۲۷٫۶ ۳۶٫۴ ۲٫۷ ۶۴٫۰ ۱٫۵ ۲٫۵ ۲۷٫۴ ۱٫۰ ۲۷٫۱ ۲۰٫۲ ۱۶٫۸ ۵٫۳
۹٫۷ ۲۷٫۵ ۲٫۵ ۲۷٫۰

اکنون ۲ـرکوردها را از داده‌های فوق استخراج می‌کنیم که عبارتند از

۱٫۷ ۹٫۰ ۲۰٫۱ ۲۲٫۹ ۳۰٫۰ ۳۰٫۸ ۳۶٫۴

یک نمودار ساده از ۲−رکوردهای استخراج شده‌ی فوق در مقابل مقادیر میانگین‌های ۲−رکوردهای برگرفته از دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع NH استاندارد با $\theta = ۲$ که در جدول ۲ گزارش شده‌اند، نشان از یک همبستگی خطی قوی دارد (مقدار ضریب همبستگی بزرگتر از ۰٫۹۸۵۹ شده است). لذا این فرض که ۲−رکوردهای فوق برگرفته از توزیع NH با $\theta = ۲$ هستند، معقول می‌باشد.

جدول ۴: ضرایب بهترین برآوردگرهای خطی ناااریب پارامتر مقیاس σ در توزیع NH به ازای $\theta = ۲$

k	n	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$	$b_۴$	$b_۵$	$b_۶$	$b_۷$	$b_۸$	$b_۹$
۱	۲	−۳٫۲۲۰	۳٫۲۲۰							
	۳	−۱٫۶۶۱	−۰٫۱۵۲	۱٫۸۱۳						
	۴	−۱٫۱۴۳	−۰٫۰۹۸	−۰٫۰۸۰	۱٫۳۲۲					
	۵	−۰٫۸۸۵	−۰٫۰۷۲	−۰٫۰۵۹	−۰٫۰۴۹	۱٫۰۶۵				
	۶	−۰٫۷۲۹	−۰٫۰۵۷	−۰٫۰۴۶	−۰٫۰۳۹	−۰٫۰۳۳	۰٫۹۰۴			
	۷	−۰٫۶۲۵	−۰٫۰۴۷	−۰٫۰۳۸	−۰٫۰۳۲	−۰٫۰۲۷	−۰٫۰۲۴	۰٫۷۹۳		
	۸	−۰٫۵۵۱	−۰٫۰۴۰	−۰٫۰۳۳	−۰٫۰۲۷	−۰٫۰۲۳	−۰٫۰۲۰	−۰٫۰۱۸	۰٫۷۱۱	
	۹	−۰٫۴۹۴	−۰٫۰۳۴	−۰٫۰۲۸	−۰٫۰۲۴	−۰٫۰۲۰	−۰٫۰۱۸	−۰٫۰۱۶	−۰٫۰۱۴	۰٫۶۴۸
۲	۲	−۵٫۴۳۶	۵٫۴۳۶							
	۳	−۲٫۷۷۲	−۰٫۲۰۳	۲٫۹۷۵						
	۴	−۱٫۸۸۹	−۰٫۱۳۰	−۰٫۱۱۲	۲٫۱۳۱					
	۵	−۱٫۴۴۹	−۰٫۰۹۵	−۰٫۰۸۱	−۰٫۰۷۱	۱٫۶۹۶				
	۶	−۱٫۱۸۶	−۰٫۰۷۴	−۰٫۰۶۳	−۰٫۰۵۵	−۰٫۰۴۸	۱٫۴۲۷			
	۷	−۱٫۰۱۱	−۰٫۰۶۰	−۰٫۰۵۲	−۰٫۰۴۵	−۰٫۰۴۰	−۰٫۰۳۵	۱٫۲۴۲		
	۸	−۰٫۸۸۵	−۰٫۰۵۱	−۰٫۰۴۴	−۰٫۰۳۸	−۰٫۰۳۳	−۰٫۰۳۰	−۰٫۰۲۷	۱٫۱۰۷	
	۹	−۰٫۷۹۱	−۰٫۰۴۴	−۰٫۰۳۸	−۰٫۰۳۳	−۰٫۰۲۸	−۰٫۰۲۶	−۰٫۰۲۳	−۰٫۰۲۱	۱٫۰۰۳
۳	۲	−۷٫۵۵۰	۷٫۵۵۰							
	۳	−۳٫۸۲۸	−۰٫۲۳۹	۴٫۰۶۷						
	۴	−۲٫۵۹۴	−۰٫۱۵۳	−۰٫۱۳۵	۲٫۸۸۲					
	۵	−۱٫۹۸۰	−۰٫۱۱۱	−۰٫۰۹۸	−۰٫۰۸۷	۲٫۲۷۶				
	۶	−۱٫۶۱۲	−۰٫۰۸۶	−۰٫۰۷۶	−۰٫۰۶۸	−۰٫۰۶۱	۱٫۹۰۳			
	۷	−۱٫۳۶۸	−۰٫۰۷۰	−۰٫۰۶۲	−۰٫۰۵۵	−۰٫۰۴۹	−۰٫۰۴۵	۱٫۶۴۹		
	۸	−۱٫۱۹۴	−۰٫۰۵۹	−۰٫۰۵۲	−۰٫۰۴۶	−۰٫۰۴۱	−۰٫۰۳۷	−۰٫۰۳۴	۱٫۴۶۳	
	۹	−۱٫۰۶۳	−۰٫۰۵۰	−۰٫۰۴۵	−۰٫۰۴۰	−۰٫۰۳۶	−۰٫۰۳۲	−۰٫۰۲۹	−۰٫۰۲۷	۱٫۳۲۱
۴	۲	−۹٫۶۲۴	۹٫۶۲۴							
	۳	−۴٫۸۶۳	−۰٫۲۶۶	۵٫۱۲۹						
	۴	−۳٫۲۸۳	−۰٫۱۷۱	−۰٫۱۵۳	۳٫۶۰۷					
	۵	−۲٫۴۹۶	−۰٫۱۲۴	−۰٫۱۱۱	−۰٫۱۰۰	۲٫۸۳۲				
	۶	−۲٫۰۲۶	−۰٫۰۹۶	−۰٫۰۸۶	−۰٫۰۷۸	−۰٫۰۷۱	۲٫۳۵۸			
	۷	−۱٫۷۱۴	−۰٫۰۷۸	−۰٫۰۷۰	−۰٫۰۶۳	−۰٫۰۵۸	−۰٫۰۵۳	۲٫۰۳۶		
	۸	−۱٫۴۹۱	−۰٫۰۶۶	−۰٫۰۵۹	−۰٫۰۵۳	−۰٫۰۴۸	−۰٫۰۴۴	−۰٫۰۴۰	۱٫۸۰۱	
	۹	−۱٫۳۲۵	−۰٫۰۵۶	−۰٫۰۵۰	−۰٫۰۴۶	−۰٫۰۴۱	−۰٫۰۳۸	−۰٫۰۳۵	−۰٫۰۳۲	۱٫۶۲۲

بر اساس شش ۲−رکورد اول، بهترین برآوردهای خطی ناااریب برای پارامترهای μ و σ به کمک جداول ۳ و ۴ به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned}\mu^* &= (۱٫۲۲۰ \times ۱٫۷) + (۰٫۰۳۳ \times ۹) + (۰٫۰۲۹ \times ۲۰٫۱) + (۰٫۰۲۶ \times ۲۲٫۹) \\ &\quad +(۰٫۰۲۳ \times ۳۰) + (-۰٫۳۳۲ \times ۳۰٫۸) = -۵٫۹۸۶۳.\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sigma^* &= (-۱٫۱۸۶ \times ۱٫۷) + (-۰٫۰۷۴ \times ۹) + (-۰٫۰۶۳ \times ۲۰٫۱) + (-۰٫۰۵۵ \times ۲۲٫۹) \\ &\quad +(-۰٫۰۴۸ \times ۳۰) + (۱٫۴۲۷ \times ۳۰٫۸) = ۳۷٫۳۰۳۶.\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷)، مقدار یک پیش‌بینی‌کننده‌ی خطی ناااریب برای ۲−رکورد هفتم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Y^*_{۷(۲)} = -۵٫۹۸۶۳ + (۱٫۰۹۹ \times ۳۷٫۳۰۳۶) = ۳۵٫۰۱۰۳۶,$$

در حالی که مقدار واقعی ۲−رکورد هفتم برابر با ۳۶٫۴ است.

۶. جمع‌بندی

در این مقاله، بر اساس آماره‌های k–رکورد، بهترین برآوردگرهای خطی نااریب پارامترهای مکان و مقیاس برای توزیع NH تحت فرض آن‌که پارامتر θ معلوم باشد، تعیین شدند. همچنین، یک پیش‌بینی‌کننده‌ی خطی نااریب برای k–رکورد آینده مورد مطالعه قرار گرفت. با یک مثال از داده‌های واقعی، کاربرد نتایج مقاله نشان داده شد. رسم نمودارها و تمامی محاسبات مقاله به کمک نرم‌افزار آماری R (تیم هسته‌ای R [۱۰]) انجام شده است.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از داور (یا داوران) مقاله و همچنین خانم زهرا حامد مشهدزاده قدردانی می‌کنند.

مراجع

[1] M. Alam, M. A. Khan, and R. Khan. Characterization of NH distribution through generalized record values. *Applied Mathematics E-Notes*, 20:406–414, 2020.
[2] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *Records*. John Wiley and Sons, New York, 1998.
[3] N. Balakrishnan and A. C. Cohen. *Order Statistics and Inference: Estimation Methods*. Academic Press, San Diego, 1991.
[4] M. Chacko and M. Shy Mary. Estimation and prediction based on k-record values from normal distribution. *Statistica*, 73(4):505–516, 2013.
[5] V. Choulakian and M. A. Stephens. Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 43(4):478–484, 2001.
[6] T. Dimitrakopoulou, K. Adamidis, and S. Loukas. A lifetime distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function. *IEEE Transactions on Reliability*, 56(2):308–311, 2007.
[7] D. Kumar and S. Dey. Upper record values from extended exponential distribution. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 17(2): 2–18, 2018.
[8] S. Nadarajah and F. Haghighi. An extension of the exponential distribution. *Statistics*, 45(6):543–558, 2011.
[9] J. Paul and P. Y. Thomas. On generalized upper(k)record values from Weibull distribution. *Statistica*, 75(3):313–330, 2015.
[10] R Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2021.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ST–318، صص. ۲۶۹–۲۷۳

کارایی تابع چگالی احتمال پارتو در مدل سازی توزیع قطری درختان در جنگلهای ناهمسال

شعبان قلندرآیشی *،آ

آ استادیار، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
قطر برابر سینه
توزیع پارتو تعمیم یافته
چوله به راست
جنگل ناهمسال

2020 MSC:
34B16

چکیده

مدل سازی توزیع قطری درختان با استفاده از توابع چگالی احتمال ابزاری ضروری برای مدل سازی ساختار توده های جنگلی است. با این وجود، دانش اندکی در مورد مدل سازی تعداد در طبقات قطری درختان راش در ایران موجود است. هدف این مطالعه بررسی و مقایسه کارایی توابع مختلف پارتو در مدل سازی تعداد در طبقات قطر برابر سینه (dbh) درختان راش در یک توده ناهمسال طبیعی می باشد. برآورد مشخصه های توابع احتمال با استفاده از روش بیشینه درستنمایی و ارزیابی مدلها با استفاده از آزمون های نیکویی برازش کولموگروف–اسمیرنوف و کرامر–ون میس انجام شد. نتایج نشان داد که تابع احتمال پارتو تعمیم یافته برازش خوبی با تعداد درختان در طبقات قطری راش دارد. بطور کلی می توان بیان نمود که با توجه به دم کلفت بودن توزیع پارتو، احتمالا این توزیع قابلیت نسبتا خوبی برای مدلسازی تعداد در طبقات قطری درختان در جنگل های ناهمسال و در شرایطی که فراوانی مشاهدات چولگی زیادی داشته باشند، دارد.

۱. مقدمه

قطر یک درخت معیاری از عملکرد یک درخت را ارائه می کند و نقطه شروع مناسبی برای تخمین ارتفاع و حجم درخت می باشد. توزیع قطری شاخصی کارآمد از رشد جنگل است [۱۲]. توزیع قطری درختان یک ابزار ساده و در عین حال کارا برای توصیف ساختار توده های جنگلی است. این معیار برای ارزش گذاری جنگل ها، برنامه ریزی فعالیت های بهره برداری، پیش بینی رشد جنگل ها و بنابراین افزایش بهره وری جنگل مورد استفاده قرار میگیرند [۲، ۴، ۹]. توزیع قطری همچنین می تواند برای استنتاج رویدادهای تخریبی گذشته، مراحل توالی و میزان زیست توده بالای زمینی مورد استفاده قرار گیرد [۵، ۸].

در طی دهه های گذشته توابع چگالی احتمال متعددی از قبیل نمایی [۱۱]، لوگ نرمال [۳]، ویبول [۲]، لوگ لجستیک [۱۳]، پارتو [۶] و فریچت [۱] برای مدل سازی پراکنش قطری درختان در جنگل مورد بررسی قرار گرفته است. با این وجود تعداد تحقیقات در مورد برخی از این مدلها در جنگلهای ایران اندک است. توزیع متغیر تصادفی پارتو دارای چولگی و دم سنگین است. بنابراین در بیان بیشتر پدیده‌هایی که دارای توزیع نرمال نیستند، کاربرد دارد. با توجه به عدم سابقه بررسی کارایی این توزیع در جنگلهای ایران، هدف این تحقیق بررسی و مقایسه کارایی توابع مختلف پارتو در مدل سازی تعداد در طبقات قطر برابر سینه درختان راش در توده های ناهمسال مدیریت شده راش می باشد. بدین منظور با جنگل گردشی یک قطعه نمونه یک هکتاری در یک جنگل طبیعی راش که معرف ساختار طبیعی جنگلهای راش می باشد، اندازه گیری شد.

*شعبان قلندرآیشی
پست الکترونیک: sh.ghalandar@gmail.com (شعبان قلندرآیشی)

۲. مواد و روش‌ها

این مطالعه در یک جنگل طبیعی راش (*Fagus orientalis* Lipsky) واقع در پارسل ۱۱۱ سری یک طرح جنگلداری کردکوی در استان گلستان انجام شد. ارتفاع منطقه مورد مطالعه در حدود ۱۴۴۸ متر از سطح دریا می باشد. میانگین دما ۱۵ درجه سانتی گراد و میانگین بارندگی سالانه ۶۰۰ میلیمتر می باشد (طرح جنگلداری کردکوی). بمنظور مدل سازی تعداد در طبقات قطری درختان راش با جنگل گردشی یک قطعه نمونه یک هکتاری با ابعاد ۱۰۰×۱۰۰ متر در بخشی از پارسل ۱۱۱ که معرف ساختار طبیعی جنگلهای راش بوده است، مستقر گردید. تمام درختان زنده با قطر بیش از ۵/۷ سانتی متر در داخل پلات با استفاده از خط کش دوبازو در ارتفاع برابر سینه و در دو جهت عمود بر هم اندازه گیری گردید. توابع توزیع احتمال مورد بررسی شامل توابع پارتو نوع اول، نوع دوم، نوع سوم و پارتو تعمیم یافته بودند. مشخصه های هر یک از این توابع با استفاده از روش بیشینه درست نمایی و با استفاده از نرم افزار R برآورد شد.

تابع چگالی مربوط به توزیع پارتو نوع اول به صورت زیر ارائه می شود [۱۰].

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \qquad (1)$$

که در آن α و β به ترتیب بیانگر پارامترهای شکل و مقیاس هستند به طوری که $\alpha>0$ و $\beta>0$ است.

تابع چگالی مربوط به توزیع پارتو نوع دوم به صورت زیر ارائه می شود [۱۰].

$$f(x;\alpha,\sigma,\mu)=\frac{\alpha}{\sigma\left(1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{\alpha+1}} \qquad (2)$$

که در آن α، σ و μ به ترتیب بیانگر پارامترهای شکل، مقیاس و مکان هستند به طوری که $\mu<x$، $\sigma>0$ و $\alpha>0$ است.

تابع چگالی مربوط به توزیع پارتو نوع سوم به صورت زیر ارائه می شود.

$$f(x;\gamma,\sigma,\mu)=\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\sigma\gamma\left(1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{2}} \qquad (3)$$

که در آن γ، σ و μ به ترتیب بیانگر پارامترهای شکل، مقیاس و مکان هستند به طوری که $\mu<x$، $\sigma>0$ و $\gamma>0$ است.

تابع چگالی توزیع پارتو تعمیم یافته نیز به صورت زیر ارائه می شود.

$$f(x;\mu,\sigma,k)=\frac{1}{\sigma}\left(1+k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1-\frac{1}{k}} \qquad (4)$$

که در آن k، σ و μ به ترتیب بیانگر پارامترهای شکل، مقیاس و مکان هستند به طوری که $\mu<x$، $\sigma>0$ و $k\neq0$ است.

برای بررسی نیکویی برازش از روشهای گرافیکی و همچنین آزمون های نیکویی برازش کولموگروف–اسمیرنوف (KS) و کرامر–ون میس (CVM) استفاده شد. فرض صفر (H_0) در آزمون های یاد شده این است که داده ها از توزیع مورد نظر تبعیت می‌کنند.

۳. نتایج و بحث

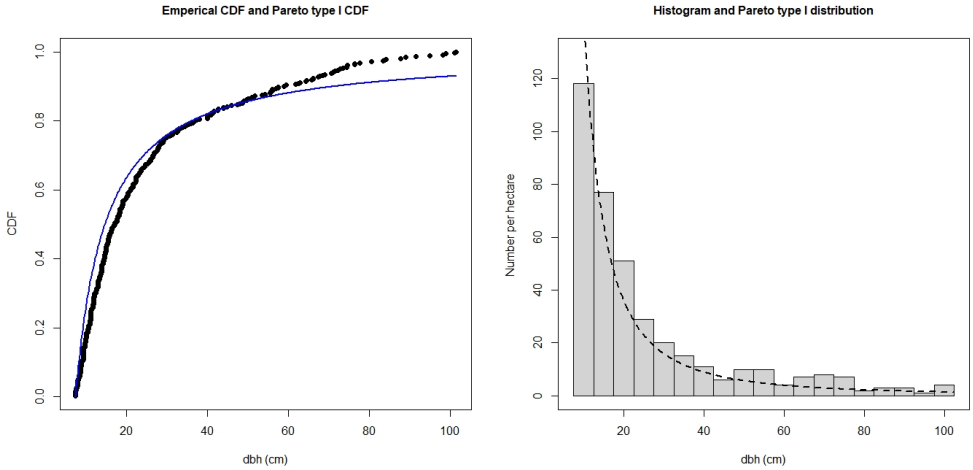
بر اساس نتایج آمار توصیفی، تعداد درختان ۳۸۶ اصله در هکتار برآورد گردید. میانگین قطر برابر سینه درختان ۲۵/۲۶ سانتی متر با انحراف معیار ۷۳/۲۰ سانتی متر است. میزان ضریب چولگی ۶۳/۱ بدست آمد که بیانگر چولگی مثبت پراکنش درختان در طبقات قطری است. حداقل و حداکثر قطر نیز برابر ۵/۷ و ۵/۱۰۱ سانتی متر است.

مشخصه های توابع احتمال برازش شده در جدول ۱ ارائه شده است. نیکویی برازش توزیع های مختلف به روش گرافیکی در شکل ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان داده شده است. آزمون های انجام شده بر اساس آماره KS نشان داد که تابع احتمال پارتو تعمیم یافته برآورد دقیق تری نسبت به سایر توابع چگالی احتمال ارائه می دهند (جدول۲).

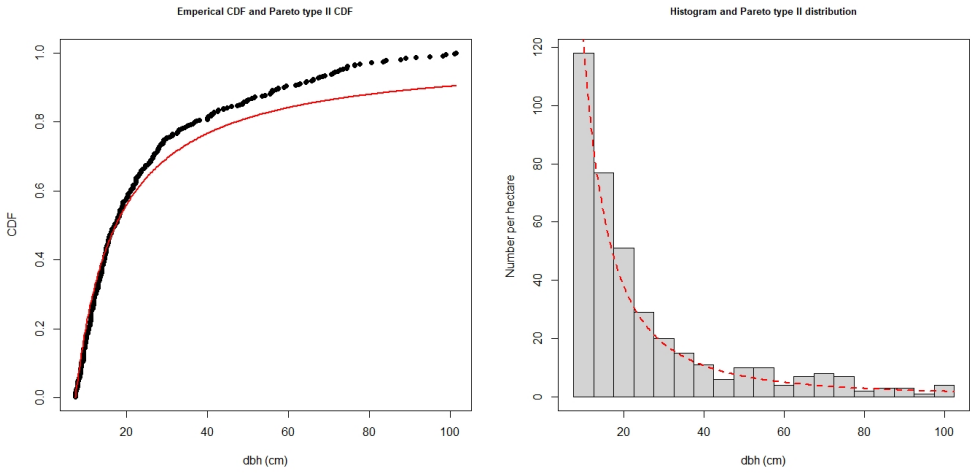
بر اساس نتایج و نمودار هیستوگرام درصد بالایی از درختان در کلاسه قطری پایین قرار دارند (۵/۷ – ۵/۱۲ سانتی متر) که برای جایگزینی درختان در طبقات قطری بالا در آینده کافی است. این نحوه پراکنش درختان و کاهش تعداد در طبقات قطری بر اساس رقابت بین درختان برای نور و مواد غذایی سبب ایجاد چولگی مثبت در پراکنش قطری درختان می شود. وجود این الگو نشان می دهد که جنگل مورد مطالعه بطور طبیعی در

جدول ۱: مشخصه های توابع احتمال

توزیع		مقادیر مشخصه های تابع	
پارتو نوع اول		β=۵/۷	α=۰۲۵۱/۱
پارتو نوع دوم	α =۰۰۳۵/۱	σ=۹۷۲۲/۹	μ=۴۹۶۹/۷
پارتو نوع سوم	γ =۷۸۶۹/۰	σ=۵۴۴۳/۹	μ=۴۸۵۵/۷
پارتو تعمیم یافته	k =۲۵۴۱/۰	σ=۹۳۰۲/۱۳	μ=۹۵۰۲/۶



شکل ۱: نمودار توزیع تجربی و برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت چپ) و نمودار هیستوگرام و مدل برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت راست) بر اساس تابع پارتو نوع اول.



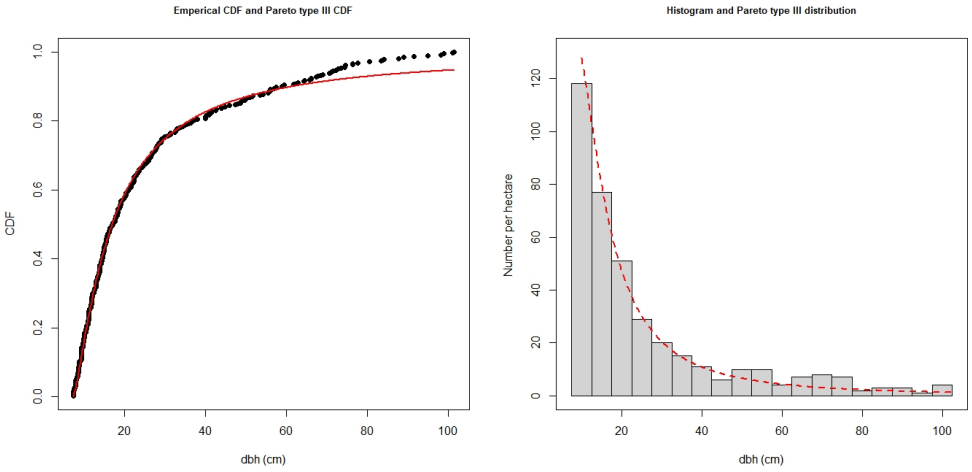
شکل ۲: نمودار توزیع تجربی و برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت چپ) و نمودار هیستوگرام و مدل برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت راست) بر اساس تابع پارتو نوع دوم.

حال تجدید حیات است که از شاخص های حیاتی سلامت جنگل است. از نظر اکولوژیکی و جنگل شناسی عملیات تنک کردن از بالا و در تاج پوشش درختان غالب توده مورد مطالعه می تواند برای افزایش رویش قطری درختان زیر اشکوب مفید باشد. از نظر مراحل تحولی می توان توده مورد مطالعه را به عنوان مرحله تحولی اولیه طبقه بندی نمود. لذا نتایج حاصل از این مطالعه برای توده هایی که ساختار مشابه دارند، قابل

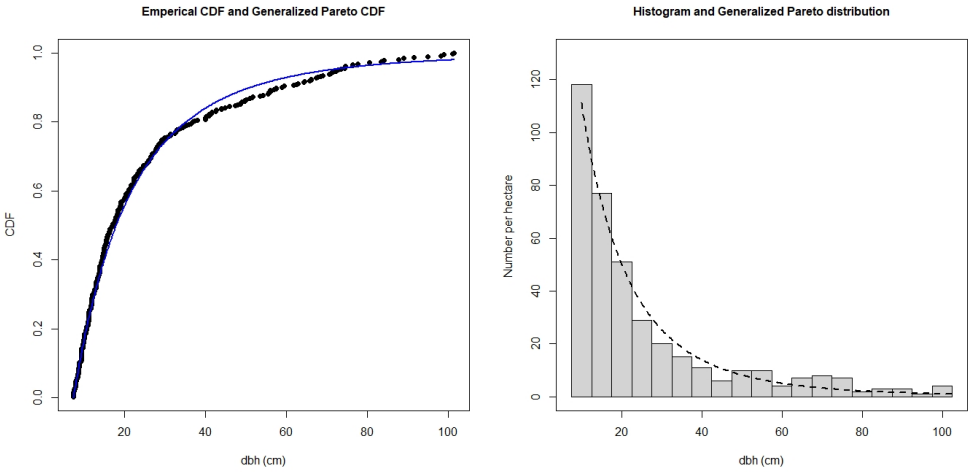
جدول ۲: مقادیر مربوط به آماره آزمون های نیکویی برازش

توزیع	KS		CVM	
	آماره	سطح معنی داری	آماره	سطح معنی داری
پارتو نوع اول	۱۱۹۸/۰	**	۸۵۷۹/۱	**
پارتو نوع دوم	۰۹۵۱/۰	**	۶۸۳۴/۰	*
پارتو نوع سوم	۰۵۱۸/۰	ns	۰۶۵۳/۰	ns
پارتو تعمیم یافته	۰۴۳۵/۰	ns	۱۳۲۵/۰	ns

** معنی داری در سطح یک درصد، * معنی داری در سطح پنج درصد، ns عدم معنی داری



شکل ۳: نمودار توزیع تجربی و برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت چپ) و نمودار هیستوگرام و مدل برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت راست) بر اساس تابع پارتو نوع سوم.



شکل ۴: نمودار توزیع تجربی و برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت چپ) و نمودار هیستوگرام و مدل برازش شده قطر برابر سینه درختان راش (سمت راست) بر اساس تابع پارتو تعمیم یافته.

تعمیم است.
بر اساس آزمون های نیکویی برازش، توزیع پارتو تعمیم یافته برآورد دقیق تری از تعداد در طبقات قطری درختان راش ارائه داد. بر اساس اطلاعات نگارنده تابع پارتو تاکنون در ایران مورد بررسی قرار نگرفته است و در سطح بین المللی نیز احتمالا بدلیل اینکه عمده مطالعات انجام شده در جنگلهای همسال انجام شده است، سوابق استفاده از آن اندک است. اکپا و همکاران [۶] تعداد در طبقات قطری یک جنگل با ساختار ناهمسال را با استفاده از ۸ توزیع آماری مختلف مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که توزیع پارتو تعمیم یافته بهترین عملکرد را از نظر کیفیت برازش در مقایسه با سایر توزیع ها دارد که با نتایج تحقیق حاضر مطابقت دارد. بر اساس نتایج اکپا و همکاران [۶] رتبه های اول تا پنجم کیفیت برازش به ترتیب به توزیع های پارتو تعمیم یافته، ویبول سه پارامتری، لوگ لجستیک دو پارامتری، گاما چهار پارامتری تعمیم یافته و جانسون اس ـبی تعلق داشت.
ببطور کلی می توان بیان نمود که با توجه به دم کلفت بودن توزیع پارتو، احتمالا این توزیع قابلیت نسبتا خوبی برای مدلسازی تعداد در طبقات قطری درختان در جنگل های ناهمسال و در شرایطی که فراوانی مشاهدات چولگی زیادی داشته باشند، دارد. با این وجود نیاز به مطالعات بیشتری در این زمینه می باشد.

مراجع

[۱] قلندرآیشی، ش. بررسی کارایی توابع چگالی احتمال لوگ لجستیک و فریچت در مدل سازی توزیع درختان راش، دومین همایش ملی ریاضی و آمار، ۱۰۸-۱۱۲، ۱۳۹۸.
[2] Bailey R.L. and Dell T.R., Qualifying diameter distributions with the Weibull function, *Forest Science*, 19:97–104, 1973.
[3] Bliss C. I and Reinker, K. A. A Lognormal Approach to Diameter Distributions in Even-Aged Stands, *Forest Science*, 10(3):350–360, 1973.
[4] Burkhart H.E. and Tome´ M., Modeling forest trees and stands, *New York: Springer*, 2012.
[5] Coomes, David A., and Robert B. Allen, Mortality and Tree-Size Distributions in Natural Mixed-Age Forests, *Journal of Ecology*, 95: 27–40, 2007.
[6] Ekpa, N. E., Daniel, K. S., Ukpong, E. E., Etigale, E. B. and Asuquo. O. E., Modeling tree diameter distributions in Arboretum of forestry and eildlife University of Uyo: An Evaluation of 8 Statistical Models, *Global Journal of Science Frontier Research*, 20: 12–18, 2020.
[7] Forests Range and Watershed Management Organization, Iran, Forest management plan, *Department of Natural Resources and Watershed management in Golestan Province*, 2017.
[8] Ghalandarayeshi S., Nord-Larsen T., Johannsen V.K. and Larsen J.B., Spatial patterns of tree species in Suserup Skov – a semi-natural forest in Denmark, *Forest Ecology and Management*, 406: 391–401, 2017.
[9] Hyink M.D and Moser J.W., A Generalized Framework for Projecting Forest Yield and Stand Structure Using Diameter Distributions, *Forest Science*, 29: 85–95, 1983.
[10] Kleiber C. and S. Kotz, Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, *Wiley and Sons Statistics: New York*, 332 pages.
[11] Leak William B., An Expression of Diameter Distribution for Unbalanced, Uneven-Aged Stands and Forests, *Forest Science*, 10: 39–50, 1964.
[12] Robson,B.L., lima, B., Franciso, T., Jose, A., Rinaldo L., Diameter distribution in a Brazilian tropical dry forest domain: predictions for the stand and species, *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, 89: 1189–1203, 1964.
[13] Wang M. and Rennolls K. Tree diameter distribution modeling: introducing the logit-logistic distribution, *Canadian Journal of Forest Research*, 35: 1305–1313, 2005.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–250، صص. ۲۷۴–۲۷۷

مدول‌های دینگ تصویری نسبت به یک دو مدول شبه دوگان

سارا کامجو*[آ]، عبدالناصر بهلکه[ب]

[آ] آدرس اول
[ب] آدرس دوم

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مدول‌های شبه دوگان
مدول‌های دینگ C–تصویری
مدول‌های G_C–تصویری

2020 MSC:
16D40
16E10

چکیده

فرض کنید R و S دو حلقه بوده و C یک $(S-R)$–دو مدول شبه دوگان باوفا باشد. در این مقاله با ایده گرفتن از مفاهیم مدول‌های دینگ تصویری و دینگ تزریقی مدول‌های دینگ C–تصویری و C–تزریقی را معرفی و مطالعه می‌کنیم.

۱. مقدمه

فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی، نوتری و C یک R–مدول با تولید متناهی باشد. C را شبه دوگان گویند هرگاه $\mathrm{Hom}_R(C,C) \cong R$ و برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = ۰$.

این مفهوم برای اولین بار توسط فاکسبی [۱]، گلد [۳] و واسکنسلس [۷] معرفی و مطالعه شده است. هلم و یورگنسن [۴] روی حلقه‌های نوتری جابجایی مدول‌های C–تزریقی گرنشتاین و C–تصویری گرنشتاین را با استفاده از مدول‌های شبه دوگان و رده‌های تصویری و تزریقی مربوط با آن‌ها معرفی کردند. وایت [۸] این مفهوم را برای حلقه‌های جابجایی تعمیم داد و او آن‌ها را به ترتیب مدول‌های G_C–تصویری و G_C–تزریقی نامید و او بسیاری از نتایج در مورد مدول‌های تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین را برای مدول‌های G_C–تصویری و G_C–تزریقی تعمیم داد. اخیراً لیو و همکارانش [۵]، این مدول‌ها را به حلقه‌های شرکت‌پذیر دلخواه گسترش دادند. از طرف دیگر دینگ و همکارانش [۶] دو حالت خاص از مدول‌های تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین را با به کارگیری رده‌های تصویری، یکدست و رده‌های تزریقی، $\mathcal{F}_P$–تزریقی در نظر گرفتند و آن‌ها را به‌ترتیب مدول‌های یکدست گرنشتاین قوی و $\mathcal{F}_P$–تزریقی گرنشتاین نامیدند. این رده از مدول‌ها توسط گلیسپا [۲] با نام‌های مختلف مدول‌های دینگ تصویری و دینگ تزریقی مورد مطالعه قرار گرفتند.

*سخنران
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (سارا کامجو)، second.author@gmail.com (عبدالناصر بهلکه)

[1] Foxby
[2] Golod
[3] Vasconcelos
[4] Holm
[5] Jorgensen
[6] White
[7] Liu
[8] Ding
[9] Gillespie

در این مقاله ابتدا مفاهیم مدول‌های دینگ Cـتصویری و دینگ Cـتزریقی را ارائه می‌دهیم. به‌ویژه رفتار این مدول‌ها نسبت به جمع مستقیم، جمعوند مستقیم و توسیع بررسی می‌شود. هم‌چنین بعد مدول‌های دینگ Cـتصویری و دینگ Cـتزریقی را مطالعه می‌کنیم و توصیف تابعگونی از این بعدها را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید R و S دو حلقه باشند. C یک (S,R)ـدومدول باشد. مدول ${}_SC_R$ را شبه دوگان گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) مدول ${}_SC$ دارای تحلیل Sـتصویری از درجه متناهی باشد.
۲) مدول C_R دارای تحلیل R^{op}ـتصویری از درجه متناهی باشد.
۳) همریختی ${}_SC_S \xrightarrow{S_r} \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,C)$ یکریختی باشد.
۴) همریختی ${}_RR_R \xrightarrow{Y_r} \mathrm{Hom}_S(C,C)$ یکریختی باشد.
۵) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_S(C,C) = ۰$.
۶) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(C,C) = ۰$.

تعریف ۲.۱. Rـمدول M را دینگ تصویری گوییم اگر همبافت دقیق از Rـمدول‌های تصویری مانند

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_۱ \longrightarrow P_۰ \longrightarrow P_{-۱} \longrightarrow P_{-۲} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M = \mathrm{coker}(P_۱ \longrightarrow P_۰)$ و برای هر Rـمدول یکدست F، همبافت $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, F)$ دقیق باشد. رده همه R-مدول‌های دینگ تصویری را با $\mathcal{DP}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. Sـمدول N را دینگ تزریقی گوییم اگر همبافت دقیق از Sـمدول‌های تزریقی مانند

$$\mathbf{I}_\bullet : \cdots \longrightarrow I_۱ \longrightarrow I_۰ \longrightarrow I_{-۱} \longrightarrow I_{-۲} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $N = \mathrm{coker}(I_۱ \longrightarrow I_۰)$ و برای هر Sـمدول $\mathcal{F}_P$ـتزریقی E، همبافت $\mathrm{Hom}_S(R, \mathbf{I}_\bullet)$ دقیق باشد. رده همه Sـمدول‌های دینگ تزریقی را با نماد $\mathcal{DI}(S)$ نمایش می‌دهیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید ${}_SC_R = C$ یک دو مدول شبه دوگان باشد. قرار می‌دهیم

۱) $\mathcal{P}_C(S)$ را زیر رسته همه مدول‌های $C \otimes_R P$ که در آن P، یک Rـمدول تصویری است.

$$\mathcal{P}_C(S) = \{C \otimes_R P \,|\, P \text{ یک } R\text{ـمدول تصویری است}\}$$

۲) $\mathcal{F}_C(S)$ زیر رسته همه مدول‌های $C \otimes_R F$ که در آن F، یک Rـمدول یکدست است.

$$\mathcal{F}_C(S) = \{C \otimes_R F \,|\, F \text{ یک } R\text{ـمدول یکدست است}\}$$

۳) $\mathcal{I}_C(R)$ را زیر رسته همه مدول‌های $\mathrm{Hom}_S(C,I)$ که در آن I، یک Sـمدول تزریقی است.

$$\mathcal{I}_C(R) = \{Hom_S(C,I) \,|\, I \text{ یک } S\text{ـمدول تزریقی است}\}$$

۴) $\mathcal{FI}_C(R)$ را زیر رسته همه مدول‌های $\mathrm{Hom}_S(C,E)$ که در آن E، یک Sـمدول $\mathcal{F}_P$ـتزریقی است.

$$\mathcal{FI}_C(R) = \{\mathrm{Hom}_S(C,E) \,|\, E \text{ یک } S\text{ـمدول } \mathcal{F}_P\text{ـتزریقی است}\}$$

مدول‌های $\mathcal{P}_C(S)$، $\mathcal{F}_C(S)$، $\mathcal{I}_C(R)$ و $\mathcal{FI}_C(R)$ به ترتیب Cـتصویری، Cـیکدست، Cـتزریقی و $\mathcal{F}_P - C$ تزریقی گفته می‌شود.

تعریف ۲.۲. یک $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ـتحلیل کامل یک همبافت دقیق از Sـمدول‌های Cـتصویری مانند

$$\mathbf{X} : \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_۱ \longrightarrow C \otimes_R P_۰ \longrightarrow C \otimes_R P^{۰} \longrightarrow C \otimes_R P^{۱} \longrightarrow \cdots$$

موجود است به‌طوری‌که $\mathbf{X}$ در $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{P}_C(S), -)$ و $\mathrm{Hom}_S(-, \mathcal{F}_C(S))$ دقیق باشد.

تعریف ۳.۲. یک Sـمدول M را دینگ Cـتصویری گوییم اگر $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ـتحلیل $\mathbf{X}_\bullet$ مانند

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_1 \longrightarrow C \otimes_R P_0 \longrightarrow C \otimes_R P^0 \longrightarrow C \otimes_R P^1 \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \operatorname{coker}(C \otimes_R P_1 \longrightarrow C \otimes_R P_0)$.

تعریف ۴.۲. یک $\mathcal{D}(\mathcal{I}_C)$ـتحلیل کامل یک همبافت دقیق از Rـمدول‌های Cـتزریقی مانند

$$\mathbf{Y} : \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I^0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I^1) \longrightarrow \cdots$$

به‌طوری‌که $\mathbf{Y}$ در $\operatorname{Hom}_R(-, \mathcal{I}_C(R))$ و $\operatorname{Hom}_R(\mathcal{F}\mathcal{I}_C(R), -)$ دقیق باشد.

تعریف ۵.۲. یک Rـمدول N دینگ Cـتزریقی گوییم اگر یک $\mathcal{D}(\mathcal{I}_C)$ـتحلیل کامل مانند $\mathbf{Y}_\bullet$

$$\mathbf{Y}_\bullet : \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I^0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I^1) \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $N \cong \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}_S(C, I_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(C, I_0))$.

تذکر ۶.۲. اگر $C = R$، آنگاه مدول‌های دینگ Cـتصویری و دینگ Cـتزریقی به ترتیب همان مدول‌های دینگ تصویری و دینگ تزریقی می‌باشد.

گزاره ۷.۲. *الف) هر Sـمدول Cـتصویری، دینگ Cـتصویری است.*
ب) رده $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ تحت جمع مستقیم بسته است.

گزاره ۸.۲. *Sـمدول M دینگ Cـتصویری است اگر و تنها اگر*

۱) $M \in {}^{\perp}\mathcal{F}_C \cap \mathcal{P}_C^{\perp}$.
۲) *M یک $\mathcal{P}_C$ـتحلیل سره دارد.*
۳) *M یک $\operatorname{Hom}_S(-, \mathcal{F}_C)$، $\mathcal{P}_C$ـتحلیل دقیق دارد.*

قضیه ۹.۲. *الف) رده $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ تحت توسیع بسته است.*
ب) رده $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ نسبت به جمعوند مستقیم بسته است.

گزاره ۱۰.۲. *فرض کنیم M یک Sـمدول باشد. در این صورت M یک $\mathcal{P}_C$ـتحلیل دارد اگر و فقط اگر M یک $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ـتحلیل داشته باشد.*

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنید M یک Sـمدول با بعد دینگ Cـتصویری متناهی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. موارد زیر معادلند.*

۱) $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C) - \operatorname{pd}_S(M) \geqslant n$.
۲) *رشته‌ی دقیق*

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow C \otimes_R P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_1 \longrightarrow C \otimes_R P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است که در آن P_iها تصویری است برای هر $0 \leqslant i \leqslant n-1$ و $D \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$.
۳) *M یک $\mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$ـتحلیل سره از درجه n دارد.*
۴) *رشته‌ی دقیق*

$$0 \longrightarrow C \otimes_R P_n \longrightarrow C \otimes_R P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_1 \longrightarrow D \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

که در آن P_iها تصویری است برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ و $D \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$.
۵) *رشته‌ی دقیق*

$$0 \longrightarrow C \otimes_R P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_{i+1} \longrightarrow D \longrightarrow C \otimes_R P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است که در آن P_jها تصویری بوده، برای هر $1 \leqslant j \leqslant n$، $j \neq i$، $0 \leqslant i \leqslant n$ و $D \in \mathcal{D}(\mathcal{P}_C)$.
۶) *برای هر $i > n$، $\operatorname{Ext}_S^i(M, C \otimes_R F) = 0$ و همه Rـمدول‌های یکدست F.*
۷) *برای هر $i > n$، $\operatorname{Ext}_S^i(M, L) = 0$ و هر Sـمدول L با $\mathcal{F}_C - \operatorname{pd}_S(L) < \infty$.*
۸) $\operatorname{Ext}_S^{+1}(M, L) = 0$ *برای همه Sـمدول‌های L با* $\mathcal{F}_C - \operatorname{pd}_S(L) < \infty$.

مراجع

[1] H. B. Foxby. Gorenstein modules and related modules. *Math. scand.*, 31:267–284, 1972.
[2] J. Gillespie. Model stractures on modules over Ding-Chen rings. *Hornol. Homol. Appl.*, 12:61–73, 2010.
[3] E. S. Golod. G-dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Math. Inst. Steklov.*, 165:62–66, 1984. Algebraic geometry and its applications.
[4] H. Holm and P. JØrgensen. Semi-dualizing modules and related gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra.*, 205(2):423–445, 2006.
[5] Z. Liu, Z. Huang, and A. Xu. Gorenstein projective dimension relative to a semidualizing bimodule. *Comm. Alg.*, 41:1–18, 2013.
[6] L. Mao and N. Ding. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules. *J. Alg. Appl.*, 7:491–506, 2008.
[7] W. V. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*, volume 14. North-Holand. Math. Study. North-Holand Publishing Co. Amsterdam, 1974.
[8] D. White. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing modules. *Commut. J.*, 2(1):111–137, 2010.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–251، صص. ۲۷۸–۲۸۰

مدول‌های دینگ C–تصویری و هم‌ارزی فاکسبی

سارا کامجو*[آ]، عبدالناصر بهلکه[ب]

[آ] آدرس اول
[ب] آدرس دوم

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
شبه دوگان
هم‌ارزی فاکسبی
رده‌ی اسلاندر
رده‌ی باس

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

فرض کنید R و S دو حلقه بوده و C یک $(S-R)$–دو مدول شبه دوگان باوفا باشد. در این مقاله ابتدا رده‌ی مدول‌های C–تصویری، C–یکدست و دینگ C–تصویری تعریف می‌شود. سپس رده‌های اسلاندر و باس به کمک این مفهوم‌ها توصیف می‌شود.

۱. مقدمه

فرض کنید R حلقه جابجایی و C یک R–مدول با تولید متناهی C را شبه دوگان گویند هرگاه $\mathrm{Hom}_R(C,C) \cong R$ و برای هر $i \geqslant 1$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = 0$. این مفهوم برای اولین بار توسط فاکسبی [۱] [۱]، گلد [۲] [۲] و واسکنسلس [۳] [۵] معرفی و مطالعه شده است. هلم [۴] و یورگنسن [۵] [۳] مطالعه‌ی مدول‌های شبه دوگان وابسته به رده‌های اسلاندر و باس برای مدول‌های شبه دوگان $\mathcal{A}_C(R)$ و $\mathcal{B}_C(R)$ که زیر رسته‌هایی از رسته‌ی R–مدول‌ها هستند، مرتبط کردند. لیو [۶] و همکارانش [۴]، این مدول‌ها را به حلقه‌های شرکت‌پذیر دلخواه گسترش دادند و ثابت کردند که بسیاری از نتایج برای رده‌های اسلاندر و باس وابسته به یک مدول شبه دوگان روی حلقه‌های جابجایی نوتری قابل تعمیم روی حلقه‌های شرکت‌پذیر دلخواه می‌باشد.
فرض کنید R و S دو حلقه و C یک $(S-R)$–دومدول باشد. C را شبه دوگان گوییم، هرگاه:

۱) مدول C_S دارای تحلیل S–تصویری از درجه متناهی باشد.
۲) مدول C_R دارای تحلیل R^{op}–تصویری از درجه متناهی باشد.

*سخنران
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (سارا کامجو)، second.author@gmail.com (عبدالناصر بهلکه)

[1] Foxby
[2] Golod
[3] Vasconcelos
[4] Holm
[5] Jorgensen
[6] Liu

۳) همریختی $_SC_S \xrightarrow{\delta_r} \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,C)$ یکریختی باشد.
۴) همریختی $_RR_R \xrightarrow{\gamma_r} \mathrm{Hom}_S(C,C)$ یکریختی باشد.
۵) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_S(C,C) = ۰$.
۶) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(C,C) = ۰$.

در این مقاله هم‌ارزی فاکسبی بین برخی از رده‌های رده‌ی اسلاندر $\mathcal{A}_C(R)$ و رده‌ی باس $\mathcal{B}_C(S)$ را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که زیر رسته‌هایی از Rـمدول‌های دینگ تصویری که در رده‌ی اسلاندر $\mathcal{A}_C(R)$ قرار دارند و رده‌ی مدول‌های دینگ Cـتصویری تحت هم‌ارزی فاکسبی هم‌ارزی می‌باشند.

تعریف ۱.۱. رده اسلاندر نسبت به دو مدول شبه دوگان C را که با $\mathcal{A}_C(R)$ نمایش می‌دهیم. شامل تمام Rـمدول‌هایی مانند M می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند؛

۱) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Tor}^R_i(C,M) = ۰$.
۲) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_S(C, C \otimes_R M) = ۰$.
۳) همریختی طبیعی $\mu_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(C, C \otimes_R M)$ یکریختی از Rـمدول‌ها است.

تعریف ۲.۱. رده باس نسبت به دومدول شبه دوگان C را که با $\mathcal{B}_C(S)$ نمایش می‌دهیم، شامل تمام Sـمدول‌هایی مانند N می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند؛

۱) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Ext}^i_S(C,N) = ۰$.
۲) برای هر $i \geqslant ۱$، $\mathrm{Tor}^R_i(C, \mathrm{Hom}_S(C,N)) = ۰$.
۳) همریختی طبیعی $\nu_N : C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C,N) \longrightarrow N$ یک یکریختی از Sـمدول‌ها است.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید $_SC_R = C$ یک دومدول شبه دوگان و M یک Sـمدول باشد. مدول M را Cـیکدست و Cـتصویری گوییم، اگر Rـمدول یکدست F و Rـمدول تصویری P موجود باشد به‌طوری‌که $M = C \otimes_R F$ و $M = C \otimes_R P$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_C(S) = \{C \otimes_R F \,|\, F \text{ یک } R\text{ـمدل یکدست است}\}$$

$$\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_C(S) = \{C \otimes_R P \,|\, P \text{ یک } R\text{ـمدول تصویری است}\}$$

تعریف ۲.۲. Sـمدول M را دینگ Cـتصویری گوییم اگر یک همبافت دقیق از Sـمدول‌های Cـتصویری مانند

$$\mathbf{X} : \cdots \longrightarrow C \otimes_R P_۱ \longrightarrow C \otimes_R P_۰ \longrightarrow C \otimes_R P^۰ \longrightarrow C \otimes_R P^۱ \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $\mathbf{X}$ در $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{P}_C(S), -)$ و $\mathrm{Hom}_S(-, \mathcal{F}_C(S))$ دقیق باشد و $M \cong \mathrm{coker}(C \otimes_R P_۱ \longrightarrow C \otimes_R P_۰)$.

گزاره ۳.۲. *فرض کنید $_SC_R$ یک $(S-R)$ـدو مدول شبه دوگان باشد. رده $\mathcal{A}_C(R)$ شامل Rـمدول‌های یکدست و رده $\mathcal{B}_C(S)$ شامل Sـمدول‌های تزریقی می‌باشد.*

قضیه ۴.۲. *الف) فرض کنید $_SC_R$ یک $(S-R)$ـدو مدول شبه دوگان باوفا باشد. در این صورت رده‌های $\mathcal{A}_C(R)$ تحت هم‌هسته از تکریختی‌ها و رده $\mathcal{B}_C(S)$ تحت هم‌هسته از بروریختی‌ها بسته می‌باشد.*
ب) فرض کنید $_SC_R$ یک $(S-R)$ـدو مدول شبه دوگان باشد. رده $\mathcal{A}_C(R)$ شامل Rـمدول‌های یکدست و رده $\mathcal{B}_C(S)$ شامل Sـمدول‌های تزریقی می‌باشد.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $_SC_R$ یک $(S-R)$ـدو مدول شبه دوگان باشند. موارد زیر برقرارند.*

الف) $M \in \mathcal{B}_C(S)$ *اگر و تنها اگر* $\mathrm{Hom}_S(C,M) \in \mathcal{A}_C(R)$.
ب) $M \in \mathcal{A}_C(R)$ *اگر و تنها اگر* $C \otimes_R M \in \mathcal{B}_C(S)$.

گزاره ۶.۲. *فرض کنید $M \in \mathcal{B}_C(S)$. در این صورت M دینگ Cـتصویری است اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}_S(C,M)$ دینگ تصویری باشد.*

قضیه ۷.۲ (هم‌ارزی فاکسبی). *فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فرض کنیم $\mathcal{P}(R)_{\leqslant n}$، $\mathcal{P}_C(S)_{\leqslant n}$، $\mathcal{I}(S)_{\leqslant n}$ و $\mathcal{I}_C(R)_{\leqslant n}$ به ترتیب رده‌ای از مدول‌ها با بعد Cـتصویری، تصویری، Cـتزریقی و تزریقی حداکثر n باشند. در این صورت هم‌ارزی رسته‌ها را به صورت زیر داریم.*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(R)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{P}_C(S)_{\leq n} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_C(R)\cap \mathcal{DP}(R)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{D}\left(\mathcal{P}_C(S)\right)_{\leq n} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_C(R)\cap \mathcal{GP}(R)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{B}_C(S)\cap \mathcal{GP}_C(S)_{\leq n} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_C(R) & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{B}_C(S) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{A}_C(R)\cap \mathcal{GI}_C(R)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{B}_C(S)\cap \mathcal{GI}(S)_{\leq n} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{D}\left(\mathcal{I}_C(R)\right)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{B}_C(S)\cap \mathcal{DI}(S)_{\leq n} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{I}_C(R)_{\leq n} & \underset{\mathrm{Hom}_S(C,-)}{\overset{C\otimes_R -}{\rightleftarrows}} & \mathcal{I}(S)_{\leq n}
\end{array}
$$

مراجع

[1] H. B. Foxby. Gorenstein modules and related modules. *Math. scand.*, 31:267–284, 1972.

[2] E. S. Golod. G-dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Math. Inst. Steklov.*, 165:62–66, 1984. Algebraic geometry and its applications.

[3] H. Holm and P. JØrgensen. Semi-dualizing modules and related gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra.*, 205(2):423–445, 2006.

[4] Z. Liu, Z. Huang, and A. Xu. Gorenstein projective dimension relative to a semidualizing bimodule. *Comm. Alg.*, 41:1–18, 2013.

[5] W. V. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*, volume 14. North-Holand. Math. Study. North-Holand Publishing Co. Amsterdam, 1974.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–288، صص. ۲۸۱–۲۸۵

p–اسکیم‌های با رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف مشخص

فاطمه راعی *،آ

آ تهران، دانشگاه فرهنگیان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
p–اسکیم
رادیکال ظریف
مانده‌ی ظریف

2020 MSC:
05E30
20F25

چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف p–اسکیم‌ها می‌پردازیم. شرایط لازم و کافی برای مشخصه سازی p–اسکیم‌هایی با درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف مساوی با کمترین و بیشترین درجه را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که در این p–اسکیم‌ها رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف اسکیم برابر خواهند بود. همچنین نشان می‌دهیم که این p–اسکیم‌ها شورین هستند.

۱. مقدمه

نظریه اسکیم برای اولین بار در رشته آمار برای تجزیه و تحلیل واریانس مطرح شد. سپس این نظریه در شاخه‌های دیگر ریاضیات مانند نظریه کد، نظریه گراف و گروه‌های جایگشتی مطرح گردید[۷–۹].

تعریف ۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه‌ی متناهی و R یک مجموعه از مجموعه‌ی روابط دوتایی ناتهی روی V باشد. زوج $C = (V, R)$ را یک اسکیم [1] گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) R یک افراز از $V \times V$ باشد،

(۲) $\Delta(V) = \{(v, v) : v \in V\}$ اجتماعی از عناصر R باشد،

(۳) R نسبت به ترانهاده بسته باشد، یعنی اگر $R \in R$، آن‌گاه $R^t = \{(u, v) | (v, u) \in R\}$ نیز عضوی از R باشد،

(۴) اگر $R, S, T \in R$ و $(u, v) \in T$، در این صورت عدد $c_{R,S}^T = |\{w : (u, w) \in R, (w, v) \in S\}|$ مستقل از انتخاب $(u, v) \in T$ باشد.

اعضای V را نقاط اسکیم و اعضای R را روابط پایه‌ای اسکیم می‌نامند. اعداد $c_{R,S}^T$ را نیز ثابت‌های ساختاری اسکیم می‌نامند. $|V|$ را درجه و $|R|$ را رتبه اسکیم نامیده و به ترتیب با $\deg(C)$ و $\mathrm{rk}(C)$ نشان می‌دهند. به ازای هر رابطه‌ی پایه‌ای R و هر نقطه u در V مجموعه‌ی uR به صورت $uR := \{v : v \in V, (u, v) \in R\}$ تعریف می‌شود.

* سخنران
پست الکترونیک: f.raei@cfu.ac.ir (فاطمه راعی)

[1] scheme

برای اسکیم $C = (V,R)$، مجموعه سلول‌های این اسکیم به صورت $\mathrm{Cel}(C) = \{X \subseteq V : \Delta(X) \in R\}$ تعریف می‌شود. هرگاه $|\mathrm{Cel}(C)| = ۱$ اسکیم C را یک اسکیم شرکت‌پذیر [۲] می‌گویند.
فرض کنید (G,V) نماد گروه جایگشتی G باشد که روی مجموعه V عمل می‌کند. اگر $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ یک گروه جایگشتی باشد، در این صورت $C = (V, \mathrm{Orb}_۲(G))$ یک اسکیم است که در آن $\mathrm{Orb}_۲(G)$ مجموعه‌ی تمام ۲−مدارهای گروه G است. این اسکیم را با $\mathrm{Inv}(G)$ نشان می‌دهند. هرگاه گروه جایگشتی مانند G وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم $C = \mathrm{Inv}(G)$ در این صورت اسکیم C را شورین [۳] می‌نامند. مساله بررسی شورین بودن برخی اسکیم‌ها توسط وایلنت [۴] در مقاله [۷] مطرح گردید.
برای اسکیم $C = (V,R)$، یك رابطه‌ی هم‌ارزی E روی یك زیرمجموعه از V را یك هم‌ارزی اسکیم C می‌نامند، هرگاه E به صورت اجتماعی از اعضای R نوشته شود. مجموعه‌ی همه‌ی هم‌ارزی‌های اسکیم C را با $E = E(C)$ نمایش می‌دهند.
اسکیم $C = (V,R)$ و هم ارزی $E \in E(C)$ را در نظر بگیرید. در این صورت با استفاده از

$$R_{V/E} = \{(X,Y) \in (V/E)^۲ : R \cap X \times Y \neq \emptyset\}, \qquad \forall R \in R(C)$$

و

$$R_{V/E} = \{R_{V/E} : R \in R(C), R_{V/E} \neq \emptyset\}.$$

اسکیم $C_{V/E} = (V/E, R_{V/E})$ را داریم. این اسکیم را اسکیم خارج قسمتی برای هم‌ارزی E می‌نامیم.
برای اسکیم $C = (V,R)$ و $P,Q \subseteq R$، ضرب مختلط P و Q، را با نماد PQ نشان می‌دهیم که عبارت است از مجموعه‌ی تمام روابط پایه‌ای $R \in R$ به طوری که روابط پایه‌ای مانند $P \in P$ و $Q \in Q$ وجود داشته باشد که $c^R_{P,Q} \neq ۰$. هم‌چنین برای $R,S \in R$، تعریف می‌کنیم:

$$RS = \{T \in R : c^T_{R,S} \neq ۰\}.$$

اگر برای زیرمجموعه‌ی ناتهی $T \subseteq R$ داشته باشیم $TT \subseteq T$، در این صورت T یک زیرمجموعه‌ی بسته نامیده می‌شود. هر رابطه‌ی $R \in R$ که $d(R) = ۱$ را یک رابطه‌ی ظریف می‌نامند. زیرمجموعه‌ی بسته T از R، ظریف نامیده می‌شود هرگاه تمام روابط پایه‌ای آن ظریف باشند.

تعریف ۲.۱. مجموعه‌ی تمام رابطه‌های ظریف اسکیم C را رادیکال ظریف [۵] اسکیم C می‌نامند و با $O_\vartheta(C)$ نشان می‌دهند.

رادیکال ظریف اسکیم C نسبت به ضرب مختلط بسته است. هم‌چنین زیرمجموعه‌ی T از R، ظریف است اگر و تنها اگر T نسبت به ضرب مختلط روابط پایه‌ای یک گروه باشد. هر اسکیم شرکت‌پذیر که تمام روابط پایه‌ای آن ظریف باشد را اسکیم منظم می‌نامند.
زیرمجموعه‌ی بسته T از R، نرمال در R نامیده می‌شود، $T \lhd R$، هرگاه برای هر $R \in R$ داشته باشیم $TR = RT$. زیرمجموعه‌ی بسته T از R، قویاً نرمال در R نامیده می‌شود، $T \lhd\!\!\lhd R$، هرگاه برای هر $R \in R$ داشته باشیم، $R^tTR \subseteq T$.

تعریف ۳.۱. قرار می‌دهیم $O^\vartheta(C) := \bigcap_{T \lhd\!\!\lhd R} T$ و آن را مانده ظریف [۶] اسکیم C می‌نامیم.

در واقع $O^\vartheta(C)$ اشتراک تمام زیرمجموعه‌های بسته از R می‌باشد که شامل $\bigcup_{R \in R} R^tR$ باشد. هم‌چنین زیرمجموعه‌ی T از R بسته است اگر و تنها اگر $\bigcup_{T \in T} T$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی V باشد.
یك رابطه‌ی ترتیب جزئی طبیعی " $\leq$ " روی تمام اسکیم‌های تعریف شده روی مجموعه‌ی V وجود دارد. برای دو اسکیم $C = (V,R)$ و $C' = (V,R')$ تعریف می‌کنیم:

$$C \leq C' \quad \Leftrightarrow \quad R^\cup \subseteq (R')^\cup.$$

در این صورت C را یك تلفیق، یا زیراسکیم، اسکیم C' می‌نامیم. هم‌چنین C' را یك توسیع اسکیم C می‌نامیم.
فرض می‌کنیم p یک عدد اول باشد. کلاسی از اسکیم‌ها با عنوان p−اسکیم‌ها را معرفی کرده و ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. p−اسکیم‌ها توسط پونومارنکو [۷] برای اولین بار معرفی شد و سپس توسط زیشانگ [۸] در [۹، ۱۰] مورد مطالعه قرار گرفت. ساختار یک p−اسکیم دلخواه در مقالات [۴، ۵] توسط پونومارنکو و رهنمای برقی مورد مطالعه قرار گرفت و آن‌ها گراف‌های مربوط به روابط پایه‌ای این اسکیم‌ها را نیز شناسایی کردند. هم‌چنین در مقالات [۲]، [۳] و [۱] نیز مطالعه ساختار p−اسکیم‌ها پرداخته شده است.

---
[2] association
[3] Schurian
[4] Wielandt
[5] thin radical
[6] thin residue
[7] Ponomarenko
[8] Zieschang

تعریف ۴.۱ ([۴]). اسکیم $\mathcal{C}$ را یک p–اسکیم می‌نامیم اگر اندازه هر رابطه‌ی پایه‌ای آن توانی از p باشد.

قضیه ۵.۱ ([۴]). فرض کنیم $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ یک اسکیم دلخواه باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است.

۱- اسکیم $\mathcal{C}$ یک p–اسکیم است اگر و تنها اگر تحدید اسکیم $\mathcal{C}$ به هر سلول آن یک p–اسکیم باشد.

۲- فرض کنیم گروه جایگشتی G موجود باشد به طوری که $\mathcal{C} = \mathrm{Inv}(G)$. در این صورت $\mathcal{C}$ یک p–اسکیم است اگر و تنها اگر G یک p–گروه باشد. هم‌چنین گروه خودریختی‌های یک p–اسکیم یک p–گروه است.

۳- اگر $\mathcal{C}$ یک p–اسکیم باشد آن‌گاه $O_\vartheta(\mathcal{C})$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی غیربدیهی است. بنابراین رابطه‌ی پایه‌ای مانند R، مخالف $\Delta(V)$ متعلق به $\mathcal{R}$ وجود دارد به طوری که $R \in O_\vartheta(\mathcal{C})$. هم‌چنین رادیکال ظریف اسکیم $\mathcal{C}$ تحت ضرب مختلط یک p–گروه غیربدیهی است.

کلاس تمام p–اسکیم‌های شرکت‌پذیر منظم از درجه‌ی p^n را با $\mathcal{T}_{p^n}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین کلاس تمام p–اسکیم‌های شرکت‌پذیر غیرمنظم از درجه‌ی p^n را با $\mathfrak{C}_{p^n}$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم p–اسکیم منظم با $|V| = p$، در حد یکریختی یکتاست و آن را با T_p نشان می‌دهیم. هم‌چنین p–اسکیم شرکت‌پذیر و منظم با $|V| = p^n$، که روابط پایه‌ای آن تحت ضرب مختلط، گروه دوری از مرتبه p^n باشند را با T_{p^n} نشان می‌دهیم. در اسکیم $\mathcal{C} = (V, R)$، $E \in E(C)$ را یک p–هم‌ارزی اسکیم C گویند هرگاه $\Delta(V) \in E$ و برای هر $X \in V/E$، اسکیم C_X منظم و از درجه‌ی ۱ یا p باشد. هر p–اسکیم نابدیهی دارای یک p–هم‌ارزی مخالف $\Delta(V)$ می‌باشد.

قضیه ۶.۱. [۴] *فرض کنید $C = (V, R)$ یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد. C یک p–اسکیم است اگر و فقط اگر زنجیری از هم‌ارزی‌های C موجود باشد که*

$$\Delta(V) = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_m = V^2$$

و برای $1 \le i \le m$، E_i/E_{i-1} یک p–هم‌ارزی اسکیم $C_{V/E_{i-1}}$ است.

قضیه ۷.۱. [۱۰] *اسکیم خارج قسمتی بر مانده‌ی ظریف یک اسکیم منظم است.*

۲. مشخصه‌سازی p–اسکیم‌ها با $O_\vartheta(\mathcal{C})$ و $\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})$

لم ۱.۲. *فرض کنید $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ یک اسکیم باشد. در این صورت برای هر رابطه‌ی پایه‌ای $R \in \mathcal{R}$ داریم:*

$$d(R) \le d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})).$$

لم ۲.۲. *فرض کنید اسکیم $\mathcal{C}$ با ضرب حلقوی دو اسکیم منظم، $\mathcal{C}_1 \wr \mathcal{C}_2$ یکریخت است. در این صورت داریم:*

$$d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})) = d(O_\vartheta(\mathcal{C})) = \deg(\mathcal{C}_1).$$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $\mathcal{C}$ یک p–اسکیم از درجه‌ی p^n باشد. در این صورت درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف اسکیم $\mathcal{C}$ برابر با p است اگر و فقط اگر اسکیم $\mathcal{C}$ با ضرب حلقوی اسکیم T_p و یک اسکیم منظم از درجه‌ی p^{n-1} یکریخت باشد.*

اثبات. فرض می‌کنیم $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ یک p–اسکیم با $|V| = p^n$ است به طوری که

$$d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})) = d(O_\vartheta(\mathcal{C})) = p. \qquad (1)$$

ابتدا نشان می‌دهیم برای هر رابطه پایه‌ای $R \in \mathcal{R}$ داریم $d(R) \in \{1, p\}$. سپس ثابت می‌کنیم که $\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C}) = O_\vartheta(\mathcal{C})$. در مرحله بعد از آن جا که $|V| = p^n$ و $d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})) = p$، داریم $|V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})| = p^{n-1}$. با فرض

$$V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C}) = \{X_0, X_1, \ldots, X_{p^{n-1}-1}\}.$$

نشان می‌دهیم که اسکیم $\mathcal{C}$ با ضرب حلقوی دو اسکیم $\mathcal{C}_{X_0}$ و $\mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})}$ که به ترتیب روی مجموعه‌های X_0 و $V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})$ تعریف شده‌اند یکریخت است.
حال با در نظر گرفتن ماتریس مجاورت روابط و با استفاده از ویژگی‌های کلاس‌های هم‌ارزی ت یک اسکیم شرکت‌پذیر نشان می‌دهیم که اسکیم $\mathcal{C}$ با ضرب حلقوی دو اسکیم $\mathcal{C}_{X_0}$ و $\mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})}$ یکریخت است. از طرف دیگر اسکیم $\mathcal{C}_{X_0}$ با اسکیم T_p یکریخت است و اسکیم $\mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})}$ یک اسکیم منظم از درجه‌ی p^{n-1} می‌باشد. بنابراین

$$\mathcal{C} \simeq T_p \wr \mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})}.$$

برعکس، فرض می‌کنیم $T_p = (V_1, \mathcal{R}_1)$ باشد، و هم‌چنین فرض می‌کنیم $\mathcal{C}' = (V_2, \mathcal{R}_2)$ یک اسکیم منظم از درجه‌ی p^{n-1} باشد. اسکیم $\mathcal{C}$ را ضرب حلقوی این دو اسکیم تعریف می‌کنیم، $\mathcal{C} = T_p \wr \mathcal{C}'$. و نشان می‌دهیم

$$d(\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})) = d(\mathcal{O}_{\vartheta}(\mathcal{C})) = \deg(T_p).$$

□

نتیجه ۴.۲. *هر p–اسکیمی که درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف آن برابر با p باشد، یک اسکیم شورین است .*

قضیه ۵.۲. *فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $\mathcal{C}$ یک p–اسکیم از درجه‌ی p^n باشد . در این صورت درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف اسکیم $\mathcal{C}$ برابر با p^{n-1} است و هر رابطه‌ی پایه‌ای $\mathcal{C}$ از درجه‌ی ۱ یا p^{n-1} است اگر و فقط اگر $\mathcal{C}$ با ضرب حلقوی یک اسکیم منظم از درجه‌ی p^{n-1} و اسکیم T_p یکریخت باشد .*

اثبات . ابتدا فرض می‌کنیم که $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ یک p–اسکیم است و $|V| = p^n$. هم‌چنین فرض می‌کنیم که

$$d(\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})) = d(\mathcal{O}_{\vartheta}(\mathcal{C})) = p^{n-1}, \qquad (۲)$$

و هر رابطه‌ی پایه‌ای $R \in \mathcal{R}$ از درجه‌ی ۱ یا p^{n-1} است. حال از آن جا که

$$d(\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})) = \sum_{R \in \mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})} d(R),$$

و چون می‌دانیم که $\Delta(V) \in \mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$، به این نتیجه می‌رسیم که $R \in \mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$ اگر و فقط اگر $d(R) = 1$ باشد.
بنابراین خواهیم داشت

$$\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_{\vartheta}(\mathcal{C}). \qquad (۳)$$

مجموعه‌ی V را به صورت حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی X_0 و $V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$ در نظر می‌گیریم، که در آن

$$V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C}) = \{X_0, X_1, \dots, X_{p-1}\}.$$

حال از تساوی (۳)، نتیجه می‌گیریم که $R \notin \mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$ اگر و فقط اگر $d(R) = p^{n-1}$. از طرفی چون $\mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})}$ یک اسکیم منظم است پس برای رابطه‌ی پایه‌ای R که از درجه‌ی p^{n-1} باشد، درجه‌ی رابطه‌ی $R_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})}$ برابر با ۱ است. به علاوه تساوی (۳) نشان می‌دهد که رابطه‌ی پایه‌ای $R_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})}$ یک رابطه‌ی غیرقطری است. پس برای هر $X_i \in V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$ کلاس X_j منحصر به فردی وجود دارد که $X_j \in V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$ و $i \neq j$، به طوری که

$$R \cap X_i \times X_j \neq \emptyset.$$

حال چون $|X_i| = |X_j| = p^{n-1}$ و $d(R) = p^{n-1}$، داریم $X_i \times X_j \subseteq R$. بنابراین تساوی زیر به دست می‌آید

$$R = R_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})} \otimes (X_0 \times X_0). \qquad (۴)$$

حال فرض کنید $R \in \mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})$. از تساوی (۳)، برای هر i که $0 \leq i \leq p-1$، اسکیم $\mathcal{C}_{X_i}$ یک اسکیم منظم است. به علاوه برای هر i و j اسکیم‌های $\mathcal{C}_{X_i}$ و $\mathcal{C}_{X_j}$ یکریخت هستند. بنابراین

$$R = \Delta(V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})) \otimes R_{X_0}. \qquad (۵)$$

پس از (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{X_0} \wr \mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})},$$

که در آن $\mathcal{C}_{X_0}$ اسکیمی منظم از درجه‌ی p^{n-1} است و اسکیم $\mathcal{C}_{V/\mathcal{O}^{\vartheta}(\mathcal{C})}$ یک اسکیم منظم از درجه‌ی p است. اما چون اسکیم منظم از درجه‌ی p در حد یکریختی یکتا بوده و با اسکیم T_p یکریخت است، پس

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{X_0} \wr T_p.$$

برعکس، فرض کنید $\mathcal{C}' = (V_1, \mathcal{R}_1)$ یک اسکیم منظم از درجه‌ی p^{n-1} و $T_p = (V_2, \mathcal{R}_2)$ باشد. اسکیم $\mathcal{C}$ را ضرب حلقوی دو اسکیم فوق تعریف می‌کنیم، $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \wr T_p$. طبق لم ۲.۲ خواهیم داشت

$$d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})) = d(\mathcal{O}_\vartheta(\mathcal{C})) = \deg(\mathcal{C}').$$

از طرفی می‌دانیم $\deg(\mathcal{C}') = p^{n-1}$. پس درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف اسکیم $\mathcal{C}$ برابر با p^{n-1} است. حال فرض کنید R یک رابطه‌ی پایه‌ای اسکیم $\mathcal{C}$ باشد. از لم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $d(R) = 1$ یا $d(R) = \deg(\mathcal{C}') = p^{n-1}$ است. بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. □

نتیجه ۶.۲. *هر p–اسکیم از درجه p^n با درجه‌ی روابط پایه‌ای ۱ یا p^{n-1}، اگر درجه‌ی رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف آن برابر با p^{n-1} باشد یک اسکیم شورین است .*

برای هر i که $i \neq n$ در حالتی که $d(\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C})) = d(\mathcal{O}_\vartheta(\mathcal{C})) = p^i$، رادیکال ظریف و مانده‌ی ظریف اسکیم $\mathcal{C}$ ممکن است با هم برابر نباشند. اما با در نظر گرفتن این شرط اضافه، $\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_\vartheta(\mathcal{C})$، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۷.۲. *فرض کنید $\mathcal{C}$ یک اسکیم باشد که $\mathcal{O}^\vartheta(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_\vartheta(\mathcal{C})$. در این صورت اسکیم $\mathcal{C}$ با توسیعی از اسکیم حاصل از ضرب حلقوی دو اسکیم ظریف یکریخت است .*

مراجع

[1] W. Abbas and M. Hirasaka, , *Association schemes with a certain type of p-subschemes*, Ars Mathematica Contemporanea, 19: 51-60, 2020.
[2] J. R. Cho and M. Hirasaka and K. Kim, , *On p-schemes of order p^3*, Journal of Algebra, 369: 369-380, 2012.
[3] K. Kim, *Characterization of p-schemes of prime cube,* Journal of Algebra, 33: 1-10, 2011.
[4] I. Ponomarenko and A. Rahnamai Barghi, *On the structure of p-schemes,* Journal of Mathematical Science, 147: 7227-7233, 2007.
[5] I. Ponomarenko and A. Rahnamai Barghi, *The basis digraphs of p-schemes,* Graphs and Combinatorics, 25: 265-271, 2009.
[6] F. Raei Barandagh and A. Rahnamai Barghi, *On the rank of p-schemes,* Electron. J. Combin., 20: #P30, 2013.
[7] H. Wielandt, *Finite permutation groups,* Academic Press, New York, 1964.
[8] P. H. Zieschang, *Association schemes in which the thin residue is a finite cyclic group,* J. Algebra, 324: 3572-3578, 2010.
[9] P. H. Zieschang, *An Algebraic Approach to Association Schemes*, (Springer-Verlag, Berlin), 1996.
[10] P. H. Zieschang, *Theory of association schemes,* Springer Monogr. Math. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–294، صص. ۲۸۶–۲۸۸

برخی خواص از بعد تصویری گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگان

حدیثه شهرکی *،آ

آ گلستان، بندرترکمن

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مدول تصویری
مدول G_C–تصویری
حلقه جابجایی

چکیده

فرض کنیم R حلقه جابجایی و C یک R–مدول شبه دوگان باشد. با ایده گرفتن از مفهوم مدول‌های تصویری گرنشتاین که توسط ایناکس و جندا معرفی شده‌اند، مفهوم مدول G_C–تصویری و خواص آن مطالعه می‌شود. به‌ویژه نشان داده می‌شود که هر R–مدول دارای G_C–تحلیل تصویری می‌باشد.

۱. مقدمه

مدول‌های دوگان که اولین بار توسط گروتندیک [۱] [۴] مدول‌های دوگان که اولین بار توسط گروتندیک [۲] [۴] معرفی شده‌اند، ابزار بسیار قوی برای تحقیقات در نظریه‌های کوهمولوژی و هندسی جبری می‌باشند. به‌عنوان تعمیمی از مدول‌های دوگان، فاکسبی [۳] [۲]، گلد [۴] [۳] و واسکنسلس [۵] [۶] مدول‌های شبه دوگان را به‌طور مستقل از هم معرفی و مطالعه کردند. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و نوتری و C یک R–مدول با تولید متناهی باشد. C را شبه دوگان گوییم، هرگاه نگاشت طبیعی $R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,C)$ یکریختی بوده و برای هر $i \geqslant 1$ داشته باشیم، $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = 0$. بنابراین R یک R–مدول شبه دوگان می‌باشد. با استفاده از این مفهوم، گلد G_C–بعد را برای مدول‌های با تولید متناهی تعریف کرد که تظریفی از بعد تصویری می‌باشد. با ایده گرفتن از مفهوم مدول‌های تصویری گرنشتاین که توسط ایناکس [۶] و جندا [۷] [۱] معرفی شده‌اند، هلم [۸] و یورگنسن [۹] [۵] مفهوم G_C–بعد را برای هر مدول روی حلقه‌های نوتری تعمیم دادند. هدف این مقاله تعمیم نتایج ذکر شده را در بالا برای حلقه‌های جابجایی و نه لزوماً نوتری می‌باشد.

به‌عبارت دقیق‌تر ابتدا مفهوم، مدول شبه دوگان را برای حلقه‌های جابجایی که لزوماً نوتری نمی‌باشند، تعریف کرده و سپس مدول‌های G_C–تصویری که تعمیم مدول‌های گرنشتاین می‌باشد، را معرفی و مطالعه می‌کنیم. نشان داده می‌شود که رده‌ی مدول‌های G_C–تصویری به‌طور تصویری تحلیلی می‌باشند.

سپس به کمک این مفهوم، به هر مدول پایایی نسبت داده می‌شود که آن را بعد G_C–تصویری مدول‌ها گوییم. در ادامه، این بعد را که تعمیم بعد

*سخنران
پست الکترونیک: m.rshahraki@yahoo.com (حدیثه شهرکی)

[1] Grothendieck
[2] Grothendieck
[3] Foxby
[4] Golod
[5] Vasconcelos
[6] Enochs
[7] Jenda
[8] Holm
[9] Jorgensen

تصویری گرنشتاین مدول‌ها می‌باشد، برحسب تابعگون Ext توصیف می‌شود. در ادامه R همواره حلقه جابجایی می‌باشند. نتایج این مقاله از مرجع [۷] می‌باشد.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. R–مدول C را شبه دوگان گوییم، هرگاه

الف) C دارای یک تحلیل تصویری از مدول‌های مولد متناهی باشد.
ب) نگاشت هموتوپی طبیعی $R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,C)$ یکریختی باشد.
ج) $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = 0$ برای هر $i \geqslant 1$.

تعریف ۲.۲. الف) یک رشته‌ی دقیق از R–مدول‌های

$$\mathbf{X}: \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \otimes_R Q^0 \longrightarrow C \otimes_R Q^1 \longrightarrow \cdots$$

را که در آن هر P_i و Q_i تصویری می‌باشند، را $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل گوییم. اگر همبافت $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_R Q)$ برای هر R–مدول تصویری Q دقیق باشد.
ب) فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت R–مدول دلخواه M را G_C–تصویری گوییم، هرگاه یک $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل مانند $\mathbf{X}$ موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \mathrm{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$.

تذکر ۳.۲. اگر در تعریف ۲.۲ داشته باشیم $C = R$، آنگاه $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل همان تحلیل کامل بوده و مدول‌های G_C–تصویری، دقیقاً مدول‌های تصویری گرنشتاین می‌باشد.

تذکر ۴.۲. فرض کنید M یک R–مدول G_C–تصویری باشد. در این صورت M یک $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل به‌صورت

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow C \otimes_R F^0 \longrightarrow C \otimes_R F^1 \longrightarrow \cdots$$

می‌باشد که در آن F_i و F^i، R–مدول‌های آزاد می‌باشند.

گزاره ۵.۲. *فرض کنید $\{x_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از $\mathcal{P}_C$–تحلیل‌های کامل باشد. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} X_i$ نیز یک $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل می‌باشد. بنابراین رده‌ای از R–مدول‌های G_C–تصویری (با تولید متناهی) نسبت به مجموع مستقیم بسته می‌باشد.*

قضیه ۶.۲. *رده R–مدول‌های G_C–تصویری نسبت به جمع مستقیم بسته است.*

تعریف ۷.۲. فرض کنید C یک R–مدول شبه دوگان باشد. رده مدول‌های C–تصویری به‌صورت $\mathcal{P}_C = \{C \otimes_R P \mid P, R$–مدول تصویری است$\}$ تعریف می‌شوند. اگر $C = R$، آنگاه $\mathcal{P}_R$ را به‌صورت $\mathcal{P}$ نمایش می‌دهیم که رده R–مدول‌های تصویری به دست می‌آید.

گزاره ۸.۲. *فرض کنید C یک R–مدول شبه دوگان باشد. در این صورت رده $\mathcal{P}_C(R)$ تحت هم حاصل‌ضرب و جمعوند مستقیم بسته است.*

لم ۹.۲. *فرض کنیم L یک R–مدول از بعد C–تصویری متناهی باشد. در این صورت برای هر $i > 0$ و هر R–مدول تصویری Q، $\mathrm{Ext}^i_R(C \otimes_R Q, L) = 0$.*

نتیجه ۱۰.۲. *اگر $\mathbf{X}$ یک $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل باشد، آنگاه برای هر R–مدول تصویری P، $P \otimes_R \mathbf{X}$ نیز $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل می‌باشد. به‌علاوه، عکس مطلب برقرار است اگر P تصویری باوفا باشد.*

گزاره ۱۱.۲. *اگر P، R–مدول تصویری باشد، آنگاه P و $C \otimes_R P$، G_C–تصویری می‌باشند. بنابراین هر R–مدول دارای یک تحلیل G_C–تصویری می‌باشد.*

گزاره ۱۲.۲. *فرض کنید $\mathbf{X}$ یک $\mathcal{P}_C$–تحلیل کامل و L یک R–مدول از بعد C–تصویری متناهی باشد. در این صورت همبافت $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, L)$ دقیق است. به‌ویژه اگر M یک مدول G_C–تصویری باشد، آنگاه $\mathrm{Ext}^{i\geqslant 1}_R(M,L) = 0$.*

مراجع

[1] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. *Relative homological algebra*, volume 30. de Gruyter Expositions in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
[2] H-B. Foxby and L-W. Christensen. Hyperhomological algebra with applications to commutative rings. in preparation.
[3] E. S. Golod. G-dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 165:62–66, 1984.
[4] R. Hartshorne. *Local Cohomology*. Fall. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[5] H. Holm and P. Jorgensen. Semi-dualizing modules and related gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 205:423–445, 2006.
[6] W. V. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*. number 14. Co. Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, 1974.
[7] D. White. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module. *J. Commutative Algebra*, 2(1):111–137, 2010. Algebraic geonetry and its applications.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–311، صص. ۲۸۹–۲۹۱

مدول‌های دینگ تصویری نسبت به یک مدول شبه دوگان روی حلقه‌های جابجایی

زهره ممشلی *[آ]، عبدالناصر بهلکه[ب]

[آ] گلستان گنبدکاووس
[ب] گلستان گنبدکاووس دانشگاه گنبدکاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مدول شبه دوگان
مدول دینگ C–تصویری

2020 MSC:
16E05
16E65

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و C یک R–مدول شبه دوگان باشد. در این مقاله، مفهوم مدول‌های دینگ C–تصویری و دینگ C–تزریقی را معرفی و مطالعه می‌کنیم که به‌ترتیب تعمیم مدول‌های دینگ تصویری و دینگ تزریقی می‌باشد.

۱. مقدمه

مفهوم مدول‌های شبه دوگان برای اولین بار توسط فاکسبی [۱] [۳]، گلد [۲] [۵] و واسکنسلس [۳] [۷] معرفی و مطالعه شده است.
فرض کنید R حلقه جابجایی، نوتری و C یک R–مدول با تولید متناهی باشد. C را شبه دوگان گوییم هرگاه $\mathrm{Hom}_R(C,C) \cong R$ و برای هر $i \geqslant 1$، $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = 0$.
هلم [۴] و یورگنسن [۵] [۶] روی حلقه‌های نوتری جابجایی، مدول‌های C–تصویری گرنشتاین و C–تزریقی گرنشتاین را با استفاده از مدول‌های شبه دوگان و رده‌های تصویری و تزریقی مربوط به آن‌ها معرفی کردند. وایت [۶] [۸] این مفاهیم را برای حلقه‌های جابجایی تعمیم داد و آن‌ها را به‌ترتیب مدول‌های G_C–تصویری و G_C–تزریقی نامید و بسیاری از نتایج در مورد مدول‌های تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین را برای مدول‌های G_C–تصویری و G_C–تزریقی تعمیم داد. از طرف دیگر دینگ [۷] و همکارانش در [۱، ۲] در حالت خاص از مدول‌های تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین را با بکارگیری رده مدول‌های تصویری، یکدست، تزریقی و $\mathcal{F}_P$–تزریقی در نظر گرفتند. آن‌ها این مدول‌ها را به‌ترتیب یکدست گرنشتاین قوی و $\mathcal{F}_P$–تزریقی گرنشتاین نامیدند. این مفاهیم توسط گیلسپی [۸] [۴] تحت نام‌های مدول‌های دینگ تصویری و دینگ تزریقی مطالعه شده‌اند.
در این مقاله ابتدا مفاهیم مدول‌های دینگ C–تصویری و دینگ C–تزریقی روی حلقه‌های جابجایی را معرفی و مطالعه می‌کنیم. به‌ویژه رفتار

*سخنران
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (زهره ممشلی)، n.bahlekeh@gmail.com (عبدالناصر بهلکه)

[1] Foxby
[2] Golod
[3] Vasconcelos
[4] Holm
[5] Jorgensen
[6] White
[7] Ding
[8] Gillespie

این مدول‌ها را نسبت به جمع مستقیم و جمعوند مستقیم بررسی می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که رده مدول‌های دینگ Cـتصویری، به‌طور تصویری تحلیلی می‌باشد.

تعریف ۱.۱. Rـمدول M را دینگ تصویری گوییم، هرگاه همبافت دقیق از Rـمدول‌های تصویری

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M = \operatorname{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$ و برای هر Rـمدول یکدست F، همبافت $\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, F)$ دقیق باشد. رده همه R-مدول‌های دینگ تصویری را با $\mathcal{DP}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. Rـمدول N را دینگ تزریقی گوییم، هرگاه همبافت دقیق از Rـمدول‌های تزریقی

$$\mathbf{I}_\bullet : \cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow I_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $N = \operatorname{coker}(I_1 \longrightarrow I_0)$ و برای هر Rـمدول $\mathcal{F}_P$ـتزریقی E، همبافت $\operatorname{Hom}_R(E, \mathbf{I}_\bullet)$ دقیق باشد. رده همه Rـمدول‌های دینگ تزریقی را با $\mathcal{DI}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنیم C یک Rـمدول شبه دوگان باشد. رده Rـمدول‌های Cـتصویری، Cـیکدست، Cـتزریقی و $\mathcal{F}_P - C$ـتزریقی به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_C(R) = \{C \otimes_R P \,|\, P \text{ یک } R\text{ـمدول تصویری است}\}$$

$$\mathcal{F}_C(R) = \{C \otimes_R F \,|\, F \text{ یک } R\text{ـمدول یکدست است}\}$$

$$\mathcal{I}_C(R) = \{\operatorname{Hom}_R(C, I) \,|\, I \text{ یک } R\text{ـمدول تزریقی است}\}$$

$$\mathcal{FI}_C(R) = \{\operatorname{Hom}_R(C, E) \,|\, E \text{ یک } R\text{ـمدول } \mathcal{FP}\text{ـتزریقی است}\}$$

در حالتی‌که $C = R$، آنگاه مدول‌های Cـتصویری، Cـیکدست، Cـتزریقی و $\mathcal{F}_P - C$ـتزریقی به‌ترتیب همان مدول‌های تصویری، یکدست، تزریقی و $\mathcal{F}_P$ـتزریقی هستند.

تعریف ۲.۲. همبافت دقیق از Rـمدول‌های

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \otimes_R P_{-1} \longrightarrow C \otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

که در آن P_iها تصویری می‌باشند را یک دینگ $\mathcal{PP}_C$ـتحلیل گوییم، هرگاه برای هر Rـمدول Cـیکدست F، همبافت $\operatorname{Hom}_R(\mathbf{X}_\bullet, \mathcal{F}_C(R))$ دقیق باشد.

تعریف ۳.۲. Rـمدول M را دینگ Cـتصویری گوییم، هرگاه یک دینگ $\mathcal{PP}_C$ـتحلیل مانند

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \otimes_R P_{-1} \longrightarrow C \otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \operatorname{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$. رده مدول‌های دینگ Cـتصویری را با $\mathcal{DP}_C(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. همبافت دقیق از Rـمدول‌های

$$\mathbf{Y}_\bullet : \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, I_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, I_0) \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow I_{-2} \longrightarrow \cdots$$

که در آن I_iها تزریقی می‌باشند را یک دینگ $\mathcal{I}_C\mathcal{I}$ـتحلیل گوییم، هرگاه برای هر Rـمدول $\mathcal{F}_P$ـتزریقی E، همبافت $\operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(C, E), \mathbf{Y}_\bullet)$ دقیق باشد.

تعریف ۵.۲. Rـمدول N را دینگ Cـتزریقی گوییم، هرگاه یک دینگ $\mathcal{I}_C\mathcal{I}$ـتحلیل مانند

$$\mathbf{Y}_\bullet : \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, I_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, I_0) \longrightarrow I_{-1} \longrightarrow I_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $N \cong \operatorname{coker}(I_{-1} \longrightarrow I_{-2})$. رده همه Rـمدول‌های دینگ Cـتزریقی را با $\mathcal{DI}_C(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۶.۲. *اگر P یک Rـمدول تصویری باشند، آنگاه P و $C \otimes_R P$، دینگ Cـتصویری می‌باشند. به‌ویژه هر Rـمدول دارای تحلیل $\mathcal{D}_C$ـتصویری می‌باشد.*

گزاره ۷.۲. *رده $\mathcal{DP}_C(R)$ تحت جمع مستقیم بسته است.*

گزاره ۸.۲. *رده $\mathcal{DP}_C(R)$ به‌طور تصویری تحلیلی بوده و تحت جمعوند مستقیم بسته است.*

مراجع

[1] N. Ding and L. Mao. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules. *J. Algebra Appl.*, 7(4):491–506, 2008.
[2] N. Ding, Y. Li, and L. Mao. Strongly Gorenstein flat modules. *J. Aust. Math. Soc.*, 86(3):323–338, 2009.
[3] H.-B. Foxby. Gorenstein modules and related modules. *Math. Scand.*, 31:267–284, 1972.
[4] J. Gillespie. Model structures on modules over Ding-Chen rings. *Homology, Homotopy Appl.*, 12(1):61–73, 2010.
[5] E. S. Golod. G-dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 165:62–66, 1984.
[6] H. Holm and P. Jorgensen. Semi-dualizing modules and related gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 205:423–445, 2006.
[7] W. V. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*. number 14. Co. Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, 1974.
[8] D. White. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module. *J. Commutative Algebra*, 2(1):111–137, 2010.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–312، صص. ۲۹۲–۲۹۳

مطالعه بعد دینگ C–تصویری مدول‌ها

زهره ممشلی [*،آ]، عبدالناصر بهلکه [ب]

[آ] گلستان، گنبدکاووس
[ب] گلستان، گنبدکاووس، دانشگاه گنبدکاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مدول شبه دوگان
مدول‌های دینگ C–تصویری، بعد دینگ C–تصویری مدول‌ها

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و C یک R–مدول شبه دوگان باشد. در این مقاله ابتدا رده‌ی مدول‌های C–تصویری، C–یکدست و دینگ C–تصویری را تعریف می‌کنیم. سپس بعد مدول‌های دینگ C–تصویری مطالعه می‌شود.

۱. مقدمه

مفهوم مدول‌های شبه دوگان برای اولین بار توسط فاکسبی، [۱] [1]، گلد [۲] [2] و واسکنسلس [۳] [3] معرفی و مطالعه شده است. فرض کنید R حلقه جابجایی، نوتری و C یک R–مدول با تولید متناهی باشد. C را شبه دوگان گوییم هرگاه $\mathrm{Hom}_R(C,C) \cong R$ و برای هر $i \geqslant 1$، داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_R(C,C) = 0$. با استفاده از مدول‌های شبه دوگان، گلد پایایی را برای هر R–مدول با تولید متناهی نسبت داد و آن را بعد G_C–تصویری نامید. این بعد برای هر مدول روی حلقه‌های نوتری توسط هلم [۴] [4] و یورگنسن [۵] [5] معرفی و مطالعه شده است. سپس وایت [۶] [6] این مفهوم را برای هر حلقه تعمیم داد. آن‌ها نشان داده‌اند که بعد G_C–تصویری و G_C–تزریقی در بسیاری از قضایای بعدهای همولوژیکی کلاسیک صدق می‌کند.
در این مقاله ابتدا مدول‌های دینگ C–تصویری نسبت به یک مدول شبه دوگان روی حلقه‌های جابجایی را تعریف کرده و سپس بعد دینگ C–تصویری مدول‌ها را معرفی و مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید C یک R–مدول شبه دوگان باشد. رده مدول‌های C–تصویری و C–یکدست به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_C(R) := \{C \otimes_R P \,|\, P \text{ یک } R\text{–مدول تصویری است}\}$$

[*] سخنران
پست الکترونیک: first.author@gmail.com (زهره ممشلی)، n.bahlekeh@gmail.com (عبدالناصر بهلکه)

[1] Foxby
[2] Golod
[3] Vasconcelos
[4] Holm
[5] Jorgensen
[6] White

$$\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_C(R) := \{C \otimes_R F \big| \text{یک } R\text{ـمدول یکدست است } F\}$$

تعریف ۲.۱. همباف دقیق از Rـمدول‌های

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \otimes_R P_{-1} \longrightarrow C \otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

که در آن P_iها تصویری می‌باشند را یک دینگ $\mathcal{PP}_C$ـتحلیل گوییم، هرگاه برای هر Rـمدول Cـیکدست F، همباف $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}_\bullet, \mathcal{F}_C(R))$ دقیق باشد.

تعریف ۳.۱. Rـمدول M را دینگ Cـتصویری گوییم، هرگاه یک دینگ $\mathcal{PP}_C$ـتحلیل مانند

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 C \otimes_R P_{-1} \longrightarrow C \otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \mathrm{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. *برای هر Rـمدول M، موارد زیر معادل‌اند.*

۱) $\mathcal{DP}_C - \mathcal{PD}_R(M) \leqslant n$.

۲) *برای هر* $i > 0$ *و هر* Rـمدول دلخواه L *با* $\mathcal{F}_C - \mathcal{PD}_R(L) < \infty$، $\mathrm{Ext}^i_R(M, C \otimes_R F) = 0$.

۳) *برای هر* $i > n$ *و هر* Rـمدول یکدست F، $\mathrm{Ext}^i_R(M, C \otimes_R F) = 0$.

۴) رشته دقیق

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است به‌طوری‌که $D_i \in \mathcal{DP}_C(R)$ *برای هر* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *و* $K_n \in \mathcal{DP}_C(R)$.

۵) *برای هر عدد صحیح نامنفی* t *به‌طوری‌که* $0 \leqslant t \leqslant n$، *رشته دقیق از* Rـمدول‌های

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{t+1} \longrightarrow D \longrightarrow Q_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است که در آن $D \in \mathcal{DP}_C(R)$ *و* $Q_i \in \mathcal{P}(R) \cup \mathcal{P}_C(R)$ *برای هر* $0 \leqslant i \leqslant n$ *و* $i \neq t$. *بنابراین بعد دینگ* Cـتصویری M *توسط فرمول زیر به دست می‌آید.*

$$\begin{aligned}\mathcal{DP}_C - \mathcal{PD}_R(M) &= \sup\left\{i \in N_0 \middle| \exists L \in \overline{\mathcal{F}_C(R)} : \mathrm{Ext}^i_R(M, L) \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{i \in N_0 \middle| \exists Q \in \mathcal{F}_C(R) : \mathrm{Ext}^i_R(M, Q) \neq 0\right\}\end{aligned}$$

مراجع

[1] H.-B. Foxby. Gorenstein modules and related modules. *Math. Scand.*, 31:267–284, 1972.

[2] E. S. Golod. G-dimension and generalized perfect ideals. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 165:62–66, 1984.

[3] H. Holm and P. Jorgensen. Semi-dualizing modules and related gorenstein homological dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 205:423–445, 2006.

[4] W. V. Vasconcelos. *Divisor theory in module categories*. number 14. Co. Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, 1974.

[5] D. White. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module. *J. Commutative Algebra*, 2(1):111–137, 2010.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، GT–128، صص. ۲۹۴–۲۹۷

روشی برای اثبات قضیه مورلی به کمک دایره های متناظر و متقارن

غلامرضا سلطانی ابری

پژوهشگر درحوزه زوایای قابل تثلیث و چند ضلعی‌های منتظم، گنبد کاووس، گلستان، ایران

اطلاعات مقاله

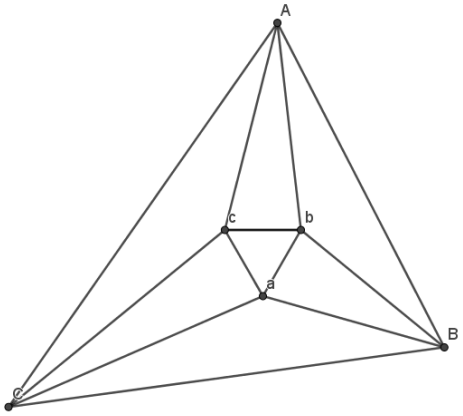
واژه‌های کلیدی:
قضیه مورلی
دایره متناظر و متقارن
جان کان وی
آلن کن

چکیده

دراین مقاله به کمک سه دایره متناظر و متقارن که مرکز آنها رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می دهد ثابت می کنیم که نقطه تلاقی تثلیث گرهای همجوارهر مثلث دیگر نیز رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می دهد.

۱. مقدمه

قضیه مورلی حاکی از این است که محل تلاقی تثلیث گرهای همجوار هر مثلث رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می دهند (شکل ۱)



شکل ۱: محل تلاقی تثلیث گرهای همجوار مثلث

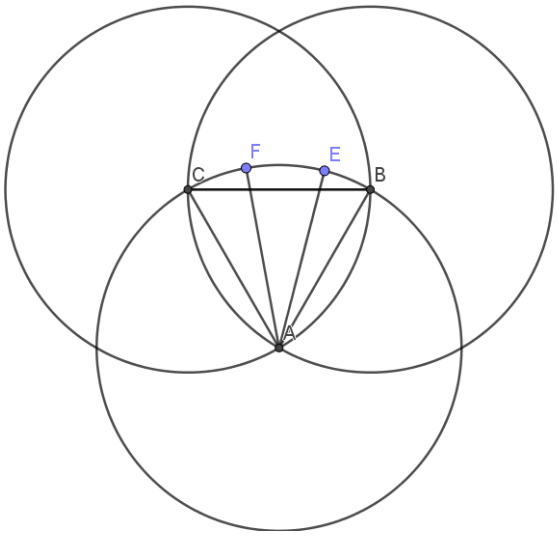
با گرامیداشت یاد جان کانوی ریاضیدان شهیر انگلیسی که اخیرا براثر ابتلای به بیماری کرونا در گذشت و اثباتی از قضیه مورلی دارد. این اثبات را به استاد بزرگوار جناب پروفسور مگردیچ تومانیان ریاست محترم بخش ریاضی فرهنگستان علوم ایران تقدیم می کنم.

این مسئله در سال ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی که در آن موقع استاد ریاضی یکی از دانشگاه های امریکا بود مطرح گردید. در مقاله ۱۹۲۹ مورلی برای اولین بار از این قضیه نام می برد و می نویسد که در مورد ویژگی های کاردیوئیدها تحقیق می کرده است که به این مسئله برخورد می نماید.

تاکنون بیش از ۲۰۰ روش اثبات از طرف ریاضیدانانی مانند کانوی دریگیدز، بانکوف و الن کن به طرق مختلف جبری و هندسی و مثلثاتی ارائه شده و هنوز برای دستیابی به روش های اثبات ساده تر این تلاش ها ادامه دارد.(۱)
درباره قضیه مورلی دو نکته فورا متبادی به ذهن می شود نخست اینکه چطور این قضیه به مدت دو هزار سال از چشمان تیز بین هندسه دانایی همچون تئودوروس، تئاتیتوس، ائودوکسوس، آپولونیوس و ارشمیدس پنهان بوده . (۲)
نکته دیگر اینکه این قضیه از نوادر قضیه های هندسه است که در آن بجای نیمساز از تثلیث گر استفاده می شود. شاید یکی از دلایل کشف نشدن این قضیه در یونان باستان مشکل تثلیث زاویه به کمک خط کش نامدرج و پرگار بوده است.(۲)
پروفسور کرم زاده نیز قضیه مورلی را به شکل "حاگر و تنها اگر"> بیان و اثبات می کند. (۲)

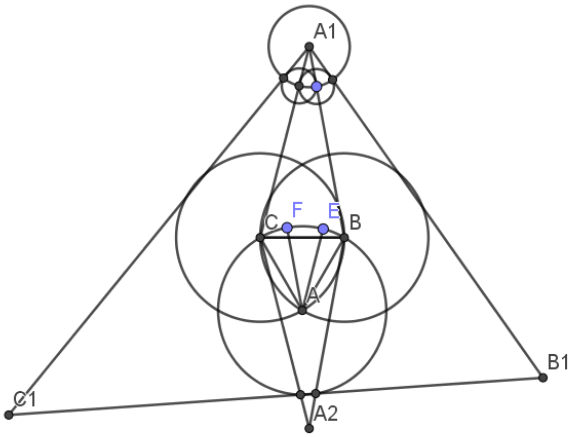
۲. اثبات قضیه مورلی

روشی برای اثبات قضیه مورلی به کمک دایره های متناظر و متقارن
باتوجه به شکل ۱ مثلث متساوی الاضلاعی مانند مثلث $\overset{\delta}{ABC}$ را در نظر گرفته و رئوس این مثلث را مرکز دایره هایی به شعاع یک ضلع این مثلث قرار می دهیم.
کمان $\breve{BC}$ را به سه قسمت دلخواه مثل کمانهای $\breve{BE}$ و $\breve{EF}$ و $\breve{FC}$ تقسیم می کنیم . و فرض می کنیم زاویه های $\widehat{BAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAC} = ۶۰$ هر کدام ثلث یکی از زاویه های یک مثلث دیگر هستند.

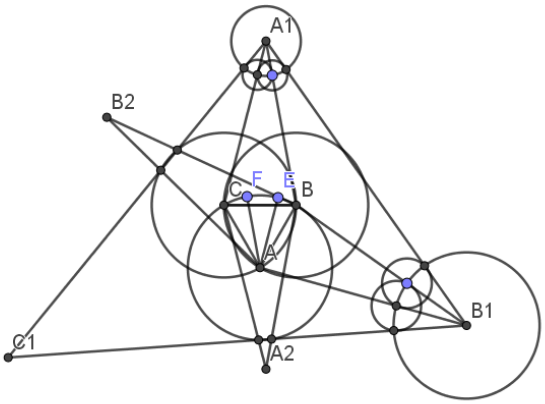


شکل ۲:

برای بدست آوردن آن مثلث با توجه به شکل ۳ از نقطه B خطی به موازات شعاع AF و از نقطه C خطی به موازات شعاع AE رسم می کنیم تا در نقطه A_1 همدیگر را قطع کنند حال نقطه A_1 را راس زاویه ای قرار می دهیم که زاویه $\widehat{BA_1C} = \widehat{EAF}$ ثلث وسط آن باشد. در این حالت مثلث $\overset{\delta}{BA_1C}$ را حول ضلع BC دوران می دهیم مثلث $\overset{\delta}{BA_2C}$ بدست می آید. که اضلاع BA_2 و CA_2 در دو نقطه دایره به مرکز A را قطع می کنند.
اگر خطی رسم کنیم که از این دو نقطه بگذرد و در دو نقطه B_1 و C_1 اضلاع زاویه $C_1BA_3 = A_1$ را قطع کند. قابل اثبات است که C_1B_1 ضلع سوم مثلث مورد نظر است.
برای این کار خطوط $\overline{B_1B}$ و $\overline{B_1A}$ را رسم می کنیم و به مرکز B_1 دایره ای می زنیم. مشاهده می کنیم کمان مقابل به زاویه $\widehat{BB_1A}$با کمان زاویه های طرفین مساوی است. یعنی مثلث حالت اول زاویه $\widehat{BB_1A}$ ثلث وسط زاویه $\widehat{A_1B_1C_1}$ است. و اگر مثلث $\overset{\delta}{BB_1A}$ را حول ضلع AB دوران بدهیم اضلاع مثلث دوران داده شده یعنی ضلع C_2B و A_2B دایره را در دو نقطه قطع می کند که مثل حالت اول ضلع C_1A_1 از مثلث $\widehat{A_1B_1C_1}$ نیز از آن دو نقطه می گذرد.
حال اگر مشابه این عملیات را برای راس C_1 از مثلث $\widehat{A_1B_1C}$ انجام دهیم نیز همین نتیجه حاصل می شود.



شکل ۳:

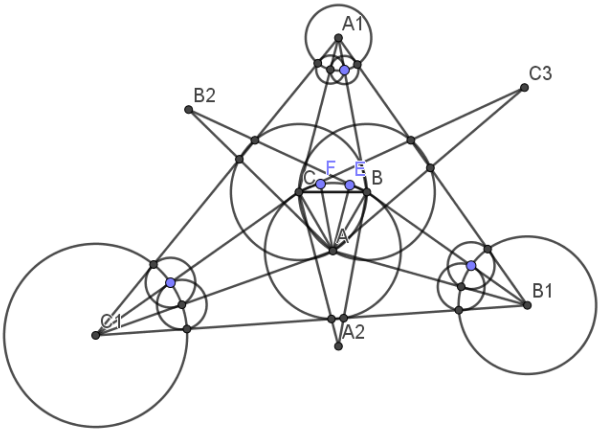


شکل ۴:

با توجه به شکل ۵ خطوط C_1C و A_1C را رسم و مشاهده می کنیم زاویه $\widehat{CC_1A}$ با زاویه های طرفین که زاویه $\widehat{A_1C_1B_1}$ را تشکیل می دهند. برابر و زاویه $\widehat{CC_1A}$ ثلث وسط زاویه است $\widehat{A_1C_1B_1}$ است و اگر مثلث $\overset{\delta}{CC_1A}$ را مانند حالت های قبل حول ضلع AC دوران بدهیم تا مثلث $\overset{\delta}{CC_2A}$ بدست آید. اضلاع C_2C و A_2C در دو نقطه دایره به مرکز B را قطع می کنند که ضلع B_1A از مثلث $\widehat{A_1B_1C_1}$ نیز از همین دو نقطه می گذرد. و ما با همان قاعده ای که راس A_1 را بدست آوریم دو راس دیگر مثلثی که هر زاویه آن سه برابر یکی از زاویه های $\widehat{BAE}$ و $\widehat{EAF}$ و $\widehat{FAC}$ است را بدست آورده ایم.

۳. نتیجه گیری

در این حالت هر یک از نقاط تلاقی تثلیث گرهای همجوار مثلث $\overset{\delta}{A_1B_1C_1}$ یکی از رئوس مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\delta}{ABC}$ راتشکیل داده اند. دو تثلیث گر همجوار A_1B و A_1C محل تلاقی آنها راس A و دو تثلیث گر همجوار B_1B و B_1A محل تلاقی آنها نقطه B و دو تثلیث گر



شکل ۵:

همجوار C_1C و C_1A محل تلاقی آنها نقطه C است که این سه نقطه رئوس مثلث متساوی الاضلاع اولیه ما هستند. و این همان اثبات قضیه مورلی به کمک دایره های متناظر و متقارن است. و چون زاویه های $\widehat{BAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAC} = ۶۰$ بطور دلخواه انتخاب کرده ایم یعنی با این روش قضیه مورلی را برای هر مثلث دیگر نیز می توانیم اثبات کنیم.

سپاسگذاری

۱- سپاسگذاری و تقدیر و تشکر می کنم از استاد بزرگوار جناب آقای پروفسور امیدعلی شهنی کرم زاده که متواضعانه کارهای تحقیقاتی اینجانب را مورد ملاحظه قرار داده و با راهنمایی های لازم موجبات تشویق و ترغیب این جانب برای ارسال مقاله به چهل و هشتمین و چهل و نهمین و پنجاهمین و پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران را فراهم آورده اند.

۲- سپاسگذاری و تقدیر و تشکر می کنم از استاد بزرگوار جناب آقای پروفسور مگردیچ تومانیان ریاست محترم بخش ریاضی فرهنگستان علوم ایران که کارهای تحقیقاتی این جانب را مورد ملاحظه قرار داده و از مساعدت و راهنمایی های لازم دریغ ننموده و موجبات تشویق و ترغیب این جانب برای ارسال مقاله به چهل و هشتمین و چهل و نهمین و پنجاهمین و پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران را فراهم نموده اند.

۳- سپاسگذاری و تقدیر و تشکر می کنم از استاد بزرگوار پروفسور سیدعلیرضا اشرفی بخاطر حمایت و تشویق اینجانب برای ارسال مقاله به پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران.

مراجع

[۱] محمدرضا درفشه، اثبات جدیدی از قضیه مورلی، انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷، صص ۴۳ تا ۵۲

[۲] احسان ممتحان، امیرعلی شهنی کرم زاده، همگانی سازی از نوع دوم، انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۶۳ پاییز و زمستان ۱۳۹۷ ، صص ۱ تا ۳۶

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، GT–171، صص. ۲۹۸–۳۰۹

ابرΛ–شبه عملگر کوانتومی دیراک روی ابرهذلولی گون اقلیدسی q–تغییر شکل یافته ی فازی $EAdS_{q\mu}^{(2|2)}$

محمد محمودی*،آ، مهدی لطفی زاده[آ]

[آ]گروه فیزیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
ابرهذلولی گون q–تغییر شکل یافته ی فازی
ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون q–تغییر شکل یافته ی فازی
ابرΛ–شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی q–تغییر شکل یافته

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

با استفاده از تعاریف ابر هذلولی گون q–تغییر شکل یافته ی فازی و به کمک ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون q–تغییر شکل یافته ی فازی، ابرΛ–شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی q–تغییر شکل یافته ی فازی روی ابرهذلولی گون اقلیدسی $EAdS_{q\mu}^{(2|2)}$ معرفی خواهد شد. در آنجا نشان داده شده است که در حالت حدی، یک حد صحیح جابجایی زمانی که پارامتر ناجابجایی l به سمت بی نهایت و q به سمت یک میل کند، وجود دارد.

۱. مقدمه

عملگرهای دیراک و کایرالیتی، دو عملگر خود الحاقی بسیار مهمی در رهیافت کن - لات[۱] برای هندسه ناجابجایی هستند. یک طیف سه تایی یکدار $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ شامل یک $*$ - جبر یکدار مختلط $\mathcal{A}$، $*$ - نمایش باوفا توسط عملگرهای کران دار روی یک فضای هیلبرت جداپذیر $\mathcal{H}$ و یک عملگر خودالحاق $D:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ (عملگر دیراک) با ویژگی های زیر است [۱و۲]:

- حلال $(D-\lambda)^{-1}$، $\lambda\notin\mathbb{R}$، عملگری فشرده روی $\mathcal{H}$ است.
- $\forall a\in\mathcal{A}$، جابجاگر $[D,\pi(a)]$ عملگری کران دار روی $\mathcal{H}$ است.

طیف سه گانه ی $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ زوج نامیده می شود اگر یک $\mathbb{Z}_2$- مدرج شده ای از $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد؛ یعنی یک عملگری $\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ با چنین ویژگی هایی که: $\gamma^*=\gamma$ و $\gamma^2=I$ به طوری که: $\gamma D+D\gamma=0$ و $\forall a\in\mathcal{A},\gamma a=a\gamma$؛ در غیراین صورت به این طیف سه گانه فرد گفته می شود. برای منیفلدهای با بعد فرد، عملگرهای کایرالیتی وجود ندارد و در این حالت عملگر دیراک فقط با ساختارهای دیفرانسیلی توصیف می شود. سه نوع از عملگرهای دیراک و کایرالیتی S^2 فازی وجود دارد که عبارتند از: عملگر دیراک گینسپارگ–ویلسون

*سخنران
پست الکترونیک: M.Mahmoodi@urmia.ac.ir (محمد محمودی)، M.Lotfizadeh@urmia.ac.ir (مهدی لطفی زاده)

[۱] $Connes-Lott$

D_{GW} [۳-۱۰]، عملگر دیراک واتامورا- واتامورا[۲] D_{WW} [۱۱-۱۳] و عملگر دیراک گروسه- کلمیک - پرس ناجر[۳] D_{GKP}[۱۴و۱۵]. این سه نوع از عملگرهای دیراک در [۱۶] با هم مقایسه شده اند. بعد از سال های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ میلادی، ایده ی هندسه ی q-تغییر شکل یافته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. از اولین کارها در این زمینه می توان به تاربندی هوپف q-تغییر شکل یافته در چارچوب توسیع هوپف-گالوا، عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته روی کره ی پودلز کوانتومی[۱۷] و عملگر دیراک q-تغییر شکل یافته ی واتامورا-واتامورا D^q_{WW}[۱۸] اشاره کرد؛ این در حالی است که، مطالعات و کوشش های کمی بر روی فضاهای با انحنای منفی انجام گرفته است. نشان داده شده است که به جای کار با عملگرهای خودالحاقی در منیفلدهای فشرده، با عملگرهای شبه خودالحاقی در منیفلدهای غیرفشرده سروکار خواهیم داشت که این تعمیم از چارچوب خودالحاقی به شبه خودالحاقی، به کمک عملگر متریک ناشی شده از یک ضرب داخلی انجام شده است[۱۹]. ابرهذلولی گون فازی $EAdS_F^{(2|2)}$ توسط نمایش های کاهش ناپذیر ابرجبرلی $osp_q(1|2)$ توصیف شدنی است. در سال های اخیر، به کمک رهیافت موجود در[۴]، نسخه ی شبه ی جبر گینسپارگ-ویلسون بر روی فضای فازی $AdS_F^{(2)}$ ساخته شده است[۳]. و اما آنچه که در این مقاله صورت گرفته است، در ابتدا به طور مختصر، عملگرهای دیراک و کایرالیتی به همراه جبر گینسپارگ-ویلسون معرفی شده است و سپس تعمیمی از این مباحث برای به دست آوردن ابرΛ-شبه جبر گینسپارگ - ویلسون فازی و سپس ابرΛ-شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی انجام گرفته است و در انتها، به کمک این مباحث و به همراه معرفی q-عدد[۲۰]، ابرΛ-شبه جبر گینسپارگ-ویلسون q-تغییر شکل یافته ی فازی ساخته و معرفی می شود و به کمک آن، ابرΛ-شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی q-تغییر شکل یافته ی فازی محاسبه خواهند شد.

۲. هذلولی گون جابجایی و فازی

به منظور بدست آوردن Λ-شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی روی هذلولی گون جابجایی، نیاز است تا Λ-شبه تصویرگرها و مدول های تصویری را بسازیم و در انتها به کمک آنها، عملگرهای مذکور بدست خواهند آمد.
در ابتدا مفهوم مدول های آزاد و تصویری معرفی می شود. برای این منظور، $Mat(N+1) = Mat(2L+1)$ را به عنوان یک فضای برداری، در نظر می گیریم که حامل نمایش های منظم راست و چپ جبر فازی(ناجابجایی) است. در نتیجه، به ازای هر $a, b \in Mat(2L+1)$ ، دو عملگر a^R و a^L که روی $Mat(2L+1)$ کنش می کند، وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a^R b = ba, \quad a^L b = ab \tag{1}$$

با $a^L b^L = (ab)^L$ و $a^R b^R = (ba)^R$.
یک مدول V برای یک جبری مثل $\mathcal{A}$، یک فضای برداری است که حامل نمایش آن جبر است؛ و یک دو مدول است هرگاه دو نوع کنش متفاوت از جبری مثل $\mathcal{A}$ داشته باشیم. در نتیجه در مثال فوق، $V = Mat(2L+1)$ یک دو مدول برای جبر $\mathcal{A}$ است که ترکیبات خطی از بردارها در V، ضرایشان را از $\mathcal{A}$ می گیرند. در حالت کلی، یک $\mathcal{A}$-مدول V آزاد گفته می شود هرگاه دارای پایه ی $\{e_i\}, e_i \in V$باشد. در این صورت، هر $x \in V$ را می توان به شکل منحصر به فرد $\sum a_i e_i$ نوشت. یک کلاس از دو مدول های آزاد $V = Mat(N+1)$ را می توان به صورت $V \otimes \mathbb{C}^K \equiv V^K$ ساخت که در آن اعضای V^K به صورت $v \doteq (v_1, \dots, v_K)$ می باشند $v_i \in V$.
یک Λ-شبه تصویرگر P روی $\mathcal{A}$-مدول V^K، یک ماتریس $K \times K$ به صورت $P = (P_{ij})$ است با درایه های $P_{ij} \in \mathcal{A}$؛ که در شروط زیر صدق می کند:

$$P^\dagger = \Lambda P \Lambda^{-1}, \quad P^2 = P \tag{2}$$

که در آن Λ، یک ماتریس هرمیتی است. در نتیجه هر بردار در PV^K را می توان به صورت ترکیب خطی از Pe_i با ضرایبی از جبر $\mathcal{A}$ نوشت. بدین ترتیب، PV^K یک مثال از مدول تصویری است. در نتیجه بدیهی است که بنویسیم:

$$V^K = PV^K \oplus (1-P)V^K \tag{3}$$

یک مدول را که چه تصویری باشد و چه هر چیز دیگری، بدیهی گویند هرگاه یک مدول آزاد باشد.
ایده ی مذکور در بالا، برای هر جبری مثل $\mathcal{A}$ و یک $\mathcal{A}$-مدول V، معتبر است. می توان نشان داد که اعضای $\mathcal{A}$-مدول، مقاطع کلاف های روی M هستند که در اینجا ما آن را به صورت $M = AdS^2 = SU(1,1)/U(1)$ بر می داریم. گروه $SU(1,1)$ یک گروه غیرفشرده است و به طور توپولوژیکی با منیفلد غیرفشرده ی غیرهمبند ساده ی $D \times S^1$ معادل و با گروه های زیر یکریخت است:

$$SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R}) \simeq Sp(2,\mathbb{R}), \quad SU(1,1)/Z_2 \simeq SO(2,1) \tag{4}$$

---
[۲] $Watamura - Watamura$
[۳] $Grosse - Klimcik - Presnajder$

در نتیجه به دلیل غیرفشرده بودن گروه $SU(1,1)$، دارای نمایش یکانی متناهی بعد نخواهد بود؛ از طرفی، نمایش های غیریکانی متناهی بعد آن، Λـشبه هرمیتی خواهد بود. برای هر نمایش کاهش ناپذیر یکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم ساده ی فشرده ی $SU(2)$، ناگزیر می توان نمایش را به طور تحلیلی به یک نمایش غیریکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم ساده ی غیرفشرده $SU(1,1)$ ادامه داد. هر دو گروه $SU(2)$ و $SU(1,1)$ به طور مشترک دارای زیر گروه ماکسیمال فشرده ی $U(1)$ و یک گروه لی مختلط سازی شده ی $SL(2,\mathbb{C})$ هستند. نمایش کاهش ناپذیر با کمترین بعد جبرلی $su(2)$ را که توسط ماتریس های پاولی σ_1, σ_2 و σ_3 نمایش داده می شود، در نظر می گیریم؛ لذا می توان یک نمایش غیریکانی دو بعدی از جبرلی $su(1,1)$ را به صورت زیر از روی آنها ساخت:

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad \Sigma_2 = \frac{i}{2}\sigma_2, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \tag{۵}$$

ماتریس های Σ_i، Λـشبه هرمیتی هستند به طوری که:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = iC_{ij}^k \Sigma_k, \quad \Sigma_i^\dagger = \Lambda \Sigma_i \Lambda^{-1} \tag{۶}$$

که در آن C_{ij}^k ثابت های ساختار جبرلی $su(1,1)$ نام دارد. در این حالت، مقاطع یک کلاف تاری پیچانده شده روی AdS^2، همچو $U(1)$ـکلاف، (اعضای) مدول های تصویری غیربدیهی هستند؛ که طبق قضیه ی سر ـسوآن، می توان آنها را با مدول های تصویری جایگزین کرد. مدول آزاد $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^2$ را در نظر می گیریم. اگر $\hat{x}$ تابع مختصاتی باشد، به این صورت که $a \in \mathcal{A}, (\hat{x}_i a)(x) = x_i a(x)$؛ می توان تصویرگر زیر را برای این مدول آزاد در نظر گرفت:

$$P_\pm = \frac{1 \pm 2\vec{\Sigma} \cdot \hat{x}}{2} \tag{۷}$$

مختصات x_i نیز، معرف نقاط هذلولی گون AdS^2 با انحنای منفی که در فضای تخت مینکوفسکی با متریک $\eta^{ij} = diag(1,1,-1)$ نشانده شده است، می باشند:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = x_i \eta^{ij} x_j = -1 \tag{۸}$$

بدین ترتیب، $P_\pm \mathcal{A}^2$ یک مدول تصویری برای سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ خواهد بود. γ را به عنوان Λـشبه عملگر کایرالیتی در نظر می گیریم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma_\pm = 2P_\pm - 1 = \pm 2\vec{\Sigma} \cdot \hat{x}, \quad \gamma_\pm^\dagger = \Sigma_3 \gamma_\pm \Sigma_3^{-1} \tag{۹}$$

از روی روابط (۵) بدیهی است که $\Lambda = \Sigma_3$؛ همچنین $\gamma^2 = I$. D را نیز که Λـشبه عملگر دیراک نام دارد، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D = (\Sigma_i - \gamma \Sigma_i \gamma) \eta^{ij} (\mathcal{L}_j + \Sigma_j) \tag{۱۰}$$

که در آن $\mathcal{L}_i = L_i^L - L_i^R$ کنش الحاقی نام دارد. از طرفی به کمک روابط (۵) به سادگی می توان نشان داد که:

$$\Sigma_i \Sigma_j = -\frac{1}{4}\eta_{ij} I + \frac{1}{2} iC_{ij}^k \Sigma_k \tag{۱۱}$$

به کمک رابطه ی (۱۱) و کمی محاسبات می توان نشان داد که شکل صریح D به صورت زیر است:

$$D_\pm = \pm(2\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathcal{L}} - 1), \quad D_\pm^\dagger = \Sigma_3 D_\pm \Sigma_3^{-1} \tag{۱۲}$$

می توان مشاهده کرد که Λـشبه عملگر دیراک ساخته شده با Λـشبه عملگر کایرالیتی (۹)، پادجابه جا می شوند؛ یعنی: $\gamma D + D\gamma = 0$. برای بدست آوردن Λـشبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی روی هذلولی گون فازی، ابتدا نیاز است تا فضای هذلولی گون را فازی کرد. برای این منظور ابتدا سراغ ساختن نسخه ی فازی مدول تصویری ساخته شده در بالا می رویم. مدول تصویری فازی را می توان با ناجابجایی ساختن جبر توابع حاکم بر آن، بدست آورد. برای این منظور، کافی است متغییرهای جابجایی فضا x_i را با عملگرهای متناظر جایگزین کنیم؛ در این حالت، به جبر $su(1,1)$ خواهیم رسید:

$$[J_i, J_j] = iC_{ij}^k J_k \tag{۱۳}$$

روی $\mathbb{C}^۲$، نمایش اسپین $\frac{۱}{۲}$ از $SU(۱,۱)$ با مولدهای Σ_i کنش می کند و روی $AdS_F^۲$، نمایش اسپین l از $SU(۱,۱)$ با مولدهای ${L_i}^L$ از چپ و یا ${L_i}^R$ از راست کنش خواهد کرد. در این حالت، در فضای Λ–شبه مدول تصویری فازی $P^{F,L}_{(l\pm\frac{۱}{۲})}(AdS_F^۲\otimes\mathbb{C}^۲)$ و یا $P^{F,R}_{(l\pm\frac{۱}{۲})}(AdS_F^۲\otimes\mathbb{C}^۲)$، جفت شدگی اسپین های ذاتی و مداری را خواهیم داشت که در Λ–شبه تصویرگرهای فازی $P^{F,L}_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ و یا $P^{F,R}_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ خود را نشان می دهد[۳]:

$$P^{L,F}_{(l-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L+l-۱}{۲l-۱},\quad P^{L,F}_{(l+\frac{۱}{۲})}=-\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L-l}{۲l-۱} \tag{۱۴}$$

Λ–شبه تصویرگرهای راست را نیز می توان با اعمال $\vec{L}^L\to-\vec{L}^R$ بدست آورد:

$$P^{R,F}_{(l-\frac{۱}{۲})}=\frac{-۲\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R+l-۱}{۲l-۱},\quad P^{R,F}_{(l+\frac{۱}{۲})}=\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R+l}{۲l-۱} \tag{۱۵}$$

بدیهی است که تحت اصل تطابق، Λ–شبه تصویرگرهای فازی (۱۴) و (۱۵)، به Λ–شبه تصویرگرهای (۷) تبدیل خواهند شد. برای این منظور، حد کلاسیکی معادل است با $l\longrightarrow\infty$؛ که تحت آن:

$$x_i=\lim_{l\to\infty}\frac{L_i^L,L_i^R}{l} \tag{۱۶}$$

در ادامه جهت تعریف Λ–شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی، نیاز به معرفی Λ–شبه جبر گیسنپارگ–ویلسون است. Λ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون فازی $\mathcal{A}$ یک $\dagger$–جبر روی C_L است که توسط دو Λ–شبه $\dagger$–ناوردای این ولوشن[۴] Γ و Γ' بدست می آیند:

$$\mathcal{A}=\langle\Gamma,\Gamma':\quad(\Gamma)^۲=(\Gamma')^۲=۱,\quad(\Gamma)^\dagger=\Lambda\Gamma\Lambda^{-۱},\quad(\Gamma')^\dagger=\Lambda\Gamma'\Lambda^{-۱}\rangle \tag{۱۷}$$

هر نمایشی از (۱۷) یک Λ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون فازی را محقق می سازد؛ بدیهی است که هرگاه مولدهای Γ و Γ' جابه جا شوند، Λ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون جابجایی را خواهیم داشت. دو عضو زیر را که توسط مولدهای Γ و Γ'، Λ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون فازی $\mathcal{A}$ ساخته می شوند، در نظر می گیریم:

$$\Gamma_۱=\frac{۱}{۲}(\Gamma+\Gamma'),\quad(\Gamma_۱)^\dagger=\Lambda\Gamma_۱\Lambda^{-۱},\quad\Gamma_۲=\frac{۱}{۲}(\Gamma-\Gamma'),\quad(\Gamma_۲)^\dagger=\Lambda\Gamma_۲\Lambda^{-۱},\quad\{\Gamma_۱,\Gamma_۲\}=۰ \tag{۱۸}$$

خودتوان های $\Gamma^L_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ و $\Gamma^R_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Gamma^L_{(l-\frac{۱}{۲})}=۲P^L_{(l-\frac{۱}{۲})}-۱=\frac{۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L-۱}{۲l-۱},\qquad\Gamma^R_{(l-\frac{۱}{۲})}=۲P^R_{(l-\frac{۱}{۲})}-۱=\frac{-۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R-۱}{۲l-۱}$$

$$\Gamma^L_{(l+\frac{۱}{۲})}=۲P^L_{(l+\frac{۱}{۲})}-۱=\frac{-۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L+۱}{۲l-۱},\qquad\Gamma^R_{(l+\frac{۱}{۲})}=۲P^R_{(l+\frac{۱}{۲})}-۱=\frac{۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R+۱}{۲l-۱} \tag{۱۹}$$

با برابر گرفتن $\Gamma^L_{(l\mp\frac{۱}{۲})}$ و $\Gamma^R_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ با Γ و Γ' خواهیم داشت:

$$\Gamma^\pm_۱=\pm\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot(\vec{L^L}+\vec{L^R})}{۲l-۱},\qquad\Gamma^\pm_۲=\pm\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot\vec{\mathcal{L}}-۱}{۲l-۱} \tag{۲۰}$$

در این صورت Λ–شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی به صورت زیر خواهند شد:

$$\gamma_\pm{}^F=\Gamma^\pm_۱=\pm\frac{۲\vec{\Sigma}\cdot(\vec{L^L}+\vec{L^R})}{۲l-۱},\qquad\gamma^{F\dagger}_\pm=\Sigma_۳\gamma^F_\pm\Sigma_۳^{-۱}$$

$$D_\pm{}^F=۲l\Gamma^\pm_۲=\pm l\frac{۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{\mathcal{L}}-۲}{۲l-۱},\qquad D^{F\dagger}_\pm=\Sigma_۳D^F_\pm\Sigma_۳^{-۱} \tag{۲۱}$$

اصل تطابق نیز به صورت زیر برقرار است:

$$\lim_{l\to\infty}\gamma^F_\pm=\gamma_\pm,\qquad\lim_{l\to\infty}D^F_\pm=D_\pm \tag{۲۲}$$

در ادامه، برای تعمیم این موارد به نسخه ی ابر، کاری مشابه انجام خواهیم داد.

---

[۴] *Involution*

۳. ابرهذلولی گون جابجایی و فازی

به منظور معرفی ابرΛ–شبه مدول های تصویری روی ابرهذلولی گون فازی $AdS_F^{(2|2)}$، نیاز است تا در ابتدا این ابرفضا را معرفی کنیم. ابرفضای $R^{(3|2)}$ به عنوان جبر چندجمله ای هایی با مولدهای x_i و θ_α به همراه معادله ی توصیف کننده ی مدار الحاقی $EAdS^{(2|2)}$ از $OSp(1|2)$ که در شرایط زیر صدق می کنند، تعریف می شود:

$$x_i^\ddagger = x_i, \quad \theta_\alpha^\ddagger = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\beta, \quad EAdS^{(2|2)} = \langle (x_i, \theta_\alpha) \in R^{(3|2)} \quad | \quad \eta^{ij}x_i x_j - \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = -1 \rangle \tag{۲۳}$$

که ‡، نشان دهنده ی ابرالحاقی است؛ و

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^t = \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۲۴}$$

و $\theta = (\theta^+, \theta^-)^t$ نمایش اسپینور ماژورانا[۵] $SO(2,1)$ است. فرض می کنیم $X_i = \mu L_i$ و $\Theta_\alpha = \mu L_\alpha$ که μ توسط رابطه ی زیر تعیین می شود:

$$\frac{1}{\mu^2} = C_{osp(1|2)} = -l(l - \tfrac{1}{2}), \quad X_i = \frac{L_i}{\sqrt{-l(l-\frac{1}{2})}}, \quad \Theta_\alpha = \frac{L_\alpha}{\sqrt{-l(l-\frac{1}{2})}} \tag{۲۵}$$

که در جبر $osp(1|2)$ به صورت زیر صدق می کنند:

$$[X_i, X_j] = \frac{i\varepsilon_{ij}^k}{\sqrt{-l(l-\frac{1}{2})}}X_k, \quad [X_i, \Theta_\alpha] = \frac{(\kappa_i)_\alpha^\beta}{2\sqrt{-l(l-\frac{1}{2})}}\Theta_\beta, \quad \{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\} = \frac{(\varepsilon^t\kappa^i)_{\alpha\beta}}{2\sqrt{-l(l-\frac{1}{2})}}L_i \tag{۲۶}$$

همچنین این مختصات در رابطه ی زیر که معادله ی ابرهذلولی گون فازی $AdS_F^{(2|2)}$ را مشخص می کند، صدق می کنند:

$$\eta^{ij}X_iX_j - \varepsilon^{\alpha\beta}\Theta_\alpha\Theta_\beta = -1 \tag{۲۷}$$

طبیعتا مختصات (x_i, θ_α) که برای ابرهذلولی گون جابجایی $AdS^{(2|2)}$ بودند، در حالت حدی از مختصات ناجابجایی مذکور به صورت زیر، قابل بدست آمدن هستند:

$$x_i = \lim_{l\to\infty}\frac{L_i^{L,R}}{l}, \quad \theta_\alpha = \lim_{l\to\infty}\frac{L_\alpha^{L,R}}{l} \tag{۲۸}$$

در ابرتاربندی غیرفشرده هوپف $AdS^{(3|2)} \xrightarrow{U(1)} EAdS^{(2|2)}$، مقاطع به صورت $\Gamma^\infty(EAdS^{(2|2)}, E^{(n)})$ با $G(EAdS^{(2|2)})$–مدول است که در آن $G(EAdS^{(2|2)})$، جبر جابجایی ابرتوابع روی ابرهذلولی گون $EAdS^{(2|2)}$ می باشد. در مدل فازی، این جبر، جبری ناجابجایی است؛ در نتیجه، مدول های راست و چپ، با هم یکریخت نخواهند بود. در این حالت برای هر عملگر تکانه ی زاویه ای $\mathbf{L} = (L_i, L_\alpha)$ دو عملگر خطی $\mathbf{L}^L$ و $\mathbf{L}^R$ که در واقع نقش کنش های راست و چپ روی ابرجبر ماتریسی شبه–الحاقی فازی $\{\mathcal{A}_l = \{\psi \in M_{4l+1}(C_L)\}$ را دارند، وابسته می کنیم:

$$L_i^L\psi = L_i\psi, \quad L_i^R\psi = \psi L_i, \quad L_\alpha^L\psi = L_\alpha\psi, \quad L_\alpha^R\psi = \psi L_\alpha, \quad \forall\psi \in \mathcal{A}_l \tag{۲۹}$$

که کنش راست در جبر $osp(1|2)$ با علامت منفی $(-L_i^R, -L_\alpha^R)$ صدق می کند. این عملگرهای راست و چپ با هم طبق روابط جابجاگری زیر، جابجا می شوند:

$$[L_i^L, L_j^R] = 0, \quad [L_\alpha^L, L_\beta^R] = 0 \tag{۳۰}$$

---

[۵] Majorana Spinor

$\mathbf{L}^L$ و $\mathbf{L}^R$ هر دو دارای جبر یکسان $osp(1|2)$ و طبیعتا یک نوع عملگر کازیمیر $C_{osp(1|2)}$ هستند:

$$C_{osp(1|2)} \equiv \mathbf{L}^L \cdot \mathbf{L}^L = \mathbf{L}^R \cdot \mathbf{L}^R = -l(l-\frac{1}{2})1 \tag{۳۱}$$

$\mathcal{L}$ را به صورت کنش الحاقی L_i و L_α روی $\mathcal{A}_l$ تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}_i\psi = (L_i^L - L_i^R)\psi = ad_{L_i}\psi = [L_i,\psi], \qquad \mathcal{L}_\alpha\psi = (L_\alpha^L - L_\alpha^R)\psi = ad_{L_\alpha}\psi = [L_\alpha,\psi] \tag{۳۲}$$

فرض می کنیم $\text{؟}_3, \text{؟}_2, \text{؟}_1$ مولدهای جبرلی $su(1,1)$ هستند:

$$\kappa_1 = i\sigma_1, \quad \kappa_2 = i\sigma_2, \quad \kappa_3 = \sigma_3 \tag{۳۳}$$

بدین ترتیب، می توان نسخه ی ابر این ماتریس ها را به عنوان نمایش اساسی ابراسپین $\frac{1}{2}$ جبر $osp(1|2)$ تعریف کرد:

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\kappa_i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \tau_\alpha\\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & 0\end{pmatrix} \tag{۳۴}$$

با $\varepsilon = i\sigma_2, \tau_1 = (1,0)^t$ و $\tau_2 = (0,1)^t$. جبر $osp(1|2)$ شامل جبر $su(1,1)$ به عنوان زیر جبر ماکسیمال بوزونی و متشکل از پنج مولد، که سه تای آنها $L_i(i=1,2,3)$ برای بوزون ها و دوتای دیگه $L_\alpha(\alpha=+,-)$ برای فرمیون ها است، می باشد. این مولدها رابطه های جابجاگری زیر را با هم دارند:

$$[L_i,L_j] = iC_{ij}^k L_k, \quad [L_i,L_\alpha] = \frac{1}{2}(\kappa_i)_\alpha^\beta L_\beta, \quad \{L_\alpha,L_\beta\} = \frac{1}{2}(\varepsilon^t\kappa_i)_{\alpha\beta}L_i \tag{۳۵}$$

قسمت زوج این جبر $su(1,1)$ است که توسط مولدهای L_i و قسمت فرد آن نیز توسط مولدهای L_α که در واقع اسپینورهای $su(1,1)$ هستند، تولید
می شود. نمایش های کاهش ناپذیر جبر $osp(1|2)$ توسط عملگر کازیمیر زیر توصیف می شود:

$$C_{osp(1|2)} = \eta^{ij}L_iL_j - \epsilon^{\alpha\beta}L_\alpha L_\beta, \tag{۳۶}$$

این عملگر دارای ویژه مقدار $-l(l-\frac{1}{2})$ است که l معرف ابراسپین با $l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. L_i و L_α ابرΛ–شبه الحاقی هستند، بدان معنا که:

$$L_i^\ddagger = L_i^\dagger = \Lambda L_i\Lambda^{-1}, \quad L_\alpha^\ddagger = \Lambda L_\alpha\Lambda^{-1} \tag{۳۷}$$

حال، ساختار ابرکلاف تاری غیرفشرده ی زیر با ابرفضای کل $AdS_F^{(3|2)}$ را که در آن $EAdS_F^{(2|2)}$ ابرهذلولی گون اقلیدسی فازی با بعد $(2|2)$ به عنوان ابرمنیفلد پایه، که به نوعی ابرمنیفلد دی ویت[۶] با بادی[۷] $EAdS_F^2$ است، را در نظر می گیریم:

$$U(1) \xrightarrow{rightU(1)-action} AdS_F^{(3|2)} \xrightarrow{\pi} EAdS_F^{(2|2)} \tag{۳۸}$$

ابرگروه تقارنی ابرفضای کل $AdS_F^{(3|2)}$، $OSp(1|2)$ با بعد $(1|2)$ و ساختار ابرگروهی $U(1)$ می باشد. فرض می کنیم $B_{C_L} = G^\infty(AdS_F^{(3|2)}, C_L)$ و $A_{C_L} = G^\infty(EAdS_F^{(2|2)}, C_L)$ به ترتیب نشان دهنده ی جبرهای مدرج C_L–مقداره ی توابع روی ابرمنیفلد $AdS_F^{(3|2)}$ و ابرمنیفلد پایه ی $EAdS_F^{(2|2)}$ که تحت ضرب نقطه به نقطه هموار هستند، باشد. در اینجا، C_L نشان دهنده ی جبر گراسمن[۸] مختلط با L مولد است. مشابه با گروه $U(1)$، نمایش های کاهش ناپذیر ابرگروه $U(1)$ با عدد صحیح n برچسب می خورند. اعضای B_{C_L} را می توان به صورت مدول های راست کلاسه بندی کرد؛ یعنی: $(\forall p \in AdS_F^{(3|2)}, \forall\omega \in U(1))$

$$C^\infty_{(\pm n)}(AdS_F^{(3|2)}, C_L) = \{\varphi_{(\pm n)} : AdS_F^{(3|2)} \to C_L, \quad \varphi_{(\pm n)}(p\cdot\omega) = \omega^{(\pm n)}\cdot\varphi(p)\}$$ (۳۹)

---

[۶] DeWitt
[۷] Body
[۸] Grassmann

کنش های چپ ابرگروه $U(۱)$ روی C_L با n برچسب می خورند؛ که در واقع این کنش ها توصیف کننده ی یک کلاف هستند. طبق قضیه ی سر–سوآن، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با این کلاف ها، ابرΛ–شبه تصویرگرهای P_n وجود دارد؛ به طوری که برای ابرکلاف برداری وابسته شان خواهیم داشت:

$$E^{(n)} = AdS_F^{(۳|۲)} \times_{U(۱)} C_L \xrightarrow{\pi} EAdS_F^{(۲|۲)} \tag{۴۰}$$

A_{C_L}–مدول راست مقاطع $\Gamma^\infty(EAdS_F^{(۲|۲)}, E^{(n)})$ که یکریخت با $G_{(n)}^\infty(AdS_F^{(۳|۲)}, C_L)$ می باشد؛ خود هم ارز است با تصویر در مدول آزاد $(A_{C_L})^{(۴n+۱)} = G^\infty(EAdS_F^{(۲|۲)}, C_L) \otimes C_L^{۴n+۱}$. ابر$\Lambda$–شبه تصویرگر P_n یک ابرعملگر شبه الحاقی با ابررتبه ی ۱ روی C_L است:

$$P_n \in M_{۴n+۱}(A_{C_L}), \quad P_n^۲ = P_n, \quad P_n^\ddagger = \Lambda P_n \Lambda^{-۱}, \quad StrP_n = ۱ \tag{۴۱}$$

که در آن Str، ابرد و ۱، ابرتابع ثابت است. برای $A_{\mathbb{C}}$–مدول راست از مقاطع $\Gamma^\infty(EAdS_F^{(۲|۲)}, E^{(n)})$، $n+۱$ ابرتصویرگر $P_۱, P_۲, \ldots, P_{n+۱}$ با رتبه ی یکسان ۱ وجود دارد. بنابراین مدول آزاد $(A_{C_L})^{۴n+۱}$ را می توان به صورت زیر، از جمع مستقیم تصویرگرهای A_{C_L}–مدول نوشت:

$$(A_{C_L})^{۴n+۱} = \bigoplus_{i=۱}^{۴n+۱} P_i (A_{C_L})^{۴n+۱} \tag{۴۲}$$

می توان نشان داد که در آن ابرتصویرگرها به صورت زیر می باشند:

$$P^R_{(l\pm\frac{۱}{۲})} = \frac{۱}{۲}[۱ \pm \frac{۲\boxed{۹}\cdot \mathbf{L}^R + ۱}{\sqrt{۴l(\frac{۱}{۲}-l)-۱}}], \qquad P^L_{(l\pm\frac{۱}{۲})} = \frac{۱}{۲}[۱ \mp \frac{۲\boxed{۹}\cdot \mathbf{L}^L - ۱}{\sqrt{۴l(\frac{۱}{۲}-l)-۱}}], \quad \boxed{۹}\cdot\mathbf{X} = \eta^{ij}\Sigma_i X_j - \varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha \Theta_\beta \tag{۴۳}$$

در ادامه جهت تعریف ابرΛ–شبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی، نیاز به معرفی ابرΛ–شبه جبر گیسنپارگ–ویلسون است. ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون فازی $\mathcal{A}$ یک ابر‡–جبر روی C_L است که توسط دو ابرΛ–شبه ‡–ناوردای این ولوشن[۹] Γ و Γ' بدست می آیند:

$$\mathcal{A} = \langle \Gamma, \Gamma' : \quad (\Gamma)^۲ = (\Gamma')^۲ = ۱, \quad (\Gamma)^\ddagger = \Lambda\Gamma\Lambda^{-۱}, \quad (\Gamma')^\ddagger = \Lambda\Gamma'\Lambda^{-۱} \rangle \tag{۴۴}$$

هر نمایشی از (۴۴) یک ابرΛ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون فازی را محقق می سازد؛ بدیهی است که هرگاه مولدهای Γ و Γ' جابه جا شوند، ابرΛ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون جابجایی را خواهیم داشت. دو عضو زیر را که توسط مولدهای Γ و Γ'، ابرΛ–شبه جبرگینسپارگ–ویلسون فازی $\mathcal{A}$ ساخته می شوند، در نظر می گیریم:

$$\Gamma_۱ = \frac{۱}{۲}(\Gamma + \Gamma'), \quad (\Gamma_۱)^\ddagger = \Lambda\Gamma_۱\Lambda^{-۱}, \quad \Gamma_۲ = \frac{۱}{۲}(\Gamma - \Gamma'), \quad (\Gamma_۲)^\ddagger = \Lambda\Gamma_۲\Lambda^{-۱}, \quad \{\Gamma_۱, \Gamma_۲\} = ۰ \tag{۴۵}$$

ابرخودتوان های $\Gamma^L_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ و $\Gamma^R_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Gamma^L_{(l-\frac{۱}{۲})} = ۲P^L_{(l-\frac{۱}{۲})} - ۱ = \frac{۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L - ۱}{۲l-۱}, \qquad \Gamma^R_{(l-\frac{۱}{۲})} = ۲P^R_{(l-\frac{۱}{۲})} - ۱ = \frac{-۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R - ۱}{۲l-۱}$$

$$\Gamma^L_{(l+\frac{۱}{۲})} = ۲P^L_{(l+\frac{۱}{۲})} - ۱ = \frac{-۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^L + ۱}{۲l-۱}, \qquad \Gamma^R_{(l+\frac{۱}{۲})} = ۲P^R_{(l+\frac{۱}{۲})} - ۱ = \frac{۴\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}^R + ۱}{۲l-۱} \tag{۴۶}$$

با برابر گرفتن $\Gamma^L_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ و $\Gamma^R_{(l\pm\frac{۱}{۲})}$ با Γ و Γ' خواهیم داشت:

$$\Gamma^\pm_۱ = \frac{\mp\boxed{۹}\cdot\mathcal{L}^F \pm ۱}{\sqrt{۴l(\frac{۱}{۲}-l)-۱}}, \qquad \Gamma^\pm_۲ = \mp\frac{\boxed{۹}\cdot(\mathbf{L}^L + \mathbf{L}^R)}{\sqrt{۴l(\frac{۱}{۲}-l)-۱}} \tag{۴۷}$$

[۹] $Involution$

حال می توان ابرΛـشبه عملگر دیراک فازی روی ابرهذلولی گون فازی $EAdS_F^{(2|2)}$ را به صورت زیر تعریف کرد[۲۱]:

$$D_F^{\pm}=\sqrt{4l(\frac{1}{2}-l)-1}\Gamma_1^{\pm}=(\mp 2\cdot\mathcal{L}^F\pm 1)=\mp(\eta^{ij}\Sigma_i\mathcal{L}_j^F-\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\mathcal{L}_\beta^F)\pm 1 \tag{۴۸}$$

در حالت حدی (۴۸) به ابرΛـشبه عملگر دیراک روی ابرهذلولی گون جابجایی $EAdS^{(2|2)}$ تبدیل می شود:

$$\lim_{l\to\infty}D_F^{\pm}=\mp 2\cdot\mathcal{L}\pm 1=\mp(\eta^{ij}\Sigma_i\mathcal{L}_j-\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\mathcal{L}_\beta)\pm 1 \tag{۴۹}$$

که در آن $\mathcal{L}_i$ و $\mathcal{L}_\alpha$ ابرعملگرهای تکانه ی زاویه ای روی ابرهذلولی گون $EAdS^{(2|2)}$ هستند:

$$\mathcal{L}^i=-iC^{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{1}{2}(\kappa^i)_\beta^\alpha\theta^\beta\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha},\quad \mathcal{L}^\alpha=\frac{1}{2}(\varepsilon^t\kappa^i)^{\alpha\beta}x_i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}-\frac{1}{2}(\kappa^i)_\beta^\alpha\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۵۰}$$

به وضوح می توان دید که ابرعملگر دیراک فازی (۴۸)، ابرΛـشبه الحاقی است:

$$(D_F^{\pm})^{\ddagger}=\Lambda D_F^{\pm}\Lambda^{-1} \tag{۵۱}$$

همچنین می توان ابرΛـشبه عملگر کایرالیتی روی $EAdS_F^{(2|2)}$ را به صورت $\gamma_F^{\pm}=\Gamma_2^{\pm}$ تعریف کرد که در حالت حدی می شود:

$$\lim_{l\to\infty}\gamma_F^{\pm}=\mp\Sigma\cdot x=\mp(\eta^{ij}\Sigma_i x_j-\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\theta_\beta) \tag{۵۲}$$

و به راحتی می توان دید که:

$$\lim_{l\to\infty}\{D_F^{\pm},\gamma_F^{\pm}\}=0 \tag{۵۳}$$

نتیجه ی فوق همان چیزی است که از ابرΛـشبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی روی ابرهذلولی گون جابجایی $EAdS^{(2|2)}$ انتظار داشتیم. در (۴۹) و (۵۲) با اعمال $\theta^\beta=0$ می توان نتایج [۳] رابرای $EAdS^2$ فازی بدست آورد.

۴. ابرهذلولی گون qـتغییر شکل یافته ی فازی

به منظور تعریف ابرهذلولی گون کوانتومی فازی، نیاز است تا در ابتدا qـعدد برای n را تعریف کنیم[۲۰]:

$$[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}} \tag{۵۴}$$

برای ابرهذلولی گون کوانتومی فازی $EAdS_{q\mu}^{(2|2)}$، مولدهای جبر مختصاتی $A(EAdS_{q\mu}^{(2|2)})$ آن را با $X_+,X_-,X_0,\Theta_+,\Theta_-$ نشان خواهیم داد که به صورت زیر تعریف می شوند و در روابط جابجایی داده شده صدق می کنند:

$$X_i=\frac{[2]_qL_i}{\sqrt{[-2l]_q[2l-1]_q}},\qquad \Theta_\alpha=\frac{[2]_qL_\alpha}{\sqrt{[-2l]_q[2l-1]_q}}$$

$$\mathbf{X}_+\mathbf{X}_--\mathbf{X}_-\mathbf{X}_+=\mu\mathbf{X}_0-(q-q^{-1})X_0^2,\qquad [\mathbf{X}_0,\mathbf{X}_\pm]_q=\pm\mu\mathbf{X}_\pm \tag{۵۵}$$

همچنین ابرهذلولی گون کوانتومی فازی نیز با رابطه ی زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}=\sum_{0,\pm}(-1)^{1-m}q^mX_{-m}X^m-\varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta=-X_0^2+qX_-X^++q^{-1}X_+X^--\varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta=-1 \tag{۵۶}$$

$OSp_q(۲|۱)$ تقارن این ابرهذلولی گون کوانتومی $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$ است که ابرجبر آن $U_q(osp(۲|۱)) = osp_q(۲|۱)$ یک جبر $Z_۲$–مدرج یکدار و شرکت پذیر است که توسط عضو زوج $L_۰$ و عضوهای فرد $L_\pm$ ایجاد می شود:

$$[L_۰, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [۲L_۰]_{q^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۵۷}$$

$osp_q(۲|۱)$ را می توان با اضافه کردن این ولوشن مدرج E به مجموعه ی مولدها مشخص کرد؛ در نتیجه ابرجبر کوانتومی $osp_q(۲|۱)$ در روابط زیر صدق خواهند کرد:

$$[L_۰, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad \{L_+, L_-\} = [۲L_۰]_{q^{\frac{۱}{۲}}}, \quad \{E, L_\pm\} = ۰, \quad [E, L_۰] = ۰, \quad E^۲ = ۱ \tag{۵۸}$$

که این روابط با معرفی مولدهای جدید $K = q^{L_۰}$ و $K^{-۱} = q^{-L_۰}$، تبدیل به روابط زیر می شوند:

$$KL_+K^{-۱} = qL_+, \quad KL_-K^{-۱} = q^{-۱}L_-, \quad KK^{-۱} = ۱, \quad E^۲ = ۱,$$

$$[K, E] = ۰, \quad [K^{-۱}, E] = ۰, \quad \{L_\pm, E\} = ۰, \quad \{L_+, L_-\} = \frac{K - K^{-۱}}{q^{\frac{۱}{۲}} - q^{\frac{-۱}{۲}}} \tag{۵۹}$$

عملگر کازیمیر $C_{osp_q(۲|۱)}$ که با همه ی مولدهای رابطه ی (۵۸) جابجا می شود و دارای ویژه مقدار $\frac{[-۲l]_q[۲l-۱]_q}{[۲]_q^۲}$ است که در حد $q \to ۱$ به ویژه مقدار غیر تغییر شکل یافته ی خود، یعنی، $-l(l-\frac{۱}{۲})$ تقلیل می یابد، دارای شکل زیر است:

$$C_{osp_q(۲|۱)} = (L_+L_- - [L_۰ - \frac{۱}{۲}]_q)E \tag{۶۰}$$

با معرفی نگاشت های هم ضرب $\Delta : osp_q(۲|۱) \to osp_q(۲|۱) \otimes osp_q(۲|۱)$ و هم یکه ی $\epsilon : osp_q(۲|۱) \to C$ و هم وارون $\sigma : osp_q(۲|۱) \to osp_q(۲|۱)$، ساختار جبر هوپف $osp_q(۲|۱)$ توسط روابط زیر داده می شود:

$$\Delta(L_+) = L_+ \otimes KE + ۱ \otimes L_+, \quad \Delta(L_-) = L_- \otimes E + K^{-۱} \otimes L_-,$$

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes E, \quad \epsilon(E) = ۱, \quad \epsilon(K) = ۱, \quad \epsilon(L_\pm) = ۰,$$

$$\sigma(E) = E, \quad \sigma(K) = K^{-۱}, \quad \sigma(L_+) = -L_+K^{-۱}E, \quad \sigma(L_-) = -KL_-E \tag{۶۱}$$

در $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$، دو پارامتر حقیقی متفاوت q و μ داریم. در نتیجه حالت های حدی متفاوت زیر را خواهیم داشت:

- اولین حد ($q \longrightarrow ۱$ سپس $\mu \longrightarrow ۰$): $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow EAdS_{\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow EAdS^{(۲|۲)}$
- دومین حد ($\mu \longrightarrow ۰$ سپس $q \longrightarrow ۱$): $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow EAdS_{q}^{(۲|۲)} \longrightarrow EAdS^{(۲|۲)}$
- سومین حد (به طور همزمان $\mu \longrightarrow ۰$ و $q \longrightarrow ۱$): $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)} \longrightarrow EAdS^{(۲|۲)}$

که در آن μ_q به صورت زیر تعریف می شود که در حد $q \longrightarrow ۱$ به مقدار غیر تبدیل یافته ی متناظرش از $C_{osp(۱|۲)} \equiv \mathbf{L}^L \cdot \mathbf{L}^L = \mathbf{L}^R \cdot \mathbf{L}^R = -l(l-\frac{۱}{۲})$، یعنی، $\frac{۱}{\sqrt{-l(l-\frac{۱}{۲})}}$ تقلیل می یابد:

$$\mu_q \equiv \frac{[۲]_q}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]}} \tag{۶۲}$$

در سومین حد، رابطه ی (۵۶)، تبدیل به رابطه ی آشنای ابرهذلولی گون $EAdS^{(۲|۲)}$ می شود:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \eta^{ij}x_ix_j - \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = -۱ \tag{۶۳}$$

همچنین نسخه ی qـتغییر شکل یافته ی مولدهای $\boxed{۳}, \boxed{۲}, \boxed{۱}$ از جبر $su(۱,۱)$ نیز به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\kappa_۱^q = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\kappa_۱ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \kappa_۲^q = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\kappa_۲ = \sqrt{\frac{[۲]_q}{۲q}}\begin{pmatrix} ۰ & i \\ -i & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \kappa_۳^q = \begin{pmatrix} q & ۰ \\ ۰ & -q^{-۱} \end{pmatrix} \tag{۶۴}$$

نسخه ی ابر این ماتریس ها نیز به قرار زیر تعریف می شوند، که در آن $\varepsilon = i\kappa_۲^q, \tau_۱ = (۱,۰)^t$ و $\tau_۲ = (۰,۱)^t$ است:

$$\Sigma_i^q = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} \kappa_i^q & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\alpha^q = \frac{۱}{[۲]_q}\begin{pmatrix} ۰ & \tau_\alpha \\ -(\varepsilon\tau_\alpha)^t & ۰ \end{pmatrix} \tag{۶۵}$$

۱.۴ . ساخت مدول

ابرکلاف هوپف کوانتومی، یک $U_q(۱)$ـکلاف بر روی $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$ است که ابرمنیفلد کوانتومی $AdS_{q\mu}^{(۳|۲)}$ نقش منیفلد کل آن را دارد. جبرهای مختصاتی مربوط به این ابرکلاف هوپف کوانتومی را با $A(AdS_{q\mu}^{(۳|۲)})$ برای فضای کل $AdS_{q\mu}^{(۳|۲)}$، $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)})$ برای فضای پایه ی $EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$ و $A(U_q(۱))$ برای تار $U_q(۱)$ نشان خواهیم داد. در نتیجه جبر شمول $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}) \hookrightarrow A(AdS_{q\mu}^{(۳|۲)})$ یک توسیع هوپف ـ گالوا است که به عنوان یک ابرکلاف هوپف کوانتومی می باشد و طبیعتا یک نسخه ی جبری از اولین ابرتاربندی هوپف کوانتومی $AdS_{q\mu}^{(۳|۲)} \xrightarrow{U_q(۱)} EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$ است؛ کلاف وابسته ی کوانتومی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$E_q^{(n)} := \{x \in A(AdS_{q\mu}^{(۳|۲)}) : \ k \cdot x = q^{\frac{n}{۲}}x, \ k \in A(U_q(۱))\} \tag{۶۶}$$

به وضوح، هر $E_q^{(n)}$ یک $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)})$ـدو ـمدول است که معادل است با تصویر در یک مدول آزاد $(A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))^{۲n+۱}$ از یک عملگر کوانتومی خودالحاقی $P_q^{(n)}$ در $Mat_{۲n+۱}(A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))$ به ازای هر $n \geqslant ۰$. در اینجا $E_q^{(n)}$ را با $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)})$ـمدول چپ مقاطع $(A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))^{۲n+۱}P_{q\mu}^{(n)}$ یکی خواهیم گرفت.

۲.۴ . ابر Λشبه تصویرگرهای کوانتومی ابر $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)})$مدول تصویری اسپین $\frac{۱}{۲}$

طبق قضیه ی سر ـسوآن در هندسه ی ناجابجایی، مطالعه ی ابرتاربندی اصلی $AdS_{q\mu}^{(۳|۲)} \xrightarrow{U_q(۱)} EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}$ با مطالعه ی $A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)})$ـ مدول تصویری ناجابجایی با تولید متناهی این مقاطع جایگزین می شود. لذا برای ساختن ابرمدول های qـتغییر شکل یافته ی راست و چپ تصویری، باید ابرΛـشبه تصویرگرهای qـتغییر شکل یافته ی فازی این مدول ها را ساخت. ابرΛـشبه تصویرگرهای qـتغییر شکل یافته برای مدول چپ تصویری می شود:($\boxed{۲}^q \cdot \mathbf{X} = \sum_{m=۰,\pm}(-۱)^{۱-m}(q)^m\Sigma_{-m}^q X^m - \varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha\Theta_\beta$)

$$P^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} = \frac{۱}{[۲]_q}\left\{۱ \mp \frac{(\boxed{۲}^q \cdot \mathbf{X} - \frac{\mu_q}{[۲]_q})}{\sqrt{۱ - \frac{\mu_q^۲}{[۲]_q^۲}}}\right\}, \quad P^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} = \frac{۱}{[۲]_q}[۱ \mp \frac{[۲]_q\boxed{۲}^q \cdot \mathbf{L}^L - ۱}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}}] \tag{۶۷}$$

که جفت شدگی چپ ابرتکانه ی زاویه ای با ابراسپین $\frac{۱}{۲}$ را با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l \pm \frac{۱}{۲}$ نشان می دهد. به راحتی می توان نشان داد که:

$$P^L_{[l+\frac{۱}{۲}]_q} + P^L_{[l-\frac{۱}{۲}]_q} = \frac{۲}{[۲]_q}, \quad P^{L\ddagger}_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} = \Lambda P^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q}\Lambda^{-۱} \tag{۶۸}$$

اینها ابرΛـشبه تصویرگرهای $A(EAdS_F^{(۲|۲)})$ـمدول چپ تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))^۲ = (A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))^۲P^L_{[l+\frac{۱}{۲}]_q} \oplus (A(EAdS_{q\mu}^{(۲|۲)}))^۲P^L_{[l-\frac{۱}{۲}]_q},$$

$$\Gamma^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} = [۲]_qP^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} - ۱ = \mp\frac{[۲]_q\boxed{۲}^q \cdot \mathbf{L}^L - ۱}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}} \tag{۶۹}$$

ابرتکانه ی زاویه ای راست و ابراسپین $\frac{۱}{۲}$ نیز با هم، با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l \pm \frac{۱}{۲}$ جفت شدگی خواهند داشت که ابرΛ–شبه تصویرگرهای q–تغییر شکل یافته ی راست متناظرشان $P^R_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q}$، به صورت زیر با تغییر (L^L_i, L^L_α) به $(-L^R_i, -L^R_\alpha)$ در (۶۷) بدست می آیند:

$$P^R_{[l\pm۱/۲]_q} = \frac{۱}{[۲]_q}[۱ \pm \frac{[۲]_q \boxed{?}^q \cdot \mathbf{L}^R + ۱}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}}] \tag{۷۰}$$

اینها نیز ابرΛ–شبه تصویرگرهای q–تغییر شکل یافته ی $A(EAdS^{(۲|۲)}_{q\mu})$–مدول راست تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(EAdS^{(۲|۲)}_{q\mu}))^۲ = (A(EAdS^{(۲|۲)}_{q\mu}))^۲ P^R_{[l+\frac{۱}{۲}]_q} \oplus (A(EAdS^{(۲|۲)}_{q\mu}))^۲ P^R_{[l-\frac{۱}{۲}]_q},$$

$$\Gamma^R_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} = [۲]_q P^R_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q} - ۱ = \mp \frac{[۲]_q \boxed{?}^q \cdot \mathbf{L}^L - ۱}{\sqrt{[۲l]_q[۲l+۱]_q + ۱}} \tag{۷۱}$$

۳.۴ . ابرΛشبه جبر گینسپارگ–ویلسون کوانتومی فازی و ابر Λشبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی کوانتومی فازی اسپین $\frac{۱}{۲}$

ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون q–تغییر شکل یافته ی فازی $\mathcal{A}_{q\mu}$ یک ‡–جبر روی C_L است که توسط دو ابرΛ–شبه ‡- ناوردای این ولوشن $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ بدست می آیند:

$$\mathcal{A}_{q\mu} = \langle \Gamma_{q\mu}, \Gamma'_{q\mu} : \quad (\Gamma_{q\mu})^۲ = (\Gamma'_{q\mu})^۲ = I, \quad (\Gamma_{q\mu})^‡ = \Lambda\Gamma_{q\mu}\Lambda^{-۱}, \quad (\Gamma'_{q\mu})^‡ = \Lambda\Gamma'_{q\mu}\Lambda^{-۱} \rangle \tag{۷۲}$$

هر نمایشی از (۷۲) یک ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون q–تغییر شکل یافته را محقق می سازد. دو عضو زیر را که توسط مولدهای $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ ابرΛ–شبه جبر گینسپارگ–ویلسون q–تغییر شکل یافته ی $\mathcal{A}_{q\mu}$ ساخته می شوند، در نظر می گیریم:

$$\Gamma_{۱q\mu} = \frac{۱}{[۲]_q}(\Gamma_{q\mu} + \Gamma'_{q\mu}), \qquad (\Gamma_{۱q\mu})^‡ = \Lambda\Gamma_{۱q\mu}\Lambda^{-۱}, \qquad \Gamma_{۲q\mu} = \frac{۱}{[۲]_q}(\Gamma_{q\mu} - \Gamma'_{q\mu}), \qquad (\Gamma_{۲q\mu})^‡ = \Lambda\Gamma_{۲q\mu}\Lambda^{-۱}$$

$$\{\Gamma_{۱q\mu}, \Gamma_{۲q\mu}\} = ۰ \tag{۷۳}$$

با برابر گرفتن $\Gamma^L_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q}$ و $\Gamma^R_{[l\pm\frac{۱}{۲}]_q}$ با $\Gamma_{q\mu}$ و $\Gamma'_{q\mu}$ خواهیم داشت:

$$\Gamma^\pm_{۱q\mu} = \frac{\mp \boxed{?}^q \cdot \mathcal{L}^{q\mu} \pm ۱}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}}, \qquad \Gamma^\pm_{۲q\mu} = \mp \frac{\boxed{?}^q \cdot (\mathbf{L}^L + \mathbf{L}^R)}{\sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}} \tag{۷۴}$$

حال می توان ابرΛ–شبه عملگر دیراک q–تغییر شکل یافته ی فازی روی ابرهذلولی گون اقلیدسی q–تغییر شکل یافته ی فازی $EAdS^{(۲|۲)}_{q\mu}$ را به صورت زیر تعریف کرد:(طبیعتا این عملگر، ابرΛ–شبه هرمیتی است: $((D^\pm_{q\mu})^‡ = \Lambda D^\pm_{q\mu}\Lambda^{-۱}$)

$$D^\pm_{q\mu} = \sqrt{[-۲l]_q[۲l-۱]_q - ۱}\,\Gamma^\pm_{۱q\mu} = (\mp \boxed{?}^q \cdot \mathcal{L}^{q\mu} \pm ۱) = \mp(\sum_{m=۰,\pm} (-۱)^{۱-m}(q)^m \Sigma^{(-m)}\mathcal{L}^{q\mu}_m - \varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha \mathcal{L}^F_\beta) \pm ۱ \tag{۷۵}$$

در حالت حدی (۷۵) به ابرΛ–شبه عملگر دیراک روی ابرهذلولی گون اقلیدسی $EAdS^{(۲|۲)}$ تبدیل می شود:

$$\lim_{l\to\infty, q\to۱} D^\pm_{q\mu} = \mp \boxed{?} \cdot \mathcal{L} \pm ۱ = \mp(\eta^{ij}\Sigma_i \mathcal{L}_j - \varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_\alpha \mathcal{L}_\beta) \pm ۱ \tag{۷۶}$$

که در آن $\mathcal{L}_i$ و $\mathcal{L}_\alpha$ ابرعملگرهای تکانه ی زاویه ای روی ابرهذلولی گون اقلیدسی $EAdS^{(۲|۲)}$ هستند:

$$\mathcal{L}^i = -iC^{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{۱}{۲}(\kappa^i)^\alpha_\beta\theta^\beta\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \mathcal{L}^\alpha = \frac{۱}{۲}(\varepsilon^t\kappa^i)^{\alpha\beta}x_i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - \frac{۱}{۲}(\kappa^i)^\alpha_\beta\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۷۷}$$

همچنین می توان ابرΛـشبه عملگر کایرالیتی qـتغییر شکل یافته روی $EAdS_{q\mu}^{(2|2)}$ را به صورت $\gamma_{q\mu}^{\pm}=\Gamma_{2q\mu}^{\pm}$ تعریف کرد که در حالت حدی می شود:

$$\lim_{l\to\infty,q\to 1}\gamma_{q\mu}^{\pm}=\mp\Sigma\cdot x=\mp(\sum_{m=0,\pm}(-1)^{1-m}\Sigma_{-m}x^{m}-\varepsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha}\theta_{\beta}) \tag{۷۸}$$

و به راحتی می توان نتیجه ی زیر را که از ابرΛـشبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی روی $EAdS^{(2|2)}$ انتظار داشتیم، دید:

$$\lim_{l\to\infty,q\to 1}\{D_{q\mu}^{\pm},\gamma_{q\mu}^{\pm}\}=0 \tag{۷۹}$$

۵. نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از ابرΛـشبه تصویرگرهای qـتغییر شکل یافته و ابر$A(EAdS_{q\mu}^{(2|2)})$ـمدول تصویری با تولید متناهی، مولدهای ابرΛـشبه جبر گینسپارگ ـویلسون qـتغییر شکل یافته ی فازی ساخته شدند و از روی آن، ابرΛـشبه عملگرهای دیراک و کایرالیتی qـتغییر شکل یافته ی فازی معرفی و ساخته شدند. نکته ی قابل توجه در مورد این ابرΛـشبه عملگر دیراک qـتغییر شکل یافته ی ساخته شده، این است که، حد جابجایی صحیحی برای آن وجود دارد.

مراجع

[1] A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academeic Press, New york, 1994).
[2] A. Connes, "Non-commutative Geometry and Physics," in Gravitation and Quantization, Les Houches, Session LVII (Elsevier, Amsterdam, 1995).
[3] H. Fakhri and M. Lotfizadeh, *Dirac operators on the fuzzy AdS_2 with the spin $\frac{1}{2}$ and* 1, JMP ۵۲ (2011) 103508.
[4] A. P. Balachandran and Pramod Padmanabhan, *Spin j Dirac operators on the fuzzy 2-sphere*, JHEP ۰۹ (2009) 120.
[5] A. P. Balachandran, G. Immirzi, *Fuzzy Ginsparg-Wilson algebra : A solution of the fermion doubling problem*, Phys. Rev. D ۶۸ (2003) 065023.
[6] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan and B. Ydri, *The fermion doubling problem and noncomutative geometry*, Mod. Phys. Lett. A ۱۵ (2000) 1279.
[7] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, *Ginsparg-Wilson relation, topological invariants, and finite noncommutative geometry*, Phys.Rev. D ۶۷ (2003) 085005.
[8] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, *Ginsparg-Wilson relation and 't Hooft-Polyakov monopole on fuzzy 2-sphere*, Nucle. Phys. B ۶۸۴ (2004) 162-182.
[9] H. Aoki, S. Iso, T. Maeda and K. Nagao, *Dynamical generation of a nontrivial index on the fuzzy 2-sphere*, Phy. Rev. D ۷۱ (2005) 045017.
[10] H. Aoki, S. Iso and T. Maeda, *Ginsparg-Wilson Dirac operator in monopole background on the fuzzy 2-sphere*, phys. Rev. D ۷۵ (2007) 085021.
[11] Hossein Fakhri and Ali Imaanpur, *Dirac operator on fuzzy AdS_2, JHEP* ۰۳ (2003) 003.
[12] U. Carow-Watamura and S. Watamura, *Chirality and Dirac operator on noncommutative sphere*, Commun. Math. Phys. ۱۸۳ (1997) 365.
[13] U. Carow-Watamura and S. Watamura, *Differential calculus on fuzzy sphere and scalar field*, Int. J. Mod. Phys. A ۱۳ (1998) 3235.
[14] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, *Topologically nontrivial field configurations in noncommutative geometry*, Commun. Math. Phys , ۱۷۸ (1996) 507-526.
[15] H. Grosse and P. Preˇsnajder, *The Dirac operator on the fuzzy sphere*, Lett. Math. Phys. ۳۳ (1995) 171.
[16] K. Nagao, *Ginsparg-Wilson Relation and Admissibility Condition in Noncommutative Geometry*.Progress of Theoretical Physics Supplement. ۱۷۱, (2007)232.
[17] P. Podle´s, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. ۱۴ (1987) 193.
[18] A. Pinzul and A. Stern, *Dirac operator on the quantum sphere, Phys. Lett. B* ۵۱۲ (2001) 217.
[19] A. Mostafazadeh, *Pseudo hermiticity versus pt symmetry: the structure responsible for the reality of the spectrum of a non- hermitian hamiltonian*. J. Math. Phys. ۴۳ (2002)205; e-print [math-ph/0107001].
[20] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
[21] M. Mahmoodi and M. Lotfizadeh, *Super pseudo fuzzy Dirac operator on the super fuzzy Eclidean hyperboloid*, ۱۱nd Seminar on Geometry and Topology (2021).

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، GT–172، صص. ۳۱۰–۳۱۸

کنیفلد فازی Y_F^6 و عملگر دیراک روی کلاف تاری اصلی $X_F^5 \to S_F^2 \times S_F^2$

محمد محمودی*[آ]، مهدی لطفی زاده[آ]

[آ] گروه فیزیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
کنیفلد فازی
جبر گینسپارگ–ویلسون
عملگرهای دیراک و کایرالیتی

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

با استفاده از تعاریف کنیفلد و مفاهیم فازی و به کمک تعمیم جبر گینسپارگ–ویلسون فازی از S_F^2 به $S_F^2 \times S_F^2$، عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی روی $S_F^2 \times S_F^2$ معرفی خواهند شد. در آنجا نشان داده شده است که در حالت حدی، یک حد صحیح جابجایی زمانی که پارامتر ناجابجایی l به سمت بی نهایت میل کند، وجود دارد.

۱. مقدمه

کنیفلدها فضاهای مختلط تکینه دار هستند که در یک فضای مختلط n بعدی $\mathbb{C}^n$ غوطه ور می باشند و به جز در $z_\alpha = 0$ به عنوان راس مخروط، در همه جا C^∞ هستند. در همسایگی این نقاط تکینه، معادله ی توصیف کننده ی کنیفلدها به صورت زیر است:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha^2 = 0$$

جهت سادگی، نقطه ی تکینه را در مبدا $\mathbb{C}^n$ در نظر می گیریم. نشان داده شده است که اولین کلاس چرن این فضاها، صفر است[۱]. کنیفلد $2n-2$ بعدی Y^{2n-2}، منیفلد غیرفشرده ی کلبی–یائو[1] با گروه تقارنی $SO(n) \times U(1)$ نام دارد؛ منیفلد پایه ی آن، یک منیفلد $2n-3$ بعدی X^{2n-3} است که منیفلد اینشتین نام دارد و در رابطه ی $R_{ij} = (2n-4)g_{ij}$ صدق می کند. از نقطه نظر ریاضیاتی، منیفلد X^{2n-3}، فصل مشترک Y^{2n-2} با کره ی S^{2n-1} است، یعنی: $X^{2n-3} = Y^{2n-2} \cap S^{2n-1}$. از بین انواع کنیفلدها، دو نوع خاص از آن، یعنی به ازای $n = 3$ و $n = 4$ دارای اهمیت زیادی مخصوصا در فیزیک هستند. از میان این حالت های خاص، مورد $n = 4$، دارای اهمیت زیادتری است[۲–۵]؛ که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است و عملگرهای دیراک و کایرالیتی برای آن ساخته خواهد شد. به ازای $n = 3$، کنیفلد Y^4 با منیفلد پایه ی X^3 داریم که نسخه ی فازی این فضاها به همراه کلاف اصلی تک قطبی $U(1)$، $X_F^3 \to S_F^2$ در [۶] مطالعه شده است. به ازای $n = 4$، کنیفلد Y^6 با گروه تقارنی $SO(4) \times U(1) \simeq SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ و منیفلد پایه ی X^5 داریم که X^5 از لحاظ توپولوژیکی به صورت $S^3 \times S^2$ است، به عبارت دیگر، یک کلاف $U(1)$ روی $S^2 \times S^2$ محسوب می شود. یکی از دلایل اهمیت این نوع کنیفلد، اهمیت آن در توصیف دوگانگی

*سخنران
پست الکترونیک: M.Mahmoodi@urmia.ac.ir (محمد محمودی)، M.Lotfizadeh@urmia.ac.ir (مهدی لطفی زاده)

[1] Calabi–Yau

یا تناظر، گرانش ـ پیمانه است[۷و۸]؛ از منظری دیگر، پایه ی $X^{۵}$ آن، یک کلاف تاری غیربدیهی $U(۱)$ است که متناظر با تک قطبی مغناطیسی می باشد؛ در حالی که کلاف های خطی وابسته، توصیف کننده ی پیکربندی های غیربدیهی از یک میدان اسکالر مختلط روی $S^{۲}\times S^{۲}$ هستند که این میدان ها می توانند توسط جملاتی بر حسب توابعی از $SU(۲)\times SU(۲)$ بیان شوند؛ از طرفی در[۳]، نظریه ی پیمانه ای $U(n)$ روی نسخه ی فازی $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ به عنوان یک مدل ماتریسی، مطالعه و در آنجا نشان داده شده است که در حد جابجایی، این نظریه ی پیمانه ای به نظریه ی پیمانه ای یانگ ـ میلز روی $S^{۲}\times S^{۲}$ تقلیل پیدا خواهد کرد. پتانسیل کوانتومی موثر برای میدان های $U(۱)$ روی $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ نیز، در [۴] مطالعه شده است. ساختار بار توپولوژیکی روی $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ از طریق جبر گینسپارگ ـ ویلسون در [۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. ساده ترین فضای خمیده ی همگن مورد استفاده در نظریه ی میدان های کوانتومی QFT، کره ی $S^{۲}$ و نسخه ی فازی آن، یعنی $S_F^{۲}$ است؛ در حالی که می دانیم ما در یک فضای چهاربعدی زندگی می کنیم، از این منظر، ساده ترین فضای خمیده ی چهاربعدی مورد استفاده در QFT را می توان $S^{۲}\times S^{۲}$ به همراه نسخه ی فازی آن در نظر گرفت. این فضا در سطح کلاسیکی و با تغییر شکل مدل ماتریسی IIB انجام گرفته است[۹]؛ همچنین در [۱۰]، برتری فضای $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ دراین مدل ماتریسی، به سایر فضاها نتیجه گرفته شده است. در [۳]، نشان داده شده است که $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ جواب غیربدیهی از مدل ماتریسی IIB در سطح دو حلقه می باشد. این ها مواردی چند از اهمیت کنیفلد $Y^{۲n-۲}$ و پایه ی $X^{۵}$ آن در فیزیک بود که بدان اشاره شد.

عملگرهای دیراک و کایرالیتی، دو عملگر خود الحاقی بسیار مهمی در رهیافت کن - لات[۲] برای هندسه ناجابجایی هستند. یک طیف سه تایی یکدار $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ شامل یک * ـ جبر یکدار مختلط $\mathcal{A}$ ، *ـ نمایش باوفا توسط عملگرهای کران دار روی یک فضای هیلبرت جداپذیر $\mathcal{H}$ و یک عملگر خودالحاق $D:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ (عملگر دیراک) با ویژگی های زیر است [۹و۱۰]:

- حلال $(D-\lambda)^{-۱}$ ، $\lambda\notin\mathbb{R}$، عملگری فشرده روی $\mathcal{H}$ است.
- $\forall a\in\mathcal{A}$ ، جابجاگر $[D,\pi(a)]$ عملگری کران دار روی $\mathcal{H}$ است.

طیف سه گانه ی $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ زوج نامیده می شود اگر یک $\mathbb{Z}_{۲}$- مدرج شده ای از $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد؛ یعنی یک عملگری $\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ با چنین ویژگی هایی که: $\gamma^{*}=\gamma$ و $\gamma^{۲}=I$ به طوری که: $\gamma D+D\gamma=۰$ و $\forall a\in\mathcal{A},\gamma a=a\gamma$؛ در غیراین صورت به این طیف سه گانه فرد گفته می شود. برای منیفلدهای با بعد فرد، عملگرهای کایرالیتی وجود ندارد و در این حالت عملگر دیراک فقط با ساختارهای دیفرانسیلی توصیف می شود. سه نوع از عملگرهای دیراک و کایرالیتی $S^{۲}$ فازی وجود دارد که عبارتند از: عملگر دیراک گینسپارگ ـ ویلسون D_{GW} [۱۱-۱۸]، عملگر دیراک واتامورا ـ واتامورا[۳] D_{WW} [۱۹-۲۱] و عملگر دیراک گروسه ـ کلمیک ـ پرس ناجر[۴] D_{GKP}[۲۲و۲۳]. این سه نوع از عملگرهای دیراک در [۲۴] با هم مقایسه شده اند؛ و اما آنچه که در این مقاله صورت گرفته است، تعمیم جبر گینسپارگ ـ ویلسون به جبر گینسپارگ ـ ویلسون فازی روی $S_F^{۲}\times S_F^{۲}$ برای ساختن عملگرهای دیراک و کایرالیتی به کمک آن است. برای این منظور، در ابتدا ساختار کلافی کنیفلد $Y^{۶}$ و نسخه ی فازی آن $Y_F^{۶}$، معرفی و سپس مدول های تصویری و تصویرگرهای متناظر برای این فضا را خواهیم ساخت و در انتها به کمک تصویرگرهای حاصل و جبر گینسپارگ ـ ویلسون، عملگرهای دیراک و کایرایتی را محاسبه خواهیم کرد.

۲. ساختار کلافی کنیفلد جابجایی $Y^{۶}$ و فازی $Y_F^{۶}$

کنیفلد $Y^{۶}$ یک منیفلد ۶ بعدی غوطه ور در یک فضای ۴ بعدی مختلط $\mathbb{C}^{۴}$ است، در نتیجه برای توصیف آن نیاز به ۴ متغییر مختلط $z_\alpha(\alpha=۱,\dots,۴)$ است:

$$\mathcal{O}_{۴}:=z_{۱}z_{۴}-z_{۲}z_{۳}=۰,\qquad z_\alpha\in\mathbb{C}^{۴} \tag{۱}$$

همچنین $Y^{۶}$ یک منیفلد همه جا هموار است به جز در راس آن، یعنی: $z_\alpha=۰$؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{O}_{۴}(z_\alpha)=۰,\qquad \frac{\partial\mathcal{O}_{۴}}{\partial z_\alpha}=۰ \tag{۲}$$

چون که $Y^{۶}$، مجموعه ی همه ی خطوط گذرنده از مبدا در $\mathbb{C}^{۴}$ است، تکینگی $z_\alpha=۰$ یک تکینگی مضاعف محسوب خواهد شد؛ در نتیجه در همسایگی چنین تکینگی، کنیفلد $Y^{۶}$ توسط رابطه ی زیر در $\mathbb{C}^{۴}$ توصیف می شود:

$$\sum_{\alpha=۱}^{۴}z_\alpha^{۲}=۰ \tag{۳}$$

---

[۲] $Connes-Lott$

[۳] $Watamura-Watamura$

[۴] $Grosse-Klimcik-Presnajder$

پایه ی $Y^{۶}$، منیفلد دیفرانسیل پذیر ۵ بعدی $X^{۵}$ است که در اصل فصل مشترک $Y^{۶}$ با کره ی $S^{۷}(z^{\dagger}z = r^{۲}, r = const > ۰)$ می باشد و توسط رابطه ی زیر توصیف می شود:

$$z_{۱}z_{۴} - z_{۲}z_{۳} = ۰, \qquad \bar{z}_{۱}z_{۱} + \bar{z}_{۲}z_{۲} + \bar{z}_{۳}z_{۳} + \bar{z}_{۴}z_{۴} = r^{۲} \tag{۴}$$

در حالت کلی، کنیفلد $Y^{۶}$ دارای کلاسی از منیفلدهای $T^{p,q}$ (p و q اعداد صحیح مثبت هستند) به عنوان پایه ی خود است که $T^{p,q}$ به طور توپولوژیکی با منیفلد $S^{۳} \times S^{۲}$ همسان ریخت هستند ولی به دلیل دیفئومورف نبودن با آن، به طور هندسی هم معادل نیستند. همه ی $T^{p,q}$ را می توان به عنوان کلاف های اصلی $U(۱)$ روی $S^{۲} \times S^{۲}$ در نظر گفت، در نتیجه منیفلد $S^{۲} \times S^{۲}$ را می توان توسط متغییرهای $x_{i_{۱}}$ و $x_{i_{۲}}$ به صورت زیر توصیف کرد:

$$x_{i_{۱}} = x_{i_{۱}}(\theta_{۱}, \xi_{۱}), \quad x_{i_{۱}}x_{i_{۱}} = r_{۱}^{۲},$$

$$x_{i_{۲}} = x_{i_{۲}}(\theta_{۲}, \xi_{۲}), \quad x_{i_{۲}}x_{i_{۲}} = r_{۲}^{۲}, \qquad i_{۱,۲} = ۱, ۲, ۳ \tag{۵}$$

به طور خاص، $X^{۵}(:= T^{۱,۱})$ و $S^{۳} \times S^{۲}(:= T^{۱,۰})$. از آنجایی که $SU(۲)$ به طور توپولوژیکی معادل با $S^{۳}$ است، خواهیم داشت:

$$S^{۳} \times S^{۲} = SU(۲) \times \frac{SU(۲)}{U(۱)} \tag{۶}$$

برای منیفلد $X^{۵}$ فرقی نمی کند که $U(۱)$ مخرج برای کدام $SU(۲)$ و از کدام طرف باشد، در نتیجه می توان نوشت:

$$X^{۵} \cong \frac{SU(۲) \times SU(۲)}{U(۱)} \tag{۷}$$

همچنان که اشاره شد، $Y^{۶}$ دارای گروه تقارنی $SO(۴) \times U(۱)$ است، در نتیجه گروه تقارنی $X^{۵}$، گروه لی $SO(۴)$ خواهد بود که این گروه دارای مولدهای $\{M_{۱}, M_{۲}, M_{۳}, T_{۱}, T_{۲}, T_{۳}\}$ است که در جبرلی زیر صدق می کنند:

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad i,j,k = ۱, ۲, ۳ \tag{۸}$$

جهت سادگی در انجام محاسبات، مولدهای جدید Q_i و $\bar{Q}_i$ را معرفی می کنیم:

$$Q_i = \frac{۱}{۲}(M_i + T_i), \qquad \bar{Q}_i = \frac{۱}{۲}(M_i - T_i) \tag{۹}$$

تحت متغییرهای جدید، جبرلی $so(۴)$ به دو جبرلی جدا از هم $su(۲)$ تجزیه می شود:

$$[Q_i, Q_j] = i\varepsilon_{ijk}Q_k, \qquad [\bar{Q}_i, \bar{Q}_j] = i\varepsilon_{ijk}\bar{Q}_k, \qquad [Q_i, \bar{Q}_j] = ۰ \tag{۱۰}$$

به منظور پیدا کردن رابطه ی بین $SO(۴)$ با $SU(۲)$، روابط زیر را تعریف می کنیم:

$$A_i = U^{\dagger}Q_iU = \frac{۱}{۲}I_{۲} \otimes \sigma_i, \quad B_i = U^{\dagger}\bar{Q}_iU = \frac{۱}{۲}\sigma_i \otimes I_{۲} \tag{۱۱}$$

که در آن

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ i & ۰ & ۰ & i \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -i & i & ۰ \end{pmatrix} \tag{۱۲}$$

به وضوح می توان دید که:

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \qquad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = ۰ \tag{۱۳}$$

حال نگاشت تصویری تار $\pi : X^5 \to S^2 \times S^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{i_1} = z^\dagger A_{i_1} z, \qquad x_{i_2} = z^\dagger B_{i_2} z \tag{۱۴}$$

با $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^t \in \mathbb{C}^4$. بدیهی است که متغییرهای x_{i_1} و x_{i_2} حقیقی هستند و در رابطه ی زیر صدق می کنند:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i_1}^2 = \sum_{i=1}^{3} x_{i_2}^2 = (\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4} \bar{z}z)^2 - (\bar{z_1}\bar{z_4} - \bar{z_2}\bar{z_3})(z_1 z_4 - z_2 z_3) = \frac{1}{4} r^2 - \bar{\mathcal{O}_4}\mathcal{O}_4 \tag{۱۵}$$

اگر $z_\alpha \in X^5$، در نتیجه $\mathcal{O}_4 = 0$ و $r = 1$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i_1}^2 = \sum_{i=1}^{3} x_{i_2}^2 = \frac{1}{4} \tag{۱۶}$$

که معرف فضای $S^2 \times S^2$ با شعاع $\frac{1}{2}$ برای هر کره ی S^2 است. در نتیجه، X^5 دارای ساختار کلاف تاری اصلی $U(1)$ روی $S^2 \times S^2$ به صورت زیر، می باشد:

$$U(1) \xrightarrow{right U(1)-action} X^5 \xrightarrow{\pi} S^2 \times S^2 \tag{۱۷}$$

هندسه ی ناجابجایی، یک هندسه ی غیرنقطه ای است. بدان معنا که، در این هندسه به جای مختصات $S^2 \times S^2$ که (x_{i_1}, x_{i_2}) است، از مولدهای تکانه ی زاویه ای $SU(2) \times SU(2)$ در فضای l_1, l_2ـنمایش کاهش ناپذیر یکانی روی $S^2 \times S^2$ فازی، یعنی $S_F^2 \times S_F^2$ استفاده می شود. فرض می کنیم $X_{i_1} = \mu_1 L_{i_1}$ و $X_{i_2} = \mu_2 L_{i_2}$ که L_{i_1} و L_{i_2} به ترتیب، مولدهای $SU(2)$ اول و دوم است. بدیهی است که این مولدها در جبرلی $su(2)$ صدق می کنند:

$$[L_{i_1}, L_{j_1}] = i\varepsilon_{i_1 j_1 k_1} L_{k_1}, \quad [L_{i_2}, L_{j_2}] = i\varepsilon_{i_2 j_2 k_2} L_{k_2}, \quad [L_{i_1}, L_{i_2}] = 0 \tag{۱۸}$$

که در آن، $\mu_{1,2}$ مشخص کننده مقادیر عملگر کازیمیر $su(2)$ هستند:

$$\frac{1}{\mu_1^2} = C_{su(2)} = l_1(l_1 + 1), \qquad \frac{1}{\mu_2^2} = C_{su(2)} = l_2(l_2 + 1) \tag{۱۹}$$

در نتیجه، مختصات ناجابجایی ما به صورت زیر خواهند بود:

$$X_{i_1} = \frac{L_{i_1}}{2\sqrt{l_1(l_1+1)}}, \qquad X_{i_2} = \frac{L_{i_2}}{2\sqrt{l_2(l_2+1)}} \tag{۲۰}$$

که در جبر $su(2)$ به صورت زیر صدق می کنند:

$$[X_{i_1}, X_{j_1}] = \frac{i}{2\sqrt{l_1(l_1+1)}}\varepsilon_{i_1 j_1 k_1} X_{k_1}, \qquad [X_{i_2}, X_{j_2}] = \frac{i}{2\sqrt{l_2(l_2+1)}}\varepsilon_{i_2 j_2 k_2} X_{k_2}, \qquad [X_{i_1}, X_{i_2}] = 0 \tag{۲۱}$$

در تاربندی هوپف گونه ی $X^5 \xrightarrow{U(1)} S^2 \times S^2$، مقاطع به صورت $\Gamma^\infty(S^2 \times S^2, E^{(n)})$ با $C(S^2 \times S^2)$ـمدول است که در آن $C(S^2 \times S^2)$، جبر جابجایی توابع روی $S^2 \times S^2$ می باشد. در مدل فازی، این جبر، جبری ناجابجایی است؛ در نتیجه، مدول های راست و چپ، با هم یکریخت نخواهند بود. در این حالت برای هر عملگر تکانه ی زاویه ای $\mathbf{L}_{1,2}$، دو عملگر خطی $\mathbf{L}_{1,2}^L$ و $\mathbf{L}_{1,2}^R$ که در واقع نقش کنش های راست و چپ روی جبر ماتریسی الحاقی فازی $\mathcal{A}_{l_1,l_2} = \{\psi \in M_{(2l_1+1)(2l_2+1)}(\mathbb{C})\}$ را دارند، وابسته می کنیم:

$$L_{i_\alpha}^L \psi = L_{i_\alpha}\psi, \quad L_{i_\alpha}^R \psi = \psi L_{i_\alpha}, \quad \forall \psi \in \mathcal{A}_{l_1,l_2}, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{۲۲}$$

که کنش راست در جبر $su(2)$ با علامت منفی $-L_{i_\alpha}^R$ صدق می کند. این عملگرهای راست و چپ با هم طبق روابط جابجاگری زیر، جابجا می شوند:

$$[L_{i_\alpha}^L, L_{j_\alpha}^R] = 0, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{۲۳}$$

طبیعتا مختصات $(x_{i_۱}, x_{i_۲})$ که برای $S^۲ \times S^۲$ جابجایی بودند، در حالت حدی از مختصات ناجابجایی مذکور به صورت زیر، قابل بدست آمدن هستند:

$$x_{i_\alpha} = \lim_{l_\alpha \to \infty} \frac{L^{L,R}_{i_\alpha}}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha + ۱)}} = \lim_{l_\alpha \to \infty} \frac{L^{L,R}_{i_\alpha}}{l_\alpha} \qquad (۲۴)$$

از $\mathbf{L}^L_\alpha$ و $\mathbf{L}^R_\alpha$ برای تعریف کردن نسخه ی فازی عملگر تکانه ی اوربیتال[۵] $\mathcal{L}_\alpha$ روی $S^۲_F \times S^۲_F$ استفاده می کنیم. $\mathcal{L}_\alpha$ را به صورت کنش الحاقی L_{i_α} روی $\mathcal{A}_{l_\alpha}$ تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}_{i_\alpha}\psi = (L^L_{i_\alpha} - L^R_{i_\alpha})\psi = ad_{L_{i_\alpha}}\psi = [L_{i_\alpha}, \psi], \qquad \alpha = ۱, ۲ \qquad (۲۵)$$

به وضوح می توان دید که $\mathcal{L}_{i_\alpha}$ در جبر $su(۲)$ صدق می کند:

$$[\mathcal{L}_{i_\alpha}, \mathcal{L}_{j_\alpha}] = i\varepsilon_{i_\alpha j_\alpha k_\alpha}\mathcal{L}_{k_\alpha}, \qquad [\mathcal{L}_{i_۱}, \mathcal{L}_{i_۲}] = ۰ \qquad (۲۶)$$

در حد جابجایی، (۲۵) به عملگر تکانه ی زاویه ای روی $S^۲ \times S^۲$ جابجایی تبدیل می شود:

$$\lim_{l_\alpha \to \infty}(L^L_{i_\alpha} - L^R_{i_\alpha}) = i\varepsilon_{i_\alpha j_\alpha k_\alpha} x_{j_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{k_\alpha}}, \qquad \alpha = ۱, ۲ \qquad (۲۷)$$

۳. مدول تصویری $X^۵_F \to S^۲_F \times S^۲_F$

ساختار کلاف تاری زیر با فضای کل $X^۵ \cong \frac{SU(۲) \times SU(۲)}{U(۱)}$ را در نظر می گیریم:

$$U(۱) \xrightarrow{rightU(۱)-action} X^۵ \xrightarrow{\pi} S^۲ \times S^۲ \qquad (۲۸)$$

فرض می کنیم $B_{\mathbb{C}} = C^\infty(X^۵, \mathbb{C})$ و $A_{\mathbb{C}} = C^\infty(S^۲ \times S^۲, \mathbb{C})$ به ترتیب نشان دهنده ی جبرهای $\mathbb{C}$ـمقداره ی توابع روی منیفلد $X^۵$ و منیفلد پایه ی $S^۲ \times S^۲$ که تحت ضرب نقطه به نقطه هموار هستند، باشد. نمایش های کاهش ناپذیر گروه $U(۱)$ با عدد صحیح n برچسب می خورند. اعضای $B_{\mathbb{C}}$ را می توان به صورت مدول های راست کلاسه بندی کرد؛ یعنی:

$$C^\infty_{(\pm n)}(X^۵, \mathbb{C}) = \{\varphi_{(\pm n)} : X^۵ \to \mathbb{C}, \quad \varphi_{(\pm n)}(p \cdot \omega) = \omega^{(\pm n)} \cdot \varphi(p)\,, \quad \forall p \in X^۵\,, \forall \omega \in U(۱)\} \qquad (۲۹)$$

کنش های چپ گروه $U(۱)$ روی $\mathbb{C}$ با n برچسب می خورند؛ که در واقع این کنش ها توصیف کننده ی یک کلاف هستند. طبق قضیه ی سر–سوآن[۶] [۲۵]، برای یک منیفلد هموار و فشرده ی M، یک هم ارزی کاملی بین رسته ی[۷] کلاف های برداری ساخته شده روی M با رسته ی مدول های تصویری با تولید متناهی روی جبر توابع $C(M)$ وجود دارد. در نظریه ی جبری K مشخص شده است که متناظر با این کلاف ها، تصویرگرهای P_n وجود دارد؛ به طوری که برای کلاف برداری وابسته شان خواهیم داشت:

$$E^{(n)} = X^۵ \times_{U(۱)} C \xrightarrow{\pi} S^۲ \times S^۲ \qquad (۳۰)$$

$A_{\mathbb{C}}$–مدول راست مقاطع $\Gamma^\infty(S^۲ \times S^۲, E^{(n)})$ که یکریخت با $C^\infty_{(n)}(X^۵, \mathbb{C})$ می باشد؛ خود هم ارز است با تصویر در مدول آزاد $(A_{\mathbb{C}})^{(۲n+۱)} = C^\infty(S^۲ \times S^۲, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{۲n+۱}$. $\Gamma^\infty(S^۲ \times S^۲, E^{(n)}) = P_n(A_{\mathbb{C}})^{۲n+۱}$ از یک تصویرگر P_n که P_n یک عملگر هرمیتی با رتبه ی ۱ روی C_L است:

$$P_n \in M_{۲n+۱}(A_{\mathbb{C}}), \quad P_n^۲ = P_n, \quad P_n^\dagger = P_n, \quad TrP_n = ۱ \qquad (۳۱)$$

که در آن Tr، رد و ۱، تابع ثابت است. برای $A_{\mathbb{C}}$–مدول راست از مقاطع $\Gamma^\infty(S^۲ \times S^۲, E^{(n)})$ تصویرگر $P_۱, P_۲, ..., P_{n+۱}$ با رتبه ی یکسان ۱ وجود دارد. بنابراین مدول آزاد $(A_{\mathbb{C}})^{۲n+۱}$ را می توان به صورت زیر، از جمع مستقیم تصویرگرهای $A_{\mathbb{C}}$–مدول نوشت:

$$(A_{\mathbb{C}})^{۲n+۱} = \bigoplus_{i=۱}^{۲n+۱} P_i(A_{\mathbb{C}})^{۲n+۱} \qquad (۳۲)$$

---

[۵] Orbital Momentum Operator
[۶] Serre – Swan
[۷] Category

۴. تصویرگرهای $A(S_F^2 \times S_F^2)$ـمدول تصویری اسپین $\frac{1}{2}$

طبق قضیه ی سر ـسوآن در هندسه ی ناجابجایی، مطالعه ی تاربندی اصلی $X_F^5 \xrightarrow{U(1)} S_F^2 \times S_F^2$ با مطالعه ی $A(S_F^2 \times S_F^2)$ـمدول تصویری ناجابجایی با تولید متناهی این مقاطع جایگزین می شود. لذا برای ساختن مدول های راست و چپ تصویری، باید تصویرگرهای فازی این مدول ها را ساخت. تصویرگرها برای مدول چپ تصویری می شود:

$$P^{L,\alpha}_{l_\alpha \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left\{1 \pm \frac{(2\alpha \cdot \mathbf{X}_\alpha + \frac{\mu_\alpha}{2})}{\sqrt{\frac{\mu_\alpha^2}{4}+1}}\right\}, \quad \alpha = 1,2 \tag{۳۳}$$

که در آن، $\Sigma_{\alpha,1}, \Sigma_{\alpha,2}$ و $\Sigma_{\alpha,3}$ معرف ماتریس های پاولی معمولی جبرلی $su(2)$ هستند. با جایگذاری (۱۹) در (۳۳) نتیجه می شود:

$$P^{L,\alpha}_{(l_\alpha \pm 1/2)} = \frac{1}{2}[1 \pm \frac{2\alpha \cdot \mathbf{L}^L_\alpha + 1}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha+1)+1}}] \tag{۳۴}$$

که جفت شدگی چپ تکانه ی زاویه ای با اسپین $\frac{1}{2}$ را با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l_\alpha \pm \frac{1}{2}$ نشان می دهد. به راحتی می توان نشان داد که:

$$P^{L,\alpha}_{(l_\alpha+\frac{1}{2})} + P^{L,\alpha}_{(l_\alpha-\frac{1}{2})} = 1_{(2l_\alpha+1)(2l_\alpha+1)} \tag{۳۵}$$

اینها تصویرگرهای $A(S_F^2)$ـمدول چپ تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(S_F^2))^2 = (A(S_F^2))^2 P^{L,\alpha}_{(l_\alpha+\frac{1}{2})} \oplus (A(S_F^2))^2 P^{L,\alpha}_{(l_\alpha-\frac{1}{2})} \tag{۳۶}$$

با تعریف $P^L := (P^{L,1}, P^{L,2})$، می توان (۳۶) را برای $A(S_F^2 \times S_F^2)$ـمدول تعمیم داد:

$$(A(S_F^2 \times S_F^2))^2 = (A(S_F^2 \times S_F^2))^2 P^L_{(l+\frac{1}{2})} \oplus (A(S_F^2 \times S_F^2))^2 P^L_{(l-\frac{1}{2})} \tag{۳۷}$$

با استفاده از (۳۴) نیز می توان خودتوان[۸] متناظرش را بدست آورد:

$$\Gamma^L_{(l\pm\frac{1}{2})} = 2P^L_{(l\pm\frac{1}{2})} - 1 = \pm\frac{2\alpha \cdot \mathbf{L}^L + 1}{\sqrt{4l(l+\frac{1}{2})+1}} \tag{۳۸}$$

تکانه ی زاویه ای راست و اسپین $\frac{1}{2}$ نیز با هم، با مقادیر بیشینه و کمینه ی $l_\alpha \pm \frac{1}{2}$ جفت شدگی خواهند داشت که تصویرگرهای راست متناظرشان $P^{R,\alpha}_{(l_\alpha\pm\frac{1}{2})}$، به صورت زیر با تغییر $L^L_{l_\alpha}$ به $-L^R_{l_\alpha}$ در (۳۴) بدست می آیند:

$$P^{R,\alpha}_{(l_\alpha \pm 1/2)} = \frac{1}{2}[1 \mp \frac{2\alpha \cdot \mathbf{L}^R_\alpha - 1}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha+1)+1}}] \tag{۳۹}$$

اینها نیز تصویرگرهای $A(S_F^2)$ـمدول راست تصویری ما هستند؛ در نتیجه می توان نوشت:

$$(A(S_F^2))^2 = (A(S_F^2))^2 P^{R,\alpha}_{(l_\alpha+\frac{1}{2})} \oplus (A(S_F^2))^2 P^{R,\alpha}_{(l_\alpha-\frac{1}{2})} \tag{۴۰}$$

به طور مشابه، مجددا با تعریف $P^R := (P^{R,1}, P^{R,2})$، می توان (۴۰) را برای $A(S_F^2 \times S_F^2)$ـمدول تعمیم داد:

$$(A(S_F^2 \times S_F^2))^2 = (A(S_F^2 \times S_F^2))^2 P^R_{(l+\frac{1}{2})} \oplus (A(S_F^2 \times S_F^2))^2 P^R_{(l-\frac{1}{2})} \tag{۴۱}$$

خودتوان متناظر نیز از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\Gamma^{R,\alpha}_{(l_\alpha\pm\frac{1}{2})} = 2P^{R,\alpha}_{(l_\alpha\pm\frac{1}{2})} - 1 = \mp\frac{2\alpha \cdot \mathbf{L}^R_\alpha - 1}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha+1)+1}} \tag{۴۲}$$

---

[۸] $Idempotents$

۵. جبر گینسپارگ ـ ویلسون فازی و عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی اسپین $\frac{۱}{۲}$

جبر گینسپارگ ـ ویلسون فازی $\mathcal{A}$ یک $\dagger$ ـ جبر روی $\mathbb{C}$ است که توسط دو $\dagger$ ـ ناوردای این ولوشن[۹] Γ_α و Γ'_α بدست می آیند:

$$\mathcal{A}_\alpha = \langle \Gamma_\alpha, \Gamma'_\alpha : \quad (\Gamma_\alpha)^۲ = (\Gamma'_\alpha)^۲ = I_{(۲l_\alpha+۱)(۲l_\alpha+۱)}, \quad (\Gamma_\alpha)^\dagger = \Gamma_\alpha, \quad (\Gamma'_\alpha)^\dagger = \Gamma'_\alpha \rangle, \quad \alpha = ۱, ۲ \tag{۴۳}$$

هر نمایشی از (۴۳) یک جبرگینسپارگ ـ ویلسون را محقق می سازد. دو عضو زیر را که توسط مولدهای Γ_α و Γ'_α جبر گینسپارگ ـ ویلسون $\mathcal{A}_\alpha$ ساخته می شوند، در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha,۱} &= \frac{۱}{۲}(\Gamma_\alpha + \Gamma'_\alpha)\,, \qquad & (\Gamma_{\alpha,۱})^\dagger &= \Gamma_{\alpha,۱}, \\ \Gamma_{\alpha,۲} &= \frac{۱}{۲}(\Gamma_\alpha - \Gamma'_\alpha)\,, \qquad & (\Gamma_{\alpha,۲})^\dagger &= \Gamma_{\alpha,۲} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

بدین ترتیب $\Gamma_{\alpha,۱}$ و $\Gamma_{\alpha,۲}$ با هم پادجابجا می شوند:

$$\{\Gamma_{\alpha,۱}, \Gamma_{\alpha,۲}\} = ۰ \tag{۴۵}$$

با برابر گرفتن $\Gamma^{L,\alpha}_{(l_\alpha \pm \frac{۱}{۲})}$ و $\Gamma^{R,\alpha}_{(l_\alpha \pm \frac{۱}{۲})}$ با Γ_α و Γ'_α خواهیم داشت:

$$\Gamma^\pm_{\alpha,۱} = \pm \frac{۲\alpha \cdot \mathcal{L}^F_\alpha + ۱}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha+۱)+۱}}, \qquad \Gamma^\pm_{\alpha,۲} = \pm \frac{۲\alpha \cdot (\mathbf{L}^L_\alpha + \mathbf{L}^R_\alpha)}{\sqrt{l_\alpha(l_\alpha+۱)+۱}} \tag{۴۶}$$

حال می توان عملگر دیراک فازی روی کره ی فازی $S^۲_F$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$D^\pm_{\alpha,F} = \sqrt{l_\alpha(l_\alpha+۱)+۱}\,\Gamma^\pm_{\alpha,۱} = \pm(۲\alpha \cdot \mathcal{L}^F_\alpha + ۱) \tag{۴۷}$$

در حالت حدی (۴۷) به عملگر دیراک روی کره ی $S^۲$ تبدیل می شود[۲۶]:

$$\lim_{l_\alpha \to \infty} D^\pm_{\alpha,F} = \pm ۲\alpha \cdot \mathcal{L}_\alpha \pm ۱ \tag{۴۸}$$

همچنین می توان عملگر کایرالیتی روی $S^۲_{\alpha,F}$ را به صورت $\gamma^\pm_{\alpha,F} = \Gamma^\pm_{\alpha,۲}$ تعریف کرد که در حالت حدی می شود:

$$\lim_{l_\alpha \to \infty} \gamma^\pm_{\alpha,F} = \pm \Sigma_\alpha \cdot x_\alpha \tag{۴۹}$$

و به راحتی می توان دید که:

$$\lim_{l_\alpha \to \infty} \{D^\pm_{\alpha,F}, \gamma^\pm_{\alpha,F}\} = ۰ \tag{۵۰}$$

نتیجه ی فوق همان چیزی است که از عملگرهای دیراک و کایرالیتی روی کره ی $S^۲$ انتظار داشتیم. حال به کمک تعمیم جبر گینسپارگ ـ ویلسون به $S^۲_F \times S^۲_F$ می توانیم عملگرهای دیراک و کایرالیتی را برای این فضا بسازیم. این جبر یک $\dagger$ ـ جبر روی $\mathbb{C}$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{A}_{l_۱,l_۲} = \langle \Gamma = \Gamma_۱\Gamma_۲, \quad \Gamma' = \Gamma'_۱\Gamma'_۲ \quad \Gamma^۲ = \Gamma'^۲ = ۱, \quad \Gamma^\dagger = \Gamma, \quad \Gamma'^\dagger = \Gamma' \rangle \tag{۵۱}$$

که در آن $\Gamma_{۱,۲}$ و $\Gamma'_{۱,۲}$ مولدهای این جبر روی هر کره ی فازی $S^۲_F$ هستند که توسط (۴۶) داده می شوند و در رابطه های جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[\Gamma_۱, \Gamma_۲] = [\Gamma_۱, \Gamma'_۲] = [\Gamma'_۱, \Gamma_۲] = ۰ \tag{۵۲}$$

---

[۹] *Involution*

در اینجا شعاع های کره ها را واحد می گیریم. یکی از مولدهای جبر (۵۱) را به عنوان عملگر کایرالیتی روی $S_F^2 \times S_F^2$ انتخاب خواهیم کرد چرا که در حد جابجایی هر دوی آنها تبدیل به عملگر کایرالیتی یکسان $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ روی $S^2 \times S^2$ جابجایی می شوند. عملگر دیراک فازی را نیز به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$D_F = \frac{\Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_1'\Gamma_2'}{2\sqrt{l_1(l_1+1)+1}\sqrt{l_2(l_2+1)+1}} \tag{۵۳}$$

به وضوح می توان دید که:

$$\Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_1'\Gamma_2' = \frac{1}{2}[(\Gamma_1 - \Gamma_1')(\Gamma_2 + \Gamma_2') + (\Gamma_1 + \Gamma_1')(\Gamma_2 - \Gamma_2')] \tag{۵۴}$$

حال، با استفاده از تعاریف زیر:

$$D_1^F = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_1')(\Gamma_2 + \Gamma_2')}{2\sqrt{l_1(l_1+1)+1}\sqrt{l_2(l_2+1)+1}}, \quad D_2^F = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_1')(\Gamma_2 - \Gamma_2')}{2\sqrt{l_1(l_1+1)+1}\sqrt{l_2(l_2+1)+1}} \tag{۵۵}$$

که در رابطه ی زیر صدق می کنند:

$$[D_1^F, D_2^F] = 0 \tag{۵۶}$$

عملگر دیراک (۵۳) روی $S_F^2 \times S_F^2$ را می توان بدین صورت نوشت:

$$D_F = D_1^F + D_2^F \tag{۵۷}$$

که در حد جابجایی (۵۷) به رابطه ی زیر میل خواهد کرد:

$$\lim_{l_{1,2}\to\infty} D_F = D_1 + D_2 = (2\cdot\mathcal{L}_1 + 1)(2\cdot\mathbf{x}_{i_2}) + (2\cdot\mathbf{x}_{i_1})(2\cdot\mathcal{L}_2 + 1) \tag{۵۸}$$

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از تصویرگرها و $A(S_F^2\times S_F^2)$ـمدول تصویری با تولید متناهی تاربندی اصلی $X_F^5 \to S_F^2\times S_F^2$، مولدهای جبر گینسپارگ ـ ویلسون فازی ساخته شدند و از روی آن، عملگرهای دیراک و کایرالیتی فازی معرفی و ساخته شدند. نکته ی قابل توجه در مورد این عملگر دیراک ساخته شده این است که حد جابجایی صحیحی برای آن وجود دارد.

مراجع

[1] P. Candelas and X.C. de la Ossa, *Comments on Conifolds,* Nucl. Phys. B ۳۴۲ (1990) 246.
[2] N. Acharyya and S. Vaidya, *Fuzzy conifold Y_F^6 and monopoles on $S_F^2 \times S_F^2$*, Int. J. Mod. Phys. A ۲۹ (2014) 1450006.
[3] W. Behr, F. Meyer and H. Steinacker, *Gauge theory on fuzzy $S^2 \times S^2$ and regularization on noncommutative, $\mathbb{R}^4$*, JHEP ۰۷ (2005) 040.
[4] P. C. Villarreal, R. D. Blando and B. Ydri, *Quantum effective potential for $U(1)$ fields on $S_L^2 \times S_L^2$*, JHEP ۰۵۰۹ (2005) 066.
[5] H. Aoki, Y. Hirayama and S.Iso, *Construction of a topological charge on fuzzy $S^2 \times S^2$ via a Ginsparg-Wilson relation*, Phys. Rev. D ۸۰ (2009) 125006.
[6] N. Acharyya and S. Vaidya, *Monopoles on S_F^2 from the fuzzy conifold,* JHEP ۰۶ (2013) 034.
[7] A. P. Balachandran and Pramod Padmanabhan, *Spin j Dirac operators on the fuzzy 2-sphere*, JHEP ۰۹ (2009) 120.
[8] A. P. Balachandran, G. Immirzi, *Fuzzy Ginsparg-Wilson algebra : A solution of the fermion doubling problem*, Phys. Rev. D ۶۸ (2003) 065023.
[9] A. Connes, *Noncommutative geometry*, (Academeic Press, New york, 1994).
[10] A. Connes, *Non-commutative Geometry and Physics, in Gravitation and Quantization,* Les Houches, Session LVII (Elsevier, Amsterdam, 1995).
[11] H. Fakhri and M. Lotfizadeh, *Dirac operators on the fuzzy AdS_2 with the spin $\frac{1}{2}$ and 1,* JMP ۵۲ (2011) 103508.
[12] A. P. Balachandran and Pramod Padmanabhan, *Spin j Dirac operators on the fuzzy 2-sphere,* JHEP ۰۹ (2009) 120.
[13] A. P. Balachandran, G. Immirzi, *Fuzzy Ginsparg-Wilson algebra : A solution of the fermion doubling problem,* Phys. Rev. D ۶۸ (2003) 065023.
[14] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan and B. Ydri, *The fermion doubling problem and noncomutative geometry,* Mod. Phys. Lett. A ۱۵ (2000) 1279.

[15] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, *Ginsparg-Wilson relation, topological invariants, and finite noncommutative geometry,* Phys. Rev. D ۶۷ (2003) 085005.
[16] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, *Ginsparg-Wilson relation and 't Hooft-Polyakov monopole on fuzzy 2-sphere,* Nucle. Phys. B ۶۸۴ (2004) 162-182.
[17] H. Aoki, S. Iso, T. Maeda and K. Nagao, *Dynamical generation of a nontrivial index on the fuzzy 2-sphere,* Phy. Rev. D ۷۱ (2005) 045017.
[18] H. Aoki, S. Iso and T. Maeda, *Ginsparg-Wilson Dirac operator in monopole background on the fuzzy 2-sphere,* phys. Rev. D ۷۵ (2007) 085021.
[19] Hossein Fakhri and Ali Imaanpur, *Dirac operator on fuzzy AdS_2,* JHEP ۰۳ (2003) 003.
[20] U. Carow-Watamura and S. Watamura, *Chirality and Dirac operator on noncommutative sphere,* Commun. Math. Phys. ۱۸۳ (1997) 365.
[21] U. Carow-Watamura and S. Watamura,*Differential calculus on fuzzy sphere and scalar field,* Int. J. Mod. Phys. A ۱۳ (1998) 3235.
[22] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, *Topologically nontrivial field configurations in noncommutative geometry,* Commun. Math. Phys , ۱۷۸(1996) 507-526.
[23] H. Grosse and P. Preˇsnajder, *The Dirac operator on the fuzzy sphere*, Lett. Math. Phys. ۳۳ (1995) 171.
[24] K. Nagao, *Ginsparg-Wilson Relation and Admissibility Condition in Noncommutative Geometry,* Progress of Theoretical Physics Supplement, ۱۷۱, (2007)232.
[25] R. G. Swan, *Vector bundles and projective modules, Trans. Am. Math. Soc.* ۱۰۵ (1962) 264-277.
[26] M. Mahmoodi and M. Lotfizadeh, *Super fuzzy Dirac operator on the super fuzzy Sphere*, ۱۱nd Seminar on Geometry and Topology (2021).

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، GT–263، صص. ۳۱۹–۳۲۲

انحنای تصویری در منیفلدهای پارا–ساساکی

فاطمه راعی[آ]، محمدباقرکاظمی*[،ب]

[آ]تهران، دانشگاه فرهنگیان
[ب]زنجان، دانشگاه زنجان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
ساختار تقریبا پارا–تماسی
التصاق نامتقارن
انحنای تصویری

2020 MSC:
50C15
50C45
50D25

چکیده

در این مقاله نوع خاصی از منیفلدهای لورنتزی که منیفلدهای پارا–ساساکی نامیده می‌شود، مورد مطالعه قرار گرفته است. تعمیمی از التصاق لوی–چویتا که غیرمتقارن بوده و نسبت به متر ریمانی منیفلد سازگار نیستند بر روی این منیفلدها تعریف شده و انحنای تصویری وابسته به این التصاق بررسی شده است.

۱. مقدمه

دو ویژگی مهم التصاق ریمانی یعنی متقارن (بدون تاب) بودن و سازگاری با متر، این التصاق را بسیار خاص و منحصربه فرد کرده است. تعمیم‌های مختلفی از این التصاق در حالت‌های متفاوت بیان شده است که از آن می‌توان به التصاق‌های نیم–متقارن، ربع–متقارن، غیرمتریک و... اشاره کرد [۲، ۴، ۵].
در بین ساختارهای مختلفی که بر روی منیفلدهای ریمانی با بعد فرد بررسی شده است، ساختار تقریبا تماسی و تقریبا پارا–تماسی دو دسته معروفی هستند [۱، ۶]. ما در اینجا التصاق‌های غیرمتقارن غیرمتریک را بر روی منیفلدهای لورنتزی که دارای ساختار تقریبا پارا–تماسی و پارا–ساساکی هستند مطالعه می‌کنیم.

یک منیفلد هموار $n-$ بعدی، پارا–ساساکی لورنتزی نامیده می‌شود هرگاه مجهز به $(۱,۱)$ میدان تانسوری ϕ، میدان برداری ξ، $۱-$ فرمی η و متریک لورنتزی g باشد که در روابط زیر برای هر میدان برداری X,Y صدق می‌کند [۳، ۶]:

$$\eta(\xi) = -۱, \quad \phi^۲(X) = X + \eta(X)\xi, \tag{۱}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y), \tag{۲}$$

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + ۲\eta(X)\eta(Y), \tag{۳}$$

*سخنران
پست الکترونیک: f.raei@cfu.ac.ir (فاطمه راعی)، mbkazemi@znu.ac.ir (محمدباقرکاظمی)

که ∇ یک التصاق لوی‌چویتا نسبت به متر لورنتزی g است. به طور خلاصه این منیفلدها را $LP-$ ساساکی می‌گوییم و می‌توان نشان داد که روابط زیر نیز در آن‌ها برقرار است:

$$\phi\xi = ۰,\ \ \eta(\phi X) = ۰,\ \ rank\phi = n - ۱. \tag{۴}$$

اگر تعریف کنیم

$$\Phi(X,Y) = g(\phi X,Y), \tag{۵}$$

آنگاه $\Phi(X,Y)$ یک میدان تانسوری متقارن $(۰,۲)$ است [۱]. و برای $۱-$ فرمی η داریم

$$(\nabla_X\eta)Y = \Phi(X,Y),\quad \Phi(X,\xi) = ۰. \tag{۶}$$

به علاوه برای میدان برداری‌های X،Y و Z روابط زیر را برقرار است [۶]

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{۷}$$

$$S(X,\xi) = (n-۱)\eta(X), \tag{۸}$$

$$S(\phi X,\phi Y) = S(X,Y) + (n-۱)\eta(X)\eta(Y), \tag{۹}$$

که به ترتیب R و S تانسور انحنا و ریچی M هستند.

۲. التصاق ربع متقارن وانحنای تصویری وابسته

تعریف ۱.۲. بر روی منیفلد تقریبا پارا–تماسی، التصاق $\bar{\nabla}$ را ربع متقارن گوییم هرگاه تانسور تاب آن در تساوی زیر صدق کند

$$\bar{T}(X,Y) = \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y, \tag{۱۰}$$

و اگر این التصاق با متر سازگار نباشد آن را غیرمتریک می‌نامیم.

فرض کنید M یک منیفلد $LP-$ ساساکی با التصاق لوی–چویتا ∇ باشد. اگر برای هر میدان برداری X و Y قرار دهیم

$$\bar{\nabla}_XY = \nabla_XY + \eta(Y)\phi X \tag{۱۱}$$

آنگاه $\bar{\nabla}$ یک التصاق خطی روی M است. می‌دانیم که تانسور تاب $\bar{T}$ وابسته به التصاق $\bar{\nabla}$ به صورت زیر است.

$$\bar{T}(X,Y) = \bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX - [X,Y]$$

از (۱۱) داریم

$$\bar{T}(X,Y) = \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y \tag{۱۲}$$

علاوه بر این از (۱۱) برای هر میدان برداری X و Y نتیجه می‌شود

$$(\bar{\nabla}_Xg)(Y,Z) = -\eta(Y)\Phi(X,Z) - \eta(Z)\Phi(X,Y), \tag{۱۳}$$

که نشان می‌دهد یک التصاق غیرمتریک ربع متقارن در M است.

تانسور انحنای $\bar{R}$ از التصاق غیرمتریک ربع متقارن $\bar{\nabla}$ روی M را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z. \tag{۱۴}$$

تانسور ریچی حاصل از $\bar{R}$ را با $\bar{S}$ نشان می‌دهیم.

تانسور انحنای تصویری M نسبت به التصاق لوی‌چویتا ∇ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\}. \tag{۱۵}$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید M یک منیفلد LP–ساساکی n–بعدی باشد. تانسور انحنای تصویری $\bar{P}$ از نوع (۱,۳) از M نسبت به التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$ به صورت زیر تعریف میکنیم

$$\bar{P}(X,Y)Z = \bar{R}(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{\bar{S}(Y,Z)X - \bar{S}(X,Z)Y\}. \tag{۱۶}$$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید M یک منیفلد LP–ساساکی n–بعدی با التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$ باشد آنگاه برای هر $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ داریم*

$$\begin{aligned}\bar{P}(X,Y)Z = P(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{&g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + \eta(Z)\eta(Y)X - \eta(Z)\eta(Y)X\} \\ &+ \Phi(X,Z)\phi Y - \Phi(Y,Z)\phi X.\end{aligned} \tag{۱۷}$$

اثبات . با جایگذاری (۵) و (۱۱) در (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned}\bar{P}(X,Y)Z &= \bar{R}(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{\bar{S}(Y,Z)X - \bar{S}(X,Z)Y\} \\ &= R(X,Y)Z + \Phi(X,Z)\phi Y - \Phi(Y,Z)\phi X + \eta(Z)\{\eta(Y)X \\ &- \eta(X)Y\} - \frac{۱}{n-۱}\{S(Y,Z)X + g(Y,Z)X + n\eta(Y)\eta(Z)X \\ &- S(X,Z)Y - g(X,Z)Y - n\eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &= P(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + \eta(Z)\eta(Y)X \\ &- \eta(Z)\eta(Y)X\} + \Phi(X,Z)\phi Y - \Phi(Y,Z)\phi X.\end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۲. *فرض کنید M یک منیفلد LP–ساساکی n–بعدی با التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$ باشد آنگاه برای هر $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ رابطه زیر برقرار است .*

$$\bar{P}(X,Y)Z + \bar{P}(Y,X)Z = ۰. \tag{۱۸}$$

اثبات . با استفاده از (۱۷) داریم

$$\begin{aligned}\bar{P}(X,Y)Z + \bar{P}(Y,X)Z &= P(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + \eta(Z)\eta(Y)X \\ &\quad -\eta(Z)\eta(Y)X\} + \Phi(X,Z)\phi Y - \Phi(Y,Z)\phi X \\ &\quad +P(Y,X)Z - \frac{۱}{n-۱}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + \eta(Z)\eta(X)Y \\ &\quad -\eta(Z)\eta(X)Y\} + \Phi(Y,Z)\phi X - \Phi(X,Z)\phi Y \\ &= P(X,Y)Z + P(Y,X)Z \\ &= R(X,Y)Z - \frac{۱}{n-۱}\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\} \\ &\quad +R(Y,X)Z - \frac{۱}{n-۱}\{S(X,Z)Y - S(Y,Z)X\} = ۰,\end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۲. *فرض کنید M یک منیفلد LP–ساساکی با التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$است در این صورت*

$$\bar{P}(X,Y)Z + \bar{P}(Y,Z)X + \bar{P}(Z,X)Y = ۰. \tag{۱۹}$$

اثبات . با توجه به متقارن بودن متر g و میدان تانسوری Φ و همچنین خاصیت بیانچی در تانسور انحنای ریمانی، انحنا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\bar{P}(X,Y)Z+\bar{P}(Y,Z)X+\bar{P}(Z,X)Y &= P(X,Y)Z-\frac{1}{n-1}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y+\eta(Z)\eta(Y)X\\
&\quad -\eta(Z)\eta(Y)X\}+\Phi(X,Z)\phi Y-\Phi(Y,Z)\phi X\\
&\quad +P(Y,Z)X-\frac{1}{n-1}\{g(Z,X)Y-g(Y,X)Z+\eta(X)\eta(Z)Y\\
&\quad -\eta(X)\eta(Y)Z\}+\Phi(Y,X)\phi Z-\Phi(Z,X)\phi Y\\
&\quad +P(Z,X)Y-\frac{1}{n-1}\{g(X,Y)Z-g(Z,Y)X+\eta(Y)\eta(X)Z\\
&\quad -\eta(Y)\eta(Z)X\}+\Phi(Z,Y)\phi X-\Phi(X,Y)\phi Z\\
&= P(X,Y)Z+P(Y,Z)X+P(Z,X)Y\\
&= R(X,Y)Z-\frac{1}{n-1}\{S(Y,Z)X-S(X,Z)Y\}\\
&\quad +R(Y,Z)X-\frac{1}{n-1}\{S(Z,X)Y-S(Y,X)Z\}\\
&\quad +R(Z,X)Y-\frac{1}{n-1}\{S(X,Y)Z-S(Z,Y)X\}\\
&= R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=\circ.
\end{aligned}$$

□

مراجع

[1] D.E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston, 2010.

[2] A. De, S. Uddin, , Gauss and Ricci Equations in contact manifolds with aquarter-symmetric metric connection. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 38(4):1689-703, 2015.

[3] K. Matsumoto, *On Lorentzian Paracontact manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci., 12: 151-156, 1989.

[4] A.K. Mondal, U.C. De, Some properties of a quarter-symmetric metric connection on a sasakian manifold, *Bull. Math. anal. appl.*, 24: 99-108, 2019.

[5] M.B. Kazemi, S. Slahvarzi, Curvatures of semi-symmetric metric connections on statistical manifolds, *Commun. Korean Math. Soc.* 36: 149-164, 2021.

[6] R. Rosca, *On Lorentzian P-Sasakian manifolds*, Clssical Analysis, World Scientific Publ., Signapore, 1992.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، DE–152، صص. ۳۲۳–۳۲۸

کاربرد تابع نمایی گویا تعمیم یافته برای یافتن جواب های دقیق معادله کسری گرایجکوف ـ ایوانف

عالیه آق[آ]، احمد شریف[آ]

[آ] گروه ریاضی دانشکده علوم پایه دانشگاه گنبد کاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تابع نمایی گویا تعمیم یافته
معادله شرودینگر غیرخطی
جواب‌های دقیق
معادله آشفته گرایجکوف ـ ایوانف

چکیده

یافتن جواب های تحلیلی دقیق برای معادلات جزئی یکی از چالش برانگیزترین مسائل در فیزیک ریاضی است. به طور کلی نمی توان جواب دقیقی برای این دسته از معادلات یافت. دراین موارد استفاده از روش های عددی و تقریبی اجتناب ناپذیر است. با این وجود، روش های جواب دقیق برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیشه ترجیح داده می شوند، زیرا آن ها جواب را مستقیماً بدون هیچ محدودیتی برای استفاده ارائه می دهند. هدف از این مقاله کاربرد روش تابع نمایی برای بررسی جواب های معادله گرایجکوف ـ ایوانف می باشد .برای این منظور، ابتدا چند جواب نوری جدید معادله را از طریق یک روش تحلیلی جدید پیشنهادی به نام روش تابع نمایی گویا تعمیم یافته به دست می آوریم. به منظور درک رفتار دینامیکی این جواب ها، چندین نمودار ترسیم شده است. برای به دست آوردن بهترین نتایج دو روش در این بحث مورد استفاده قرار گرفته اند. یافته های این مقاله می تواند برای رسیدن به جواب های سایر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی از اهمیت بالایی برخوردار باشد.

۱. مقدمه

معادلات شرودینگر[۱] غیرخطی اغلب از دیدگاه های مختلف مورد مطالعه قرار می گیرند. در سال های اخیر روش های عددی و تحلیلی زیادی برای حل این معادلات پیشنهاد شده است. معادله شرودینگر غیرخطی که بیش از همه مورد مطالعه قرار گرفته است، معادله ای است که دارای یک غیرخطی درجه سوم است. در این مقاله، ما معادله غیرخطی شرودینگر از مرتبه ۵ را که معادله آشفته گرایجکوف ـ ایوانف[۲] نام دارد را مورد بحث قرار می دهیم. دستاورد اصلی این مقاله استفاده از روشی جدید برای به دست آوردن جواب های جدید برای معادلات شرودینگر غیرخطی است. به طور خاص، ما در نظر می گیریم که معادله آشفته گرایجکوف ـ ایوانف توسط معادله زیر ارائه شده است،

$$\begin{aligned} &iD_t^{\alpha}q + aD_x^{2\alpha}q + b\,|q|^4\,q = \\ &i\left[cq^2D_x^{\alpha}\overline{q} + \lambda_1 D_x^{\alpha}q + \lambda_2 D_x^{\alpha}\left(|q|^2\,q\right) + \theta D_x^{\alpha}\,|q|^2\,q\right], \end{aligned} \qquad (1)$$

این مدل در سال های اخیر به دلیل اهمیت بالای آن، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. در سال های اخیر، بسیاری از روش های جدید برای یافتن جواب های دقیق از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی ارائه شده اند،که یکی از بهترین این روش ها، روش سینوس ـ گردون[۳] است [۱–۳]. روش سینوس ـ گردون یک روش حل کارامد و موثر برای محاسبه جواب های موج دقیق و یکی از مستقیم

[۱] Schrodinger
[۲] Gerdjikov-Ivanov
[۳] method Sine-Gordon

ترین و موثرترین روشهای جبری برای یافتن جواب های دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی است[۴-۷] . تفاوت این روش با سایر روش های قدیمی ، اجتناب از محاسبات پیچیده و خسته کننده و نتیجه گیری دقیق تر و صریح تر برای تعیین جواب های موج آشفته با دقت بالا است.

۲. تحلیل روش

نحوه استفاده از این روش با انجام مراحل مختلف از قرار ذیل می باشد.
۱.درابتدا یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی معمولی را برای $q = q\,(x,t)$ در نظر می گیریم.

$$\mathcal{L}(\psi, \psi', \psi'', \ldots) = ۰, \tag{۲}$$

که با تبدیل موج از $q\,(x,t) = Q\,(\xi)$و $\xi = \delta x - lt$ ، معادله (۲) تبدیل به یک معادله دیفرانسیل معمولی می شود که توسط

$$Q(\psi, \psi', \psi'', \ldots) = ۰, \tag{۳}$$

نمایش داده می شود.

۲.حال فرض می کنیم که معادله (۳) جواب دقیقی را می پذیرد

$$\psi\,(\xi) = A_۰ + \sum_{k=۱}^{M} A_k \psi\,(\xi)^k + \sum_{k=۱}^{M} B_k \psi\,(\xi)^{-k}, \tag{۴}$$

که در آن

$$\begin{array}{l} \psi\,(\xi) = \frac{p_۱ e^{q_۱\xi} + p_۲ e^{q_۲\xi}}{p_۳ e^{q_۳\xi} + p_۴ e^{q_۴\xi}}, \\ p_i, q_i (۱ \le i \le ۴) \\ A_۰, A_k, B_k (۱ \le k \le M), \end{array} \tag{۵}$$

و p_i, q_i ها و $A_۰, A_k, B_k$ها پارامترهایی هستند که بعدا محاسبه می شوند. و Mیک ثابت است که با اعمال تعادل همگن در رابطه (۳) ارزیابی می شود.
۳. با جایگزین معادله (۴) در (۳) همراه با معادله (۵) و مساوی قراردادن ضرایب تمام توان های ممکن از $e^{q_i\xi}, i = ۱,۲,۳,\ldots.$ با صفر ودرنهایت با حل دستگاه غیرخطی و جایگزینی جواب های به دست آمده در معادلات (۴) و (۵) شکل صریح جواب های (۲) استخراج خواهد شد.

۳. کاربرد روش تابع نمایی

در ادامه جهت حل معادله (۱) با استفاده از روش مطرح شده تغییرمتغیر موجی زیر را با استفاده از مشتقات کسری توافقی در نظرمی گیریم

$$\begin{array}{c} q\,(x,t) = Q\,(\xi)\, e^{i\phi(x,t)}, \\ \xi = \left(\frac{۱}{\alpha}\right) x^\alpha - \left(\frac{v}{\alpha}\right) t^\alpha, \\ \phi = \left(-\frac{k}{\alpha}\right) x^\alpha + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right) t^\alpha, \end{array} \tag{۷}$$

با جاگذاری (۷) در معادله (۱) از قسمت مختلط خواهیم داشت

$$(v + \lambda_۱ + ۲ak) + (c + ۳\lambda_۲ + ۲\theta)\, Q^۲ = ۰ \tag{۸}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$v = -\lambda_۱ - ۲ak, \qquad \theta = -\frac{۱}{۲}\,(c + ۳\lambda_۲) \tag{۹}$$

و از قسمت حقیقی فرمول زیر استخراج می شود

$$aQ'' - \left(\omega + ak^{۲} + \lambda_{۱}k\right) Q + (c - \lambda_{۲})\, kQ^{۳} + bQ^{۵} = ۰. \qquad (۱۰)$$

در ادامه با در نظر گرفتن بالانس همگن بین $Q^{۵}$ و Q'' خواهیم داشت $M = \frac{۱}{۲}$. بنابراین برای بدست آوردن جواب های بسته نیاز به تغییر متغیر $Q = \Re^{۲}$ داریم با جاگذاری این تغییر متغیر در معادله (۱۰) خواهیم داشت

$$a\left(۲\Re\Re'' - \left(\Re'\right)^{۲}\right) - ۴\left(\omega + ak^{۲} + \lambda_{۱}k\right)\Re^{۲} + ۴\,(c - \lambda_{۲})\, k\Re^{۳} + ۴b\Re^{۴} = ۰. \qquad (۱۱)$$

اکنون با در نظر گرفتن بالانس همگن در معادله (۱۱) خواهیم داشت $M = ۱$. بنابراین بر اساس معادله (۴) داریم :

$$\Re\,(\xi) = A_{۰} + A_{۱}\psi\,(\xi) + \frac{B_{۱}}{\psi(\xi)}. \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۲) در (۱۱) و با در نظر گرفتن مراحل مطرح شده برای روش مد نظر جواب های معادله (۱) را به صورت زیر داریم:

حالت اول: با در نظر گرفتن $p = [۰, ۲, -۲, ۰], q = [۰, ۰, -۱, ۰]$ و جاگذاری در معادله (۵) خواهیم داشت

$$\psi(\xi) = e^{-\xi} \qquad (۱۳)$$

با جاگذاری (۱۳) در معادله (۱۲) و سپس در معادله (۱۱) خواهیم داشت

$$A_{۰} = \frac{-k(c-\lambda_{۲})}{۴b}, A_{۱} = \frac{۱}{۲}, B_{۱} = \frac{۲k^{۲}(c-\lambda_{۲})^{۲}}{۳۲b^{۲}},$$
$$\omega = \frac{(-۴ab-(c-\lambda_{۲})^{۲})k^{۲}-۴k\lambda_{۱}b+ab}{۴b}.$$

حال با جاگذاری مقادیر بدست آمده بالادر معادله (۱۲) جواب معادله (۱۱) را به صورت زیر

$$\Re\,(\xi) = \frac{-k(\mathrm{c} - \lambda_{۲})}{۴b} + \frac{۱}{۲}e^{-\xi} + \frac{۲k^{۲}(c - \lambda_{۲})^{۲}}{۳۲b^{۲}}e^{\xi}.$$

از این رو

$$Q = \left(\frac{-k(\mathrm{c} - \lambda_{۲})}{۴b} + \frac{۱}{۲}e^{-\xi} + \frac{۲k^{۲}(c - \lambda_{۲})^{۲}}{۳۲b^{۲}}e^{\xi}\right)^{۲}$$

و در نهایت جواب معادله (۱) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$q_{۱}\,(x,t) = \left(\frac{-k(c-\lambda_{۲})}{۴b} + \frac{۱}{۲}e^{-\left(\left(\frac{۱}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{v}{\alpha}\right)t^{\alpha}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{۲k^{۲}(c-\lambda_{۲})^{۲}}{۳۲b^{۲}}e^{\left(\left(\frac{۱}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{v}{\alpha}\right)t^{\alpha}\right)}\right)^{۲} e^{\,i\left(\left(-\frac{k}{\alpha}\right)x^{\alpha}+\left(\frac{\frac{(-۴ab-(c-\lambda_{۲})^{۲})k^{۲}-۴k\lambda_{۱}b+ab}{۴b}}{\alpha}\right)t^{\alpha}\right)}$$

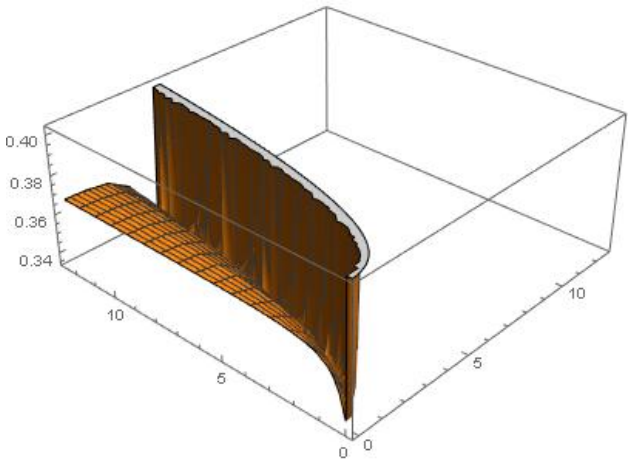
در تصاویر زیر رفتار گرافیکی جواب $q_{۱}\,(x,t)$ به ازای تغییرات $\alpha = ۰/۳$ و $\alpha = ۰/۹$ نماد مشتق کسری بیان شده است.

حالت دوم : با در نظر گرفتن $p = [۱, ۰, ۱, -۱], q = [۱, ۰, ۰, ۱]$ و جاگذاری در معادله (۵) خواهیم داشت

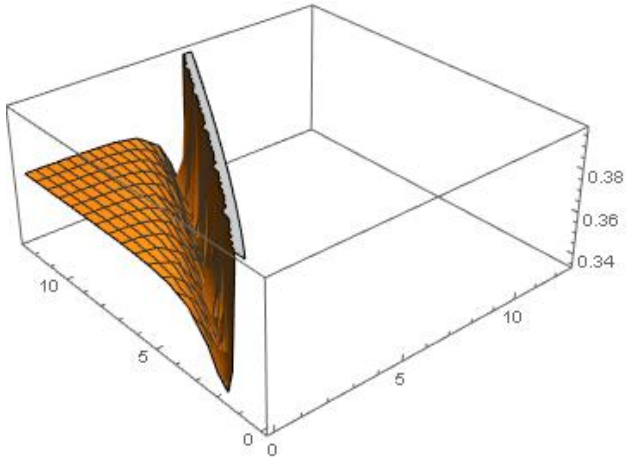
$$\psi\,(\xi) = \frac{e^{\xi}}{۱ - e^{\xi}} \qquad (۱۴)$$

با جاگذاری (۱۴) در معادله (۱۲) و سپس در معادله (۱۱) خواهیم داشت

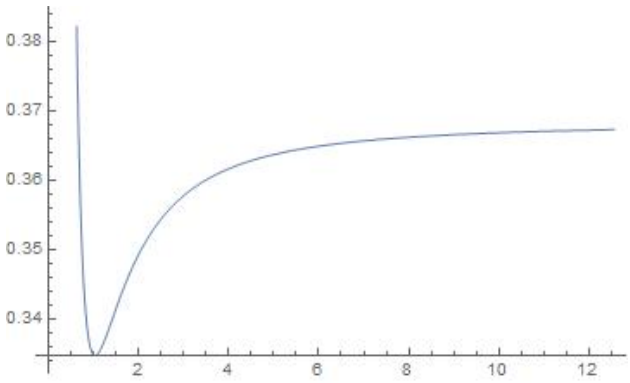
$$B_{۱} = \frac{\sqrt{(۳۲ak^{۲}+۳۲k\lambda_{۱}-۸a+۳۲w)b+۹k^{۲}(c-\lambda_{۲})^{۲}}+(-c+\lambda_{۲})k}{۱۶b},$$
$$A_{۰} = \frac{\sqrt{(۳۲ak^{۲}+۳۲k\lambda_{۱}-۸a+۳۲w)b+۹k^{۲}(c-\lambda_{۲})^{۲}}+۳(-c+\lambda_{۲})k}{۸b},$$
$$A_{۱} = (((۸ab + ۳(c - \lambda_{۲})^{۲})k^{۲} + ۸bk\lambda_{۱} +$$
$$۲b\,(a + ۴w))\sqrt{()۳۲ak^{۲} + ۳۲k\lambda_{۱} - ۸a + ۳۲w)b + ۹k^{۲}\,(c - \lambda_{۲})^{۲}} -$$
$$۷۲k(c - \lambda_{۲})((ab + (۵(c - \lambda_{۲})^{۲})/۲۴)k^{۲} + bk\lambda_{۱} + b(a + ۳۶w)/۳۶))$$
$$/(۱۲۸b((ab + (۳(c - \lambda_{۲})^{۲})/۸)k^{۲} + bk\lambda_{۱} + b(a + ۴w)/۴))$$



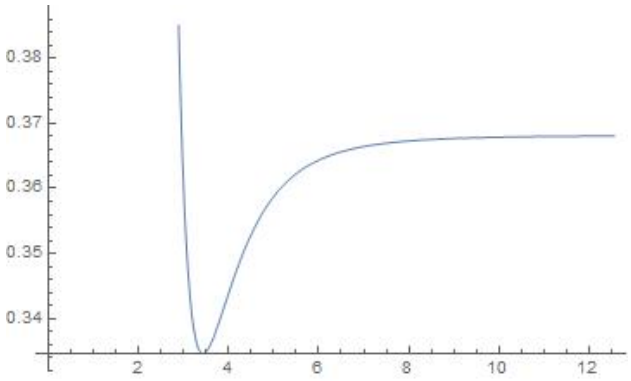
شکل ۱: گرافیک سه بعدی q_1 به ازای $\alpha = ۰/۹$



شکل ۲: گرافیک سه بعدی q_1 به ازای $\alpha = ۰/۳$



شکل ۳: گرافیک دو بعدی q_1 به ازای $\alpha = ۰/۹$



شکل ۴: گرافیک دو بعدی q_1 به ازای $\alpha = 0.3$

حال با جاگذاری مقادیر بدست آمده بالادر معادله (۱۲) جواب معادله (۱۱) را به صورت زیر

$$\Re(\xi) = \frac{\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}+3(-c+\lambda_2)k}{8b} +$$
$$[(((8ab+3(c-\lambda_2)^2)k^2+8bk\lambda_1+$$
$$2b(a+4w))\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}-$$
$$72k(c-\lambda_2)((ab+(5(c-\lambda_2)^2)/24)k^2+bk\lambda_1+b(a+36w)/36))$$
$$/\left(128b\left(\left(ab+\left(3(c-\lambda_2)^2\right)/8\right)k^2+bk\lambda_1+b(a+4w)/4\right)\right)\frac{e^{\xi}}{1-e^{\xi}}+$$
$$\left(\frac{\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}+(-c+\lambda_2)k}{16b}\right)\frac{1-e^{\xi}}{e^{\xi}}.$$

و در نهایت جواب معادله (۱) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$q_2(x,t) = \left\{\frac{\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}+3(-c+\lambda_2)k}{8b} +\right.$$
$$[(((8ab+3(c-\lambda_2)^2)k^2+8bk\lambda_1+$$
$$2b(a+4w))\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}-$$
$$72k(c-\lambda_2)((ab+(5(c-\lambda_2)^2)/24)k^2+bk\lambda_1+b(a+36w)/36))$$
$$/\left(128b\left(\left(ab+\left(3(c-\lambda_2)^2\right)/8\right)k^2+bk\lambda_1+b(a+4w)/4\right)\right)\frac{e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)t^{\alpha}}}{1-e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)t^{\alpha}}}+$$
$$\left.\left(\frac{\sqrt{(32ak^2+32k\lambda_1-8a+32w)b+9k^2(c-\lambda_2)^2}+(-c+\lambda_2)k}{16b}\right)\frac{1-e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)t^{\alpha}}}{e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{\alpha}-\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)t^{\alpha}}}\right\}\times e^{i\left(\left(-\frac{k}{\alpha}\right)x^{\alpha}+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)t^{\alpha}\right)}.$$

۴. بحث ونتیجه گیری

در این تحقیق، یک کاربرد جدید از روش تابع نمایی گویا تعمیم یافته را برای استخراج جواب های دقیق (جواب های سالیتونی، متناوب و گویا) معادله گرابجکو ـایوانف ارائه داده ایم. عملکرد این روش قابل اعتماد و موثر است و بیشتر جواب های سالیتونی را بدست می آورد و این روش مزیت بیشتری نسبت به دیگر روش های مستقیم جبری دارد از جمله اجتناب از محاسبات پیچیده و خسته کننده و نتیجه گیری دقیق تر و صریح تر برای تعیین جواب های موج منزوی با دقت بالا است.

مراجع

[1] Miller K.S, Ross. B. (1993), An Introduction to the Fractional and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, New York .
[2] Luchko. Y, Gorenflo. R (1998), The initial-value problem for some fractional differential equations with Caputo derivative, Preprint eries A08-98, Fachbereich Mathematik and Informatic, Freie Universitat,
Berlin.
[3] Podlubny. I. (1999), Fractional Differential Equations, Academic press, New York.
[4] Wakil, E.L-, Madkour, S.A., , M.A., Abdou, M.A. (2007), Application of exp-function method for nonlinear evolution equations with variable coe_cients,Phys. Lett., A 369, 62-69.
[5] Kudryashov, N.A., Loguinova, N.B. (2008), Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, Appl. Math. Comput., 205, 396-402.
[6] Zhao,Y, Liu. M., H and Yang. Y.-J (2011), Exact solutions for the coupled Sine-Gordon equations by a new hyperbolic auxiliary function method, Applied Mathematical Sciences, vol. 5, no. 33-36, pp. 1621–1629.
[7] Zhao. Y.M, Li. W., and Yang. Y.J. (2010), New exact solutions of coupled sine-Gordon equations using symbolic computation,"Mathematical Sciences Research Journal, vol. 14, no. 4, pp. 79– 86.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–154، صص. ۳۲۹–۳۳۳

بهبود عملکرد شبکه عصبی با الگوریتم بهینه سازی وال (WOA) به منظور پیش بینی نرخ ارز

نفیسه پارسی مود[آ]

[آ] مربی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور مرکز تویسرکان، همدان، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
نرخ ارز
شبکه عصبی پرسپترون چند لایه
سری زمانی
الگوریتم وال

چکیده

با توجه به نوسانات نرخ ارز در ایران پیش بینی آن یکی از چالش های مهم برای گروه های مختلف در کشور می باشد . دقت پیش بینی ها از جمله مهم ترین مشخصه های مدل های پیش بینی است و تلاش برای بهبود بخشیدن کارایی مدل های سری زمانی هرگز متوقف نشده است.در این مقاله با داده های سری زمانی چند نرخ ارز از سال ۱۳۹۵ تا سال ۱۴۰۰ به پیش بینی نرخ ارز در افق زمانی کوتاه مدت در ایران پرداخته شده است. مدل استفاده شده در این مقاله یک مدل ترکیبی از شبکه عصبی مصنوعی پرسپترون چند لایه (*MLP*) با الگوریتم بهینه سازی وال می باشد. در این مدل متغیر های ورودی، داده ها با وقفه های مختلف می باشد . نتایج حاصله نشان می دهد که مدل ارائه شده نسبت به مدل شبکه عصبی مصنوعی پرسپترون چند لایه از عملکرد بهتری برخوردار می باشد .

۱. مقدمه

یکی از متغیرهای مهم و کلیدی اقتصاد، که در رفتار دیگر متغیرها در اقتصاد داخل و بین الملل اثرگذار است، نرخ ارز است که نوسانات آن می تواند تأثیرات قابل ملاحظه ای در وضعیت بازرگانی خارجی کشورها و جریان سرمایه و به طور کلی تراز پرداخت ها داشته باشد. در کشورهای درحال توسعه، که تولید وابستگی زیادی به مواد اولیه، واسطه ای و سرمایه ای خارجی دارد، تأثیرات این متغیر شدیدتر و ماندگارتر است. به همین علت، شناسایی عوامل مؤثر در نرخ ارز و پیش بینی رفتار نرخ ارز از موضوع های حائزاهمیت اقتصاد بین الملل است و موردتوجه سیاست گذاران و محققان اقتصادی، به ویژه در کشورهای درحال توسعه است.[۸] برای پیش بینی از روش های مختلفی از جمله روش های آماری مثل رگرسیون، مدلهای سریهای زمانی مانند اتورگرسیو و میانگین متحرک (ARIMA) و نمو هموار و... استفاده می شود اما با رشد روش های فراابتکاری و هوش مصنوعی ، استفاده از روش های شبکه عصبی و الگوریتم های بهینه سازی برای پیش بینی مورد توجه قرار گرفته و محققان زیادی در مقالات پیش بینی از آن استفاده کرده اند. در این مقاله با استفاده از الگوریتم بهینه سازی وال خطای روش شبکه عصبی را به منظور پیش بینی ارز در ایران بهبود داده می شود .

۲. مروری بر مطالعات پیشین

برای پیش بینی نرخ ارز، روش ها و الگوهای سری زمانی متعددی ارائه شده است و محققان زیادی در این زمینه به پژوهش پرداخته اند. خاشعی و همکاران در تحقیق خود یک روش ترکیبی جدید از پرسپترون های چندلایه با استفاده از شبکه های عصبی احتمالی ارائه دادند. این روش ها تغییرات و الگوهای خاص موجود در سری زمانی نرخ ارز را بهتر و کارآتر مدل سازی کرد و عملکرد و دقت مدل در پیش بینی سری زمانی افزایش یافت.[۵] زراء نژاد و همکاران پنج نرخ ارز را با استفاده از دو الگوی شبکه های عصبی نرخ روزانه ی ارز را پیش بینی نموده

پست الکترونیک: n.parsi.m@gmail.com (نفیسه پارسی مود)

اند .نتایج پژوهش نشان داد الگوی غیرخطی شبکه ی عصبی برای پیش بینی نرخ های ارز در مقایسه با الگوی خطیARIMA عملکرد بهتری دارد و الگوی خطیARIMA فقط در هشت مورد عملکرد مناسب تری ا ز الگو ی شبکه عصبی داشته است.[۷] خداویسی و ملابهرامی دو الگو براساس معادلات دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی ژئومتری (GBM) و الگوی انتشا ر – پرش مرتن (MJD) را جهت برازش و پیش بینی روند آتی سری زمانی نرخ ارز بازار رسمی ایران ارائه کردند. آنها با استفاده ازداده های روزانه نرخ ارز بازار رسمی ایران (ریال بر دلار) و مقا یسه بین این الگوها و الگوهای اقتصادسنجی ARIMA نشان دادند الگوی MJD بر الگوهایGBM و ARIMA در پیش بینی خارج از نمونه ی نر خ ارز براساس گشتاورهای RMSE برتری دارد.[۶] یارمحمدی و محمودوند در پژوهش خود از روش تحلیل مجموعه مقادیر تکین (SSA) و برای الگوسازی و پیش بینی نرخ روزانه دلا ربه ریال از الگوی ARIMA و برای ارزیابی کیفیت الگو ارائه شده ا ز یک الگوی رقیب استفاده کرده اند. آنها برای مقایسه، خطای برازش (درون نمونه ای) و خطای پیش بینی (برون نمونه ای) برای گام های پیش بینی کوتاه مدت، متوسط و بلندمدت استفاده کردند. نتایج نشان می دهد کهSSA می تواند بعنوان یک روش توانمند برای این منظور بکار گرفته شود.[۱۳]گالشچاک در مقالـه ی خـود با بکارگیری شبکه ی عصبی مصنوعی و داده های تابلویی سری زمانی نرخ های ارز یورو، پوند و ین ژاپن نسبت به دلار به پیش بینی آنها پرداختند و به نتایج با دقتی مناسب که قابل استفاده در سیستم های عملی باشد، رسیدند.[۱]سرمپینیس و همکاران به پیش بینی نرخ ارز با شبکه های عصبی تطبیقی با بکارگیری توابع تابع پایه شعاعی و روش بهینه سازی انبوه ذرات پرداختند و نتایج تحقیق با سه نسبت نرخ نشان داد که این مدل نسبت به مدل های دیگر پیش بینی بهتری ارائه می دهد.[۴] منصوری گرگری و خداویسی در مقاله ای با مقایسه الگوهای رشد لجستیک هاروی، هاروی، شبکه عصبی غیر خطی اتورگرسیو و طراحی و یافتن الگوی بهینه پیش بینی نرخ ارز در ایران را انجام دادند و نتایج نشان می دهد که ترکیب الگوی هاروی با جزء غیر خطی یکی از مزیت های اساسی به شمار آمده و بهتر از الگوهای دیگر نرخ ارز را پیش بینی می کند .[۸] هاشمی دیزج و دیگران در مقاله ای به بررسی عملکرد شش شبکه ی عصبی مصنوعی مختلف ایستا و پویا برای پیش بینی نرخ ارز با رویکردهای بنیادی، تکنیکال و ترکیبی و با بکارگیری داده های فصلی طی دوره زمانی ۱۳۸۳ تا۱۳۹۶ برای متغیرهای تاثیرگذار روی نرخ ارز شامل تورم، نقدینگی و تولید ناخالص داخلی برای دو کشور ایران و آمریکا، انجام دادند. نتایج نشان می دهد که بهترین عملکرد مربوط به شبکه ی ایستای تکنیکال و با ساختار شانزده نرون و چهار وقفه میسر شده است که پیش بینی نسبتاً دقیقی از نرخ ارز علیرغم تعداد کم داده های ورودی ارائه می دهد. همچنین دومین عملکرد مناسب مربوط به شبکه ی ایستای ترکیبی با ساختار ده نرون و دو وقفه می باشد.[۱۲] فتاحی و همکاران در تحقیقی که برای پیش بینی نرخ ارز است با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک یک الگوی ترکیبی شامل مدل های ساختاری و سری زمانی ارائه می دهند و سپس عملکرد آن را با روشهای دیگر مورد مقایسه قرار می دهد و به این نتیجه می رسند که روشی که ارائه داده اند از دقت بالاتری نسبت به روشهای دیگر دارد. [۹]

۳. مبانی نظری

۳ .۱ . شبکه عصبی مصنوعی

شبکه های عصبی مصنوعی از جمله روش هایی هستند که قادر به تخمین موارد غیرخطی متعدد در داده ها بوده و یک چارچوب محاسبه ای انعطاف پذیر برای دامنه وسیعی از مسائل غیرخطی اند. یکی از مزیت های بارز اینگونه مدلها نسبت به مدلهای دیگر غیرخطی، این است که شبکه هـای عـصبی مصنوعی یک تقریب زننده جهانی هستند که می توانند هر نوع تابعی را با دقت دلخواه تقریب بزنند. اینگونه از شبکه ها نیاز به هیچ گونه پیش فرضی در مورد شکل مدل در فرایند مدل سازی نداشته و به طورکلی یک مدل مبتنی بر داده هستند. نقطه قوت شبکه هـای عـصبی پـردازش مـوازی اطلاعـات موجـود در داده هاست، [۵] انواع مختلفی از شبکه های عصبی مصنوعی وجود دارند کـه به منظور پیش بینی مورد استفاده قرار می گیرنـد در این مقاله از شبکه عصبی پرسپترون چند لایه (MLP) استفاده شده است. این گونه مدل ها از سه لایه برای پردازش اطلاعات متصل به هم تشکیل شده اند . رابطه بین خروجی (y_t) و ورودی ها (y_{t-1}، ... ، y_{t-p}) در این گونه از شبکه ها به این ترتیب است:

$$y_t = b_0 + \sum_{j=1}^{q} w_j . g\left(b_{0j} + \sum_{i=1}^{p} w_{ij} . y_{t-i}\right) + \varepsilon_t \qquad (۱)$$

به طوری که w_j ، w_{ij} عوامل مدل بوده که اغلب وزن های اتصالی نامیده می شوند ،p تعداد گره های ورودی و q تعداد گره های مخفی هستند.توابع سیگموئیدی)رابطه ۲) و خطی از جمله توابعی هستند که اغلب به عنوان توابع فعال سازی برای لایه های مخفی و خروجی مورد استفاده قرار می گیرند.

$$sig(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} \qquad (۲)$$

از این رو مدل شبکه های عصبی مصنوعی رابطه) ۱) در حقیقت به عنوان یک نگاشت غیر خطی از مشاهده های گذشته به مقدار آینده خواهند بود، به عبارت دیگر:

$$y_t = f\left(y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}, w\right) + \varepsilon_t \qquad (۳)$$

۲.۳ . *الگوریتم بهینه سازی وال*

نهنگ ها موجودات فانتزی می باشند و به عنوان بزرگترین پستانداران و اغلب به عنوان شکارچیان درنظرگرفته می شوند. یکی از بزرگترین نهنگ های بی دندان، نهنگ کوهان دار می باشد که طعمه های مورد علاقه شان گله کریل و ماهی کوچک هستند. جالب ترین مسئله در مورد نهنگ های کوهان دار شکار خاص آنها است. این رفتار کاوش گرانه به نام روش تغذیه شبکه حباب شناخته می شود که این تغذیه با ایجاد حباب های متمایزدر طول یک دایره یا مسیری به شکل ۹ انجام می شود. با این حال؛گلدبوگن و همکاران [۲]این رفتار را با استفاده از حسگرهای برچسب گذاری شده موردبررسی قرار داده اند و دو مانور مرتبط با حباب پیدا کردند و آنها را "به سمت بالا–مارپیچی" و "حلقه دوبل "نامیده اند. دراین بخش مدل ریاضی از محاصره طعمه، مانور تغذیه مارپیچی شبکه حباب و جستجو که توسط میرجلیلی و لویس[۳]ارائه شده است، تشریح می گردد

۱.۲.۳ . *محاصره طعمه*

نهنگ های کوهان دار می توانند محل طعمه را تشخیص داده و آنها را محاصره کنند. الگوریتمWOA فرض می کند که درحال حاضر نامزد بهترین راه حل، طعمه هدف می باشد. این رفتار توسط معادلات زیر نشان داده شده است:

$$\vec{D} = \left|\vec{C}.\vec{X}\,(t) - \vec{X}\,(t)\right| \quad (۴)$$

$$\vec{X}\,(t+۱) = \vec{X^*}\,(t) - \vec{A}.\vec{D}\ (۵)$$

$$\vec{A} = ۲\vec{a}.\vec{r} - \vec{a}\ (۶)$$

$$\vec{C} = ۲\vec{r}\ (۷)$$

در روابط بالا t تکرار فعلی را نشان می دهد، $\vec{A}$ و $\vec{C}$بردار ضرایب هستند، $\vec{X^*}$بردار موقعیت بهترین ، راه حل به دست آمده تاکنون و X بردار موقعیت جسم است. a به صورت خطی از ۲ تا ۰ در طول تکرار کاهش می یابد و r یک بردار تصادفی $[۰،۱]$ است.

۲.۲.۳ . *روش حمله شبکه حباب (فاز بهره‌برداری)*

به منظور مدل سازی ریاضی رفتار شبکه حباب نهنگ کوهان دار، دو روش به شرح زیر طراحی شده است:

۱–کاهش سازوکارمحاصره: این رفتار با کاهش مقدار a در رابطه (۶) به دست می آید. باید توجه داشت که محدوده نوسان $\vec{A}$ نیز به aکاهش می یابد؛ به عبارت دیگر $\vec{A}$ یک مقدار تصادفی در بازه $[-a\ ،\ a]$ است که درآن aاز مقدار ۲ به ۰ در طول دوره تکرار کاهش می یابد .

۲– موقعیت به روزرسانی مارپیچ: معادله مارپیچی بین موقعیت نهنگ و موقعیت طعمه برای تقلید از حرکت مارپیچ شکل نهنگ کوهان دار به شرح زیر است:

$$\vec{X}\,(t+۱) = \vec{D'}.e^{BL}.\cos(۲\pi L) + \vec{X^*}\,(t) \quad (۸)$$

که

$$\vec{D'} = \left|\vec{X^*}\,(t) - \vec{X}\,(t)\right| \quad (۹)$$

است و فاصله نهنگ iام به طعمه (بهترین راه حل به دست آمده تاکنون) را نشان می دهد، b یک ثابت برای تعریف شکل مارپیچی لگاریتمی است و Lکه یک عدد تصادفی در بازه $[-۱،۱]$ می باشد.

۳.۲.۳ . *جستجو برای طعمه (فاز اکتشاف)*

رویکرد مشابه بر اساس تنوع بردار A می تواند برای جستجوی طعمه)اکتشاف(مورداستفاده قرار گیرد. لذا این سازوکار و $|A| > ۱$ با تأکید بر اکتشاف و اجازه دادن به الگوریتم WOA باعث انجام یک جستجوی کلی می شود. مدل ریاضی به شرح زیر است:

$$\vec{D} = \left|\vec{C}.\vec{X_{rand}} - \vec{X}\right| \quad (۱۰)$$

$$\vec{X}\,(t+۱) = \vec{X_{rand}} - \vec{A}\vec{D} \quad (۱۱)$$

که در آن $\vec{X_{rand}}$ یک بردار موقعیت تصادفی)یک نهنگ تصادفی(است که از جمعیت فعلی انتخاب شده است. شایان ذکر است WOA فقط شامل دو پارامتر اصلی داخلی (A، C) است که باید تنظیم شود.[۱۰]

جدول ۱: میانگین مجذورات خطا شبکه عصبی MLP برای داده های آزمایش

تعداد نرون در لایه های پنها ن	۱۰, ۱۰	۱۰, ۷	۱۰, ۵	۵, ۷	۵, ۵
ین	۹٫۳۸۰۹ × ۱۰$^{-۵}$	۸٫۸۸۷۷ × ۱۰$^{-۵}$	۹٫۲۱۵۴ × ۱۰$^{-۵}$	۹٫۴۱۰۲×۱۰$^{-۵}$	۰٫۰۰۰۱۱۱۰۶
یوان	۵٫۷۸۹۲ × ۱۰$^{-۵}$	۳٫۴۷۸۵ × ۱۰$^{-۵}$	۳٫۱۱۴۷ × ۱۰$^{-۵}$	۵٫۵۳۳۴ × ۱۰$^{-۵}$	۳٫۳۴۰۹ × ۱۰$^{-۵}$
پوند	۹٫۷۷۹ × ۱۰^{۵}	۰٫۰۰۰۱۰۸۴۴	۰٫۰۰۰۱۰۷۰۱	۹٫۳۶۸۴ × ۱۰$^{-۵}$	۴٫۱۵۱۷ × ۱۰$^{-۵}$
دلار آمریکا	۱٫۰۵۸۸ × ۱۰$^{-۶}$	۷٫۶۱۹۹ × ۱۰$^{-۷}$	۷٫۹۶۴۳ × ۱۰$^{-۷}$	۳٫۵۶۱۶ × ۱۰$^{-۶}$	۸٫۳۴۲۶ × ۱۰$^{-۷}$
دلار کانادا	۸٫۹۶۱۳ × ۱۰$^{-۵}$	۷٫۶۲۷۶ × ۱۰$^{-۵}$	۷٫۵۰۰۵ × ۱۰$^{-۵}$	۸٫۳۰۷۴ × ۱۰$^{-۵}$	۸٫۰۱۴۶ × ۱۰$^{-۵}$

جدول ۲: عملکرد داده های آزمایش ترکیب شبکه عصبی با الگوریتم وال

	ین	یوا ن	پوند	دلار کانادا	دلار آمریکا
MSE	۸٫۲۹۴۱ × ۱۰$^{-۵}$	۲٫۲۳۴۳ × ۱۰$^{-۵}$	۴٫۱۱۳۶ × ۱۰$^{-۵}$	۷٫۳۹۸۴ × ۱۰$^{-۵}$	۶٫۹۶۳۷ × ۱۰$^{-۷}$
C	۱٫۵۸۱۴	۱٫۸۸۳۰	۰٫۵۸۳۲	۱٫۶۶۴۷	۱٫۸۹۸۸

۴. روش پژوهش

در این مقاله داده های سری زمانی نرخ ارز برای نرخ دلار آمریکا، پوند، ین، دلار کانادا، یوان چین از فروردین سال ۱۳۹۵ تا فروردین سال۱۴۰۰ از سایت بانک مرکزی اخذ شده است.مدلی که در این مقاله ارائه می شود برای داده هایی با وقفه های مختلفی است که به عنوان متغیر های ورودی خواهد بود ، این داده ها را با وقفه یک روز قبل، سه روز قبل، پنج روز قبل، هفت روز قبل و ده روز قبل انتخاب کرده و به عنوان داده های ورودی به شبکه عصبی پرسپترون چهار لایه داده می شود. این شبکه از یک لایه ورودی و دو لایه پنهان و یک لایه خروجی با تابع فعال ساز تانژانت سیگموئید در لایه های پنهان و تابع فعال ساز خطی در لایه خروجی با الگوریتم آموزش لونبرگ مارکوات تشکیل داده شده است. معیار ارزیابی عملکرد پیش بینی میانگین مجذورات خطا (MSE) با رابطه (۱۲) می باشد .

$$MSE = \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} (\widehat{y_k} - y_k)^۲ \qquad (۱۲)$$

برای داده های آموزش از ۸۰ درصد و داده های آزمایش از ۲۰ درصد داده های سری زمانی استفاده می شود. داده های ورودی ابتدا با رابطه (۱۳) نرمال سازی شده است.

$$x_{nor} = \frac{۲(x - x_{min})}{x_{max} - x_{min}} - ۱ \qquad (۱۳)$$

که در آن xمقدار واقعی و x_{max} و x_{min} بیشترین و کمترین مقدار وx_{nor} داده نرمال شده می باشند.داده ها در بازه $[-۱,۱]$ قرار می گیرند. در لایه پنهان از تعداد مختلفی نرون استفاده شده است. جدول ۱ عملکرد شبکه عصبی MLPبرای داده های آزمایش می باشد .

با توجه به جدول ۱ می بینیم که وقتی تعداد نرون ها در لایه پنهان افزایش می یابد خطا هم زیاد می شود. در نرخ ین و دلار آمریکا بهترین عملکرد مربوط به شبکه عصبی پرسپترون با تعداد نرون های لایه پنهان ۷ ، ۱۰ می باشد، در نرخ یوان و دلار کانادا بهترین عملکرد مربوط به شبکه عصبی پرسپترون با تعداد نرون های لایه پنهان ۵، ۱۰ می باشد، در نرخ پوند بهترین عملکرد مربوط به شبکه عصبی پرسپترون با تعداد نرون های لایه پنهان ۵ ، ۵ می باشد. به منظور بهبود عملکرد شبکه عصبی از الگوریتم وال استفاده شده است. در شبکه عصبی وزن ها و بایاس های اولیه به صورت تصادفی انتخاب و در تکرار های بعدی آنها بروز رسانی می شوند، حال با استفاده از الگوریتم وال وزن ها و بایاس های اولیه را با هدف کمینه کردن تابع خطا کلی داده ها به منظور پیش بینی دقیق تر، بدست می آوریم. پیاده سازی الگوریتم وال توسط کدهای نوشته شده در نرم افزار متلب انجام گرفته است. در الگوریتم وال جمعیت اولیه را ۱۰ و تعدادتکرار ۱۰۰ قرار داده شده است. هم چنین الگوریتم وال را برای بهترین شبکه عصبی هر ارز استفاده شده است. جدول ۲ عملکرد داده های آزمایش ترکیب شبکه عصبی با الگوریتم وال می باشد.

با توجه به جدول ۲ مشاهده می شود وقتی از الگوریتم وال برای وزن های شبکه عصبی استفاده می نماییم میانگین مربعات خطا کمتر از زمانی است که فقط از شبکه عصبی استفاده می شود .

۵. نتایج

وجود روابط غیر خطی در پدیده های دنیای واقعی باعث شده که پژوهشگران علاقه به استفاده از مدلی غیر خطی نشان دهند. پیش بینی بازارهای مالی جزو روابط غیر خطی است و روش های فرا ابتکاری از عملکرد بهتری نسبت به روش های کلاسیک پیش بینی داشته است. در این میان،

استفاده از روش شبکه عصبی مصنوعی به عنوان یک ابزار قدرتمند تجزیه و تحلیل داده ها و مدل سازی روابط غیر خطی ، در بین پژوهشگران علم اقتصاد گسترش پیدا کرده است. هدف اصلی در این مقاله بهبود خطا شبکه عصبی پرسپترون چند لایه با الگوریتم وال برای پیش بینی نرخ ارز می باشد ،بنابراین داده های سری زمانی چند نرخ ارز در ایران از جمل ه ین، یوان، دلار آمریکا، دلار کانادا و پوند در بازه سال اول فروردین ۱۳۹۵ تا سال اول فروردین۱۴۰۰ را با وقفه های مختلف در نظر گرفته شده است. شبکه عصبی پرسپترون چهار لایه که دو لایه پنهان دارد و تعداد نرون ها در این دو لایه مختلف انتخاب شده است و با استفاده از معیار ارزیابی میانگین مجذورات خطا بهترین عملکرد در هر نرخ ارز مشخص شده است و سپس با الگوریتم وال وزن ها و بایاس های اولیه شبکه عصبی پرسپترون چند لایه را با هدف کمینه کردن تابع خطا کلی داده ها به منظور پیش بینی دقیق تر، بدست آورده می شود و سپس دو روش با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج حاصله حاکی از بهبود عملکرد مدل ترکیبی شبکه عصبی با الگوریتم وال است.

مراجع

[1] S. Galeshchuk, Neural networks performance in exchange rate prediction. *Neuro computing*, Volume 172, pages 446-452, 2016.

[2] J. A. Goldbogen, A. S. Friedlaender, J.Calambokidis, M. F. Mckenna, M.Simon, D. P. Nowacek. Integrative approaches to the study of baleen whale diving behavior, feeding performance, and foraging ecology. *Bioscience*, 63(2), pages 90-100, 2013

[3] S. Mirjalili, A. Lewis. The whale optimization algorithm. *Advances in engineering software*, Volume 95, pages 51-67,2016.

[4] G. Sermpinis, T. Konstantinos, K. Andreas, F.G. Efstratios, D. Christian. Forecasting foreign exchange rates with adaptive neural networks using radial-basis functions and particle swarm optimization. *European Journal of Operational Research*, Volume 225, pages 528–540, 2013

[۵] مهدی خاشعی، مهدی بیجاری، فریماه مخاطب رفیعی .)۱۳۹۱"> . پیش بینی نـرخ ارز بـا بـه کـارگیری مدل های ترکیبی پرسپترون های چندلایه((MPLs و طبقه بندی کننده های عصبی احتمـالی ((PNNs . فصلنامة روشهای عددی در مهندسی ،۳۲)۱(: ۱-۱۴، ۱۳۹۲.

[۶] حسن خداویسی ، احمد ملا بهرامی. مدل سازی و پیش بینی نرخ ارز بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی. تحقیقات اقتصادی ،۴۷)۳(:۱۲۹-۱۴۴، ۱۳۹۱.

[۷] منصور زراء نژاد، علی فقه مجیدی ، روح الله رضایی. پیش بینی نرخ ارز با استفاده از شبکه های عصبی مصنوعی و مدل ARIMA . اقتصادی مقداری ،۴)۵(: ۱۳۰-۱۷۰، ۱۳۸۷.

[۸] سمیه شاه حسینی ،علی رضایی. پیش بینی نرخ رسمی ارز در ایران با استفاده از مدل خودرگرسیونی ARIMA همراه با عامل های مداخله ای و مقایسة آن با مدل گام تصادفی. اقتصاد و تجارت نوین، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی فصلنامة علمی پژوهشی ،۱۳)۴(: ۱۳۱-۱۵۸، ۱۳۹۷.

[۹] شهرام فتاحی، آرش احمدی، علی اکرم میرزایی. مقایسه دقت روش الگوریتم ژنتیک با روش های دیگر پیش بینی های نرخ ارز. فصلنامه سیاست های اقتصادی ،۹،)۱(: ۱۳۶-۱۱۳، ۱۳۹۲.

[۱۰] جاوید قهرمانی نهر. بهبود اثربخشی و کارایی زنجیر ه ی تامین حلق ه ی بسته: رویکرد الگوریتم بهینه سازی وال و رمزگذاری جدید مبتنی بر اولوی ت. تصمیم گیری و تحقیق در عملیات ،۴)۴(: ۲۹۹ -۳۱۵، ۱۳۹۸.

[۱۱] حامد منصوری گرگری ، حسن خداویسی. پیش بینی نرخ ارز: مقایسه الگوهای رشد لجستیک با الگوهای رقیب. فصلنامه اقتصاد و الگوسازی ،۱۰)۳(، ۱۳۹ -۱۷۷، ۱۳۹۸.

[۱۲] عبدالرحیم هاشمی دیزج ، هاتف حاضری نیری ، رسول پوروجدانی. مقایسه عملکردمدل های شبکه عصبی مصنوعی برای پیش بینی نرخ ارز در ایران. فصلنامه مطالعات و سیاست های اقتصادی ،۷)۲(: ۵۳-۸۰، ۱۳۹۹.

[۱۳] مسعود یارمحمدی ، رحیم محمودوند . پیش بینی نرخ ارز با استفاده از روش تحلیل مجموعه مقادیر تکین. فصلنامه مطالعات اقتصادی کاربردی ایران ،۵)۲(:۱۳۳- ۱۴۶، ۱۳۹۵

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–201، صص. ۳۳۴–۳۳۹

روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل معادله قدرمطلقی

فرزاد راه‌پیمایی[آ]، آزاده آقامحمدی*[،ب]

[آ]استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
[ب]دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
معادله قدرمطلقی
بهینه‌سازی ازدحام ذرات
روش هموارسازی

2020 MSC:
65F08
65F45
90C90

چکیده

حل معادله قدرمطلقی $Ax-|x|=b$ یک مسأله NP–سخت می‌باشد. در پژوهش‌های مختلف شرایط حل‌پذیری و وجود جواب منحصربه‌فرد برای این معادله بررسی شده است. در این مقاله با جایگذاری یک تابع هموار به‌جای جمله غیرهموار $|x|$ معادله قدرمطلقی را به یک مسأله هموار تبدیل می‌کنیم. بنابراین به‌جای حل معادله قدرمطلقی، مسأله بهینه‌سازی نامقید و هموار معادل آن را حل می‌کنیم. برای حل این مسأله از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات استفاده می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش ارائه شده برای حل معادلات قدرمطلقی کارا است.

۱. مقدمه

معادله قدرمطلقی (AVE) زیر را در نظر بگیرید

$$Ax-|x|=b, \qquad (۱)$$

که در آن $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $x,b\in\mathbb{R}^n$ و بردار $|x|$ قدرمطلق مؤلفه‌های x را نشان می‌دهد. معادله قدرمطلقی (۱) با مسأله مکملی خطی (LCP) هم‌ارز است [۱]. چون حل LCP یک مسأله NP–سخت است لذا حل معادله قدرمطلقی نیز NP–سخت خواهد بود [۲]. در [۶] شرایط حل‌پذیری منحصربه‌فرد و حل‌ناپذیری معادله قدرمطلقی (۱) بررسی شده است. برای حل معادله قدرمطلقی الگوریتم‌های تکراری مختلفی وجود دارد. در [۵] یک روش تکراری برای حل معادله (۱) معرفی شده است که در تعدادی متناهی تکرار به جواب بهینه همگرا می‌شود. روش نیوتن تعمیم‌یافته نیز به جواب معادله قدرمطلقی همگرای سراسری است. در این مقاله ابتدا معادله قدرمطلقی را به یک مسأله بهینه‌سازی هموار نامقید تبدیل می‌کنیم و سپس آن را با روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات [۱] (PSO) حل می‌کنیم.

۲. معادله قدرمطلقی

تابع $H:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$H(x)=Ax-|x|-b. \qquad (۲)$$

*سخنران
پست الکترونیک: rahpeyma_83@yahoo.com (فرزاد راه‌پیمایی)، aghamohamadiazade69@gmail.com (آزاده آقامحمدی)

[1] Particle Swarm Optimization

واضح است که $x \in \mathbb{R}^n$ جواب معادله قدرمطلقی (۱) است اگر و تنها اگر $H(x) = 0$ باشد. همچنین به‌دلیل وجود جمله مشتق‌ناپذیر $|x|$ تابع $H(x)$ غیرهموار است. با جایگزینی عبارت $|x|$ با یک تقریب هموار، $H(x)$ را به یک تابع هموار تبدیل می‌کنیم. منگسرین [۲] و روهن [۳] شرایط وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب معادله قدرمطلقی را مشخص کرده‌اند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد. جذر مقادیر ویژه نامنفی ماتریس A^TA را مقادیر تکین ماتریس A می‌نامیم.

گزاره ۲.۲ (وجود جواب معادله قدرمطلقی). [۶]

الف) اگر ۱ مقدار ویژه ماتریس A نباشد و مقادیر تکین ماتریس A بزرگ‌تر از یک باشند آن‌گاه معادله قدرمطلقی (۱) حل‌پذیر است هرگاه مجموعه زیر ناتهی باشد

$$S = \Big\{x \mid (A+I)x - b \geq 0,\ (A-I)x - b \geq 0\Big\}.$$

ب) اگر $b > 0$ و $\|A\|_\infty < \frac{\gamma}{2}$ باشد که

$$\gamma = \min_i \frac{|b_i|}{\max_i |b_i|},$$

آن‌گاه معادله قدرمطلقی (۱) دقیقاً 2^n جواب مجزا دارد که شامل هیچ مؤلفه صفری نیست.

گزاره ۳.۲. [حل‌پذیری منحصربه‌فرد معادله قدرمطلقی][۵]

الف) اگر همه مقادیر تکین ماتریس A بزرگ‌تر از یک باشند آن‌گاه به‌ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ معادله قدرمطلقی (۱) جواب منحصربه‌فرد دارد.
ب) اگر $\|A^{-1}\| < 1$ باشد آن‌گاه به‌ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ معادله قدرمطلقی (۱) جواب منحصربه‌فرد دارد.

گزاره ۴.۲ (وجود جواب نامنفی). [۵] *اگر $A \geq 0$، $\|A\| < 1$ و $b \leq 0$ باشد آن‌گاه معادله قدرمطلقی (۱) جواب نامنفی دارد.*

گزاره ۵.۲. [۸] *اگر ماتریس بازه‌ای $[A-I, A+I]$ منظم باشد آن‌گاه به‌ازای هر بردار $b \in \mathbb{R}^n$ معادله قدرمطلقی $Ax - |x| = b$ جواب منحصربه‌فرد دارد.*

لم ۶.۲. *فرض کنید A یک ماتریس نامنفرد و $\|A^{-1}B\| < 1$ باشد. در این‌صورت ماتریس $A+B$ نامنفرد است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم ماتریس $I + A^{-1}B$ نامنفرد است. به برهان خلف فرض کنید ماتریس $I + A^{-1}B$ منفرد باشد. در این‌صورت بردار غیرصفر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به‌طوری که $(I + A^{-1}B)x = 0$. در نتیجه

$$x = -A^{-1}Bx \Longrightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}B\| \cdot \|x\|.$$

بنابراین

$$\|A^{-1}B\| \geq 1,$$

که با فرض لم در تناقض است. چون ماتریس‌های A و $I + A^{-1}B$ نامنفرد هستند پس ضرب آن‌ها نیز نامنفرد است. به‌عبارت دیگر ماتریس

$$A(I + A^{-1}B) = A + B,$$

نامنفرد است. □

لم ۷.۲. *ماتریس قطری $D = diag(d_i)$ را در نظر بگیرید که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ عناصر قطری $d_i \in [-1, 1]$ هستند. اگر $\|A^{-1}\| \leq 1$ باشد آن‌گاه ماتریس $A + D$ نامنفرد است.*

اثبات. چون $\|A^{-1}\| < 1$ است لذا ماتریس A نامنفرد می‌باشد. همچنین

$$\|A^{-1}D\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|D\| \leq \|D\| \leq 1.$$

اکنون از لم ۶.۲ نتیجه می‌گیریم که ماتریس $A + D$ نامنفرد است. □

[2] Mangasarian
[3] Rohn

تعریف ۸.۲. [۷] فرض کنید $\mu > ۰$ باشد. توابع $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $H_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. تابع H_μ را تقریب هموار یکنواخت برای تابع غیرهموار H می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ تابع H_μ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و مقدار ثابت κ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|H_\mu(x) - H(x)\| \leq \kappa\mu, \qquad \forall \mu > ۰. \tag{۳}$$

تابع $|x|$ مشتق‌پذیر نیست و هموار نمی‌باشد. فرض کنید $\varphi(x) = |x|$ باشد. در نتیجه

$$\varphi(x_i) = |x_i| = \max\{x_i, -x_i\}, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

در [۹] تقریب هموار یکنواخت برای $\varphi(x_i)$ به‌صورت زیر معرفی شده است

$$\varphi_\mu(x_i) = \mu \ln\left\{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)\right\}, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n. \tag{۴}$$

لم زیر نشان می‌دهد که تابع $\varphi_\mu(x_i)$ تقریب یکنواخت هموار تابع $\varphi(x_i) = |x_i|$ است [۹].

لم ۹.۲. *اگر $\varphi(x_i) = |x_i|$ و $\varphi_\mu(x_i)$ تقریب هموار یکنواخت (۴) باشد آن‌گاه*

$$۰ \leq \varphi_\mu(x_i) - \varphi(x_i) \leq \mu \ln ۲, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

فرض کنیم $\mu > ۰$ و $\varphi_\mu(x) = \left(\varphi_\mu(x_۱), \ldots, \varphi_\mu(x_n)\right)^T$ باشد. تابع $H_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_\mu(x) = Ax - \varphi_\mu(x) - b.$$

در این‌صورت $H_\mu(x)$ تقریب هموار یکنواخت برای تابع $H(x)$ می‌باشد. در ادامه برخی از ویژگی‌های تابع $H_\mu(x)$ را بیان می‌کنیم [۹].

لم ۱۰.۲. *فرض کنید $\mu > ۰$ باشد. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ژاکوبین $H_\mu(x)$ به‌صورت زیر است*

$$H'_\mu(x) = A - diag\left(\frac{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) - exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) + exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}\right), \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

اکنون نامنفرد بودن ماتریس ژاکوبین $H'_\mu(x)$ را بررسی می‌کنیم. برای هر $\mu > ۰$ نامساوی زیر برقرار است

$$\left|\frac{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) - exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) + exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}\right| = \left|۱ - ۲\frac{exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}{exp\left(\frac{x_i}{\mu}\right) + exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right)}\right| < ۱, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

با استفاده از لم ۷.۲ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنید $\|A^{-۱}\| < ۱$ باشد. در این‌صورت ماتریس ژاکوبین $H'_\mu(x)$ نامنفرد است.*

قضیه ۱۲.۲. *تابع $H_\mu(x)$ تقریب هموار یکنواخت $H(x)$ است.*

اثبات. با استفاده از تعریف $H(x)$ و $H_\mu(x)$ داریم

$$\begin{aligned}\|H_\mu(x) - H(x)\| &= \|Ax - \varphi_\mu(x) - b - Ax + \varphi(x) + b\| \\ &= \|\varphi_\mu(x) - \varphi(x)\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} \left|\varphi_\mu(x_i) - \varphi(x_i)\right|^۲} \\ &\leq \sqrt{n}\mu \ln ۲ = \kappa\mu,\end{aligned}$$

که در آن $\kappa = \sqrt{n} \ln ۲$ است. بنابراین $H_\mu(x)$ تقریب هموار یکنواخت تابع $H(x)$ می‌باشد. □

توابع $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\theta_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\|H(x)\|^2, \qquad \theta_\mu(x) = \frac{1}{2}\|H_\mu(x)\|^2.$$

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنید* $\|A^{-1}\| < 1$، $\mu > 0$ *و* $x \in \mathbb{R}^n$ *باشد. اگر* $\nabla\theta_\mu(x) = 0$ *آن‌گاه* $\theta_\mu(x) = 0$.

اثبات. واضح است که

$$\theta_\mu(x) = \frac{1}{2}H_\mu(x)^T H_\mu(x).$$

با محاسبه گرادیان تابع $\theta_\mu(x)$ خواهیم داشت

$$\nabla\theta_\mu(x) = \left(H'_\mu(x)\right)^T H_\mu(x).$$

چون $H'_\mu(x)$ نامنفرد است لذا از $\nabla\theta_\mu(x) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $H_\mu(x) = 0$. لذا $\theta_\mu(x) = 0$ خواهد بود. □

از قضیه ۱۳.۲ نتیجه می‌گیریم که حل معادله $H_\mu(x) = 0$ معادل با حل مسأله بهینه‌سازی نامقید زیر می‌باشد

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \theta_\mu(x).$$

۳. روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل معادله قدرمطلقی

در این بخش ابتدا روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات را معرفی می‌کنیم و سپس آن را برای حل معادله قدرمطلقی به‌کار می‌گیریم.

۱.۳. *روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات*

در سال‌های اخیر روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل مسائل مختلفی مورد استفاده قرار گرفته و به نتایج مطلوبی نیز منجر شده است. این روش با هزینه محاسباتی پایین و در مدت زمان کمتری توانسته است مسأله‌های کاربردی زیادی را حل کند. علاوه بر این پارامترهای موجود در این روش در مقایسه با اکثر روش‌های بهینه‌سازی کمتر هستند. با تغییرات اندکی در الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) می‌توان آن را برای حل مسائل متفاوت به‌کار برد. روش PSO یک تکنیک مبتنی بر بهینه‌سازی تصادفی است که اولین بار در سال ۱۹۹۵ توسط ابرهارت[4] و کندی[5] با الهام از رفتار اجتماعی پرندگان و پرورش ماهی معرفی شد [۴]. این روش شباهت‌های زیادی به الگوریتم ژنتیک (GA) دارد. الگوریتم PSO مجموعه‌ای از جواب‌های تصادفی را تولید می‌کند و سپس با به‌هنگام‌سازی آن‌ها بهترین جواب را شناسایی می‌کند.

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات از روی رفتار اجتماعی دسته‌های مختلف پرندگان مدل‌سازی شده است. وقتی گروهی از پرندگان در حال پرواز هستند تغییر مسیر پرواز آن‌ها تحت تأثیر تجربه و دانش خود و همسایگانشان اتفاق می‌افتد. بنابراین موقعیت توده پرندگان (ذرات) روی موقعیت هر ذره تأثیرگذار است. در این روش ابتدا تعدادی ذرات به‌صورت تصادفی تولید می‌شوند و سپس با به‌هنگام کردن ذرات نسل قبلی به دنبال یافتن جواب بهینه است. در هر تکرار ذره با استفاده از دو مقدار به‌هنگام می‌شود. اولین مورد بهترین موقعیتی است که تاکنون ذره موفق به رسیدن به آن شده است و آن را با $pbest$ نمایش می‌دهیم. دومین مورد بهترین موقعیتی است که توسط جمعیت ذرات به‌دست آمده است و آن را $gbest$ می‌نامیم. بنابراین الگوریتم PSO با استفاده از $pbest$ و $gbest$ سرعت رسیدن به جواب بهینه را افزایش می‌دهد. به‌طور کلی روش PSO شامل دو گام زیر است:

مقادیر اولیه: در این مرحله به‌طور تصادفی تعدادی جواب بالقوه به نام ذرات تولید و به هر یک از آن‌ها سرعت تصادفی نسبت داده می‌شود.

به‌هنگام‌سازی سرعت: ذرات در فضای جستجو پرواز می‌کنند و با استفاده از پروازهای گذشته و فعلی سرعت خود را به‌هنگام می‌کنند.

سرعت و موقعیت ذره با استفاده از معادلات زیر به‌هنگام می‌شوند

$$v_{id}^{New} = w_i v_{id}^{Old} + C_1 r_1\left(x_{pbest} - x_{id}^{Old}\right) + C_2 r_2\left(x_{gbest} - x_{id}^{Old}\right), \qquad (۵)$$

$$x_{id}^{New} = x_{id}^{Old} + v_{id}^{Old}, \qquad (۶)$$

که در آن $C_1, C_2 > 0$ ضرایب تسریع کننده، w_i وزن اینرسی و r_1 و r_2 اعداد تصادفی در بازه $[0, 1]$ هستند که در هر تکرار به‌هنگام می‌شوند. در آزمایش‌های عددی معمولاً از $C_1 = C_2 = 2$ و $w_i = 0.5 + \frac{rand}{2}$ استفاده شده است [۳]. معادله (۵) نشان می‌دهد که برای محاسبه سرعت جدید ذره، از سرعت قبلی، موقعیت بهینه قبلی (x_{id}^{Old}) و بهترین موقعیت مکانی (x_{gbest}) استفاده شده است. همه ذرات در جهت رسیدن به بهترین ذره حرکت می‌کنند. معادله (۶) نیز نحوه به‌هنگام شدن موقعیت ذره را نشان می‌دهد.

[4] Eberhart
[5] Kennedy

۲.۳ . *روش* PSO *برای حل معادله قدرمطلقی*

در این بخش از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل معادله قدرمطلقی (۲) استفاده می‌کنیم. الگوریتم PSO برای حل این معادله به‌صورت زیر است.

الگوریتم PSO **برای حل معادله قدرمطلقی:**

گام اول: مقدار $\mu_0 > 0$ را انتخاب کنید و قرار دهید $k = 0$. تابع $\theta_{\mu_k}(x)$ را به‌صورت زیر محاسبه کنید

$$\theta_{\mu_k}(x) = \frac{1}{2}\|H_{\mu_k}(x)\|^2.$$

گام دوم: با استفاده از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات مسأله $\min_x \theta_{\mu_k}(x)$ را حل کنید. فرض کنید $x_k = \operatorname{argmin}_x \theta_{\mu_k}(x)$ باشد.

گام سوم: اگر شرط توقف برقرار است الگوریتم را متوقف کنید در غیراین‌صورت به گام چهارم بروید.

گام چهارم: قرار دهید

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{1 - e^{\mu_k}}{e^{\mu_k}}.$$

همچنین به‌جای k قرار دهید $k+1$ و به گام دوم بروید.

فرمول به‌هنگام‌سازی μ_k در گام چهارم، روش نیوتن برای حل معادله $e^{\mu} - 1 = 0$ می‌باشد. در نتیجه دنباله μ_k تولید شده در این گام به صفر همگرا می‌شود و مرتبه همگرایی آن دو است.

۴. نتایج عددی

در این بخش روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای حل معادله قدرمطلقی را به‌صورت عملی به‌کار می‌گیریم.

مثال ۱.۴. معادله قدرمطلقی $Ax - |x| = b$ را در نظر بگیرید که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

مقادیر تکین ماتریس A به‌صورت زیر هستند

$$svd(A) = [7.2443, 6.0643, 5.0285, 3.8024].$$

بنابراین از گزاره ۳.۲ واضح است که این معادله قدرمطلقی به‌طور منحصربه‌فرد حل‌پذیر است. جواب منحصربه فرد این معادله با روش PSO به‌صورت $x^* = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ خواهد بود.

مثال ۲.۴. معادله قدرمطلقی $Ax - |x| = b$ را در نظر بگیرید که ماتریس A و بردار b به‌صورت تصادفی با دستورهای زیر در نرم‌افزار متلب تولید شده‌اند و مقادیر تکین ماتریس A بزرگ‌تر از یک هستند.

```
n = input('dimension of matrix A =');
rand('state', 0);
R = rand(n, n);
b = rand(n, 1);
A = R' * R + n * eye(n);
```

که در آن $eye(n)$ برداری است که همه مؤلفه‌های آن یک می‌باشند. نتایج حاصل از روش PSO برای معادله قدرمطلقی با ماتریس‌های تصادفی به‌ازای مقادیر مختلف n در جدول ۱ ارائه شده است.

نتایج حاصل نشان می‌دهند که الگوریتم PSO با تعداد تکرارهای کمتر جواب معادله قدرمطلقی را به‌دست می‌آورد.

جدول ۱: نتایج الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای مثال ۴.۲

ابعاد	تعداد تکرارها	زمان لازم برای اجرای الگوریتم
۴	۲	۲۳۰۰.۲
۸	۲	۳۴۰۰.۳
۱۶	۳	۷۹۰۰.۳
۳۲	۲	۱۲۰۰.۴
۶۴	۳	۶۹۰۰.۶
۱۲۸	۳	۴۵۰۰.۱۲
۲۵۶	۳	۶۷۰۰.۳۴
۵۱۲	۵	۵۷۰۰.۷۶
۱۰۲۴	۵	۱۲۰۰.۱۵۷

References

[1] R. W. Cottle, G. B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming, in Mathematics of Decision Sciences, G. B. Dantzig and A. F.Veinott, Jr. (eds.), American Mathematical Society, Providence, R.I., 115–136, (1968).

[2] R. W. Cottle, J. S Pang, R. E Stone, The Linear Complementarity Problems. Academic Press, New York, (1992).

[3] R. C. Eberhart, Y. Shi, Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms, In Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation, 94–97, (2001).

[4] J. Kennedy, R. C. Eberhart, Particle Swarm Optimization, In Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, 1942–1948, (1995).

[5] O. L. Mangasarian, Knapsack feasibility as an absolute value equation solvable by successive linear programming, Optim. Lett, 3(2), 161–170, (2009).

[6] O. L. Mangasarian, R. R. Meyer, Absolute value equations, Linear Algebra and its Applications, 419(5), 359–367, (2006).

[7] L. Qi, D. Sun, Smoothing functions and smoothing Newton method for complementarity and variational inequalityproblems, Optim. Theory Appl, 113(1), 121–147, (2002).

[8] J. Rohn, An Algorithm for Solving the Absolute Value Equation, Electronic Journal of Linear Algebra, (18), 589–599, (2009).

[9] L. Xing, An efficient method for non-differentiable optimization problem, Science in China-Series A, 37(4), 371–377, (1994).

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–306، صص. ۳۴۰–؟؟

روش شبه‌سکانت اصلاح شده برای بهینه‌سازی سراسری

ح .معافی *،آ، ز .اکبری ب

آدانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران
بااستادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
بهینه‌سازی سراسری
روش شبه‌سکانت
مسئله موضعی‌سازی حسگر

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله، الگوریتمی برای حل مسئله بهینه‌سازی سراسری مورد مطالعه قرار گرفته است که تابع هدف آن پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است اما لزوماً دیفرانسیل‌پذیر نیست. این الگوریتم شامل رویه‌های جست‌وجوی موضعی و سراسری است که بر اساس روش شبه‌سکانت طراحی شده است. هدف از روش جست‌وجوی سراسری شناسایی حوزه‌های "محتمل" در فضای جست‌وجو است. پس از شناسایی حوزه محتمل، روش جست‌وجو از یک بخش غیرمحتمل به حوزه‌ی به دست آمده می‌رود و سپس روش جست‌وجوی موضعی در این حوزه اعمال می شود. ثابت می‌شود که اگر جواب‌های موضعی متناهی و منفرد باشند، الگوریتم به جواب مینیمم سراسری همگرا می‌شود. این روش توسط معیارهای آکادمیک آزمایش شده‌است و کارآیی الگوریتم با عملکرد عددی و مقایسه‌ها نشان داده می‌شود. درنهایت، از این روش برای حل مسئله موضعی‌سازی حسگر استفاده می‌شود.

۱. مقدمه

بهینه‌سازی سراسری به طور گسترده در مهندسی و صنعت به کار گرفته می‌شود [۱۱]. حل آن به دلیل ویژگی چند حالته آن دشوار است. به طور کلی، دو روش متفاوت وجود دارد: روش‌های قطعی و تصادفی [۱۵]. در دهه گذشته، روش ترکیبی به طور فزاینده ای به یکی دیگر از روش‌های مهم تبدیل شده‌است.

روش قطعی به این معناست که با توجه به ورودی خاصی، فرآیند جست‌وجو تعیین می‌شود و همیشه یک جواب یکسان را به همراه خواهد داشت. از جمله روش‌های قطعی متداول برای بهینه‌سازی سراسری، روش شاخه ای و مرزی [۲۱]، روش صفحه برش [۱۴]، روش جهت کاهشی [۲۰، ۳۰] و غیره را می‌توان برشمرد. جزئیات بیش‌تر روش قطعی برای بهینه‌سازی سراسری را می‌توان در کتاب [۵] و [۱۲] مطالعه کرد.

روش تصادفی، که در برخی ادبیات به آن فرابتکاری هم گفته می‌شود، شامل روش‌ها یا ابتکاراتی است که طراحی می‌شوند تا یک جواب کاملاً مناسب برای یک مسئله بهینه سازی ارائه شود. بر خلاف روش قطعی، از آن‌جایی که در روش تصادفی فاکتورهای تصادفی در روند جست‌وجو دخیل هستند، ممکن است جواب‌های تولید شده توسط این روش برای یک مسئله خاص متفاوت باشد. در دو دهه گذشته، روش‌های فراشناختی زیادی ارائه شده است، مانند الگوریتم ژنتیک [۲۶، ۲۷]، کلونی زنبور عسل [۱۸]، بهینه‌سازی ازدحام ذرات [۲۸] و غیره.

روش‌های قطعی و فرابتکاری هر دو مزایا و معایبی دارند. روش قطعی به میزان زیادی به ورودی وابسته است، اما اگر با موفقیت حل شود، نتیجه آن قابل اطمینان است و فرآیند نیز قابل تکرار است. علاوه بر این، اندازه و نوع مسائلی که می‌توان با این روش حل کرد، محدود است. روش فرابتکاری در جست‌وجوهای سراسری عملکرد خوبی دارد چراکه معمولاً در فرآیند جست‌وجو فقط به مقدار تابع هدف نیاز دارد، که آن را برای انواع مسائل به طور مناسب استفاده می‌کند. با این حال، عوامل اکتشافی و تصادفی باعث می‌شوند که فرایند جست‌وجو غیرقابل تکرار باشد و نتیجه به اندازه نمونه قطعی قابل اعتماد نباشد. روش ترکیبی،مانند روش شبه‌سکانت سراسری، که در دهه گذشته مورد مطالعه قرار گرفته‌است،

*سخنران
پست الکترونیک: omguwd@gmail.com (ح .معافی)، z.akbari@umz.ac.com (ز .اکبری)

قصد دارد هر دو مزیت روش‌های قطعی و فرابتکاری را با هم ترکیب کند. به طور کلی، روش ترکیبی شامل دو بخش است؛ روند جست‌وجوی موضعی و سراسری. تمرکز جست‌وجوی موضعی بر اکتشاف موضعی است در حالی که تمرکز جست‌وجوی سراسری بر اکتشاف سراسری است. در این مقاله،یک الگوریتم برای مسئله بهینه‌سازی سراسری

$$min \quad f(x) \quad s.t. \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{۱}$$

مورد مطالعه قرار می‌گیرد به طوری که تابع هدف $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ پیوسته لیپ‌شیتز موضعی، مفروض است و

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i, i = ۱, ..., n\}.$$

یک مجموعه بسته است.

۲. مقدمه‌ای بر آنالیز ناهموار

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز ناهموار را بیان می‌کنیم[۴].
تابع f در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است هرگاه همسایگی از x موجود باشد، به طوری که

$$|f(y) - f(z)| \le L||y - z||, \quad y, z \in N_r(x).$$

که در آن $L > ۰$ ثابت لیپ‌شیتز است. فرض کنید تابع f در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی باشد، مشتق جهتی تعمیم یافته کلارک تابع f در نقطه x در جهت d به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$f^\circ(x,d) := \limsup_{y \to x, t \downarrow ۰} \frac{f(y+td) - f(x)}{t}.$$

براساس این تعریف، زیردیفرانسیل تعمیم‌یافته کلارک به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n | f^\circ(x;d) \ge \xi^T d \text{ for all } d \in \mathbb{R}^n\}.$$

هر بردار $\xi \in \partial f(x)$، یک زیرگرادیان تابع f در x نامیده می‌شود. برای هر $\varepsilon > ۰$ ، ε–زیردیفرانسیل گلداشتاین تابع f در x به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\partial_\varepsilon f(x) := \text{cl conv}\{\partial f(y), \ \|x - y\|_۲ \le \varepsilon\},$$

که در آن conv و cl به ترتیب پوسته محدب و بستار مجموعه هستند. هر بردار $\xi \in \partial f(x)$، ε–زیرگرادیان تابع f در x نامیده می‌شود. می‌توان مشاهده کرد $f_\varepsilon^\circ(x,d) = \sup_{\xi \in \partial_\varepsilon f(x)} \xi^T d$. اگر برای هر $d \in \mathbb{R}^n$، $\partial_\varepsilon f(x) \in ۰$ یا $f_\varepsilon^\circ(x,d) \ge ۰$ باشد، در این صورت نقطه x^* یک نقطه ε- ایستای تابع f نامیده می‌شود. در سرتاسر این مقاله فرض می‌شود که تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است و نرم در نظر گرفته شده همان نرم اقلیدسی است.

۳. روش شبه‌سکانت سراسری

در این بخش روش شبه‌سکانت برای جست‌وجوی موضعی و همچنین جست‌وجوی سراسری ارائه شده است. در ابتدا نشان داده خواهدشد که چگونه می توان از شبه‌سکانت‌ها برای یافتن جهت کاهشی استفاده کرد.

۳.۱ . *تقریب با استفاده از شبه‌سکانت*

در بهینه سازی ناهموار، زیردیفرانسیل، به عنوان یک مجموعه، به راحتی محاسبه نمی‌شود، بنابراین از یک مجموعه شبه‌سکانت‌هایی برای تخمین آن استفاده می‌شود. درنتیجه، به جای یافتن جهت کاهشی از زیردیفرانسیل در هر تکرار، زیردیفرانسیل با استفاده از محاسبه یک مجموعه محدب با یک سری از شبه‌سکانت‌ها تخمین زده شده و یک جهت کاهشی از آن محاسبه می‌شود. این نکته کلیدی روش شبه‌سکانت است که از نظر ریاضی در پایین شرح داده شده است.
در نقطه $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ جهت کاهشی با حل مسئله زیر بدست خواهد آمد:

$$min \quad \frac{۱}{۲}||v||^۲ \quad s.t \quad v \in \partial_c f(x^\circ). \tag{۲}$$

اگر $\bar{v} \neq 0$ جواب مسئله (۲) باشد، آن‌گاه $d = -\bar{v}/||\bar{v}||$ یک جهت کاهشی در نقطه x^0 می‌باشد. واضح است که اگر f در نقطه x^0 به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $\partial_c f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$، بنابراین $\bar{v} = \nabla f(x^0)$ و $d = -\nabla f(x^0)/||\nabla f(x^0)||$ جهت تندترین کاهش است.

حال فرض شود که $u^1, \ldots, u^m$، $m > 0$ شبه‌سکانت‌های تابع f در تقطه x^0 با گام $h > 0$ باشند، مسئله زیر یک تقریبی از مسئله (۲) است:

$$min \quad \frac{1}{2}||v||^2 \quad s.t \quad v \in conv\{u^1, \ldots, u^m\}. \tag{۳}$$

از مسئله (۳) به طور مکرر در روش شبه‌سکانت استفاده شده است، در مقاله [۲۹] روش کارآمدی برای حل آن ارائه شده است.

۲.۳ . *روش شبه‌سکانت برای جست‌وجوی موضعی*

روند جست‌وجوی موضعی این روش از روش شبه‌سکانت پیشنهاد شده در [۱] استفاده می‌کند. الگوریتم ۲.۳ ، ۱.۴ و ۴.۴ در مقاله [۳۰] به یک روش جست‌وجوی موضعی تبدیل شده‌است.

الگوریتم ۱. جست‌وجوی موضعی گام ۰ : ورودی: $x^0 \in [a, b]$؛ خروجی: x^k؛ پارامترها: آستانه $\epsilon > 0$،یک عدد بسیار کوچک $\lambda_{min} > 0$، $c_1 \in (0, 1)$، $c_2 \in (0, c_1]$، نسبت $\alpha \in (0, 1)$، اندازه ی دسته m_b، $k := 0$ و مقدار زیر را محاسبه کنید

$$\lambda_{max} = \max_{i=1,\ldots,n} \{max\{|x_i^0 - a_i|, |x_i^0 - b_i|\}\}.$$

گام ۱ : $\lambda_k = \alpha^k \lambda_{max}$ را محاسبه کنید. اگر $\lambda_k < \lambda_{min}$ آن‌گاه متوقف شوید و خروجی برابر است با x^k.

گام ۱.۲ : به صورت تصادفی $d^0 \in S_1$ را انتخاب کنید و قرار دهید $m := 0$.

گام ۲.۲ : $y^m = x^k + \lambda_k d^m$ و زیر گرادیان $v^m \in \partial f(y^m)$ را محاسبه کنید، و مجموعه زیر را به‌هنگام کنید

$$Q(x^k) = \begin{cases} \{v^0\} & \text{m} = 0 \\ Q(x^k) \cup \{v^m\} & \text{m} \geq 1 \end{cases}$$

گام ۳.۲ : مسئله بهینه‌سازی درجه دوم زیر را حل کنید :

$$min \quad \frac{1}{2}||v||^2 \quad s.t. \quad v \in convQ(x^k). \tag{۴}$$

جواب این مسئله را $\bar{v}$ بنامید.

گام ۴.۲ : (معیار توقف برای حلقه‌ی داخلی) اگر

$$||\bar{v}|| \leq \epsilon \tag{۵}$$

سپس به گام ۳ بروید.

گام ۵.۲ : جهت جست‌وجوی $d^{m+1} = -||\bar{v}||^{-1}\bar{v}$ را محاسبه کنید. اگر

$$f(x^k + \lambda_k d^{m+1}) - f(x^k) \leq -c_1 \lambda_k ||\bar{v}|| \tag{۶}$$

آن‌گاه به گام ۶.۲ بروید؛ درغیر این صورت قرار دهید $m := m + 1$. اگر $m > m_b$ آن‌گاه به گام ۳ بروید. اگر $m \leq m_b$ آن‌گاه به گام ۲.۲ بروید.

گام ۶.۲ : (جست‌وجوی خطی) مقدار زیر را محاسبه کنید

$$\bar{h} = argmax\{h > 0 : \quad f(x^k + hd^{m+1}) - f(x^k) \leq -c_2 h||\bar{v}||\}.$$

قرار دهید $x^k := x^k + \bar{h}d^{m+1}$ و به گام ۱.۲ بروید.

گام ۳ : قرار دهید $x^{k+1} := x^k$، $k := k + 1$ و به گام ۱ بروید.

ملاحظه ۱.۳. الگوریتم (۱) شامل دو حلقه است؛ حلقه‌ی خارجی و حلقه‌ی داخلی، که به ترتیب با k و m نام‌گذاری شدند. در ابتدای حلقه‌ی خارجی پارامتر λ_k که مقدار اولیه‌ی آن به قیدهای جعبه‌ای بستگی دارد، به‌هنگام شد (گام ۱)، و در پایان هر حلقه خارجی نیز نقطه‌ی خروجی x^k به‌هنگام می‌شود (گام ۳). اگر λ_k کم‌تر از مقدار از پیش تعیین شده شود، حلقه‌ی خارجی متوقف می‌شود.

ملاحظه ۲.۳. حلقه‌ی داخلی شامل گام‌های ۱.۲-۶.۲ است که در آن جهت جست‌وجو با حل یک سری از زیرمسئله‌های بهینه‌سازی درجه دوم به‌دست می‌آید و نقطه‌ی جدیدی به وسیله‌ی جست‌وجوی خطی حاصل می‌شود. پارامتر λ_k برای kاُمین حلقه‌ی داخلی ثابت است که نقاط y^m را در یک حلقه‌ی خاص محدود می‌کند. حلقه‌ی داخلی دارای دو معیار توقف است؛ اول زمانی که فاصله‌ی بین چندوجهی شبه‌سکانت‌ها و مقدار اصلی آن کمتر از یک تقریب داده شده باشد، دوم زمانی که تعداد شبه‌سکانت‌های محاسبه‌شده به بیش‌ترین تعداد (m_b) برسد.

۳.۳ . *روش شبه‌سکانت برای جست‌وجوی سراسری*

جست‌وجوی سراسری از یک مینیمم‌کننده موضعی شروع شده و ناحیه‌ی جست‌وجو را به صورت فزاینده بزرگ می‌کند. در هر منطقه‌ی جست‌وجو، نقطه‌ای را تولید می‌کند که کاندیدایی برای نقطه شروع جست‌وجوی موضعی بعدی است.

الگوریتم ۲. روند جست‌وجوی سراسری گام ۰: ورودی مینیمم‌کننده $x^\circ \in [a,b]$؛ خروجی: مجموعه‌های X و F؛پارامترها: تقریب $\epsilon > 0$، اندازه دسته m_b، مجموعه‌های $X = \emptyset$، $F = \emptyset$، $k = 0$ و مقدار زیر را محاسبه کنید

$$\lambda_{max} = \max_{i=1,\dots,n} \{max\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i|\}\}.$$

مقدار $\lambda_{min} \in (0, \lambda_{max})$ و عدد صحیح $K > 0$ را در نظربگیرید و $\beta = (\lambda_{max} - \lambda_{min})/K$ را محاسبه کنید.
گام ۱: $\lambda_k = \lambda_{min} + k\beta$ را محاسبه کنید، اگر $\lambda_k > \lambda_{max}$ آن‌گاه متوقف شوید و X و F خروجی هستند.
گام ۱.۲: به صورت تصادفی $d^\circ \in S_1$ را انتخاب کنید و مقدار $m := 0$ را قرار دهید.
گام ۲.۲: $y^m = x + \lambda_k d^m$ و $f(y^m)$ را محاسبه کنید.
گام ۳.۲: زیرگرادیان $v^m \in \partial f(y^m)$ را محاسبه کرده و تابع زیر را بسازید

$$Q_k(x) = \begin{cases} \{v^\circ\} & \text{m} = 0 \\ Q_k(x) \cup \{v^m\} & \text{m} \geq 1 \end{cases}$$

گام ۴.۲: مسئله بهینه‌سازی درجه دو زیر را محاسبه کنید

$$min \quad \frac{1}{2}||v||^2 \quad s.t. \quad v \in conv Q_k(x). \tag{۷}$$

جواب این مسئله را $\bar{v}$ بنامید.
گام ۵.۲ : اگر $m \geq m_b$ یا $||\bar{v}|| \leq \epsilon$، به گام۳ بروید؛
در غیر این صورت جهت کاهشی $d^{m+1} = -||\bar{v}||^{-1}\bar{v}$ را محاسبه کنید، قرار دهید $m := m + 1$، و به گام ۲.۲ بروید.
گام ۳: قرار دهید $X = X \cup \{y^m\}$، $F = F \cup \{f(y^m)\}$، $k = k + 1$ و به گام ۱ بروید؛

ملاحظه ۳.۳. مانند الگوریتم (۱)، الگوریتم (۲) نیز دارای حلقه‌های خارجی و داخلی است. حلقه‌ی خارجی نقش به‌هنگام کردن λ_k را ایفا می‌کند که در حلقه‌ی داخلی مقداری ثابت دارد در حالی که حلقه‌ی داخلی با حل یک سری زیرمسئله‌های بهینه‌سازی درجه‌ی دو، نقطه‌ای در گوی به مرکز x و شعاع λ_k جست‌وجو می‌کند. حلقه‌ی داخلی دارای دو معیار توقف می‌باشد؛ توقف با شرط $||\bar{v}|| \leq \epsilon$ به این معنی است که نقطه‌ای ایستا در گوی به‌دست آمده، توقف با شرط $m \geq m_b$ به این معناست که حداکثر زمان تکرار مورد بررسی قرار می‌گیرد و حلقه داخلی در نهایت خاتمه می‌یابد و درنتیجه آخرین نقطه به‌دست آمده به عنوان جواب در نظر گرفته می‌شود.

ملاحظه ۴.۳. الگوریتم‌های (۱) و (۲) در دامنه‌ی جست‌وجو متفاوت هستند؛ در الگوریتم (۱) زمانی که k افزایش می‌یابد، λ_k کاهش می‌یابد که روی جست‌وجوی موضعی تاکید دارد، اما در الگوریتم (۲) زمانی که k افزایش می‌یابد، λ_k نیز افزایش می‌یابد که تاکید بر جست‌وجوی سراسری دارد. به علاوه، الگوریتم (۲) جست‌وجوی خطی ندارد که دلیل آن تمرکز این الگوریتم بر جست‌وجوی سراسری است. پارامتر K در الگوریتم (۲) بسیار مهم است زیرا چگالی مجموعه S_1 را کنترل و در عوض قدرت جست‌وجو را آشکار می‌کند. K کوچک‌تر نشان‌دهنده‌ی جست‌وجوی پراکنده در ناحیه‌ی شدنی است، در حالی که K بزرگ‌تر نشان‌دهنده‌ی جست‌وجوی عمیق‌تر است. در ادامه K، پارامتر تقسیم نامیده می‌شود.

۴. روش شبه‌سکانت سراسری

به منظور اصلاح روش شبه‌سکانت برای بهینه‌سازی سراسری، باید ناحیه‌ای برای مینیمم‌کننده موضعی تعریف کرد. در منبع [۸]، ناحیه مینیمم‌کننده موضعی به صورت زیر تعریف شده‌است.

تعریف ۱.۴.
یک حوزه‌ای از f در مینیمم‌کننده واحد x یک دامنه مرتبط B می‌باشد که شامل x است به طوری که از هر نقطه ای شروع شود، خط تندترین کاهش f به x همگرا می‌شود، اما خارج از آن خط تندترین کاهش f به x همگرا نمی‌شود.
فرض کنید x یک مینیمم‌کننده موضعی یکتای تابع f است و تابع تک‌متغیره به این صورت تعریف می‌شود:

$\theta(\alpha) = f(x + \alpha d)$ که $d \in S_1$ یک جهت دلخواه می‌باشد. از آن‌جایی که x یک مینیمم‌کننده موضعی است، $\alpha_\circ > \circ$ وجود دارد به طوری که $\theta(\alpha)$ یک تابع صعودی در بازه $[\circ, \alpha_\circ]$ می‌باشد. $\alpha_{max}(d) > \circ$ بزرگ‌ترین $\alpha_\circ$ در جهت $d \in S_1$ است.

$$\alpha_{max}(d) = max\{\alpha_\circ > \circ | \theta'(\alpha) > \circ, \alpha \in [\circ, \alpha_\circ]\}$$

تعریف ۲.۴. فرض کنید x یک مینیمم‌کننده موضعی یکتا باشد، مجموعه

$$B(x) = \bigcup_{d \in S_1} D(d),$$

حوزه x نامیده می‌شود که در آن

$$D(d) = \{y \in \mathbb{R}^n | y = x + \alpha d, \quad \alpha \in [\circ, \alpha_{max}(d)]\}.$$

مینیمم‌کننده موضعی یکتای x، نقطه‌ی پایه حوزه $B(x)$ نامیده می‌شود.

واضح است که اگر $B(x)$ در تعریف (۲.۴) یک ناحیه باشد آن‌گاه در تعریف (۱.۴) نیز یک ناحیه است. برای یک مسئله بهینه‌سازی سراسری، همیشه انتظار می‌رود ناحیه‌ای با مینیمم‌کننده سراسری مانند نقطه‌ی پایه‌ی آن یافت شود تا بتوان اولویت ناحیه‌ها را بر اساس مقدار تابع هدف نقاط پایه مقایسه کرد.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $B(x_1)$ و $B(x_2)$ دو حوزه‌ی تابع f باشند که x_1 و x_2 نقاط پایه‌شان هستند، اگر $f(x_1) < f(x_2)$ آن‌گاه $B(x_1)$ پایین‌تر از $B(x_2)$ نامیده می‌شود و اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آن‌گاه $B(x_1)$ و $B(x_2)$ را باهم برابر می‌نامند.

تعریف ۴.۴. مجموعه

$$\bar{B}(x) = \{y \in \mathbb{R} | \quad \exists d \in S_1 \quad s.t \quad y = x + \alpha_{max}(d)d\},$$

مرز ناحیه $B(x)$ نامیده می‌شود.

فرض کنید که مراحل جست‌وجوی موضعی بتواند مینیمم‌کننده موضعی را با شروع از نقطه‌ای در حوزه مربوطه پیدا کند. برای پیدا کردن مینیمم کننده سراسری، نیاز است مینیمم‌کننده‌های موضعی بسیار زیادی مقایسه شوند. برای انجام این کار نیاز است نقاط شروع در هر ناحیه یافت شود که با انجام مراحل جست‌وجوی سراسری این کار قابل انجام است. در ادامه روش شبه‌سکانت اصلاح شده برای بهینه‌سازی سراسری از [۱۷] بیان می‌گردد:

الگوریتم ۳. روش شبه‌سکانت سراسری $GQSM$

گام ۰: ورودی: یک نقطه‌ی شروع تصادفی $x^{star} \in \mathbb{R}^n$؛خروجی: جواب x_{best} و $f_{best} = f(x_{best})$. شمارنده $k := ۱$ قرار دهید.

گام ۱:الگوریتم (۱) را از نقطه شروع x_{star} اجرا کنید، x^k را جواب قرار دهید، سپس قرار دهید $x_{best} = x^k$ $f_{best} = f(x_{best})$.

گام ۲: الگوریتم (۲) را با ورودی x^k اجرا کنید. این الگوریتم مجموعه‌های $X = \{y^1, ..., y^K\}$ و $F = \{f(y^1), ..., f(y^K)\}$ را تولید خواهد کرد، به طوری که K پارامتر تقسیم الگوریتم (۲) می‌باشد.

گام ۳: فرض کنید

$$\bar{y} = arg \min_{(y \in X)} \{f(y)\},$$

اگر $f(\bar{y}) < f_{best}$، آن‌گاه $x^{star} := \bar{y}$ $k := k + ۱$ و به گام ۱ بروید؛ در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

گام ۴: قرار دهید $x^k := y^\circ$ و $f(y^\circ)$ را حساب کنید. با شروع از $m = ۱$، پی در پی هر مقدار را در مجموعه F بررسی کنید، مجموعه شاخص زیر را بسازید،

$$I = \{i | f(y^m) \leq f(y^{i-1}), f(y^i) \leq f^{(}y^{i+1}), i = ۱, ۲, ..., K - ۱\}$$

X و F را با حذف کردن اعضایی که به مجموعه I تعلق ندارند، به‌هنگام کنید.

$$X = \{y^i \in X | i \in I\}$$

و

$$F = \{F(y^i) \in X | i \in I\}$$

گام ۵: هر نقطه‌ی $y \in X$ را به عنوان نقطه شروع در نظر بگیرید و الگوریتم (۱) را اجرا کنید. این کار مجموعه‌ای از مینیمم‌کننده‌های موضعی را می‌سازد. $\bar{x}$ را به عنوان یک مینیمم‌کننده با کم‌ترین مقدار تابع هدف در نظر بگیرید. اگر $f(\bar{x}) < f_{best}$ آن‌گاه مجموعه $x^{k+1} = \bar{x}$، $f_{best} = f(x_{best})$ $x_{best} = \bar{x}$ و $k := k + 1$ و به گام ۲ بروید؛ در غیر این صورت الگوریتم متوقف می‌شود، x_{best} و f_{best} را خروجی می‌دهد.

ملاحظه ۵.۴. الگوریتم (۳)، الگوریتم های (۱) و (۲) را فراخوانی می‌کند. در میان آن دو، الگوریتم (۱) نقش جست‌وجوی موضعی را بازی می‌کند، در گام ۱ وقتی یک نقطه‌ی شروع بهتر پیدا شد و در گام ۵ وقتی ناحیه‌های جدید مناسب پیدا شدند به کار گرفته می‌شود. الگوریتم (۲) نقش جست‌وجوی سراسری را بر عهده دارد، از یک مینیمم‌کننده x^k شروع کرده و مجموعه‌ای از کاندیداهای نقطه شروع برای الگوریتم (۱) به‌دست می‌آورد.

ملاحظه ۶.۴. دو راه برای شروع مجدد دور جدید جست‌وجوی موضعی وجود دارد. یکی زمانی است که نقطه ای بهتر از بهترین نقطه فعلی پیدا شود (در گام ۳). مورد دیگر زمانی است که برخی ناحیه‌های جدید شناسایی می‌شوند (در گام ۴-۵). اگر هیچ یک از این گزینه۲ها منجر به پیشرفت جست‌وجو نگردد، الگوریتم خاتمه می‌یابد و x_{best} و f_{best} فعلی جواب‌ها هستند.

۴ .۱ همگرایی الگوریتم

در ابتدا، ثابت می‌شود که حلقه‌های داخلی در الگوریتم (۱) و (۲) همگرای متناهی هستند.

قضیه ۷.۴. *فرضا عددی مانند $G > 0$ وجود دارد به طوری که*

$$||v|| \leq G \quad \forall v \in \partial f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{۸}$$

حلقه‌های داخلی در هر دو الگوریتم (۱) و (۲) بعد از تعداد گام‌های متناهی متوقف می‌شود و بیش‌ترین تعداد گام‌های ممکن آن‌ها برابر است با:

$$M = \left\lceil \frac{۴}{(۱ - c_۱)^۲} \left(\frac{G}{\epsilon}\right)^۴ \right\rceil.$$

در این‌جا نماد $\lceil \cdot \rceil$ بیشترین مقدار یک عدد را نشان می‌دهد.

برهان: مشاهده می‌شود که هر حلقه‌ی داخلی λ_k ثابت است. این قضیه فقط برای الگوریتم (۱) ثابت شده است و به طور مشابه برای الگوریتم (۲) نیز ثابت خواهد شد. واضح است که مسئله (۴) محدب است. از آن‌جا که $\bar{v}$ راه حل این مسئله است، از شرط لازم و کافی برای یک مینیمم نتیجه می‌شود که

$$\langle v, \bar{v} \rangle \geq ||\bar{v}||^۲, \quad \forall v \in convQ(x^k). \tag{۹}$$

حلقه‌ی داخلی در الگوریتم (۱) دارای دو معیار توقف است: شرط‌های ۵ و ۶. ثابت خواهد شد که اگر شرط (۵) هرگز برقرار نشود آن‌گاه شرط (۶) باید بعد از تعداد متناهی گام برقرار شود.

در هر تکرار حلقه داخلی، به جز آخرین تکرار، هیچ یک از شرایط و برقرار می‌شوند. این به این معنی است که $||\bar{v}| > \epsilon$ و

$$f(x^k) + \lambda_k d^{m+۱}) - f(x^k) > -c_۱ \lambda_k ||\bar{v}|| \tag{۱۰}$$

برای $d^{m+۱} = -||\bar{v}||^{-۱} \bar{v}$ سپس ثابت خواهد شد $v^{m+۱}$ که با استاده از جهت $d^{m+۱}$ محاسبه شد، به پوسته محدب فعلی $Q(x^k)$ تعلق ندارد. از آن‌جایی که زیرگرادیان $v^{m+۱}$، شبه‌سکانت در نقطه x^k نیز است خواهد بود

$$f(x^k) + \lambda_k d^{m+۱}) - f(x^k) \leq \lambda_k \langle v^{m+۱}, d^{m+۱} \rangle$$

با احتساب این که $d^{m+۱} = -||\bar{v}||^{-۱} \bar{v}$ و $c_۱ \in (۰, ۱)$، از (۱۰) خواهد بود

$$\langle v^{m+۱}, \bar{v} \rangle < c_۱ ||\bar{v}||^۲ \tag{۱۱}$$

این نامساوی و نامساوی (۹) بیان می‌کند که $v^{m+1} \notin convQ(x^k)$. این به این معنی است که در هر تکرار حلقه‌ی داخلی، تقریب زیردیفرانسیل بهبود پیدا می‌کند. در ادامه ثابت شد که بعد از تعداد متناهی تکرار، شرط (۶) باید برقرار شود. v^{-m} جواب مسئله (۴) در mامین تکرار حلقه داخلی است. واضح است که برای هر $t \in [0,1]$

$$||v^{-m+1}|| \leq ||tv^{m+1} + (1-t)v^{-m}||^2$$

آن‌گاه

$$||v^{-m+1}|| \leq ||v^{-m}||^2 + 2t\left\langle v^{-m}, v^{m+1} - v^{-m}\right\rangle + t^2||v^{m+1} - v^{-m}||^2.$$

با برقراری (۱۱) و شرط (۸) خواهد بود

$$||v^{-m+1}|| \leq ||v^{-m}||^2 + 2t(1-c_1)||v^{-m}||^2 + 4t^2G^2. \quad (12)$$

را به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$t = \frac{(1-c_1)||v^{-m}||^2}{4G^2}$$

با توجه به شرط (۸)، $t \in (0,1)$. با قرار دادن t در (۱۲) خواهد بود

$$||v^{-m+1}||^2 - ||v^{-m}||^2 < -\frac{(1-c_1)^2||v^{-m}||^4}{4G^2} \quad (13)$$

از آن‌جایی که $||v^{-m}|| > \epsilon$ ، از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$||v^{-m+1}||^2 - ||v^{-m}||^2 < -\frac{(1-c_1)^2\epsilon^4}{4G^2}$$

این نامساوی برای تمام $m = 0,1,\ldots$ صادق است. با نوشتن این نامساوی برای $l = 0,\ldots,m$ و جمع کردن آن‌ها و با احتساب $\tilde{v}^0 = v^0$ خواهد بود

$$||v^{-m+1}||^2 < ||v^0||^2 - (m+1)\frac{(1-c_1)^2\epsilon^4}{4G^2} \quad (14)$$

اگر حلقه‌ی داخلی همگرای متناهی نباشد، آن‌گاه با میل کردن $m \mapsto \infty$ از (۱۴) نتیجه می‌شود $||v^{-m+1}|| \mapsto -\infty$ که این نشان دهنده‌ی تناقض است. این ثابت می‌کند که حلقه‌ی داخلی بعد از تعداد متناهی گام متوقف می‌شود. واضح است که بیش‌ترین مقدار m برای این که $||v^{-m+1}|| \leq \epsilon$ خواهد بود

$$m = \left\lceil \frac{4G^2(G^2 - \epsilon^2)}{(1-c_1)^2\epsilon^4} \right\rceil.$$

با حذف ϵ از این شمارشگر، تخمینی از m به صورت زیر خواهد بود

$$M = \left\lceil \frac{4}{(1-c_1)^2}\left(\frac{G}{\epsilon}\right)^4 \right\rceil.$$

۵. نتایج اصلی

۱.۵ . *آزمایش‌های عددی*

در این بخش، ابتدا چند مثال مهم و گویا برای تجزیه و تحلیل ویژگی های الگوریتم ارائه می دهیم، سپس به طور جامع، کارآیی و ثبات آن را با تعداد زیادی آزمایش عددی بررسی می‌کنیم.

۵. ۱. ۱ . *مثال‌های مهم*

برای آزمایش‌های عددی، پارامترهای روش شبه‌سکانت سراسری به این شرح است: $c_1 = ۰/۲$، $c_2 = ۰/۵$، $\epsilon = ۱۰^{-۷}$، $m_b = n + ۳$، $\alpha = ۰/۱$. در جست‌وجوی موضعی مقدار $\lambda_{min} = ۱۰^{-۸}$ و در جست‌وجوی سراسری برابر با $\lambda_{min} = ۱۰^{-۴}\lambda_{max}$ می‌باشد. در این بخش از نمادهای زیر استفاده شده‌است:

- $n-$ تعداد متغیرها
- $f_{opt}-$ مقدار بهینه واقعی سراسری؛
- $SR-$ میزان موفقیت در N_r اجرای مستقل؛
- $\bar{f}^*-$ میانگین مقدار بهینه سراسری در N_r اجرای مستقل؛
- $\bar{N}_f-$ میانگین تعداد ارزیابی تابع هدف در طول N_r اجرای مستقل؛
- $\bar{N}_g-$ میانگین تعداد ارزیابی گرادیان در طول N_r اجرای مستقل؛
- $\bar{N}_g-$ میانگین مصرف زمان در طول N_r اجرای مستقل.

مسائل آزمایشی آکادمیک مورد استفاده در این بخش از کتابخانه مجازی آزمایش‌های شبیه‌سازی برگرفته شده است [۲۵]. با توجه به شکل توابع هدف، مسائل آزمایشی را می‌توان در شش گروه طبقه بندی کرد: (۱) مینیمم‌های موضعی زیاد، (۲) بشقابی شکل، (۳) کاسه ای شکل، (۴) دره ای شکل، (۵) دارای صعود/نزول پرشیب و (۶) غیره. از نظر عددی، مسائل در گروه‌های (۱) مینیمم‌های موضعی زیاد و (۵) دارای صعود/نزول پرشیب، پیچیده‌تر از دیگر مسائل است. جدول (۱) تمام مسائل آزمایشی و همچنین تعداد متغیرهای آزمایش شده و مقادیر واقعی مینیمال سراسری را نشان می‌دهد.

برای هریک از مسائل آزمایشی، $GQSM$ به تعداد N_r(=۱۰۰) بار با آغاز از نقاط ابتدایی مختلف که به صورت تصادفی تولید شده، به اجرا درآمد.

$$\frac{f^* - fopt}{۱ + |fopt|} \leq ۰/۰۱.$$

سپس، میزان موفقیت (SR) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$SR = \frac{S_r}{N_r} \times ۱۰۰٪$$

به طوری که S_r به عنوان تعداد اجراهای موفق از N_r تعداد اجرای مستقل می‌باشد.

در آزمایشات عددی انجام شده بر روی این مسائل آزمایشی، اکثر مسائل با $SR \geq ۸۰٪$ باموفقیت‌حل شدند، چند مسئله با درصد موفقیت کمتر حل شدند، مانند گریوانک [۱] با $n = ۲,۵(SR = ۲۸٪,۳۵٪)$، شفل [۲] با $n = ۱۰(SR = ۱۰٪)$، دیکسون ـ پرایس [۳] با $n = ۱۰(SR = ۲٪)$، میشالویکز [۴] با $n = ۱۰(SR = ۳۳٪)$. میانگین زمان مصرف شده برای همه مسائل آزمون کمتر از ۰/۲ ثانیه است به جز میشالویکز با $n = ۱۰(۲/۴s)$. متوسط زمان ارزیابی تابع هدف نیز امیدوارکننده است. این برای اجراهای مختلف در یک مسئله خاص پایدار است، انحراف استاندارد حداقل مقادیر جهانی به دست آمده کمتر از ده درصد میانگین است. البته، زمان مصرف شده و متوسط زمان ارزیابی تابع هدف با افزایش بعد افزایش می‌یابد، اما این افزایش به صورت خطی است. عاملی که بر زمان مصرف شده و زمان ارزیابی تابع هدف تاثیر می‌گذارد، پارامتر تقسیم K است. برای برخی از مسائل سخت‌تر به منظور دستیابی به جست‌وجوی سراسری بهتر، باید از K بزرگتر استفاده کرد، که در عوض هزینه محاسباتی بیشتری را به دنبال دارد. برای آشکار شدن بیشتر تأثیر ، دو مسئله آزمایشی را در گروه بسیاری از حداقل‌های محلی مورد بررسی قرار گرفت: شوبرت [۵] و شفل که نمودارهای آن‌ها با n = ۲ در شکل (۲) ارائه شده است. جدول (۲) شامل میزان موفقیت SR، متوسط مقدار بهینه سراسری $\bar{f}^*$، میانگین تعداد تابع هدف $\bar{N}_f$ و ارزیابی زیرگرادیان $\bar{N}_g$، متوسط زمان مصرفی $\bar{T}$. از جدول، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر تقسیم هزینه محاسبه افزایش می‌یابد.

عملکرد عددی $GQSM$ با روش کاهشی سراسری مقایسه شده‌است [۲۰]. روش کاهشی سراسری یک رویکرد برای عموم مسائل بهینه‌سازی سراسری است، در هر تکرار با استفاده از یک تابع کمکی که اصطلاحا تابع کاهشی سراسری نامیده می شود، از یک مینیمم‌کننده موضعی تابع هدف به سمت یک مینیمم‌کننده بهتر حرکت می‌کند. با توجه به جهت مورد استفاده در زیرمسئله‌ها، دو روش کاهشی سراسری وجود دارد: روش اول که از جهت تندترین کاهش استفاده می‌کند و دیگری از جهت ترکیبی استفاده می‌کند. در عملکرد عددی، نتایج بدست آمده از اجرا با استفاده از جهت ترکیبی نشان داده می‌شود، زیرا عملکرد عددی آن بهتر از اجرا با استفاده از جهت تندترین کاهش است. برای سهولت، روش کاهشی سراسری با جهت ترکیبی را به صورت $GDMH$ نشان داده می‌شود.

[1] Griewank
[2] Schwefel
[3] Dixon-Price
[4] Michalewicz
[5] Shubert

با توجه به [۲۰]، از شاخص عملکرد عددی برای ارزیابی مقدار بهینه سراسری استفاده می‌شود. در اینجا، f_{ini}، f^*، f_{opt} و به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقدار اولیه، به‌دست آمده و واقعی تابع هدف هستند.

$$PI = \frac{f_{ini} - f^*}{f_{ini} - f_{opt}}$$

واضح است که $0 \leq PI \leq 1$ به این معناست که روش موفق به پیدا کردن یک مینیمم‌کننده سراسری شد، در حالی که $PI = 0$ این معنی را می‌دهد که روش نتوانسته پیشرفتی داشته باشد. علاوه بر این، تعداد متوسط ارزیابی‌های تابع هدف و متوسط زمان مصرفی نیز در نظر گرفته می‌شود.

جدول (۳) جواب‌های مسائل آکلی [۶]، $Levy2$، $Levy3$، شفل و رستریجین [۷] را نشان می‌دهد که توسط $GQSM$ و $GDMH$ حل شدند. با توجه به مقدار PI، قابل مشاهده است که، از نظر مقدار PI، به جز جواب بهینه زیرسراسری رستریجین ($n = 500$) که توسط $GQSM$ به دست آمده است، تمام مسائل آزمایشی با هر دو روش کاملاً حل می شود. در مورد آکلی با ۲۰۰ و $n = 20, 50, 100$، برای به‌دست آوردن جواب‌های بهینه سراسری، تعداد ارزیابی‌های تابع هدف کم‌تری برای $GQSM$ به همراه دارد، همچنین برای شفل با $n = 100, 200$ و رستریجین با $n = 100, 200, 500$. برای $Levy2$ و $Levy3$، $GQSM$ ارزیابی‌های بیش‌تری بر روی مقادیر تابع هدف نسبت به $GDMH$ انجام می‌دهد. با این حال، برای تمام مسائل آزمایشی، میانگین زمان مصرف $GQSM$ بسیار کم‌تر از $GDMH$ است، صرف نظر از تعداد متوسط ارزیابی توابع هدف.

۵. ۱. ۲. آزمایش‌های عددی جامع

به منظور بررسی جامع عملکرد عددی $GQSM$، در این بخش، آن با استفاده از توابع تولید شده توسط مولد GKLS از [۷] آزمایش می‌شود. این مولد مسائل آزمایشی شامل تعریف یک تابع درجه دو محدب (همانطور که در منبع [۷]، "پارابلوئید" نام‌گذاری شده است) و به طور سیستماتیک آن را در گروه چندجمله‌ای‌ها دسته‌بندی می‌کند. این مولد می‌تواند سه نوع مختلف از توابع آزمایشی را تولید کند؛ نوع دیفرانسیل ناپذیر (نوع ND)، نوع پیوسته دیفرانسیل پذیر (نوع D) و نوع دوبار پیوسته دیفرانسیل پذیر (نوع $D2$). برای هر نوع، تنها به پنج پارامتر برای تولید اطلاعات مورد نیاز برای ایجاد یک تابع هدف آزمایشی نیاز است، آن‌ها عبارتند از (۱) بعد مسئله، n ۲) تعداد مینیمم‌های موضعی m، ۳) مقدار مینیمم سراسری f^*، ۴) فاصله d از مینیمم‌کننده سراسری تا راس پارابلوئید، ۵) شعاع r ناحیه جذب مینیمم‌کننده سراسری. هنگامی که داده‌ها برای ساختن یک تابع هدف آزمایشی تولید شد، می‌توان انواع مختلف توابع هدف را با استفاده از عبارات ارائه شده در [۷] فرموله کرد. استفاده از مولد $GKLS$ به سه علت مناسب است: اولاً، برای مسئله آزمایشی ساخته‌شده، تمام جواب‌های مینیمم سراسری و موضعی آن را می‌داند و حتی می‌تواند ارزش مقدار مینیمم سراسری آن را تعیین کند. ثانیاً، می تواند میزان دشواری تابع آزمایشی تولیدشده را با تغییر مقدار پارامترها تنظیم کند. ثالثاً، مسئله آزمایشی تولیدشده منحصراً توسط این پارامترها تعیین می شود که آزمایش عددی را به یک آزمایش کاملا قابل تکرار تبدیل می‌کند.

در ادامه، ابتدا عملکرد عددی $GQSM$ با الگوریتم های پیشنهادی و الگوریتم های مرجع که در [۲۲] آورده شده است، مقایسه می‌شود. سپس عملکرد عددی $GQSM$ نسبت به گزینه پارامترهای ورودی در مولد $GKLS$ بررسی می‌شود.

روش‌های پیشنهادی در [۲۲] شامل هر دو نسخه الگوریتم اصلی $DISIMPL$ و الگوریتم جدید $Gb-DISIMPL$ با گرایش سراسری است، و الگوریتم‌های مرجع آمده در [۲۲] شامل روش $DIRECT$ اصلی [۱۳] و اصلاح آن با گرایش موضعی $DIRECTl$ است که جزئیات مربوط به این الگوریتم‌ها در منابع مربوطه موجود است. برای مطابقت با مرجع [۲۲]، پارامترهای مولد $GKLS$ همانند پارامترهایی که در جدول ۲ مرجع [۲۲] نشان داده شده‌است، تنظیم شده‌است. همچنین برای هر نوع، ۱۰۰ تابع آزمایشی تولید می‌شود. برای عملکرد عددی این الگوریتم‌های مرجع، داده های نشان داده‌شده در مرجع [۲۲] نقل شده‌است.

جدول (۴) میانه، حداکثر و متوسط ارزیابی‌های توابع را برای هر الگوریتم نامزد برای حل هر نوع از مسائل نشان می دهد، آن‌ها به ترتیب با f_{med}، f_{max} و f_{ave} مشخص می شوند. برای این الگوریتم‌ها که حداکثر تعداد ارزیابی‌های تابع‌شان بیش از ۱□۰۰۰□۰۰۰ است (مانند الگوریتم مستقیم برای انواع ۴-۸) به سادگی آن‌ها برای حل این دسته از مسائل شکست خورده در نظر گرفته می‌شوند، که در جدول (۴) به صورت "-" نشان داده شده است. می توان از جدول (۴) مشاهده کرد که به جز انواع تابع ۱، ۲ و ۳، روش $GQSM$ عملکرد بهتری نسبت به همه الگوریتم‌های مرجع دارد. علاوه بر این، الگوریتم های مرجع بین انواع ساده (انواع ۱، ۳، ۵ و ۷) و انواع سخت (انواع ۲، ۴، ۶ و ۸) عملکرد متفاوتی دارند، به عنوان مثال، سری الگوریتم‌های $DISIMPL$ در مسائل ساده مقدار تابع بسیار کم‌تری را نسبت به انواع سخت ارزیابی می‌کنند؛ در حالی که، $GQSM$ در انواع مختلف مسائل، پایدارتر عمل می‌کند و تفاوت عملکرد آشکاری بین انواع ساده و سخت دیده نشده‌است. این نیز در شکل (۲) نمودار جعبه‌ای تعداد ارزیابی‌های تابع نشان داده شده‌است.

[6] Ackley
[7] Rastrigin

به منظور بررسی قدرت $GQSM$، آن بر روی دسته‌ای از مسائل با ابعاد و تعداد مینیمم‌های موضعی مختلف اجرا شده‌است. در مرحله اول، پارامترها به صورت $m = ۱۰$، $f^* = -۱$، $d = ۰/۶۶$، $r = ۰/۲$ و $n = ۲ \sim ۴۰$ با گام ۵ تنظیم شد، تعداد ارزیابی‌های تابع و زمان صرف شده برای هر مسئله در شکل نشان داده شده است. در شکل (آ) با افزایش تعداد ابعاد، تعداد ارزیابی‌های تابع مورد نیاز برای هر مسئله نیز افزایش میابد، اما نه در درجه تند. انحراف تعدادی از ارزیابی‌های تابع روند صعودی دارد اما چندان هم حساس نیست (مستطیل های آبی این موضوع را نشان می‌دهد) و فقط چند نقطه پرت وجود دارد ("+" قرمز). شکل (۳) (ب)، که تغییرات زمان مصرفی برای هر مسئله را نسبت به افزایش بعد نشان می‌دهد، همان ویژگی شکل (۳) (الف) را منعکس می کند. شکل (۳) نشان می دهد که $GQSM$ برای مسائل تولیدشده توسط مولد $GKLS$ قوی و پایدارمی‌باشد .

در مرحله دوم، بعد $n = ۲$ تنظیم می‌شود و m از ۵ به ۵۰ با گام ۵ تغییر پیدا می‌کند، در حالی که سایر پارامترها یکسان هستند، نتایج عددی آن‌ها در شکل (۴) ارائه شده است. از شکل (۴) (آ)، میانه تعداد ارزیابی‌های تابع به طور ثابت حدود ۷۵۰ حفظ می‌شود، بیش‌تر داده‌ها از ۵۰۰ تا کمی بیش‌تر از ۱۵۰۰ متغیر است، نقاط پرت بسیار کمی وجود دارد. شکل (۴) (ب) تقریباً یک ویژگی را برای هر دسته از مسائل نشان می دهد، اما در مقادیر متوسط برای $n = ۴۰$ و ۵۰ کمی متفاوت است. شکل (۵) نشان می‌دهد که $GQSM$ نسبت به تغییر تعداد مینیمم‌های موضعی برای مسائل تولیدشده توسط مولد $GKLS$ حساس نیست.

۲.۵ . *کاربرد مسئله موضعی‌سازی حسگر*

موضعی‌سازی سنسور یک مسئله اساسی در شبکه بی‌سیم حسگر است. شبکه حسگر بی‌سیم از چند تا چند صد یا حتی هزاران "گره" هایی ساخته شده است که هر گره به یک یا چند گره دیگر متصل است. شبکه بی‌سیم حسگر در زمینه طراحی سیستم رویه‌های جدیدی ارائه می‌دهد. از یک سو، هزینه پایین گره‌ها مقیاس وسیع و محاسبات بسیار موازی را تسهیل می کند و از سوی دیگر، هر گره دارای قدرت محدود، اعتبار محدود و یک ارتباط موضعی با تعداد معدودی از همسایه است.با توجه به این زمینه های کاربردی و مقیاس وسیع بالقوه، نمیتوان به محل دقیق یا چیدمان یکنواخت حسگرها اطمینان کرد. هنوز موضعی‌سازی هر حسگر توسط سیستم موقعیت یابی جهانی (GPS) به دلیل هزینه زیاد و محدود بودن قدرت و حافظه حسگرها غیرممکن است. به همین دلیل موضوع مسئله موضعی‌سازی حسگر مطرح می‌شود [۱۰، ۱۹] که قصد دارد موقعیت هر حسگر را در یک شبکه با دادن فاصله‌های اندازه گیری‌شده بین جفت حسگرهای متصل تعیین کند. پیش از این بدون داشتن موقعیت هیچ حسگری، فقط می‌شود اطلاعات موقعیت نسبی شبکه حسگر را با اندازه گیری فاصله اندازه گیری‌شده جفت حسگرهای متصل تخمین زد. اما برای برخی از شبکه ها، تخمین به اندازه کافی خوب نیست، مانند شبکه برای ردیابی و نظارت بر اطلاعات محیطی (دما، سطح صدا، نور، و غیره). بنابراین ، برای به دست آوردن موقعیت مطلق حسگرها، باید فرض کرد که از قبل موقعیت چند گره لنگر مشخص است. به گره‌های لنگر، "دیده‌بان" می گویند.

فرض شود که تعداد m نقطه معلوم(لنگرها) متعلق به مجموعه $A = \{a_k \in \mathbb{R}^۲ | k = ۱, ۲, ..., m\}$ و تعداد n نقطه معلوم (حسگرها) متعلق به مجموعه $S = \{x_i \in mathbbR^۲ | i = ۱, ۲, ..., n\}$ وجود دارد. مجموعه‌ای که شامل جفت نقاط N_e است، به صورت زیر تعریف شده‌است

$$N_e = \{(a_k, x_i) | a_k \in A, x_j \in S\},$$

و مجموعه‌ای که شامل جفت نقاط N_u است، به صورت زیر تعریف شده‌است

$$N_u = \{(x_i, x_j) | x_i \in S, x_j \in S\}.$$

برای هر جفت نقطه در N_e، یک مقیاس فاصله اقلیدسی d_{kj} وجود دارد. برای هر جفت نقطه در N_u نیز، یک مقیاس فاصله اقلیدسی d_{ij} وجود دارد. در نتیجه، مسئله موضعی‌سازی حسگر این است که موقعیت حسگرهای $(x_i s)$ پیدا شود، به طوری که

$$\begin{aligned} ||a_k - x_j||^۲ &= d_{kj}^۲ \quad \forall (a_k, x_j) \in N_e, \\ ||x_i - x_j||^۲ &= d_{ij}^۲ \quad \forall (x_i, x_j) \in N_u. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

برای تعداد کمی از حسگرها، ممکن است بتوان مکان های حسگر را با حل معادله‌ها محاسبه کرد (۱۵). حل سیستم چند جمله‌ای زمانی که تعداد زیادی حسگر وجود دارد می تواند بسیار پرهزینه باشد. علاوه بر این، اگر فواصل d_{kj} و d_{ij} دارای خطا باشند، این سیستم چند جمله‌ای ممکن است نامناسب باشد، که اغلب در عمل اتفاق می‌افتد. سیستم چند جمله‌ای معادلات (۱۵) را نیز می‌توان به مسئله بهینه‌سازی سراسری معادل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} min\{e_۱ = & \sum_{a_k, x_j \in N_e} \left| \; ||a_k - x_j||^۲ - d_{kj}^۲ \; \right| \\ + & \sum_{x_i, x_j \in N_u, i<j} \left| \; ||x_i - x_j||^۲ - d_{ij}^۲ \; \right| \}. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

یا

$$min\{e_۲ = \sum_{a_k, x_j \in N_e} (||a_k - x_j||^۲ - d_{kj}^۲)^۲ + \sum_{x_i, x_j \in N_u, i<j} (||x_i - x_j||^۲ - d_{ij}^۲)^۲\}. \quad (۱۷)$$

واضح است که کوچک‌ترین مقدار هدف ممکن مسائل (۱۶) و (۱۷) صفر است، در حالی که $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ موقعیت‌های واقعی حسگر هستند اگر و تنها اگر مقدار بهینه مسائل (۱۶) و (۱۷) صفر باشد. توجه شود که مسئله (۱۶) یک مسئله ناهموار است درحالی که مسئله (۱۷) یک مسئله درجه دو هموار می‌باشد، اما هردوی آن‌ها نامحدب می‌باشند.

۵.۲.۱ . نتایج عددی

شکل‌های (۶) و (۷) نتایج مسائل موضعی‌سازی حسگر که با روش شبه‌سکانت اصلاح شده با ۵۰ و ۴۰۰ حسگر حل شده را به ترتیب نشان می‌دهد. در شکل های (۶)(b) و (۷)،(b) مشاهده می‌شود که تمام مکان های حسگر واقعی (که با "*" نشان داده شده‌اند) به خوبی با مکان های حسگر به دست آمده (نمایش داده شده با " o ") تخمین زده شده‌اند.

شکل (۸) کاهش مقدار تابع هدف را هنگامی که تعداد حسگرها ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ است نشان می دهد. از شکل (۸)،(a) راه حل بهینه پس از ۲۰ تکرار جست‌وجوی سراسری بدست می‌آید. از شکل (۸)،(b) راه حل بهینه پس از ۱۹۴ تکرار جست‌وجوی سراسری به دست می‌آید. این دو شکل نشان می دهد که روش جست‌وجوی سراسری مورد استفاده در روش شبه‌سکانت اصلاح شده قادر به یافتن نقاط شروع مناسب برای روش جست‌وجوی موضعی است.

روش های موجود برای حل مسائل موضعی‌سازی حسگر با بیش از ۱۰۰۰ حسگر معمولاً مبتنی بر روش های آرام سازی محدب هستند، مانند یک رابطه مبتنی بر SDP [۲۳]. با این حال، این روش‌ها نمی‌توانند تضمینی برای به دست آوردن یک راه حل بهینه، حتی یک راه حل بهینه موضعی باشند. با بهترین دانسته‌ها، روش‌های بهینه‌سازی سراسری که می‌توانند این مسئله را با بیش از ۲۰۰۰ حسگر حل کنند وجود ندارد (در مرجع [۱۰] ۵۰ گره ناشناخته در نظر گرفته شده است، در مرجع [۱۹] ۲۰۰ گره ناشناخته در نظر گرفته شده است)، این نشان می‌دهد که روش ارائه شده در حل مسئله موضعی‌سازی حسگر، قدرتمند و کارآمد است.

۵.۳ . نتیجه‌گیری

در این مقاله اصلاح روش شبه‌سکانت برای حل مسائل بهینه سازی جهانی با محدودیت‌های جعبه‌ای ارائه شده است. این روش شامل روش‌های جست‌وجوی موضعی و سراسری است. روش جست‌وجوی موضعی مبتنی بر روش شبه‌سکانت است که در اصل برای بهینه‌سازی ناهموار طراحی شده‌است، روند جست‌وجوی سراسری نیز با روش شبه‌سکانت اصلاح شده‌است. همگرایی روندهای جست‌وجوی موضعی و سراسری در برخی شرایط ضروری ثابت شده است. برخی از ویژگی‌های روش ارائه شده در این فصل با آزمایش برخی معیارهای آکادمیک مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس بسیاری از مسائل تولید شده توسط یک مولد مسئله برای آزمایش عملکرد عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی کارآمد و قوی است. به عنوان نمونه‌ای از کارآمدی، روش پیشنهادی برای حل مسائل موضعی‌سازی حسگر، شبکه‌های حسگر کوچک و بزرگ مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و نتایج امیدوار کننده است.

مراجع

[1] Bagirov, A.M., & Ganjehlou, A.N. (2010). A quasisecant method for minimizing nonsmooth functions. Optimization Methods & Software, 25(1), pp. 3-18.
[2] Bagirov, A.M., & Rubinov, A.M. (2003). Cutting angle method and a local search. Journal of Global Optimization, 27, pp. 193-213.
[3] Bagirov, A.M., & Rubinov, A.M. (2009). A multidimensional descent method for global optimization. Optimization, 58(5), pp. 611-625.
[4] Clarke, F.H., Ledyaev, Yus., Stern, R.J., & et al. (1998). Nonsmooth analysis and control theory. New York (NY), Springer.
[5] Floudas, C.A. (2013). Deterministic global optimization: theory, methods and applications. Springer Science & Business Media.
[6] Fukushima, M., & Hedar, A.R. (2002). Hybrid simulated annealing and direct search method for nonlinear unconstrained global optimization. Optimization Methods and Software, 17(5), pp. 891-912.
[7] Gaviano, M., Kvasov, D.E., Lera, D., & Sergeyev, Y.D. (2003). Algorithm 829: software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization. ACM Transactions on Mathematical Software, 29(4), pp. 469-480.
[8] Ge, R.P. (1990). A filled function method for finding a global minimizer of a functionof several variables. Mathematical Programming, 46, pp. 191-204.
[9] Gelatt, C.D., Kirkpatrick, S., & Vecchi, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. Science, 220(4598), pp. 671-680.
[10] Goyal, S., & Patterh, M.S. (2014). Wireless sensor network localization based on cuckoo search algorithm. Wireless Personal Communications, 79(1), pp. 223-234.
[11] Grossmann, I.E. (2013). Global optimization in engineering design. Springer Science & Business Medi.
[12] Horst, R., & Tuy, H. (2013). Global optimization: Deterministic approaches. Springer society for Industrial and Applied Mathematics, 8(4), 703-715.
[13] Jones, D.R., Perttunen, C.D., & Stuckman, B.E. (1993). Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant. Journal of Optimization Theory Application, 79(1), pp. 157-181.
[14] Kelley, J.E. (1960). The cutting-plane method for solving convex programs. Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, 8(4), 703-712.
[15] Leo, L., & Kucherenko, S. (2005). Comparison of deterministic and stochastic approaches to global optimization. International Transactions in Operational. Research, 12(3), 263-285.
[16] Long, Q., & Wu, C.Z. (2014). A hybrid method combining genetic algorithm and HookeJeeves method for constrained global optimization. Journal of industrial and management optimization, 10(4), pp. 1279-1296.
[17] Long, Q., Wu, C., Wang, X., & Wu, Z. (2017). A modified quasisecant method for globaloptimization, Appl.Math.Model, 51, 21–37.
[18] Milos, S., &Tuba, M. (2014). Parallelized multiple swarm artificial bee colony algorithm)MS-ABC) for global optimization. Studies in Informatics and Control, 23(1), 117-126.
[19] Ning, R., & Gao, D.Y. (2014). Global optimal solutions to general sensor network localization problem. Performance Evaluation, 75-76(2), pp.1-16.
[20] Ng, C.K., Li, D., & Zhang, L.S. (2010). Global descent method for global optimization. SIAM Journal on Optimization, 20(6), 3161-3184.
[21] Norkin, V.I., Georg, C.P., & Ruszczynski, A. (1998). A branch and bound method for stochastic global optimization. Mathematical Programming, 83, 425-450.
[22] Paulavicius, R., Sergeyev, Y.D., Kvasov, D.E., & Zilinskas, J. (2014). Globally-biased DISIMPL algorithm for expensive global optimization. Journal of Global Optimization, 59, pp.545-567.
[23] Pong, T.K., & Tseng, P. (2011). (Robust) Edge-based semidefinite programming relaxation of sensor network localization. Mathematical programming, 130(2), pp. 321-358.
[24] Sen, M.K., & Stoffa, P.L. (2013). Global optimization methods in geophysical inversion .Cambridge University Press.
[25] Surjanovic, S., & Bingham, D. (2011). Virtual library of simulation experiments: test functions and datasets. http://www.sfu.ca/ ssurjano.
[26] Thakur, M. (2014). A new genetic algorithm for global optimization of multimodalcontinuous functions. Journal of Computational Science, 5(2), 298-311.
[27] Toledo, C.F.M., Oliveira, L., & Franc, P.M. (2014). Global optimization using a genetic algorithm with hierarchically structured population. Journal of Computational and Applied Mathematics, 261, 341-351.
[28] Wang, C.G., Hossein, G.A., & Yang, X.S. (2014). A novel improved accelerated particle swarm optimization algorithm for global numerical optimization. Engineering Computations, 31(7), 1198-1220.
[29] Wolfe, P.H. (1976). Finding the nearest point in a polytope, Mathematical Programming, 11(2), pp. 128-149.
[30] Wu, Z.Y., Li, D., & Zhang, L.S. (2011). Global descent methods for unconstrained global optimization. Journal of Global Optimization, 50(3), 379-396.

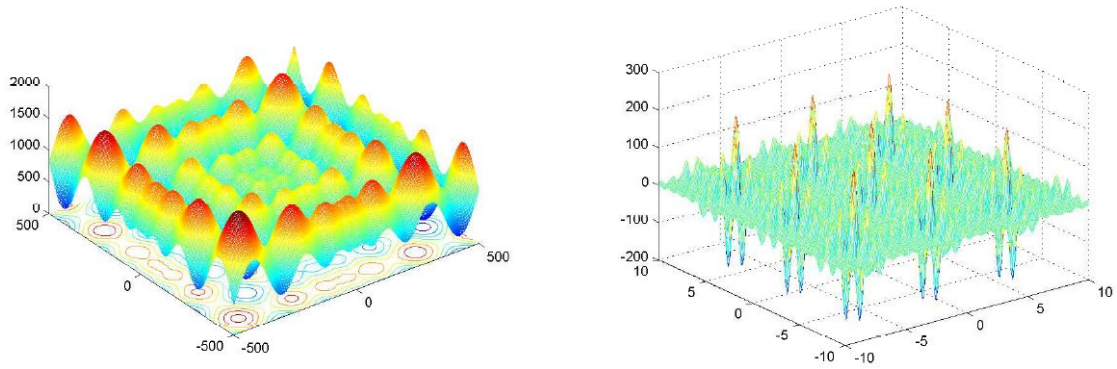
۶. جداول و اشکال

جدول ۱: شرح مسائل آزمایشی

گروه	مسئله	n	f_{opt}
مینیمم‌های موضعی زیاد	$Ackley$	۱۰،۵،۲	۰
	$Griewank$	۱۰،۵،۲	۰
	$Levy$	۱۰،۵،۲	۰
	$Rastrigin$	۱۰،۵،۲	۰
	$Schwefel$	۱۰،۵،۲	۰
	$Shubert$	۲	−۱۸۶٫۷۳۰۹
بشقابی شکل	$Booth$	۲	۰
	$Matyas$	۲	۰
	$Zakharov$	۱۰،۵،۲	۰
کاسه‌ای شکل	$Bohachevsky$	۲	۰
	$Perm$	۳،۲	۰
	$Sphere$	۱۰،۵،۲	۰
	$Sumsquares$	۱۰،۵،۲	۰
	$Trid$	۲	−۲
		۵	−۳۰
		۱۰	−۲۱۰
دره‌ای شکل	$Camel$	۲	−۰٫۰۳۱۶
	$Dixon-Price$	۱۰،۵،۲	۰
	$Rosenbrock$	۱۰،۵،۲	۰
$SteepRidges/Drops$	$Easom$	۲	−۱
	$Michalewicz$	۲	−۱٫۸۰۱۳
		۵	−۴٫۶۸۷۶۵۸
		۱۰	−۹٫۶۶۰۱۵
غیره	$Beale$	۲	۰
	$Branin$	۲	۳۹۷۸۸۷.۰
	$Colville$	۴	۰
	$Goldstein-Price$	۲	۳
	$Shekel$	۴	−۱۰٫۱۵۳۲

جدول ۲: عملکرد عددی $GQSM$ با پارامترهای تقسیم مختلف

مسئله	n	K	SR	f^*	$\bar{N}_f$	$\bar{N}_g$	$\bar{T}$
$Shubert$	۲	۱۰	۵۴	$-۱٫۴۴۴۵e+۰۰۲$	۱۵۷۸	۱۱۶۰	۰٫۰۱
		۱۵	۷۰	$-۱٫۵۸۸۵e+۰۰۲$	۲۱۸۰	۱۶۱۱	۰٫۰۲
		۲۰	۹۴	$-۱٫۸۱۴۴e+۰۰۲$	۲۸۰۷	۲۰۷۵	۰٫۰۲
		۲۵	۹۵	$-۱٫۸۲۰۳e+۰۰۲$	۳۳۸۱	۲۵۰۲	۰٫۰۳
		۳۰	۹۲	$-۱٫۸۰۹۱e+۰۰۲$	۴۳۰۴	۳۱۶۸	۰٫۰۳
		۳۵	۹۶	$-۱٫۸۴۲۰e+۰۰۲$	۴۶۹۶	۳۴۶۸	۰٫۰۳
		۴۰	۱۰۰	$-۱٫۸۶۷۳e+۰۰۲$	۵۰۱۴	۳۷۱۰	۰٫۰۳
		۴۵	۱۰۰	$-۱٫۸۶۷۳e+۰۰۲$	۵۸۹۶	۴۳۵۷	۰٫۰۴
$Schwefel$	۲	۱۰	۲۲	$۱٫۱۱۱۴e+۰۰۲$	۹۶۸	۶۶۴	۰٫۰۱
		۲۰	۹۶	$۹٫۴۷۵۱e+۰۰۰$	۲۲۲۷	۱۵۵۰	۰٫۰۱
		۳۰	۷۷	$۵٫۱۷۱۸e+۰۰۱$	۲۴۰۶	۱۷۱۲	۰٫۰۲
		۴۰	۹۴	$۱٫۴۲۱۳e+۰۰۱$	۲۹۴۴	۲۰۹۳	۰٫۰۲
		۵۰	۹۹	$۲٫۳۶۸۸e+۰۰۰$	۳۷۳۸	۲۶۹۱	۰٫۰۲
	۵	۱۰	۲۵	$۱٫۰۵۶۱e+۰۰۲$	۹۹۴	۶۹۰	۰٫۰۱
		۲۰	۲۶	$۳٫۰۷۳۵e+۰۰۲$	۳۱۲۴	۲۱۴۵	۰٫۰۲
		۳۰	۴۹	$۱٫۹۸۱۹e+۰۰۲$	۳۵۹۱	۲۵۹۱	۰٫۰۳
		۴۰	۵۳	$۱٫۸۶۹۴e+۰۰۲$	۴۷۸۲	۳۴۲۱	۰٫۰۳
		۵۰	۵۸	$۱٫۵۳۹۷e+۰۰۲$	۵۲۹۵	۳۹۲۵	۰٫۰۴
	۱۰	۵۰	۹	$۶٫۰۹۹۶e+۰۰۲$	۷۸۹۹	۵۵۵۱	۰٫۰۶
		۱۰۰	۲۶	$۳٫۸۸۸۷e+۰۰۲$	۱۳۸۳۸	۱۰۰۱۱	۰٫۱۱
		۱۵۰	۱۷	$۵٫۵۰۵۴e+۰۰۲$	۱۷۳۹۹	۱۲۸۵۰	۰٫۱۴
		۲۰۰	۱۶	$۴٫۵۶۱۹e+۰۰۲$	۲۲۰۷۷	۱۶۴۶۰	۰٫۱۷
		۲۵۰	۱۶	$۴٫۸۲۸۳e+۰۰۲$	۲۸۶۳۵	۲۱۲۸۱	۰٫۲۳



(آ) تابع شوبرت

(ب) تابع شفل

شکل ۱: نمودارهای توابع شوبرت و شفل با $n = ۲$

جدول ۳: مقایسه عددی با $GDMH$

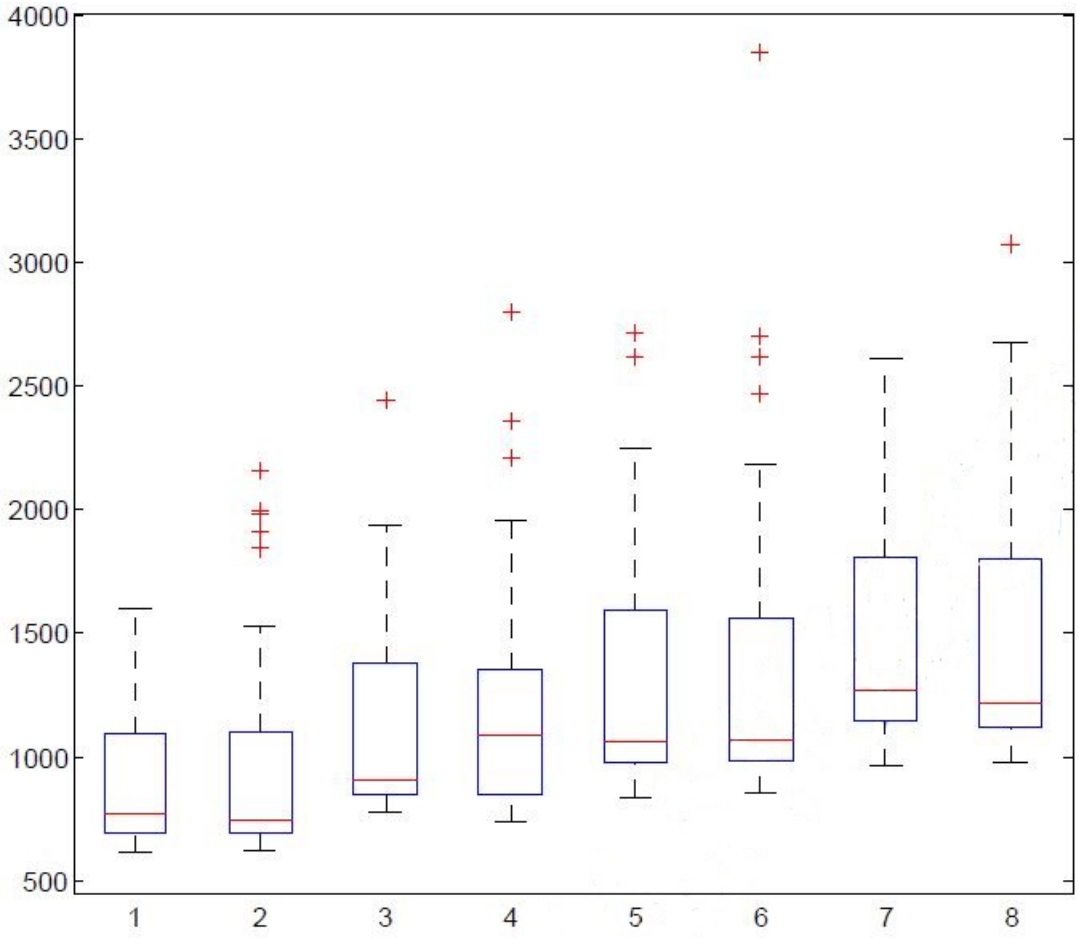
مسئله	n	روش	$\bar{N}_f$	$\bar{T}$	PI
$Ackley$	۱۰	$GQSM$	۷۲۰۲/۰	۰/۰۷	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۵۴۰۲/۰	۷/۵۷	۱/۰۰۰۰
	۲۰	$GQSM$	۱۰۲۰۸/۰	۰/۰۹	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۲۴۳۹۴/۷	۱۶/۵۷	۱/۰۰۰۰
	۵۰	$GQSM$	۹۱۷۶/۰	۰/۰۹	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۷۹۸۰۹/۸	۴۱/۷۴	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰	$GQSM$	۷۷۶۲/۰	۰/۰۹	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۲۴۲۳۴۴/۸	۱۵۴/۲۰	۱/۰۰۰۰
	۲۰۰	$GQSM$	۹۹۲۱/۰	۰/۱۵	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۹۷۱۸۹۹/۲	۴۴۷/۴۶	۱/۰۰۰۰
$Levy۲$	۵۰	$GQSM$	۷۹۹۷۸/۰	۰/۳۷	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۰۴۳۶/۷	۵/۸۵	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰	$GQSM$	۱۳۴۴۵۳/۰	۰/۷۷	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۲۰۱۴۲/۱	۱۰/۶۴	۱/۰۰۰۰
	۲۰۰	$GQSM$	۱۶۶۵۳۱/۰	۱/۴۶	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۳۵۸۷۲/۷	۲۰/۸۸	۱/۰۰۰۰
	۵۰۰	$GQSM$	۱۸۹۴۰۹/۰	۳/۹۲	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۹۵۵۲۳/۷	۷۸/۰۲	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰۰	$GQSM$	۲۴۴۱۱۵/۰	۹/۳۱	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۳۲۴۳۱/۴	۲۲۲/۲۸	۱/۰۰۰۰
$Levy۳$	۱۰	$GQSM$	۷۰۵۴/۰	۰/۰۴	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۲۶۲۶/۷	۵/۲۹	۱/۰۰۰۰
	۲۰	$GQSM$	۱۵۵۸۳/۰	۰/۰۸	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۴۵۰۸/۸	۵/۶۹	۱/۰۰۰۰
	۵۰	$GQSM$	۵۵۹۵۸/۰	۰/۲۸	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۹۴۶۶/۸	۱۲/۵۸	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰	$GQSM$	۷۹۳۵۶/۰	۰/۴۸	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۳۲۳۷۸/۷	۱۶/۵۷	۱/۰۰۰۰
	۲۰۰	$GQSM$	۱۶۴۱۶۵/۰	۱/۳۴	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۳۴۴۹۸/۸	۲۲/۶۸	۱/۰۰۰۰
$Schwefel$	۲۰	$GQSM$	۲۷۶۰۴/۰	۰/۲۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۷۶۷۱/۰	۱۹/۵	۱/۰۰۰۰
	۵۰	$GQSM$	۳۶۵۷۹/۰	۰/۳۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۲۳۴۷۴/۴	۴۵/۲	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰	$GQSM$	۴۰۵۷۶/۰	۰/۴۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۵۶۲۷۵/۲	۹۱/۴	۱/۰۰۰۰
	۲۰۰	$GQSM$	۵۸۱۹۵/۰	۰/۸۰	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۴۷۶۳۶/۷	۱۷۹/۳	۱/۰۰۰۰
	۵۰۰	$GQSM$	۷۰۳۸۸۳/۰	۱۷/۹۶	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۶۴۵۴۶۷/۲	۴۵۳/۰	۱/۰۰۰۰
$Rastrigin$	۲۰	$GQSM$	۲۷۶۰۴/۰	۰/۲۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۴۲۳۹/۵	۴/۵۳	۱/۰۰۰۰
	۵۰	$GQSM$	۳۶۵۷۹/۰	۰/۳۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۷۵۵۰/۳	۹/۳۹	۱/۰۰۰۰
	۱۰۰	$GQSM$	۴۰۵۷۶/۰	۰/۴۳	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۵۵۶۲۵/۹	۲۷/۴۹	۱/۰۰۰۰
	۲۰۰	$GQSM$	۵۸۱۹۵/۰	۰/۸۰	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۹۰۶۴۲/۸	۸۲/۰۸	۱/۰۰۰۰
	۵۰۰	$GQSM$	۷۰۳۸۸۳/۰	۱۷/۹۶	۱/۰۰۰۰
		$GDMH$	۱۱۴۶۰۴۷/۶	۴۳۷/۴۷	۱/۰۰۰۰

جدول ۴: مقایسه تعداد ارزیابی‌های تابع

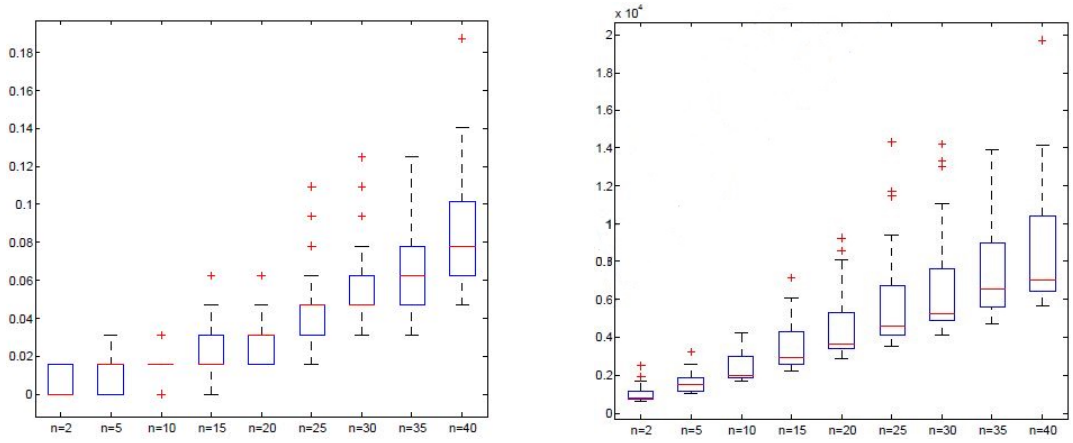
الگوریتم	?	GQSM	DIRECT	DIRECTl	DISIMPL-C		DISIMPL-V	
					Original	*Gb*	*Original*	*Gb*
f_{med}	۱	۷۷۵	۱۱۱	۱۵۲	۱۳۲	۱۳۲	۱۵۱	۱۵۱
	۲	۷۴۷	۱۰۶۲	۱۳۲۸	۷۰۵	۵۲۲	۱۰۲۱	۵۱۱
	۳	۹۰۷	۳۸۶	۵۹۱	۱۴۰۳	۱۲۲۸	۷۸۷	۷۲۰
	۴	۱۰۸۵	۱۷۴۹	۱۹۶۷	۳۳۱۵	۲۴۸۳	۲۵۹۴	۱۲۸۳
	۵	۱۰۶۳	۴۸۰۵	۷۱۹۴	۶۲۱۱	۵۳۲۷	۷۳۳۴	۴۶۱۵
	۶	۱۰۷۰	۱۶۱۱۴	۳۳۱۴۷	۲۰۶۷۷	۱۳۲۰۶	۲۹۸۰۷	۱۰۰۳۳
	۷	۱۲۷۱	۱۶۶۰	۹۲۴۶	۳۸۹۳	۳۱۳۴	۷۲۵۲	۴۵۲۴
	۸	۱۲۲۴	۵۵۰۹۲	۱۲۶۳۰۴	۵۰۰۹۶	۲۳۱۶۸	۴۲۶۸۰	۲۲۴۱۶
f_{max}	۱	۱۶۰۰	۱۱۵۹	۲۳۱۸	۹۶۰	۷۷۸	۷۷۳	۴۷۲
	۲	۲۱۶۱	۳۲۰۱	۳۴۱۴	۶۶۹۶	۳۲۷۸	۲۶۸۳	۱۵۴۷
	۳	۲۴۴۱	۱۲۵۰۷	۱۳۳۰۹	۵۰۱۶۶	۱۵۴۵۲	۴۷۴۰	۲۶۹۴
	۴	۲۸۰۰	—	۲۹۲۳۳	۱۱۱۲۵۲	۵۲۲۷۰	۷۳۵۴	۳۷۲۳
	۵	۲۷۱۸	—	۱۱۸۷۴۴	—	۱۶۴۳۸۹	۵۸۷۶۴	۱۳۸۲۵
	۶	۳۸۵۱	—	۲۸۷۸۵۷	—	—	۱۱۸۴۸۲	۳۰۷۵۹
	۷	۲۶۱۴	—	۱۷۸۲۱۷	—	۲۹۴۵۸۱	۴۸۵۹۰	۲۳۱۲۶
	۸	۳۰۷۷	—	—	—	—	۳۸۲۵۹۳	۱۶۸۰۶۷
f_{ave}	۱	۸۸۷٫۲۵	۱۹۸٫۸۹	۲۹۲٫۷۹	۲۰۰٫۸۰	۱۸۲٫۰۴	۱۹۲٫۹۳	۱۷۴٫۲۵
	۲	۹۱۶٫۷۱	۱۰۶۳٫۷۸	۱۲۶۷٫۰۷	۱۱۸۹٫۶۰	۶۷۲٫۶۰	۱۰۰۳٫۵۶	۵۱۸٫۱۱
	۳	۱۱۳۲٫۵۶	۱۱۱۷٫۷۰	۱۷۸۵٫۷۳	۲۶۱۴٫۰۲	۱۸۱۵٫۵۶	۱۰۶۱٫۸۳	۷۵۱٫۲۵
	۴	۱۱۵۹٫۳۹	—	۴۸۵۸٫۹۳	۷۱۵۸٫۷۶	۴۲۶۰٫۹۶	۲۵۹۸٫۹۱	۱۳۶۴٫۴۰
	۵	۱۳۰۱٫۷۸	—	۱۸۹۸۳٫۵۵	—	۱۳۶۳۳٫۱۴	۱۰۶۱۷٫۹۸	۴۵۷۹٫۲۴
	۶	۱۳۲۷٫۷۰	—	۶۸۷۵۴٫۰۲	—	—	۳۳۹۸۵٫۱۶	۱۰۷۰۰٫۱۷
	۷	۱۵۳۳٫۸۲	—	۱۶۷۵۸٫۴۴	—	۲۳۸۳۷٫۸۲	۱۱۲۰۰٫۴۴	۵۹۹۷٫۳۷
	۸	۱۴۷۵٫۷۱	—	—	—	—	۶۴۷۵۰٫۹۹	۲۸۹۴۶٫۰۱

جدول ۵: نتایج عددی برای مسئله موضعی‌سازی سنسور

شماره	f^*	R	d_{ave}	d_{std}
۲۰	$۳٫۸۷۵۱۷۱۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۱۴۰۹۷۴۴ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۳٫۰۸۸۹۸۴۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۴۰۲۲۲۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
۳۰	$۲٫۰۷۰۶۷۳۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۹٫۵۱۲۸۶۵۷ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۳٫۰۸۸۹۸۴۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۴۰۲۲۲۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
۴۰	$۲٫۳۰۱۳۴۰۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۴٫۸۶۹۹۱۱۲ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱٫۷۴۵۳۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۶۷۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
۵۰	$۱٫۸۷۰۹۴۶۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۱۷۸۱۵۸۵ \times ۱۰^{-۰۹}$	$۱٫۷۴۵۳۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۶۷۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
۱۰۰	$۵٫۸۳۳۳۸۷۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۸٫۲۹۸۹۶۳۴ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱٫۷۴۵۳۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۶۷۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
۲۰۰	$۲٫۴۶۲۶۹۱۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۲٫۶۷۱۶۶۱۱ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱٫۷۴۵۳۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۶۷۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
۳۰۰	$۱٫۳۵۳۷۰۵۸ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۰۶۸۳۴۹۵ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱٫۷۴۵۳۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۶۷۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
۴۰۰	$۱٫۳۴۴۸۵۵۴ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۱۳۶۹۳۵۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۹٫۸۹۲۶۵۵۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۳٫۹۸۳۵۴۱۷ \times ۱۰^{-۶}$
۵۰۰	$۴٫۴۲۶۷۵۸۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۲۰۷۵۰۰۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۳٫۴۳۷۲۱۴۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۵٫۱۰۹۶۵۹۲ \times ۱۰^{-۶}$
۱۰۰۰	$۱٫۵۳۱۲۱۴۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۲۱۳۰۶۹۸ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۴۳۹۲۱۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۷۶۶۷۴۴۹ \times ۱۰^{-۵}$
۲۰۰۰	$۱٫۳۰۰۰۷۵۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۹٫۶۷۶۴۰۸۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۹٫۶۱۶۲۶۶۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۷۲۱۱۰۶ \times ۱۰^{-۵}$



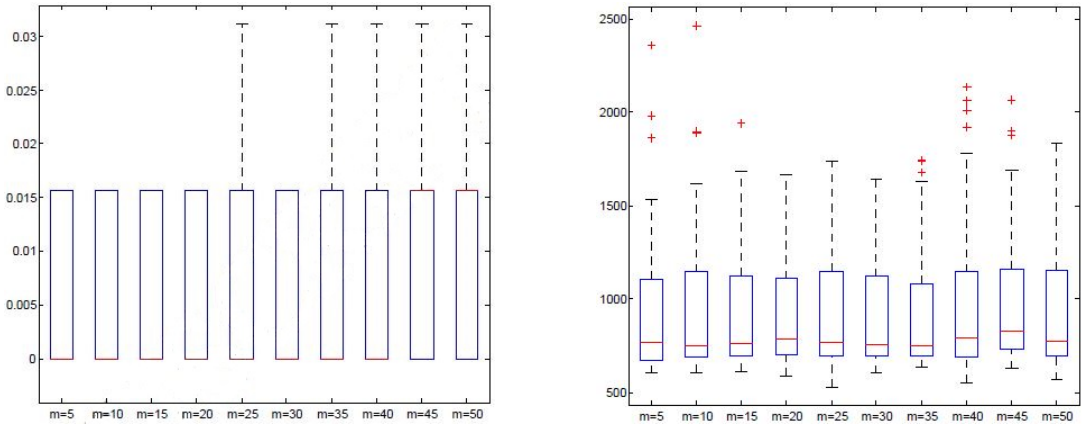
شکل ۲: نمایش جعبه‌ای تعداد ارزیابی‌های تابع



(آ) ارزیابی تابع - بُعد

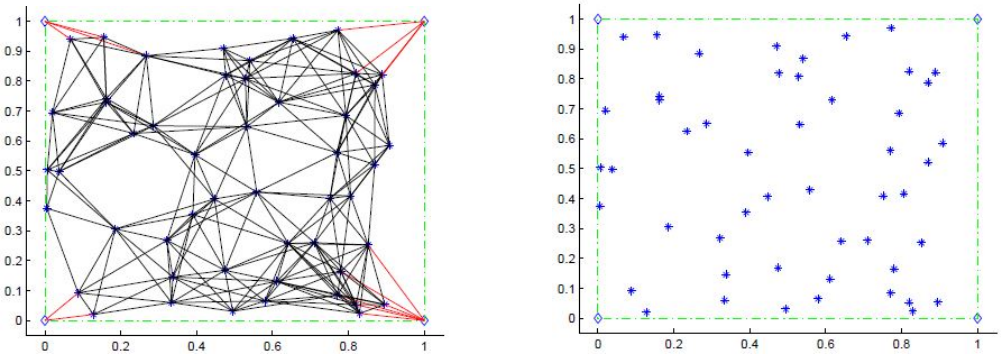
(ب) زمان مصرفی - بُعد

شکل ۳: کارایی $GQSM$ با توجه به تغییر بُعد



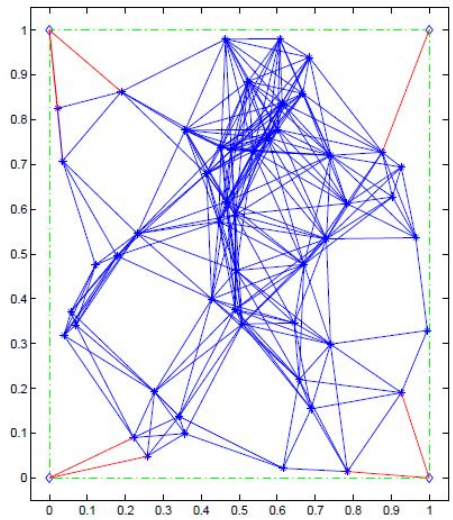
(آ) ارزیابی تابع - مینیمم موضعی (ب) زمان مصرفی - مینیمم موضعی

شکل ۴: کارایی $GQSM$ با توجه به تعداد مینیمم موضعی

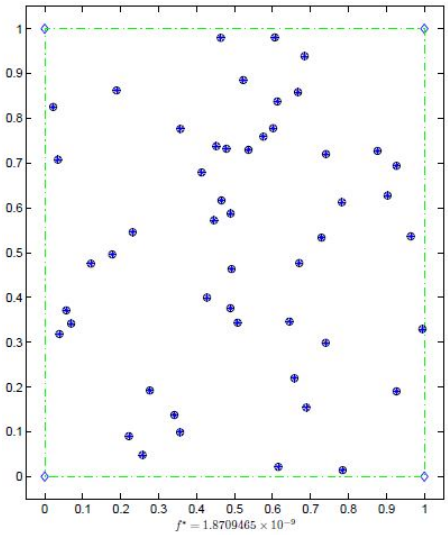


(آ) محل حسگرها (ب) اتصال حسگرها

شکل ۵: نمونه ای از شبکه حسگر با ۵۰ حسگر و ۴ لنگر

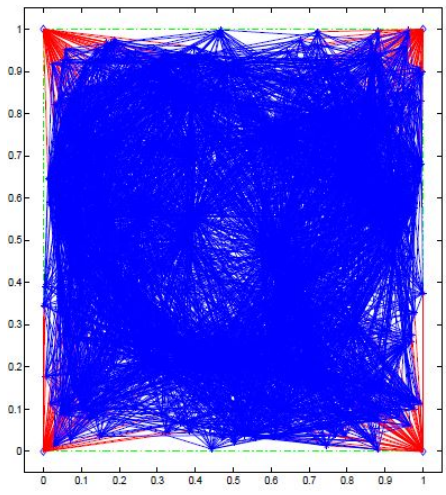


(آ) اتصال حسگرها

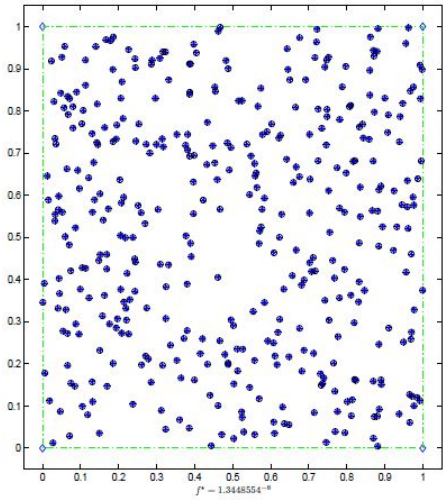


(ب) مکان‌های حسگر واقعی و به‌دست آمده

شکل ۶: نتایج شبکه حسگر با ۵۰ حسگر و ۴ لنگر

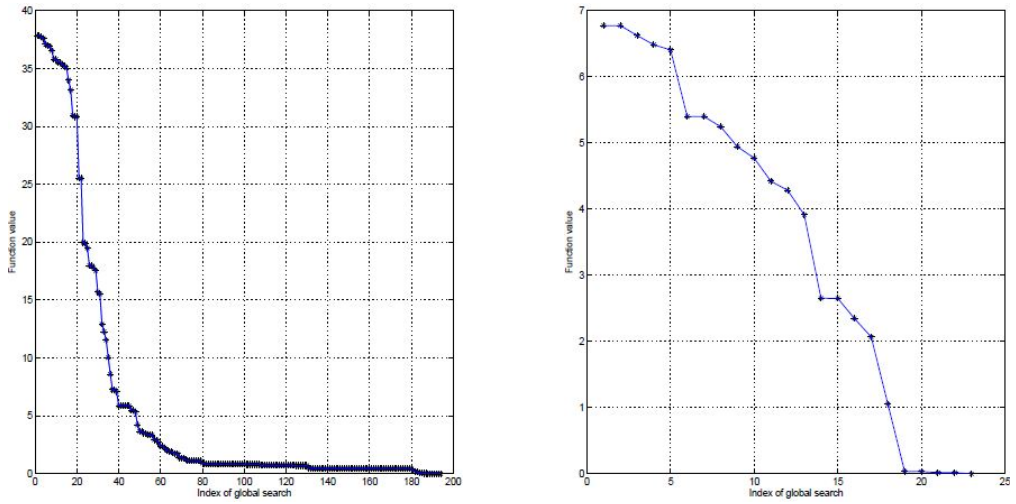


(آ) اتصال حسگرها



(ب) مکان‌های حسگر واقعی و به‌دست آمده

شکل ۷: نتایج شبکه حسگر با ۴۰۰ حسگر و ۴ لنگر



(آ) تعداد حسگرها=۱۰۰۰ (ب) تعداد حسگرها=۲۰۰۰

شکل ۸: کاهش مقدار تابع هدف

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–321، صص. ۳۶۰۱–۳۶۰۶

ردیابی چند عامله با استفاده از کنترل یادگیری تکراری بهینه

فاطمه دهقان*[آ]، مجید بابانظری[ب]

[آ]کارشناسی ارشد دانشگاه یزد
[ب]دکتری دانشگاه آزاد اسلامی شیراز

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
کنترل تکراری
ردیابی
سیستم‌های چندعامله

چکیده

در این مقاله، در یک سیستم کنترلی قابل تکرار، طرح کنترل یادگیری تکراری برای سیستم‌های چندعامله، برای انجام ردیابی اجماع تحت توپولوژی ارتباطات ثابت بررسی می‌شود. دینامیک عامل توسط معادلات غیر خطی متغیر با زمان که در شرایط لیپ‌شیتز صدق می‌کند، مشخص می‌شود. علاوه بر این مسیر مورد نظر تنها در دسترس زیر مجموعه‌ای از عامل‌ها است. با استفاده از مفهوم نرم ماتریس گراف وابسته، شرایط همگرایی را می‌توان در سطح عامل، که در مجموعه‌ای از مقادیر ویژه است و به گراف ارتباطات بستگی دارد مشخص نمود. نتایج ابتدا برای سیستم‌های همگن و سپس به سیستم‌های ناهمگن توسعه داده شده است. در ادامه، روش‌های طراحی بدست آوردن کنترل بهینه پیشنهاد می‌کند که λ–نرم خطای ردیابی با نرخ سریع‌تری همگرا می‌شود.

در دهه‌های گذشته، سیستم‌های چندعامله MAS باتوجه به کاربردهای بالقوه نظر محققان بسیاری را جلب نموده‌اند. اجماع، یک دسته مهم از مسایل هماهنگ‌سازی MAS است. براساس [۵] درشبکه‌هایی از عوامل (سیستم‌های دینامیکی)، اجماع یعنی رسیدن به توافق در مورد مقدار معین موردنظر که به تمامی عوامل وابسته است. در اجماع، کنترل یک عامل است که توسط حالت و اطلاعات عامل‌های همسایه تولید می‌شود. کنترل یادگیری تکراریILC: یکی از روش‌های کنترلی برای سیستم‌هایی است که به صورت تکراری یک دستور را اجرا می‌کنند برای مثال: بازوی رباتیک که یک مسیر حرکت ثابت را همواره طی می‌کند، یک نمونه از این سیستم‌ها است. در این سیستم‌ها، هدف کنترل، پیمودن یک مسیر یا تعقیب کردن یک مرجع با دقت بالاست که این کار به کمک یادگیری از اجراهای قبلی سیستم و اصلاح برای اجرای بعدی انجام می‌گیرد. پیشنهاد اولیه ILC در سال ۱۹۸۴ [۶] و به طور گسترده‌ای بعد از آن مورد بررسی قرار گرفته است[۳] و [۷]. اجماع برای سیستم‌های چندعامله خطی در [۸] بطور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. ایده استفاده از ILC در هماهنگ‌سازی MAS اولین بار توسط [۳] در نظر گرفته شده است. فرض شده است که توپولوژی ارتباطات، یک درخت پوشا جهت‌دار به منظور تسهیل یادگیری طراحی شود که هر عامل می‌تواند حالت اولیه دلخواه داشته باشد. با ترکیب حالت اولیه یادگیری نشان داده شده است که کنترل کننده می‌تواند به ردیابی کامل در یک بازه زمانی ثابت و تکراری دست یابد.

۱. مسئله چندعامله

یک گروه ناهمگن N عامله از سیستم دینامیکی، متغیر با زمان را در یک محیط قابل تکرار در نظر بگیرید. توپولوژی تعامل با $G = (V, E, A)$ توصیف می‌شود. دینامیک j امین عامل در تکرار i ام به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,j} = f_j(t, x_{i,j}) + B_j(t)u_{i,j}, \\ y_{i,j} = C_j(t)x_{i,j} \qquad \forall t \in [0, T], \quad \forall j \in V. \end{cases} \tag{۱}$$

*فاطمه دهقان
پست الکترونیک: fatemedehghan368@gmail.com (فاطمه دهقان)، majid_babanazari@yahoo.com (مجید بابانظری)

با شرایط اولیه $x_{i,j}(۰)$ که در آن $x_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_j}$ بردار حالت و $y_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی و $u_{i,j} \in \mathbb{R}^{pj}$ ورودی کنترل برای هر $j = ۱,\dots,N$ می‌باشد و $f_j(.,.)$ تابع خطی ناشناخته که در شرایط پیوستگی لیپ‌شیتز صدق می‌کند. علاوه بر این $B_j \in C^۱[۰,T]$ و $C_j \in C^۱[۰,T]$ ماتریس‌های متغیر با زمان هستند. مسیر ردیابی $y_d(t)$ برای همه $C[۰,T]$ است. تنها اطلاعات موجود، سیگنال خروجی از هر عامل است. به‌جای مسئله ردیابی سنتی در ILC، که در آن هر عامل باید در مسیر مورد نظر باشد، $y_d(t)$ تنها در دسترس زیر مجموعه‌ای از عامل‌ها است. مسیر مورد نظر $y_d(t)$ فرض شده است و آن توسط رأس ۰ در گراف مشخص شده است. بنابراین $\bar{g} = (V \cup \{۰\}, \bar{E}, \bar{A})$ اطلاعات گراف را مشخص می‌کند که در آن $\bar{E}$ مجموعه‌ی یال‌ها و $\bar{A}$ ماتریس مجاورت گراف $\bar{g}$ می‌باشد. فرض کنید $\xi_{i,j}(t)$ اطلاعات در دسترس در i امین تکرار برای عامل j ام است. توجه داشته باشید که اندیس اول نشان‌دهنده تکرار و اندیس دوم شاخص عامل است.

$$\xi_{i,j}(t) = \sum_{k \in N_j} a_{j,k}(y_{i,k}(t) - y_{i,j}(t)) + d_j(y_d(t) - y_{i,j}(t)). \qquad (۲)$$

که در آن $a_{j,k}$، (j,k)امین درایه ماتریس A و N_j مجموعه همسایگان عامل j ام و $y_{i,j}$ خروجی عامل j ام در تکرار i ام و $d_j = ۱$ اگر عامل j ام در دسترس مسیر مورد نظر باشد و $(۰,j) \in \bar{E}$ و در غیر این صورت $d_j = ۰$ است. ردیابی خطا به صورت $e_{i,j} \triangleq y_d(t) - y_{i,j}(t)$ تعریف می‌شود.
هدف کنترل این است که طراحی قانون مناسب یادگیری تکراری به‌گونه‌ای که خروجی از تمام عوامل به مسیر موردنظر $y_d(t)$ همگرا است. زمانی که تنها برای برخی از عوامل مسیر مورد نظر شناخته شده باشد.

فرض ۱: برای هر $j = ۱,\dots,N$ ، $f_j(t,x)$ غیرخطی و ناشناخته و در نامعادله زیر صدق می‌کند.

$$|f_j(t,z_۱) - f_j(t,z_۲)| \le l_j|z_۱ - z_۲|, \quad z_۱, z_۲ \in R^{n_j}.$$

که در آن l_j ثابت مثبت است.
فرض ۲: $C_j(t)B_j(t)$ از مرتبه کامل برای هر $t \in [۰,T]$ می‌باشد.
فرض ۳: گراف ارتباطات $\bar{g}$ شامل درخت پوشا با رهبر (مجازی) که ریشه درخت است.
فرض ۴: سیستم‌ها بعد از انجام هر عملیات از حالت اولیه تنظیم مجدد می‌شوند، $e_{i,j}(۰) = ۰$ برای هر $j = ۱,\dots,N, \quad i \in N_{\ge ۰}$

قضیه ۱.۱. *برای هر ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$، اگر $\rho(M) < ۱$، آن‌گاه یک نرم ماتریس $|.|_s$ وجود دارد، به‌گونه‌ای که $\lim_{k\to\infty}(|m|_s)^k = ۰$.*

قضیه ۲.۱. *مجموعه فشرده $D = [\alpha_۱, \alpha_۲]$ که در آن $۰ < \alpha_۱ < \alpha_۲ < +\infty$ را در نظر بگیرید، مقدار بهینه شاخص*

$$j = \min_{\gamma\in\mathbb{R}} \max_{d\in D} |۱ - d\gamma|$$

برار با $\gamma^* = \frac{۲}{\alpha_۱+\alpha_۲}$ است . برای مطالعه اثبات به [۷] مراجعه نمایید .

لم ۳.۱. *وقتی که $\frac{\alpha_۱}{\alpha_۲} = \gamma^*$ مسئله زیر به مقدار بهینه خود می‌رسد .*

$$\min_{\gamma\in\mathbb{R}} \max_{\alpha_۱<\alpha<\sqrt{a^۲+b^۲}<\alpha_۲} |۱ - \gamma(a+jb)| = \frac{\sqrt{\alpha_۲^۲ - \alpha_۱^۲}}{\alpha_۲}.$$

۲. طراحی کنترل‌کننده برای عوامل همگن

فرض کنید در (۱-۵) هر عامل دارای دینامیک یکسان است، که $f_j(t,x) = f(t,x), C_j(t) = C(t)$ و $B_j(t) = B(t)$ برای هر $j = ۱,\dots,N$.
قانون بروز رسانی نوع D برای حل مسئله ردیابی اجماع برای هر $t \in [۰,T]$ استفاده می‌شود.

$$u_{i+۱,j}(t) = u_{i,j}(t) + \Gamma(t)\dot{\xi}_{i,j}(t), \quad u_{۰,j}(t) \equiv ۰ \qquad (۳)$$

که در آن $\Gamma \in C^۱[۰,T]$ ماتریس افزایش یادگیری است.
نکته: برای سادگی در قانون بروز رسانی (۳-۵) شرایط اولیه صفر برای $u_{۰,j}(t)$ در نظر گرفته شده است.

اطلاعات در (۲-۵) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\xi_{i,j}(t) = \sum_{k\in N_j} a_{j,k}(e_{i,j}(t) - e_{i,k}(t)) + d_j e_{i,j}. \quad (۴)$$

تعریف می‌کنیم، $X_i(t) = [X_{i,۱}^T, X_{i,۲}^T, ..., X_{i,N}^T]^T$ و $e_i(t) = [e_{i,۱}(t)^T, e_{i,۲}(t), ..., e_{i,N}(t)^T]^T$ $\xi_i(t) = [\xi_{i,۱}(t)^T, \xi_{i,۲}(t)^T, ..., \xi_{i,N}(t)^T]^T$. بنابراین (۴-۵) را می‌توان به‌صورت فشرده نوشت:

$$\xi_{i,j}(t) = ((L + D) \otimes I_m)e_i(t), \quad (۵)$$

که در آن L ماتریس لاپلاسین گراف G و $D \triangleq diag(d_۱, d_۲, ..., d_N)$ است. بنابراین با استفاده از (۵-۵) و قانون (۳-۵) می‌توان ردیابی خطا را به‌صورت زیر نوشت:

$$u_{i+۱}(t) = u_i(t) + ((L + D) \otimes \Gamma(t))\dot{e}_i(t). \quad (۶)$$

می‌توان λ_j را مقادیر ویژه $L + D$ برای $j = ۱, ..., N$ تعریف کرد. قضیه زیر ویژگی همگرایی الگوریتم اجماع را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید که فرضیات ۱-۴ برای سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان با پارامترهای یکسان سیستم‌ها برقرار باشد . اگر ماتریس افزایش یادگیری $\Gamma(t)$ در شرایط زیر صدق کند .*

$$\max_{j=۱,۲,...,N} \max_{t\in[۰,T]} \rho(I_m - \lambda_j.C(t).B(t).\Gamma(t)) \le \varrho < ۱, \quad (۷)$$

برای برخی $\varrho \in (۰, ۱)$، پس یک ثابت مثبت λ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\|e_{i+۱}\|_\lambda \le \varrho\|e_i\|_\lambda, \quad \forall j = ۱, ..., N. \quad (۸)$$

که نشان می‌دهد $\lim_{i\to\infty} y_{i,j}(t) = y_d(t)$ برای هر $t \in [۰, T], \quad j = ۱, ..., N$ برقرار می‌باشد .

۳. طراحی کنترل‌کننده برای ناهمگن

ناهمگنی ماهیت سیستم‌های چندعاملی است. مسئله ردیابی اجماع برای عامل‌های ناهمگن عملی‌تر است. مدل (۱) را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که بر خلاف سیستم‌های همگن، همه دینامیک عامل‌ها متفاوت هستند. هدف ردیابی اجماع خروجی از خروجی همه‌ی عوامل با بعد یکسان است در حالی که ابعاد حالت لزوما یکسان است. قوانین یادگیری به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{i+۱,j} = u_{i,j} + \Gamma_j \dot{\xi}_{i,j}, \quad (۹)$$

که در آن Γ_j ماتریس افزایش یادگیری به عامل‌ها وابسته است. کنترل‌کننده (۹) به کنترل کننده (۳) در مورد همگن شبیه است با این تفاوت که Γ_j وابسته به عامل‌ها است. (۹) در حالت فشرده به صورت زیر است.

$$u_{i+۱} = u_i\Gamma((L + D) \otimes I_m)\dot{e}_i(t), \quad (۱۰)$$

که در آن $\Gamma = diag(\Gamma_۱, \Gamma_۲, ..., \Gamma_N)$ است. مشابه حالت همگن داریم:

$$\|e_{i+۱}\|_\lambda \le \|I_{mN} - CB\Gamma((L + D) \otimes I_m)\|\|e_i\|_\lambda + o(\lambda^{-۱})\|e_i\|_\lambda, \quad (۱۱)$$

که در آن $B = diag(B_۱, B_۲, ..., B_N)$ و $C = diag(C_۱, C_۲, ..., C_N)$ است. اگر دینامیک عامل‌ها یکسان مثلا C_j, B_j, Γ_j برای jهای مختلف یکسان باشند آن‌گاه (؟؟) حالت خاصی از (۱۱) است. در واقع حالت همگن حالت خاصی از ناهمگن است. فرض کنید $M = I_{mN} - CB\Gamma((L + D) \otimes I_m)$ اگر $\rho(M) \le \varrho < ۱ \quad \forall t \in [۰, T]$ آن‌گاه خطای ردیابی اجماع در محور تکرار به صفر همگرا می‌شود. نتایج به‌طور خلاصه در زیر آمده است.

نتیجه ۱: فرض کنید که فرضیات ۱-۴ برای سیستم غیر خطی متغیر با زمان (۱) برقرار باشد. طبق قانون کنترل (۹)، اگر ماتریس یادگیری Γ در شرط زیر صدق کند.

$$\max_{t\in[۰,T]} \rho(I_{mN} - CB\Gamma(L + D) \otimes I_m) \le \varrho < ۱,$$

برای برخی $\varrho \in (۰, ۱)$ آن‌گاه $\lim_{i\to\infty} y_{i,j}(t) = y_d(t)$ برای همه $t \in [۰, T], j = ۱, ..., N$.
فرض کنید $\Gamma_j = \gamma(C_jB_j)^T(C_jB_j(C_jB_j)^T)^{-۱}$ آن‌گاه

$$M = I_{mN} - \gamma((L + D) \otimes I_m).$$

با استفاده از نرم ماتریسی تعریف شده نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۲: فرض کنید افزایش یادگیری $\Gamma_j = \gamma(C_jB_j)^T(C_jB_j(C_jB_j)^T)^{-1}$ تحت قانون یادگیری (۹) باشد. سیستم ناهمگن (۱) می‌تواند تحت تکرار به ردیابی اجماع کامل برسد. $\lim_{i\to\infty} y_{i,j}(t) = y_d(t)$ برای $t \in [0,T]$ اگر

$$\max_{j=1,2,\dots,N} |1 - \gamma\lambda_j| < 1, \qquad (۱۲)$$

که در آن λ_j مقدار ویژه $L + D$ است.

۴. طراحی افزایش یادگیری بهینه

اگر کنترل ILC در امتداد محور تکرار همگرا باشد، سریع‌تر و یکنواخت‌تر همگرا می‌شود. در سیستم‌های زمان– پیوسته، تجزیه و تحلیل همگرایی بر اساس λ –نرم است. نرم وزنی که اساسا نمایی از زمان است. با این حال همگرایی یکنواخت خطای λ– نرم به همگرایی خطای حقیقی اشاره دارد. در واقع افزایش خطای واقعی ممکن است از اندازه بزرگ باشد اما به‌تدریج به صفر میل می‌کند. طراحی کنترل‌کننده همگرایی یکنوایی خطا را برای سیستم‌های زمان– پیوسته ممکن می‌سازد. در این بخش به بررسی حل مسئله همگرایی یکنواخت می‌پردازیم. طراحی بهینه افزایش یادگیری به این معنی است که، λ–نرم در سریع‌ترین سرعت همگرا شود. از تعریف نرم وزنی زمان داریم:

$$\|e_i\|_\lambda \le \|e_i\| \le e^{\lambda T}\|e_i\|_\lambda,$$

که در آن λ ثابت مثبت است. از نابرابری فوق توجه کنید که $\|e_i\|$ به وسیله ثابت زمانی $\|e_i\|_\lambda$ محدود است. دقیقا چگونگی رفتار خطا را نمی‌دانیم ولی $\|e_i\|_\lambda$ سریع‌تر از بین می‌رود. محدوده‌ی تابع را برای $\|e_i\|$ را محدودتر می‌کنیم. این اصل برای توسعه منطقی‌تر به‌نظر می‌رسد. در سیستم‌های دینامیکی تنها به کنترل‌کننده وابسته نیست بلکه به پاسخ گذرای سیستم بستگی دارد. با توجه به اینکه $f_j(t,x)$ غیرخطی –متغیر با زمان و ناشناخته است، بنابراین بهترین راه‌حل برای سرعت بخشیدن به همگرایی $\|e_i\|_\lambda$ است. با تنظیم $\Gamma_j = \gamma(C_jB_j)^T(C_jB_j(C_jB_j)^T)^{-1}$ در بخش گذشته نشان داده شده است که برای سیستم‌های همگن و ناهمگن شرایط همگرایی وجود دارد. طرح‌های بهینه‌سازی برای دو مورد متفاوت یکسان است. میزان محو شدن $\|e_i\|_\lambda$ به وسیله رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\max_{\omega} |1 - \omega\gamma|, \qquad (۱۳)$$

که در آن $\omega \in \Lambda \triangleq \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ و مقادیر ویژه $L + D$ از گراف ارتباطات است، اگر گراف بدون جهت باشد مقادیر ویژه دارای مقادیر حقیقی مثبت هستند. در حالی که برای گراف جهت‌دار مقادیر ویژه شامل اعداد مختلط و تمام مقادیر ویژه مقادیر مثبت می‌باشد. بنابراین طراحی افزایش یادگیری تکراری برای گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت باید به‌صورت جداگانه بحث شود. برای بدست آوردن سریع‌ترین نرخ همگرایی $\|e_i\|_\lambda$، (۱۳) باید توسط γ به حداقل برسد. پس از آن می‌توان برای فرموله کردن مسئله طرح بهینه افزایش یادگیری از مسئله حداقل –حداکثر بهینه‌سازی استفاده کرد. هدف پیدا کردن بهینه γ^* که تابع هدف (۱۴) را به حداقل برساند.

$$J = \min_{\gamma}\max_{\omega} |1 - \omega\gamma|. \qquad (۱۴)$$

قضیه ۱.۴ جوابی برای بهینه‌سازی (۱۴) زمانی که گراف بدون جهت است ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۴. *وقتی گراف ارتباطات بین عامل‌ها بدون جهت است، $L + D$ متقارن است، جواب مسئله (۱۴) عبارت است از :*

$$\gamma^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_N}, \quad J_{\min} = \frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_N + \lambda_1}$$

که در آن $\lambda_1 = \min(\Lambda)$ و $\lambda_N = \max(\Lambda)$است.
در قضیه ۱.۴می توان مینیم Jرا به‌صورت زیر نوشت.

$$J_{min} = \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_N}}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

مقدار $\frac{\lambda_1}{\lambda_N}$ را معمولا مقدار ذاتی می‌نامند[۱] و [۲] در اجماع هماهنگی نیز می‌نامند. بنابراین هر دو کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه $L + D$ در تعیین نرخ همگرایی بهینه می‌باشد. اگر مقدار ذاتی نزدیک به مقدار ۱ باشد، نرخ همگرایی سریع‌تر است. این ویژگی منحصر به فرد الگوریتم ILC مبتنی بر اجماع است.

وقتی که توپولوژی ارتباطات جهت‌دار باشد، مقدار ویژه $L+D$ پیچیده‌تر است. بنابراین بدست آوردن جواب برای (۱۴) دشوارتر است، زیرا Λ مجموعه‌ای از اعداد مختلط است. برای پیدا کردن یک جواب کمتر از حد مطلوب، مجموعه فشرده Ω را تعریف می‌کنیم، که شامل مقدار ویژه $L+D$ است.

$$\Omega = \{z \in Z | R(z) \geq \min_j(R(\lambda_j)) = \alpha_1, |z| \leq \max_j(\lambda_j) = \alpha_2\}.$$

بدیهی است که، $\Lambda \subset \Omega$ است. بنابراین رابطه زیر جواب کمتر از حد مطلوب برای (۱۴) است. توسیع برای گراف‌های جهت‌دار با استفاده از لم ۳.۱ محقق می‌شود.

$$J = \min_{\gamma} \max_{\omega \in \omega} |1 - \omega\gamma|. \tag{۱۵}$$

قضیه ۲.۴. *وقتی گراف ارتباطات بین عامل‌ها، جهت‌دار باشد آن‌گاه $L+D$ نامتقارن است. جواب کمتر از مطلوب برای (۱۴) این چنین است:*

$$\gamma^* = \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}, \quad J_{\min} = \frac{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}}{\alpha_2},$$

که در آن

$$\alpha_1 = \min_{j=1,2,\ldots,N}(R(\lambda_j)), \quad \alpha_2 = \max_{j=1,2,\ldots,N}(|\lambda_j|)$$

می‌باشد.

۵. مثال عددی

شبکه‌ی ۴ـعامله زیر را که دارای دینامیک غیرخطی می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{X}_{i,1} = \begin{bmatrix} 0.5\cos(x_{i,1_1}) + 0.2x_{i,1_2} \\ -0.1\sin(x_{i,1_2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u_{i,1} \\ y_{i,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_{i,1}, \end{cases} \tag{۱۶}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{i,2} = \begin{bmatrix} -0.1x_{i,2_1} + 0.2x_{i,2_2} \\ \sin(t)x_{i,2_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u_{i,2} \\ y_{i,2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x_{i,2}, \end{cases} \tag{۱۷}$$

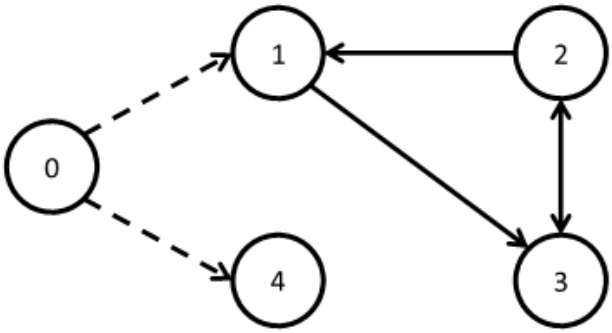
$$\begin{cases} \dot{X}_{i,3} = \begin{bmatrix} 0.2\sin(x_{i,3_1}) \\ -0.2\sin(x_{i,3_2}) \\ -0.4\cos(x_{i,3_3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} u_{i,3} \\ y_{i,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} x_{i,3}, \end{cases} \tag{۱۸}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{i,4} = \begin{bmatrix} -0.2x_{i,4_1} - 0.1x_{i,4_2} \\ \sin(x_{i,4_2}) \\ x_{i,4_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u_{i,4} \\ y_{i,4} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} x_{i,4}. \end{cases} \tag{۱۹}$$

و مسیر موردنظر به‌صورت زیر است:

$$y_d = \left[t + ۲\sin(t)\right], \quad t \in [۰,۵]. \tag{۲۰}$$

تبادل اطلاعات در میان عامل‌ها جهت‌دار و ثابت فرض شده است. شکل ۱، جریان اطلاعات بین عامل‌ها را نشان می‌دهد. رأس صفر نشان



شکل ۱: توپولوژی ارتباطات بین عامل‌ها

دهنده رهبر مجازی و مسیر مورد نظر در این مثال، در دسترس عامل ۱ و ۴ می‌باشد و ارتباط بین عامل‌ها جهت ثابت می‌باشد. ارتباط بین عامل‌ها با فلش مشخص شده است. توجه کنید که گراف ارتباط باید همبند باشد. درایه‌های ماتریس وزن ۰ و ۱ و ماتریس لاپلاسین ارتباط عامل‌ها به‌صورت زیر است.

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

و $D = \mathrm{diag}(۱,۰,۰,۱)$. مقادیر ویژه $L + D$ برابر است با: $\{۱۶٫۱,۰۰, ۲٫۴۲ \pm i\,۰٫۶۱\}$ (i نشان‌دهنده $\sqrt{-۱}$ است). از آن‌جا که مقادیر ویژه دقیقا شناخته شده‌اند، بنابراین مقدار مطلوب γ^* محاسبه می‌شود. $\gamma^* = ۰٫۷۳$ فرض کنید افزایش یادگیری به‌صورت زیر است:

$$\Gamma_j = \gamma^*(C_jB_j)^T(C_jB_j(C_jB_j)^T) - ۱.$$

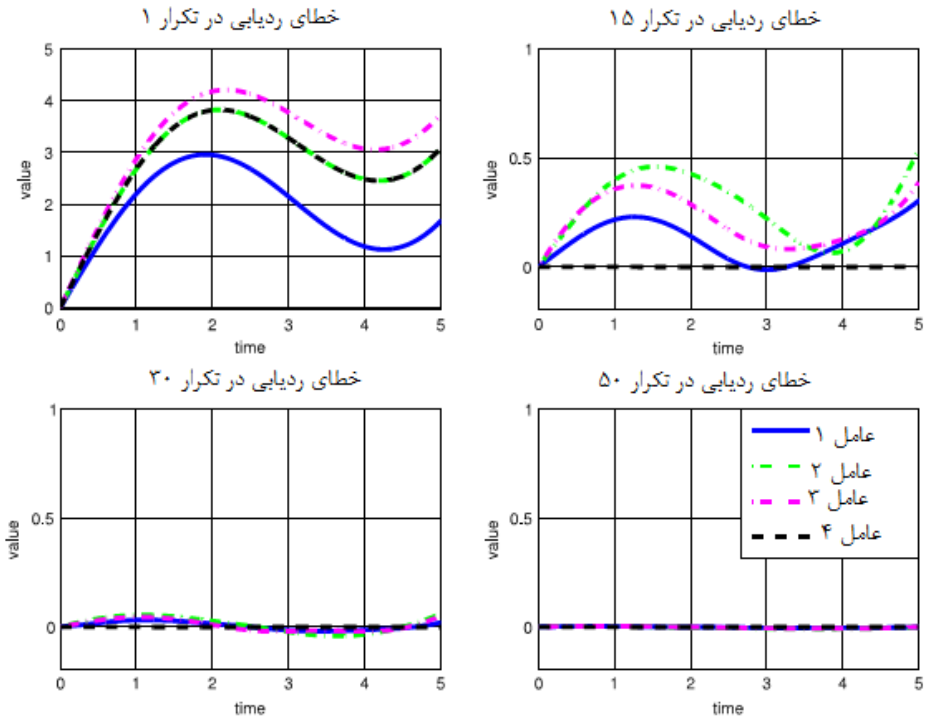
که در آن $j = ۱,۲,۳,۴$ است. برای شرایط همگرایی داریم:

$$\max_{۱,۲,۳,۴} |۱ - \lambda_j\gamma^*| = ۰٫۸۸ < ۱.$$

بنابراین شرایط همگرایی در نتیجه (۲) برقرار است و و ردیابی اجماع در قانون ILC برقرار است.
شبیه‌سازی این مثال با نرم‌افزار متلب انجام شده است. در شبیه‌سازی این مثال شرایط اولیه یکسان فرض شده است. به عنوان مثال $e_i(۰) = ۰$ و تمام عوامل بعد از هر تکرار تنظیم مجدد می‌شود و به حالت اولیه باز می‌گردند. سیگنال ورودی کنترل برای تمامی عامل‌ها صفر می‌باشد، $(u_{۰,j} = ۰)$. شکل ۲ خطای ردیابی خروجی را در تکرارهای متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید هرچه تعداد تکرارها افزایش می‌یابد، خروجی از تمام عامل‌ها به مسیر مورد نظر همگرا می‌شود.

مراجع

[1] AITAFINI C (2013), *Consensus problems on networks with antagonistic interactions* ,.
[2] DUAN Z. S. and CHEN G. R. (2012), *Does the eigenratio λ2/λN represent the synchronizability of a complex network?* ,.
[3] AHN H. S. and CHEN Y. (2007), *Iterative learning control: brief survey and categorization*,.
[4] SUN M. and WANG D. (2002), *Iterative learning control with initial rectifying action*,.
[5] Olfati S. and Fax J. A. and Murray R. M (2007), *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems* ,.
[6] ARIMOTO S. and KAWAMURA S. and MIYAZAKI F (1984), *Bettering operation of robots by learning* ,.
[7] XU J.X. and TAN. Y. (2003), , *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*,.
[8] ZHANG J. and ZHANG H. and SUN S. and GAO Z (2021), *Leader follower consensus control for linear multi agent systems by fully distributed adge event triggered adaptive strategies* ,.



شکل ۲: ردیابی خطا تمام عوامل در تکرار متفاوت

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–333، صص. ۳۶۷–۳۷۳

کاربردی از برنامه‌ریزی خطی فازی در بهینه سازی سبد سهام

نعمت اله تقی‌نژاد

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مجموعه های فازی
اعداد فازی مثلثی
بهینه سازی فازی

چکیده

در سال های اخیر، علاقه به سرمایه گذاری در بازارهای مختلف مالی به طور قابل توجهی در حال افزایش است. مسئله اصلی برای بیشتر سرمایه گذاران به حداکثر رساندن سود و به حداقل رساندن ریسک است. با این حال، تصمیم گیری صحیح در بازارهای مالی اینگونه نیست زیرا اطلاعات مورد نیاز در دسترس نیست یا ناقص است. ابزارهای بهینه سازی ریاضی، به ویژه تکنیک های بهینه سازی فازی به سرمایه گذاران کمک می‌کند تا در تصمیم گیری‌های مختلف انعطاف پذیری بیشتری داشته باشند. هدف از این مقاله بررسی مسائل مختلف مالی و جواب های آنها بر اساس مدل سازی بهینه سازی فازی است. فرض بر این است که ورودی ضرایب در توابع هدف و محدودیت ها اعداد فازی مثلثی است.

۱. مقدمه

به دلیل ساختار پیچیده بازارهای مالی، تصمیم گیری مناسب برای سرمایه گذاران دشوار است. یکی از رایج ترین ابزارها برای دستیابی به این هدف روش‌های برنامه‌ریزی خطی است. در سال ۱۹۷۴ برنامه‌ریزی فازی توسط تاناکا و همکاران [۱۰] ارائه شده است. اولین فرمول برنامه‌ریزی خطی فازی توسط زیمرمن در سال ۱۹۷۸ مورد بحث قرار گرفت [۱۵] و سپس بسیاری از مدل‌ها و روش‌های دیگر توسط دیگران پیشنهاد شد. نگویتا توسعه فرمولی برای مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی بر اساس ماتریس ضریب فازی ارائه داد [۶]. سپس، در سال ۲۰۰۳ چند مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی هدفمند توسط ژانگ و همکاران [۱۳] ایجاد شد. در همان سال، وانگ و زو روشي براي حل بهينه سازي فازي بر اساس تصميم گيري فازي ارائه داد [۱۲]. در سال ۲۰۱۳، ناصری و بهمنش مقاله ای درباره برنامه‌ریزی خطی فازی با اعداد مثلثی فازی منتشر کردند [۵]. در این مقاله، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی چند هدفه با ضرایب فازی در توابع هدف و محدودیت در برنامه های سرمایه گذاری مالی مورد بحث قرار گرفته است. بعد از این مقدمه در بخش ۲، برخی از موارد اساسی تعاریف و مفاهیم مجموعه های فازی و بهینه سازی فازی بررسی می شود. در بخش ۳، یک برنامه ریزی خطی فازی با ضرایب فازی در توابع هدف و محدودیت‌ها در نظر گرفته شده است. در نهایت در بخش آخر ، نتایج خلاصه می شود.

۱- مقدمه

تعریف ۱-۱ (مجموعه‌ی فازی): اگر Xمجموعه‌ی مرجع باشد، در این‌صورت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X یک مجموعه از زوج‌های مرتب است، به‌طوریکه:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \,|\, x \in X\} \qquad (۱-۱)$$

که در آن، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت[1] یا درجه عضویت[2] x در X می‌باشد که مقداری بین صفر و یک است.

[1] Membership function
[2] Grade of membership

تعریف ۱-۲ (کمیت فازی): اگر X مجموعه اعداد حقیقی باشد، مجموعه فازی $\tilde{A}$ را کمیت فازی می‌نامیم.
تعریف ۱-۳ (مجموعه‌ی تکیه‌گاه): مجموعه‌ی تکیه‌گاه[۳] (پشتیبان یا محمل) مجموعه‌ی فازی A که با $S(A)$ یا $Supp(A)$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه‌ی تمام عناصری از A که درجه عضویت آن بزرگتر از صفر است. یعنی:

$$S(A) = Supp(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > ۰\} \qquad (۱-۲)$$

تعریف ۱-۴ (ارتفاع مجموعه‌ی فازی): ارتفاع[۴] مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است، یعنی:

$$hgt(A) = h(A) = \max\{\mu_A(x)\} \qquad (۱-۳)$$

تعریف ۱-۵ (مجموعه‌ی فازی نرمال): یک مجموعه‌ی فازی را نرمال[۵] می‌نامند اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضاء آن برابر یک باشد. به بیان دیگر:

$$\exists x_۰ \in X s.t. \mu_A(x_۰) = ۱ \qquad (۱۴)$$

در غیراین‌صورت مجموعه فازی غیرنرمال[۶] است.
تعریف ۱-۶ (هسته مجموعه فازی): هسته[۷] مجموعه‌ی فازی A عبارت است از زیرمجموعه‌ای از X که درجه عضویت عناصر آن در Aبرابر ۱ است و با نماد$core(A)$ یا $kernel(A)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$core(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = ۱\} \qquad (۱-۵)$$

تعریف ۱-۷ (مرکز مجموعه‌ی فازی): مقدار میانگین نقاط هسته را مرکز[۸] یک مجموعه‌ی فازی می‌گویند. **تعریف ۱-۸ (گذر مجموعه فازی):** به نقطه‌ای که درجه‌ی عضویت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، نقطه‌ی گذر[۹] یا معبر یک مجموعه‌ی فازی گفته می‌شود.
تعریف ۱-۹ (α- برش مجموعه فازی): α–برش[۱۰] یا α–سطح[۱۱] یک مجموعه فازی، مجموعه قطعی از X است که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی بزرگتر یا مساوی α باشد. (شکل ۱-۱). یعنی:

$$A_\alpha = A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}. \qquad (۱-۶)$$

تعریف ۱-۱۰ (مجموعه‌ی فازی محدب): مجموعه‌ی فازی A محدب[۱۲] است اگر:

$$\mu_A(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \geq \min\{\mu_A(x_۱), \mu_A(x_۲)\}; x_۱, x_۲ \in X, \lambda \in [۰, ۱] \qquad (۱-۷)$$

به عبارت دیگر، یک مجموعه‌ی فازی محدب است اگر هر α–برش آن محدب باشد.
تعریف ۱-۱۱ (عدد فازی): اگر یک کمیت فازی حداقل سه شرط زیر را داشته باشد، یک عدد فازی است.
۱) نرمال باشد؛
۲) محدب باشد؛
۳) دارای تکیه‌گاه کراندار باشد.

[3] Support
[4] Height
[5] Normality
[6] Non-normal
[7] Core or Kernel
[8] Center or mode
[9] Crossover
[10] α−Cut
[11] α−Level
[12] Convex

تعریف ۱-۱۲ (عدد فازی مثلثی): عدد فازی مثلثی[۱۳]، نوع خاص و پرکاربردی از اعداد فازی است که به‌صورت $\tilde{A} = \langle a, b, c \rangle$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ \frac{c-x}{c-b}, b \le x \le c, \\ 0, otherwise. \end{cases} \quad (۸-۱)$$

که در آن $a \le b \le c$ سه نقطه از $\mathbb{R}$ هستند (شکل ۱-۲). در رابطه بالا بازه حقیقی $[a, c]$ تکیه‌گاه و نقطه‌ي $(b, 1)$ هسته آن مي‌باشند.
۱

تعریف ۱-۱۳ (عدد فازی نامنفی): عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle a, b, c \rangle$ را نامنفی می‌نامیم هرگاه $a \ge 0$ *باشد*.

تعریف ۱-۱۴ (حساب فازی): فرض کنید $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b_l, b_c, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی نامنفی و k یک عدد حقیقی باشند. اعمال بین اعداد فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$$k\tilde{a} = \langle ka_l, ka_c, ka_u \rangle, k \ge 0, \quad ()$$
$$\tilde{a} + \tilde{b} = \langle a_l + b_l, a_c + b_c, a_u + b_u \rangle,$$
$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \langle a_l b_l, a_c b_c, a_u b_u \rangle.$$

تعریف ۱-۱۵ (رتبه بندی اعداد فازی): فرض کنید $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b_l, b_c, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی باشند. میگوییم $\tilde{a}$ کوچکتر از $\tilde{b}$ است و با $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ نمایش داده می‌شود اگروتنهااگر یکی از حالت های زیر رخ دهد:

۱) $a_c < b_c$،
۲) $a_c = b_c$ و $a_u - a_l > b_u - b_l$،
۳) $a_c = b_c$، $a_u - a_l = b_u - b_l$ و $a_u + a_l < b_u + b_l$.

گزاره ۱-۱- به وضوح $\tilde{a} = \tilde{b}$ اگروتنهااگر $a_c = b_c$، $a_u - a_l = b_u - b_l$ و $a_u + a_l = b_u + b_l$.

گزاره ۱-۲- به وضوح $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ اگروتنهااگر $\tilde{a} = \tilde{b}$ یا $\tilde{a} \prec \tilde{b}$.

۲. بهینه سازی نمونه کارها با استفاده از تکنیک های بهینه سازی چند هدفه و فازی

فرض کنید یک سرمایه گذار می خواهد مقدار مشخصی پول را روی n اوراق قرضه و سهام مختلف سرمایه گذاری کند. اجازه دهید $x = (x_1, x_2, .., x_n)^T$ را نمونه کارها بنامیم. واضح است از نظر عملی نمونه کارها قابل تحقق است.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = B$$

سرمایه گذار سعی می کند تعادل بین به حداکثر رساندن سود (بازده) و به حداقل رساندن ریسک کارها را حفظ کند. بازده یک متغیر تصادفی است که با میانگین مشخص می شود و ریسک با واریانس دارایی های سبد سهام کمی می‌شود. از اینرو، می توان مساله انتخاب سرمایه گذاری ها را بصورت زیر نوشت:

$$\max Er(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$
$$minV(x) = V\left(R^T x\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_j x_i,$$

منوط به $\sum_{j=1}^{n} x_j = B$ و $0 \le X_J \le U_J j = 1, 2, .., n$

[13] Triangular

همانطور قابل مشاهده است مسئله بهینه سازی چند سوژه فوق دارای دو تابع هدف است، جایی که هدف اول خطی و مورد دوم غیرخطی است. غیر خطی بودن هدف دوم یافتن جواب بهینه برای این مساله را دشوار می‌کند، به خصوص هنگامی که تعداد دارایی‌ها زیاد است. در اینجا به جای اندازه گیری ریسک واریانس، انحراف مطلق بازده اعمال می‌شود. میانگین انحراف مطلق از بازگشت به شرح زیر است:

$$|\sigma| = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} .|\sum_{i=1}^{n} (x_{it} - \bar{r}_i)\, x_i$$

تابع فوق ماتریس کوواریانس مارکویتس جایگزین شد. نتیجه اعمال به شرح زیر است:

$$minw\,(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$
$$s.t. y_t - \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i)\, x_i \geq 0 t = 1, \dots, T$$
$$y_t + \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i)\, x_i \geq 0 t = 1, \dots, T$$
$$x_i \geq 0 i = 1, .., n$$

۳. مثال‌های عددی

در این بخش، یک مثال عملی برای نشان دادن آنچه در مورد آن بحث شده ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۵: یک سرمایه گذار می خواهد ۲۵۰۰۰۰ دلار در پروژه های مختلف سرمایه گذاری کند. پس از بررسی تحلیلی دقیق از جمله بازده مورد انتظار، یک شرکت مشاوره به او پیشنهاد می‌کند به عنوان جدول زیر سرمایه گذاری کند:

جدول ۱: داده های مثال

گزینه های سرمایه گزاری	سرمایه گذاری A	سرمایه گذاری B	سرمایه گذاری C	سرمایه گذاری D
بازده مورد انتظار به درصد	۱۹	۵.۱۳	۲۵	۱۴

سرمایه گذار مایل است ۵۰۰۰۰ دلار در سهام A و ۱۰٪ در سهام C سرمایه گذاری کند. بعلاوه ، دو برابر مقدار سرمایه گذاری موجود در سهام D باید حداقل سه برابر مقدار سرمایه گذاری شده در سهام B باشد. با این حال مبلغی که در آن سرمایه گذاری شده است هر یک از پرونده ها نباید بیش از ۲۵٪ از کل پول باشد. سرمایه گذار می خواهد دریابد که چگونه می تواند برای رسیدن به حداکثر بازده سرمایه گذاری کند
توجه داشته باشید در بخش هفتم X_I که پول سرمایه گذاری شده در I^{th} است =i .i.e.،۴،۳،۲،۱

X_I مبلغ سرمایه گذاری شده در سهام A است ،

$X_۲$ مبلغ سرمایه گذاری شده در سهام B است ،

$X_۳$ مقدار سرمایه گذاری شده در سهام C است ،

$X_۴$ مبلغ سرمایه گذاری شده در سهام D است.

$$\max \tilde{z} = ۰.\tilde{۱۹}x_i + ۰/۱\tilde{۳۵}x_۲ + ۰.\tilde{۴۵}x_۳ + ۰.\tilde{۱۴}x_۴$$
$$s.t.\tilde{۱}x_۱ + \tilde{۱}x_۲ + \tilde{۱}x_۳ + \tilde{۱}x_۴ \leq ۲۵۰\tilde{۰۰}$$
$$\tilde{۱}x_۱ \leq ۵۰\tilde{۰۰}$$
$$\tilde{۱}x_۳ \leq ۰/۱\,(۲۵۰\tilde{۰۰})$$
$$\tilde{۲}x_۴ \leq \tilde{۳}\tilde{x}_۳$$
$$\tilde{۱}x_۱ + \tilde{۱}x_۲ + \tilde{۱}x_۳ + \tilde{۱}x_۴ \leq ۰/۲۵\,(۲۵۰\tilde{۰۰})$$
$$x_i \geq 0 i = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

در مدل بهینه سازی فوق، توابع عضویت از $\tilde{c}_i$ به شرح زیر تعریف شده است:

$$\mu\tilde{c}_1(x)=\begin{cases}\frac{x-۰/۱۷}{۰/۰۲}, ۰/۱۷\le x<۰/۱۹\\ \frac{۰/۲۰-x}{۰/۰۱}, ۰/۱۹\le x<۰/۲۰\\ ۰, o.w.\end{cases}$$

$$\mu\tilde{c}_2(x)=\begin{cases}\frac{x-۰/۱۲۰}{۰/۰۱۵}, ۰/۱۲۰\le x<۰/۱۳۵\\ \frac{۰/۱۶۰-x}{۰/۰۲۵}, ۰/۱۳۵\le x<۰/۱۶۰\\ ۰, o.w.\end{cases}$$

$$\mu\tilde{c}_3(x)=\begin{cases}\frac{x-۰/۲۴}{۰/۰۱}, ۰/۲۴\le x<۰/۲۵\\ \frac{۰/۲۷-x}{۰/۰۲}, ۰/۲۵\le x<۰/۲۷\\ ۰, o.w.\end{cases}$$

$$\mu\tilde{c}_4(x)=\begin{cases}\frac{x-۰/۱۲}{۰/۰۲}, ۰/۱۲\le x<۰/۱۴\\ \frac{۰/۱۵-x}{۰/۰۱}, ۰/۱۴\le x<۰/۱۵\\ ۰, o.w.\end{cases}$$

اکنون، ما این مساله را به عنوان یک مساله چند هدفه کلاسیک بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}\max z &= ۰/۱۷x_1+۰/۱۲۰x_2+۰/۲۴x_3+۰/۱۲x_4\\ &+۰/۱۹x_1+۰/۱۳۵x_2+۰/۲۵x_3+۰/۱۴x_4\\ &+۰/۲۰x_1+۰/۱۶۰x_2+۰/۲۷x_3+۰/۱۵x_4\\ &۱x_1+۱x_2+۱x_3+۱x_4\le ۲۰۰۰۰۰\\ &۱x_1+۱x_2+۱x_3+۱x_4\le ۲۵۰۰۰۰\\ &۱x_1+۱x_2+۱x_3+۱x_4\le ۳۰۰۰۰۰\\ &۱x_1\le ۳۰۰۰۰\\ &۱x_1\le ۵۰۰۰۰۱x_1\le ۶۰۰۰۰\\ &۱x_3\le ۰/۱(۲۰۰۰۰۰)\\ &۱x_3\le ۰/۱(۲۵۰۰۰۰)\\ &۱x_3\le ۰/۱\,(۳۵۰۰۰۰)\\ &۱x_4-۲x_2\ge ۰\\ &۲x_4-۳x_2\ge ۰\\ &۴x_4-۵x_2\ge ۰\\ &x_1,x_2,x_3,x_4\le ۰/۲۵\,(۲۰۰۰۰۰)\\ &x_1,x_2,x_3,x_4\le ۰/۲۵(۲۵۰۰۰۰)\\ &x_1+x_2+x_3+x_4\le ۰/۲۵(۲۰۰۰۰۰)\\ &x_i\ge ۰\quad i=۱,۲,۳,۴\end{aligned}$$

با استفاده از نرم افزار LINGO، جواب بهینه Pareto به شرح زیر است:

$$\left(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*\right)=(۳۰۰۰۰,۲۵۰۰۰,۲۰۰۰۰,۵۰۰۰۰)$$

از این رو، این جواب یک جواب بهینه نامشخص برای مسئله برنامه ریزی خطی فازی است. علاوه بر این، برای حل برنامه خطی ما مسئله به حداکثر رساندن اوزان را به شرح زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}\max z &= w_1(۰/۱۷x_1+۰/۱۲۰x_2+۰/۲۴x_3+۰/۱۲x_4)\\ &+w_2(۰/۱۹x_1+۰/۱۳۵x_2+۰/۲۵x_3+۰/۱۴x_4)\\ &+w_3(۰/۲۰x_1+۰/۱۶۰x_2+۰/۲۷x_3+۰/۱۵x_4)\end{aligned}$$

جدول ۲: جواب بهینه برای مقادیر مختلف وزن

جواب بهینه	W_3	W_2	W_1
(۵۰۰۰۰،۲۰۰۰۰،۲۵۰۰۰،۳۰۰۰۰)	۵.۰	۵.۰	۰
(۵۰۰۰۰،۲۰۰۰۰،۲۵۰۰۰،۳۰۰۰۰)	۵.۰	۰	۵.۰
(۵۰۰۰۰،۲۰۰۰۰،۲۵۰۰۰،۳۰۰۰۰)	۰	۵.۰	۵.۰

اکنون با استفاده از روشهای استاندارد می توان جواب هایی را برای وزنهای مختلف بدست آورد.
توجه داشته باشید که $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$
سپس جواب بهینه به شرح زیر است:

$$\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right) = (30000, 25000, 20000, 50000)$$

از این رو،

$$\begin{aligned}\max z = f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) &\\ = f\left(30000, 25000, 20000, 50000\right) &\\ = 30000\tilde{c}_1 + 25000\tilde{c}_2 + 200000\tilde{c}_3 + 50000\tilde{c}_4 &\end{aligned}$$

$$\mu_f(x) = \begin{cases} \frac{x - 189000}{21750}, & 189000 \le x < 210750 \\ \frac{229000 - x}{1825}, & 210750 \le x < 229000 \\ 0, o.w. & \end{cases}$$

۷. نتیجه گیری

در سال های اخیر ، علاقه به سرمایه گذاری در بازارهای مالی مختلف به طور قابل توجهی در حال افزایش است. به دلیل عدم وجود اطلاعات دقیق، سرمایه گذاران ممکن است داده ها و تکنیک های فازی را برای غلبه بر این مشکل استفاده کنند. در این مقاله، مساله برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی در توابع هدف و محدودیت ها در نظر گرفته شد. علاوه بر این، یک مساله عملی سرمایه گذاری حل شده و نشان داده شده که جواب مشکل مستقل از اوزان انتخاب شده است.

مراجع

[1] Bellman R.E, Zadeh L.A. ”Decision making in fuzzy environment” Management Science. 1970:17: 141-164. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141.

[2] Dash R. B, Dash P.D.P. ”Solving Fuzzy Integer Programming Problem as Multi objective Integer Programming Problem”. International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems. 2012:2: 307-314

[3] Hashem H.A. ”Converting Linear Programming Problem with Fuzzy Coefficients into Multi Objective Linear Programming Problem”, Australian Journal of Basic and Applied Sciences. 2013:7(7): 185-189.

[4] Konno H, Yamazaki H. ”Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo Stock Market”. Management Science. 1991: 37. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519.

[5] Nasseri S. H, Behmanesh E. ”Linear Programming with Triangular Fuzzy Numbers—a Case Study in a Finance and Credit Institute”. Fuzzy Inf. Eng. 2013: 3: 295-315. http://dx.doi.org/10.1007/s12543-013-0151-3.

[6] Negoita C.V. ”Fuzziness in management”. OPSA/TIMS Miami. 1970.

[7] Markowitz H. ”Portfolio selection”. Journal of Finance. 1952: 7:77-91. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.

[8] Pandit P.k. “Portfolio optimization using fuzzy linear programming”. AIP Conference Proceedings. 2013 1557, 206. http://dx.doi.org/10.1063/1.4823904.

[9] Takeshi I, Hiroaki I, Teruaki N. ”A model of crop planning under uncertainty in Agricultural management”. Int. J. of Production Economics. 1991: 1: 159-171.

[10] Tanaka H, Ichihashi H, Asai K. ”A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers”, Control and Cybernetics. 1991: 3(3): 185-194.

[11] Thakre P.A, Shelar D.S, Thakre S.P. ”Solving fuzzy linear programming problem as multi objective linear programming problem”.Proceedings of the World Congress on Engineering WCE, London, U.K. 2009.

[12] Wang S. Y, Zhu S. S. ”Fuzzy portfolio optimization”. International Journal of Mathematical Sciences. 2003: 2:133-144.

[13] Zhang G, Wu Y.H, Remias M, Lu J. ”Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems”. Applied Mathematics and Computation. 2003: 139: 383-399. http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00202-3.

[14] Zimmermann H.J. ”Description and optimization of fuzzy systems”,International Journal of General Systems. 1976: 2/4: 209-215. http://dx.doi.org/10.1080/03081077608547470.

[15] Zimmermann H.J. ”Fuzzy programming and linear programming with several objective functions”,Fuzzy Sets and Systems. 1978: 1: 45-55. http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(78)90031-3.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FS–323، صص. ۳۷۴–۳۷۸

روشی کاربردی برای حل معادله‌ی دوگان فازی

فاطمه باباکردی

استادیارگروه ریاضی و آمار دانشگاه گنبدکاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
معادله‌ی دوگان فازی
جواب فازی

چکیده

در این مقاله با بکارگیری ابزارهایی نظیر اعمال حسابی بازه‌ای و تفاضل مینکوفسکی و صفر گسترده شده‌ی بازه‌ای به معرفی روشی کارا برای حل معادله‌ی دوگان بازه‌ای به فرم $[a]+b[x]=[c]-d[x]$ که در آن $[a],[c]$ اعداد بازه‌ای معلوم و b,dاعدادحقیقی معلوم و $[x]$ عددبازه‌ای مجهول می‌باشد می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم که معادله‌ی دوگان بازه‌ای می‌تواند جواب فازی داشته باشد. در پایان مثال عددی مفید و کاربردی بودن روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

۱. مقدمه

با توجه به اینکه مدل‌سازی بسیاری از مسائل در زمینه‌ی اقتصادی و مهندسی به فرم معادلات بازه‌ای می‌باشد، لذا مطالعه و بررسی روش‌های کاربردی برای حل این دسته از معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تا کنون پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی مسائل بازه‌ای صورت گرفته است [۱-۸].

فرهادی‌نیا[1] به حل مسئله برنامه‌ریزی خطی با ورودی اعداد ذوزنقه‌ای بازه مقدار پرداخت [۹]. در [۱۰] مسئله‌ی برنامه ریزی خطی فازی بازه‌ای با استفاده از اعمال آلفا برش‌ها حل شد. سیاهلویی[2] و همکار کاربردی از حساب بازه‌ای برای حل دستگاه خطی کاملا فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده کردند [۱۱].

در [۱۲] روش صفر گسترده شده‌ی بازه‌ای برای حل معادله‌ی بازه‌ای مطرح شد. در این مقاله ما روش صفر گسترده شده‌ی بازه‌ای را برای حل معادله‌ی دوگان بازه‌ای بیان می‌کنیم.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف پایه‌ای و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز را مطرح می‌کنیم. در بخش ۳ روش صفر گسترده شده بازه‌ای برای حل معادله دوگان بازه‌ای در معرفی شده است. مثال عددی در بخش ۴ و سرانجام نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده شده است.

۲. تعاریف پایه‌ای

تعریف۲-۱[۱۳] فرض کنید $[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ و $[y]=[\underline{y},\overline{y}]$آنگاه اعمال حسابی روی این بازه‌ها بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$[x]+[y]=[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}]$$

$$[x]-[y]=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}]\ (\text{تفاضل مینکوفسکی})$$

پست الکترونیک: babakordif@yahoo.com (فاطمه باباکردی)

[1]. Farhadinia
[2]. Siahlooei

$$[x] * [y] = \left[\min\left\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}\right\}, max\left\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}\right\}\right],$$

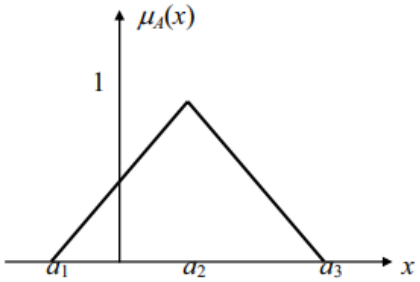
$$[x] / [y] = [\underline{x}, \overline{x}] * \left[1/\overline{y}, 1/\underline{y}\right], (0 \notin [y]) \quad (1-2)$$

تعریف۲-۲[۱۲] بازه‌ی $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ را در نظربگیرید، بااستفاده از تفاضل مینکوفسکی، صفرگسترده شده‌ی بازه‌ای بصورت زیرتعریف می‌گردد:

$$[x] - [x] = [\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{x}, \overline{x}] = [\underline{x} - \overline{x}, \overline{x} - \underline{x}] = [-(\overline{x} - \underline{x}), \overline{x} - \underline{x}]$$

با قراردادن $\overline{x} - \underline{x} = y$، تفاضل دو بازه‌ی همانند بصورت $[x] - [x] = [-y, y]$است، بنابراین صفر گسترده شده‌ی بازه‌ای را بصورت بازه‌ی متقارن درنظر می‌گیریم.

تعریف۲-۳[۱۳] عدد فازی که با سه نقطه بصورت $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ نشان داده می‌شود، عدد فازی مثلثی گفته می‌شود که در نمایش آن با تابع عضویت در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$

۳. حل معادله‌ی بازه ای $[a] + b\,[x] = [c] - d[x]$

تعریف ۳-۱ به معادله‌ی

$$[a] + b\,[x] = [c] - d[x] \quad (1-3)$$

که در آن $[a], [c]$ اعداد بازه‌ای معلوم و b, dاعدادحقیقی معلوم و $[x]$ عددبازه‌ای مجهول می‌باشد، معادله‌ی دوگان بازه‌ای می‌گوییم.

تذکر ۳-۱ دراین مقاله حالتی را درنظر می‌گیریم که بازه‌های $[x], [c], [a]$ مثبت و b, d اعداد حقیقی مثبت می‌باشند و فرض براین است که $[a] - [c]$، وجود دارد.

● روش صفرگسترده شده‌ی بازه‌ای

فرض کنید $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$، $[c] = [\underline{c}, \overline{c}]$ و $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$اعداد بازه‌ای مثبت و b, d اعدادحقیقی مثبت باشند، گسترش بازه‌ای معادله‌ی

$$[a] + b\,[x] - [c] + d\,[x] = 0 \quad (2-3)$$

را درنظر می‌گیریم، با استفاده از تعریف صفربازه‌ای (۲-۲) داریم:

$$[\underline{a}, \overline{a}] + b\,[\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{c}, \overline{c}] + d\,[\underline{x}, \overline{x}] = [-y, y] \quad (3-3)$$

و با استفاده از اعمال حسابی(۲-۱)بدست می‌آوریم:

$$[\underline{a} + b\underline{x} - \overline{c} + d\underline{x}, \overline{a} + b\overline{x} - \underline{c} + d\overline{x}] = [-y, y] \quad (4-3)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \underline{a} + b\underline{x} - \overline{c} + d\underline{x} = -y \\ \overline{a} + b\overline{x} - \underline{c} + d\overline{x} = y \end{cases} \quad (5-3)$$

حال با جمع دوطرف معادله‌های فوق داریم:

$$\underline{a}+b\underline{x}-\overline{c}+d\underline{x}+\overline{a}+b\overline{x}-\underline{c}+d\overline{x}=0 \qquad (۶-۳)$$

که یک معادله با دو مجهول است که عملا بدست آوردن جواب یکتا غیرممکن می‌باشد، لذا با ارائه محدودیت‌هایی مجهولات را تعیین می‌کنیم. به عنوان محدودیت اول با فرض $\underline{x}=\overline{x}=x_m$ و قراردادن در معادله‌ی (۶-۳) بدست می‌آوریم:

$$\underline{a}+bx_m-\overline{c}+dx_m+\overline{a}+bx_m-\underline{c}+dx_m=0 \qquad (۷-۳)$$

بنابراین:

$$x_m=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})}{2(b+d)} \qquad (۸-۳)$$

لم ۳-۱ x_m یک کران بالا برای $\underline{x}$است.
اثبات.
$\underline{x}\le\overline{x}\overset{(b+d)>0}{\rightarrow}(b+d)\,\underline{x}\le(b+d)\,\overline{x}\overset{(۶-۳)}{\rightarrow}(b+d)\,\underline{x}\le(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\,\underline{x}\rightarrow\underline{x}\le x_m=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})}{2(b+d)}$.
لم ۳-۲ x_m یک کران پایین برای $\overline{x}$است.
اثبات.

$$\underline{x}\le\overline{x}\overset{(b+d)>0}{\rightarrow}(b+d)\,\underline{x}\le(b+d)\,\overline{x}\overset{(۶-۳)}{\rightarrow}(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\,\overline{x}\le(b+d)\,\overline{x}\rightarrow x_m=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})}{2(b+d)}\le\overline{x}.$$

کران بالا برای $\underline{x}$ و کران پایین برای $\overline{x}$ پیدا کردیم حال به دنبال کران پایینی برای $\underline{x}$ و کران بالایی برای $\overline{x}$ می گردیم،برای این منظور، گسترش بازه‌ای معادله‌ی $[a]+b\,[x]=[c]-d[x]$ را در نظرمی گیریم، باتوجه به اینکه تفاضل $[c]-[a]$ وجود دارد و $b+d>0$ داریم:

$$[\underline{x},\overline{x}]=\left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{b+d},\frac{\overline{c}-\underline{a}}{b+d}\right] \qquad (۹-۳)$$

بنابراین:

$$\begin{cases}[\underline{x}]=\left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{b+d},x_m\right]\\ [\overline{x}]=\left[x_m,\frac{\overline{c}-\underline{a}}{b+d}\right]\end{cases} \qquad (۱۰-۳)$$

از (۳-۶)و(۳-۱۰)بدست می‌آوریم:

$$\underline{x}=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\,\overline{x}}{b+d},\qquad \overline{x}\in\left[x_m,\frac{\overline{c}-\underline{a}}{b+d}\right] \qquad (۱۱-۳)$$

$$\overline{x}=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\,\underline{x}}{b+d},\qquad \underline{x}\in\left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{b+d},x_m\right] \qquad (۱۲-۳)$$

با قراردادن $\overline{x}\in\left[x_m,\frac{\overline{c}-\underline{a}}{b+d}\right]$ *در* $\underline{x}=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\overline{x}}{b+d}$ *و* $\underline{x}\in\left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{b+d},x_m\right]$ *در* $\overline{x}=\frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})-(b+d)\underline{x}}{b+d}$ *مشاهده می‌کنیم در این حالت همواره مقدارقابل قبول برای* $\underline{x}$ *و* $\overline{x}$ *بصورت زیر است:*

$$\underline{x}\in\left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{b+d},x_m\right],\qquad \overline{x}\in\left[x_m,\frac{\overline{c}-\underline{a}}{b+d}\right]$$

قضیه ۳-۱ معادله‌ی دوگان بازه‌ای (۳-۱)، همواره دارای جواب بازه‌ای است.

اثبات. چون جواب‌های معادله‌ی (۳-۱)، به صورت $\underline{x} \in \left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{\overline{b}+\underline{d}}, x_m\right]$ و $\overline{x} \in \left[x_m, \frac{\overline{c}-\underline{a}}{\underline{b}+\overline{d}}\right]$است، کافیست نشان دهیم همواره $x_m \leq \frac{\overline{c}-\underline{a}}{\underline{b}+\overline{d}}$ و $\frac{\underline{c}-\overline{a}}{\overline{b}+\underline{d}} \leq x_m$ ، برای حالت اول اثبات می‌کنیم، اثبات برای حالت دوم مشابه است.چون طبق فرض مقاله $[a] - [c]$ وجود دارد، پس:

$$\underline{c} - \overline{a} \leq \overline{c} - \underline{a} \rightarrow ۲\underline{c} - ۲\overline{a} \leq \underline{c} - \overline{a} + \overline{c} - \underline{a} \rightarrow \frac{\underline{c} - \overline{a}}{b + d} \leq \frac{(\underline{c} + \overline{c}) - (\underline{a} + \overline{a})}{۲(b + d)} = x_m$$

لذا حکم برقرار است .

● **محاسبه‌ی $y_{\min}$ و $y_{\max}$**

دستگاه (۳-۵) را در نظربگیرید، در قسمت قبل نشان دادیم جواب معادله دوگان بازه‌ای به صورت $\underline{x} \in \left[\frac{\underline{c}-\overline{a}}{\overline{b}+\underline{d}}, x_m\right]$ و $\overline{x} \in \left[x_m, \frac{\overline{c}-\underline{a}}{\underline{b}+\overline{d}}\right]$ است، حال باجایگذاری $\underline{x}$ و $\overline{x}$ در دستگاه y_{min} و y_{max} را محاسبه می‌کنیم:

$$\underline{x} = \overline{x} = x_m = \frac{(\underline{c} + \overline{c}) - (\underline{a} + \overline{a})}{۲(b + d)} \overset{(۵-۳)}{\rightarrow} y_{min} = \frac{\overline{a} - \underline{a} + \overline{c} - \underline{c}}{۲} \qquad (۱۳-۳)$$

از طرف دیگر با قراردادن $\underline{x} = \frac{\underline{c}-\overline{a}}{\overline{b}+\underline{d}}$ و $\overline{x} = \frac{\overline{c}-\underline{a}}{\underline{b}+\overline{d}}$ *در دستگاه (۳-۵)، بدست می‌آوریم:*

$$y_{max} = \overline{a} - \underline{a} + \overline{c} - \underline{c} \qquad (۱۴-۳)$$

● ***جواب فازی معادله‌ی دوگان بازه‌ای***

باتوجه به اینکه صفرگسترده شده‌ی بازه‌ای بصورت $[-y, y]$ *تعریف شد، بنابراین هر چه* y *مقدار کمتری داشته باشد تقریب بهتری برای صفر و هر چه مقدار بزرگتری داشته باشد، تقریب خوبی برای صفر نخواهد بود، لذا* α *به صورت* $\alpha = ۱ - \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}$ *تعریف می‌گردد و با توجه به اینکه مینیموم مقدار* y *در* $x_m = \frac{(\underline{c}+\overline{c})-(\underline{a}+\overline{a})}{۲(b+d)}$ *و ماکسیمم مقدار خود را در* $\underline{x} = \frac{\underline{c}-\overline{a}}{\overline{b}+\underline{d}}$ *و* $\overline{x} = \frac{\overline{c}-\underline{a}}{\underline{b}+\overline{d}}$ *کسب می‌کند، لذا جواب فازی مثلثی معادله بازه‌ای بصورت زیر است :*

$$\tilde{x} = \left(\frac{\underline{c} - \overline{a}}{\overline{b} + \underline{d}}, \frac{(\underline{c} + \overline{c}) - (\underline{a} + \overline{a})}{۲(b + d)}, \frac{\overline{c} - \underline{a}}{\underline{b} + \overline{d}}\right) \qquad (۱۵-۳)$$

۴. مثال عددی

مثال۴-۱ *معادله‌ی بازه‌ای زیر را در نظربگیرید :*

$$[۳, ۷] + ۳[x] = [۹, ۱۷] - [x] \qquad (۱-۴)$$

از (۳-۱۰)جواب بازه‌ای (۴-۱)بصورت زیر بدست می‌آید :

$$\underline{x} \in [۱, ۴], \qquad \overline{x} \in [۴, ۷]$$

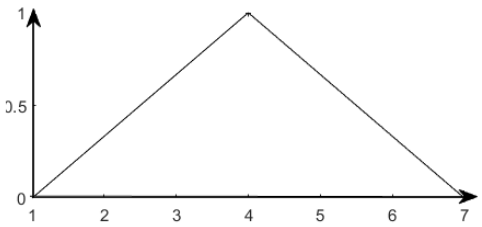
و جواب فازی مثلثی (۴-۱)بصورت زیر است :

$$\tilde{x} = (۱, ۴, ۷)$$

که در شکل ۲، نشان داده شده است .

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با بیان لم‌هایی روشی کاربردی برای حل دستگاه دوگان بازه‌ای ارائه کردیم و نشان دادیم که معادله‌ی بازه‌ای می‌تواند جواب فازی داشته باشد، از مزایای روش پیشنهادی محاسبات کم آن و اینکه با فرضیات مقاله معادله‌ی دوگان بازه‌ای همواره دارای جواب بازه‌ای می‌باشد، است. در پژوهش بعدی با استفاده از تعریف صفرگسترده شده بازه‌ای به حل معادله دیفرانسیل بازه‌ای خواهیم پرداخت.



شکل ۲: نمایش جواب فازی معادله (۴-۱)

مراجع

[1] E. Kaucher, Interval Analysis in the Extended Interval Space IR, chapter 4, Springer, Vienna, Austria, 1980.
[2] M. B. Gorzalczany, “Approximate inference with interval-valued fuzzy sets—an outline,” in Proceedings of the Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics, pp. 89–95, Poznan, Poland, 1983.
[3] N. S. Dimitrova, S. M. Markov, and E. D. Popova, “Extended interval arithmetics: new results and applications,” in Computer Arithmetic And Enclosure Methods, pp. 225–234, 1992.
[4] G. J. Wang and X. P. Li, “The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers,” Fuzzy Sets and Systems, vol. 98, no. 3, pp. 331–335, 1998
[5] E. D. Popova, “Multiplication distributivity of proper and improper intervals,” Reliable Computing. An International Journal Devoted to Reliable Mathematical Computations Based on [6]. Finite Representations and Guaranteed Accuracy, vol. 7, no. 2, pp. 129–140, 2001.
[6] S. Bodjanova, “Median value and median interval of a fuzzy number,” Information Sciences, vol. 172, no. 1-2, pp. 73–89, 2005.
[7] Z. Gong, Sh, Hai, The Interval-Valued Trapezoidal Approximation of Interval-Valued Fuzzy Numbers and Its Application in Fuzzy Risk Analysis, Journal of Applied Mathematics, 2014, doi.org/10.1155/2014/254853.
[8] B. Farhadinia, “Sensitivity analysis in interval-valued trapezoidal fuzzy number linear programming problems,” Applied Mathematical Modelling, vol. 38, no. 1, pp. 50–62, 2014.
[9] A. Sudha and N. Anitha, “Solving a interval fuzzy linear programming problem using alpha-cut operation,” International Journal of Computer Applications, vol. 112, no. 10, pp. 14–16, 2015.
[10] E. Siahlooei, S.A, Shahzadeh Fazeli, An Application of Interval Arithmetic for Solving Fully Fuzzy Linear Systems with Trapezoidal Fuzzy Numbers, Advances in fuzzy systems, 2018, doi.org/10.1155/2018/2104343.
[11] P. sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case, Information Sciences 179 (2009) 925-937.
[12] First Course on Fuzzy Theory and Applications. 2005. ISBN 3-540-22988-4.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FS–324، صص. ۳۷۹–۳۸۵

مقایسه و بررسی سه پروتکل خوشه بندی مبتنی بر منطق فازی در شبکه های حسگر بی‌سیم

احمد جلیلی[آ]

[آ] استادیار گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده علوم پایه و فنی–مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
منطق فازی
بهره وری انرژی
شبکه های حسگر بی سیم
پروتکل مسیریابی

چکیده

شبکه حسگر بی سیم شبکه ای است که در آن گره های مجهز به حسگرهایی که قادر به جمع آوری داده ها از دنیای واقعی هستند به صورت بی سیم پیکربندی می شوند. از آنجا که گره های حسگر به صورت بی سیم پیکربندی می شوند، قدرت محدودی مانند باتری ها دارند. اگر باتری یا انرژی گره حسگر تمام شود، گره دیگر قابل استفاده نیست. همچنین در صورتی که بیش از تعداد معینی گره بمیرند، شبکه کار نخواهد کرد. یکی از چالش های جدی و ضروی این نوع شبکه طراحی پروتکل های مسیریابی با راندمان انرژی بهینه است زیرا حسگرهای مربوطه از طریق باتری انرژی خود را تغذیه می‌کنند و انتقال اطلاعات از طریق مسیرهای بهینه و کوتاه باعث کمتر هدررفتن انرژی میشود. پروتکل های شبکه حسگر بی سیم زیادی برای بهبود بهره وری انرژی وجود دارد که در میان آنها پروتکل LEACH یک نمونه عالی و بهینه است. پروتکل LEACH یک پروتکل مبتنی بر خوشه است که فضای حسگرها را به صورت خوشه بندی تقسیم می کند و داده ها را بین گره ها ارسال و دریافت می کند. بنابراین، بسته به نحوه ساختار خوشه، شکل نمودار انرژی ممکن است کاهش یا افزایش یابد. در این مقاله قصد داریم طول عمر شبکه پروتکل LEACH و سه نوع پروتکلی را که با استفاده از روش‌های فازی برای انتخاب خوشه بهبود یافته‌اند، بررسی و مقایسه نماییم.

۱. مقدمه

شبکه حسگر بی سیم شبکه ای است متشکل از گره های حسگر که به منظور جمع آوری داده ها به صورت بی سیم به یکدیگر متصل هستند. گره های حسگر را می توان در خانه، محیط طبیعی یا در جاده ها برای اندازه گیری یا مشاهده تغییرات نصب کرد. علاوه بر این، از آنجایی که گره‌های حسگر به صورت بی‌سیم پیکربندی شده‌اند، می‌توان آن‌ها را در جایی نصب کرد که افراد نتوانند به آن دسترسی داشته باشند. این شبکه ها در بسیاری از زمینه ها استفاده می شوند و زندگی ما را راحت تر می کنند. این حسگرها ظرفیت محاسباتی و انرژي محدود و کاربردهاي بسیار متنوعی در زمینه هاي مختلف همچون مانیتورینگ محیطی، کاربردهاي نظامی، بهداشتی، پیشگیري از حوادث طبیعی مانند سونامی، نظارت و امنیت، کنترل ترافیک و ... . دارند. با وجود مزایای بسیار زیاد شبکه های حسگر بی سیم، این نوع شبکه ها از چالش ها و مسائل مختلفی نیز رنج میبرد. برخلاف شبکه های سیمی، یک شبکه حسگر بی سیم با یک منبع توان محدود مانند یک باتری برای هر گره حسگر کار می کند. وقتی باتری تمام شود، گره حسگر دیگر کار نمی کند. بنابراین، برای استفاده طولانی مدت از یک شبکه، نیاز به بهینه سازی انرژی مصرف شده برای به حداقل رساندن مصرف انرژی دارد. پروتکل های شبکه حسگر بی سیم زیادی برای افزایش بهره وری انرژی شبکه وجود دارد [۱][۲]، یکی از پروتکل های معروف در این زمینه پروتکل LEACH است. پروتکل LEACH یک پروتکل مبتنی بر خوشه است که به صورت دوره ای سر خوشه را با استفاده از معادله احتمال انتخاب سر خوشه انتخاب می کند [۳].
با این حال، پروتکل LEACH انرژی باقیمانده گره یا فاصله بین گره ها را در نظر نمی گیرد، به طوری که ممکن است خوشه به طور ناکارآمد تشکیل شود. برای بهبود این مسئله، در این مقاله با استفاده از منطق فازی پروتکل های خوشه بندی جدیدی بر مبنای پروتکل LEACH ارائه

پست الکترونیک: jalili@gonbad.ac.ir (احمد جلیلی)

و پیشنهاد شده است به طوری که اشکالات مربوط به پروتکل موجود را رفع می نماید. نتایج شبیه سازی نشان میدهد پروتکل های پیشنهادی Logic Fuzzy Gupta's و LEACH-FL CHEF، بهره وری بهتری نسبت به پروتکل LEACH دارند.
ساختار کلی مقاله به شرح زیر می باشد. در بخش ۲، پیشینه تحقیق که شامل ساختار پروتکل LEACH و معرفی منطق فازی هست ارائه میگردد. معماری پروتکل های پیشنهادی که بر اساس منطق فازی ارائه شده اند در بخش ۳ بررسی میشوند. پس از آن، بخش ۴ شبیه سازی و ارزیابی کارایی پروتکل های خوشه بندی را ارائه می کند. در بخش ۵ نتیجه گیری و پیشنهادات آینده مطرح خواهد شد.

۲. پیشینه تحقیق

اخیراً، تحقیقات گسترده ای در مورد پروتکل های خوشه بندی و مسیریابی برای شبکه های حسگر بی سیم انجام شده است. یکی از معروف ترین پروتکل های موجود جهت مسیریابی بسته ها در این نوع شبکه پروتکل LEACH است. این پروتکل در بسیاری از تجهیزات این نوع شبکه ها پیاده سازی شده و هم اکنون به عنوان پروتکل پایه برای پروتکل های مسیریابی دیگر استفاده میشود. در این بخش ابتدا ساختار پروتکل LEACH بررسی میشود. سپس با توجه به اینکه پروتکل های پیشنهادی بر اساس منطق فازی ارائه شده است، لذا در ادامه معرفی در رابطه با مفاهیم مربوط به منطق فازی خواهیم داشت.

۲. ۱. ساختار پروتکل *LEACH*

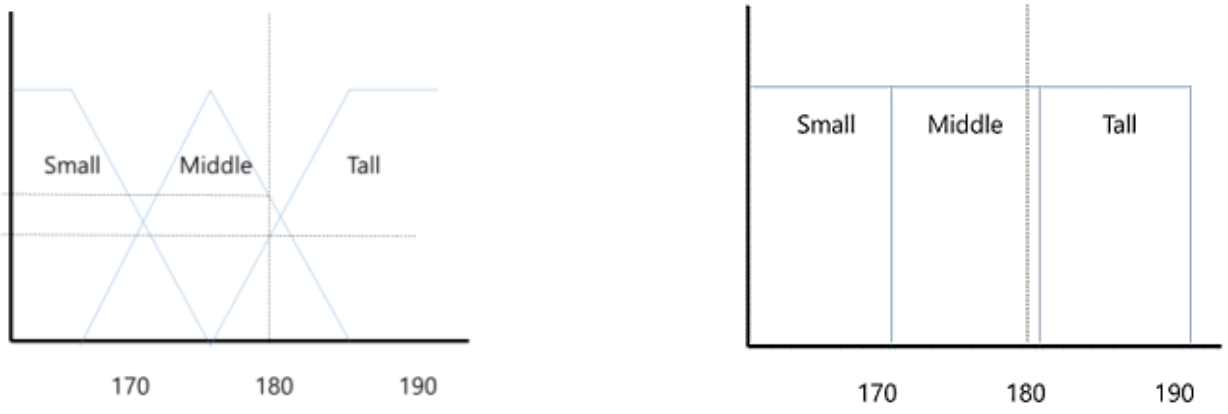
پروتکل LEACH یک پروتکل مسیریابی مبتنی بر خوشه بندی است. محیط حسگر به خوشه هایی تقسیم می شود به طوری که هر خوشه دارای یک گره است که مسئول سر خوشه است. پروتکل LEACH دارای یک مرحله راه اندازی است که در آن سر خوشه ها انتخاب می شوند و یک فاز حالت پایدار دارد که در آن داده های گره ها منتقل می شود. از آنجایی که سر خوشه، داده های گره های عضو در خوشه را جمع آوری می کند و داده ها را انتقال می دهد، مصرف انرژی سر خوشه بالا است. برای توزیع یکنواخت مصرف انرژی، پروتکل LEACH خوشه را در هر چرخه تغییر می دهد [۳].

$$T(n)=\begin{cases}\dfrac{p}{1-p\left(r \bmod \frac{1}{p}\right)} & if\ n \epsilon G \\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (1)$$

در معادله فوق (۱)؛ r نشان دهنده دور فعلی است. مجموعه G مجموعه ای از گره هایی است که تا دور قبلی در سرخوشه انتخاب نشده اند. اگر مجموعه G خالی باشد و هیچ گره ای وجود نداشته باشد که بتواند سر خوشه باشد، تمام گره هایی که دارای انرژی باقیمانده است را در مجموعه G قرار می دهیم تا به سر خوشه تبدیل شود. هنگامی که هر دور شروع می شود، هر گره به طور مستقل بررسی می کند که آیا به مجموعه G تعلق دارد یا خیر، و اگر متعلق به مجموعه G باشد، عدد تصادفی بین ۰ و ۱ خود را با آستانه تصادفی مقایسه می کند. اگر عدد تصادفی کمتر از آستانه T(n) باشد، گره به عنوان سر خوشه در دور فعلی تبدیل می‌شود. هنگامی که تمام سرخوشه ها انتخاب شدند، گره های عضو در خوشه داده های خود را به سر خوشه مربوطه ارسال می کنند. سر خوشه داده های دریافتی را جمع آوری کرده و با داده های خود به ایستگاه پایه ارسال می کند.

۲. ۲. منطق فازی

منطق فازی یک مفهوم منطقی است که عناصر یا حالت‌های مبهم را که می‌توانند در زبان طبیعی و غیره رخ دهند، به‌عنوان حالت‌های مبهم به جای منطق دوتایی بیان می‌کند. منطق فازی اساساً مبتنی بر مفهوم مجموعه فازی است که ایده اصلی آن اولین بار توسط پروفسور لطفی زاده در دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ پیشنهاد شد و بیان می‌کند که شی مقایسه با استفاده از تابع عضویت (Membership Function) به جای منطق باینری واقعی به مجموعه A تعلق دارد. دکتر لطفی زاده در آن زمان بر روی مسئله در ک زبان انسان توسط کامپیوتر کار می کرد. زبان طبیعی انسان (مانند بیشتر فعالیت ها در زندگی و جهان هستی) به آسانی به مقادیر مطلق ۰ و ۱ تبدیل نمی شود .این که ایا همه چیز را می توان در نهایت به صورت جمله های باینری توصیف کرد سوالی فلسفی است که ارزش پیگیری دارد اما در عمل بیشتر داده هایی که می خواهیم به صورت ورودی در اختیار کامپیوتر قرار دهیم و همچنین در اغلب موارد نتایج آن نیز حالتی بینابینی دارد. شاید تصور منطق فازی به عنوان راه اصلی استدلال و در نظر گرفتن منطق بولی به عنوان یک حالت خاص از آن بتواند به درک بهتر موضوع کمک کند. منطق فازی ۰ و ۱ را به عنوان حالت های مفرط حقیقت (واقعیت) در نظر می گیرند اما چندین حالت درستی نیز در بین این دو حالت قرار می گیرد مثلا نتیجه مقایسه بین دو چیز ممکن است نه کوتاه یا بلند بودن آن ها بلکه ۳۸.۰ بلندتر بودن یکی از آن ها باشد.
معماری یک سیستم منطق فازی دارای چهار بخش اصلی است. یک ماژول فازی ساز، موتور استنتاج، پایگاه دانش و ماژول غیرفازی ساز. ماژول فازی ساز ورودی های سیستم را که به صورت عددی هستند به مجموعه های فازی تبدیل می کند. پس از فرآیند فازی سازی، موتور استنتاج استنباطی بر اساس مجموعه ای از قوانین که در پایگاه دانش وجود دارد انجام می دهد. پایگاه دانش محلی است که دستورات "اگر – آنگاه" که توسط کارشناسان ایجاد شده اند در آن ذخیره می شود. در مرحله آخر، مجموعه فازی که توسط موتور استنتاجی به دست آمده را به یک مقدار عددی تبدیل می کند. شکل ۲ مجموعه قد انسان را با استفاده از منطق باینری و منطق فازی نشان می دهد [۴].



شکل ۱: شکل ۱. محدوده ارتفاع در (راست) منطق باینری و (چپ) منطق فازی

با توجه به شکل (۱) مشاهده می شود وقتی فردی با قد ۹.۱۷۹ سانتی‌متر با منطق باینری قضاوت می‌شود، شی مقایسه متعلق به مجموعه <"Middle>" یا "قد متوسط" است زیرا کمتر از ۱۸۰ سانتی‌متر است و بنابراین به مجموعه <"Tall>" یا"قد بلند" تعلق ندارد. با این حال، هنگامی که با منطق فازی قضاوت می شود، یک فرد با ۹.۱۷۹ سانتی متر را می توان به عنوان یک تابع ریاضی که به مجموعه ای از "Middle" و "Tall" تعلق دارد بیان کرد.

۳. روش پیشنهادی

در این بخش از مقاله، ساختار پروتکل های پیشنهادی که بر اساس منطق فازی ارائه شده اند بررسی می گردد. همانطور که گفته شد این پروتکل ها بهبود داده شده روتکل LEACH هستند و اساس کار آنها یکی است با این تفاوت که در انتخاب سرخوشه و نحوه خوشه بندی از مفاهیم مربوط به منطق فازی بهره گرفته شده است.

۱.۳ . *پروتکل پیشنهادی مبتنی بر منطق فازی گوپتا*

در مقاله [۴] گوپتا و همکاران، سعی کردند معیار انتخاب سر خوشه پروتکل LEACH را از طریق منطق فازی بهبود بخشند. در این مقاله سرخوشه با عملیات فازی با در نظر گرفتن انرژی باقیمانده گره (Node Energy)، چگالی گره (Node Concentration) و مرکزیت گره (Node Centrality) به جای آستانه تصادفی انتخاب می شود. عملیات فازی از روش استنتاج ممدانی استفاده می کند و فرآیند زیر را طی می کند.

۱. فازی سازی متغیر ورودی: انرژی باقیمانده گره، چگالی گره و مرکزیت گره را وارد کرده و درجه تعلق هر ورودی به مجموعه فازی مناسب را تعیین کرده و آن را به یک تابع عضو (member function) تبدیل کنید.
۲. ارزیابی قانون فازی: متغیرهای ورودی فازی را با استفاده از قانون فازی اختصاص دهید و نتیجه را استنتاج کنید.
۳. قوانین خروجی و تجمیع: ادغام و خروجی نتایج استنباط شده.
۴. فاززدایی (غیر فازی ساز): فرآیند تبدیل مقادیر فازی خروجی به مقادیر عادی آنها

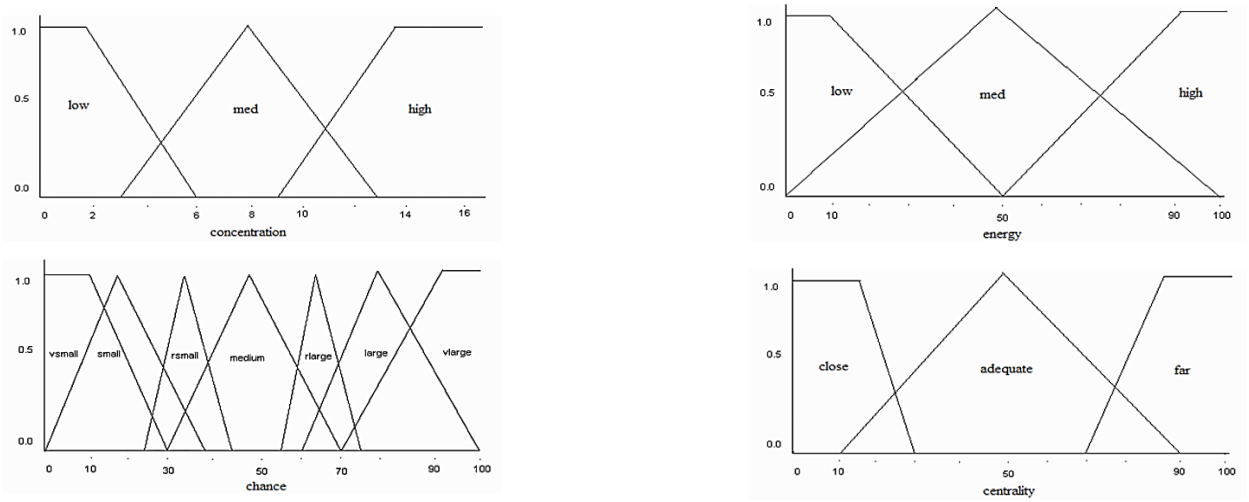
در مرحله غیرفازی ساز (Defuzzification) نیز با استفاده از متد مرکز ثقل (center-of-gravity) محاسبات انجام خواهد شد. معادله مربوطه در رابطه (۲) در زیر نشان داده شده است.

$$COG = \frac{(\sum \mu_A(x) * x)}{\sum \mu_A(x)} \quad (۲)$$

منطق فازی گوپتا دارای متغیرهای ورودی و مجموعه فازی است که در جدول (۱) و شکل (۲) نشان داده شده است.
در منطق فازی گوپتا، ارزش شانس همه گره ها در هر دور محاسبه می شود. هنگامی که محاسبه مقدار شانس کامل شد، سرخوشه ها به ترتیب صعودی مقدار شانس انتخاب می شوند.

جدول ۱: متغیر ورودی: منطق فازی گوپتا

Input variable	*Set Value*		
Node Energy	low	med	High
Node Concentration	low	med	High
Node Centrality	close	adeq	far



شکل ۲: مجموعه فازی متغیر ورودی: منطق فازی گوپتا

۲.۳. *پروتکل پیشنهادی مبتنی بر منطق فازی CHEF*

منطق فازی CHEF دارای متغیرهای ورودی و مجموعه‌های فازی است که در جدول (۲) و شکل (۳) نشان داده شده است. مرکزیت گره مجموع فواصل از گره های واقع در محدوده معین r از گره در شکل ۵ نشان داده شده است. نرخ تغییر با معادله (۳) در زیر نشان داده شده است.

$$r = \sqrt{\frac{M}{\pi n P}} \quad (۳)$$

که در آن M اندازه فضای حسگر است، P احتمال انتخاب سر خوشه و n تعداد کل گره ها است.

جدول ۲: متغیر ورودی CHEF

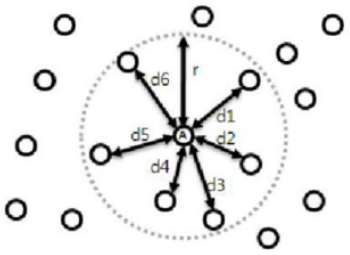
Input variable	*Set Value*		
Node Energy	low	med	High
Node Centrality	close	adeq	far

در مورد CHEF، سر خوشه مانند پروتکل LEACH انتخاب می شود. پس از انتخاب سر خوشه، سر خوشه با ارزش فرصت گره عضو آن مقایسه می شود، و سرخوشه با یک گره با ارزش بالاتر جایگزین می شود [۵].

۳.۳. *پروتکل پیشنهادی مبتنی بر منطق فازی LEACH-FL*

منطق فازی LEACH-FL دارای متغیرهای ورودی و مجموعه فازی است که در جدول (۳) و شکل (۴) نشان داده شده است. با استفاده از مجموعه فازی زیر و معادله زیر، مقدار احتمال فازی بدست می آید [۶].

$$Probabilityvalue = (NodeEnergy) * ۲ + (Nodedensity) + (۲ - NodeCentrality)$$



$$Node\ Centrality = d1 + d2 + d3 + d4 + d5 + d6$$

شکل ۳: شکل ۳. فواصل بین گره A و سایر گره های داخل r.

جدول ۳: متغیر ورودی LEACH-FL

Input variable	*Set Value*		
Node Energy	Low (0)	Med (1)	High (2)
Node Concentration	Low (0)	Med (1)	High (2)
Node Centrality	Close (0)	Adeq (1)	Far (2)

در مورد LEACH-FL، تقریباً مشابه پروتکل LEACH عمل می کند. با این تفاوت که پروتکل LEACH سر خوشه را با مقایسه آستانه تصادفی T(n) با تعداد تصادفی هر گره انتخاب می کند. اما، LEACH-FL سر خوشه را با مقایسه مقدار احتمال فازی محاسبه شده با T(n) انتخاب می کند.

۴. شبیه سازی و نتیجه گیری

ما طول عمر شبکه پروتکل LEACH را با سه پروتکل پیشنهادی مبتنی بر منطق فازی (منطق فازی گوپتا، CHEF، LEACH-FL) بر اساس پارامترهای موجود در جدول ۴ مقایسه کردیم. شبیه سازی در شرایطی انجام شد که موقعیت ایستگاه پایه در مرکز محیط موردنظر حس شده قرار دارد.

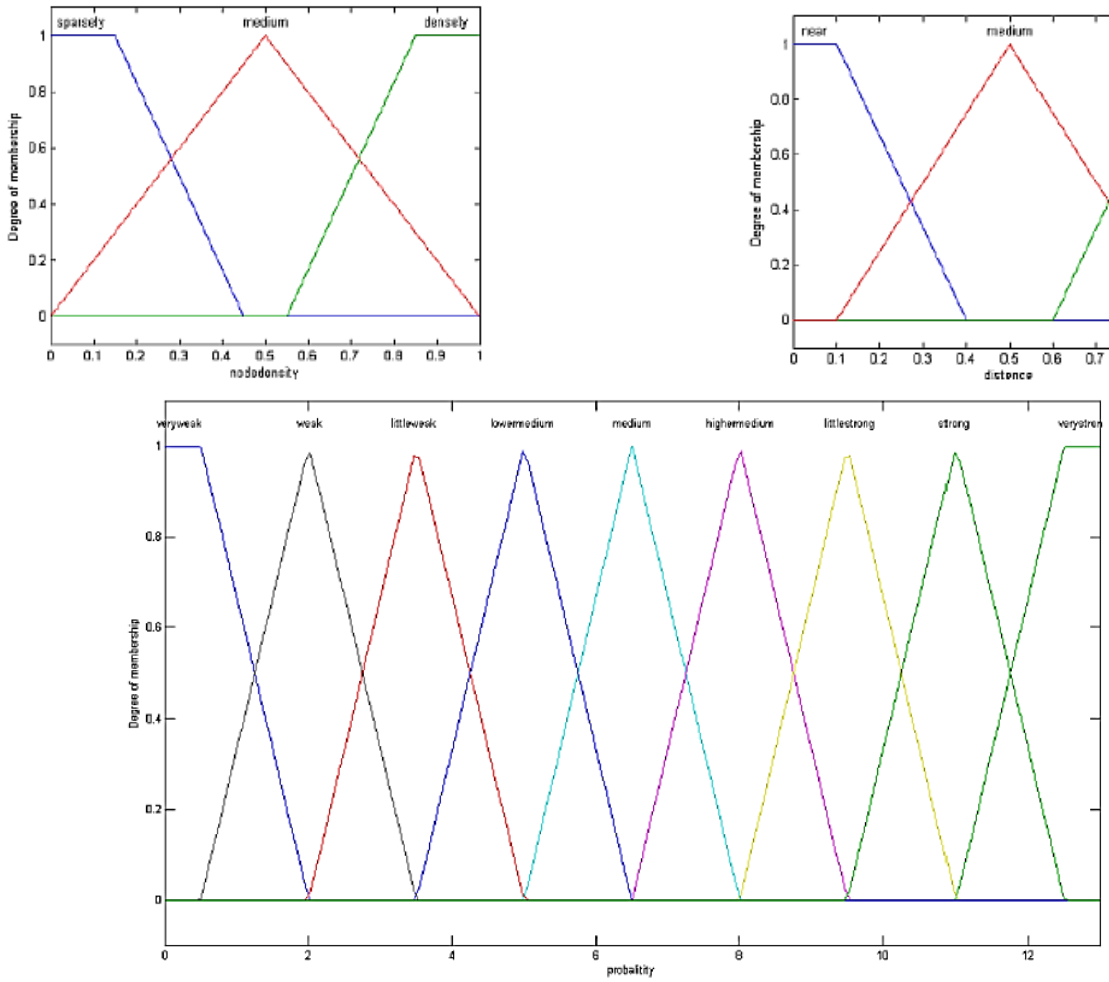
جدول ۴: پارامترهای شبیه سازی

Parameter	*Value*
Data Aggregation	5nJ/bit/signal
Energy dissipation to run the radio device	50nJ/bit
Free space model of Transmitter Amplifier	10pJ/bit/m2
Multi path model of Transmitter Amplifier	0.0013pJ/bit/m2
Number of Sensor Nodes	100
Sensor Field	100 x 100
Location of Base Station	50 x 50(center), 50 x 150(outside)
Initial Energy	0.5J

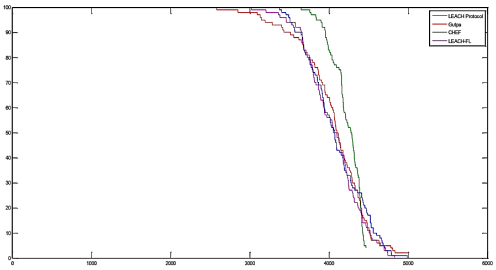
همانطور که از نتایج مشخص است، هنگامی که ایستگاه پایه در مرکز میدان حسگر قرار دارد، پروتکل CHEF بهترین کارایی را نشان داد. در پروتکل LEACH ، اولین گره در ثانیه ۳۳۷۵ می میرد، (First-Node-Death) در حالی که این مقدار برای پروتکل CHEF برابر ۳۶۴۸ ثانیه است. همچنین در پروتکل LEACH پس از زمان ۴۰۷۵ ثانیه فقط ۵۰ درصد گره ها زنده مانده اند، در صورتی که در پروتکل CHEF این مقدار برابر با ۴۲۸۰ است یعنی حدود ۱.۵ درصد بهبود داشته ایم.

۵. نتیجه گیری

نتایج شبیه سازی نشان می دهد که پروتکل CHEF دارای نرخ بهبود طول عمر شبکه بالایی در بین سه پروتکل با استفاده از منطق فازی است. CHEF از معادله آستانه پروتکل LEACH یعنی T(n) که متفاوت از سایر پروتکل ها استفاده می کند. بنابراین خوشه نیز بسته به موقعیت



شکل ۴: مجموعه فازی متغیر ورودی LEACH-FL



شکل ۵: نتایج شبیه سازی میزان درصد نودهای زنده بر حسب طول عمر شبکه

ایستگاه پایه تغییر می کند. برخی دیگر نشان می‌دهند که خوشه‌ها بدون توجه به موقعیت ایستگاه پایه تغییر نمی‌کنند. به همین دلیل، زمانی که موقعیت ایستگاه پایه بیرون است، منطق فازی گوپتا و LEACH-FL ممکن است ناکارآمد باشند.

جدول ۵: مقایسه طول عمر شبکه پروتکل های مختلف

	LEACH Protocol	*Gupta*	*CHEF*	*LEACH-FL*
FND	3375	2581	**3648 [8%▲]**	3021
80% Alive	3744	3754	**4038 [7.9%▲]**	3764
50% Alive	4074	4102	**4280 [5.1%▲]**	4057

مراجع

[1] Lee, J. Y., Jung, K. D., Shrestha, B., Lee, J., & Cho, S. (2014). Energy efficiency improvement of the of a cluster head selection for wireless sensor networks. International Journal of Smart Home, 8(3), 9-18.

[2] Lee, J. Y. (2015). Energy Improvement of WSN Using The Stochastic Cluster Head Selection. The Journal of the Institute of Internet, Broadcasting and Communication, 15(1), 125-129.

[3] Heinzelman, W. R., Chandrakasan, A., & Balakrishnan, H. (2000, January). Energy-efficient communication protocol for wireless microsensor networks. In Proceedings of the 33rd annual Hawaii international conference on system sciences (pp. 10-pp). IEEE.

[4] Gupta, I., Riordan, D., & Sampalli, S. (2005, May). Cluster-head election using fuzzy logic for wireless sensor networks. In 3rd Annual Communication Networks and Services Research Conference (CNSR'05) (pp. 255-260). IEEE.

[5] Kim, J. M., Park, S. H., Han, Y. J., & Chung, T. M. (2008, February). CHEF: cluster head election mechanism using fuzzy logic in wireless sensor networks. In 2008 10th international conference on advanced communication technology (Vol. 1, pp. 654-659). IEEE.

[6] Ran, G., Zhang, H., & Gong, S. (2010). Improving on LEACH protocol of wireless sensor networks using fuzzy logic. Journal of Information &Computational Science, 7(3), 767-775.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FS–338، صص. ۳۸۶–۳۸۸

یک رویکرد جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی دوطرفه کاملاً فازی

فاطمه طالشیان جلودار[آ]، نعمت اله تقی نژاد[ب]

[آ]دکتری ریاضی کاربردی، گرایش بهینه سازی، آموزش و پرورش گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران
[ب]گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
برنامه ریزی خطی دو طرفه
اعداد فازی مثلثی
رتبه بندی جواب بهینه
متغیرهای غیر محدود

چکیده

در این مقاله به برنامه ریزی خطی دو طرفه کاملاً فازی (FFBLP) پرداخته شده است که در آن کلیه ضرایب و متغیرهای تصمیم در هر دو تابع هدف و محدودیت‌ها، اعداد فازی مثلثی هستند. به منظور به دست آوردن جواب بهینه فازی، یک روش کارآمد جدید برای FFBLP با متغیرها و پارامترهای نامحدود ارائه شده است، این رویکرد پیشنهاد شده بر اساس برنامه ریزی دوطرفه است و چند مثال برای این روش ارائه شده است.

۱. مقدمه

برنامه ریزی دوطرفه، یک مساله بهینه سازی سلسله مراتبی است که شامل دو سطح است که در آن منطقه محدودیت سطح بالا به طور ضمنی با مساله سطح پایین مشخص شده است. این نوع مساله به دلیل ساختار آن بسیار سخت حل می شود. در طی چند دهه گذشته، مساله برنامه ریزی دوطرفه مورد توجه قرار گرفته است و در زمینه های مختلفی مانند بازارهای برق [۲۲]، شبکه‌های انرژی [۸]، مساله تخصیص موقعیت مکانی به طور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته است. در مسائل برنامه ریزی دوطرفه متداول، فرض بر این است که پارامترها به طور دقیق تعریف شده اند، اما در شرایط واقعی ممکن است ضرایب و متغیرهای تصمیم گیری واضح و دقیق نباشند. نظریه مجموعه های فازی ابزاری قدرتمند برای مقابله با اطلاعات نادرست یا مبهم است و در سال های اخیر مساله برنامه ریزی فازی که در آن ضرایب اعداد فازی هستند هم در تابع هدف و هم محدودیت ها توسط برخی از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است. ساکاوا و همکاران [۱۸] مساله برنامه ریزی خطی دوطرفه فازی را تدوین و روش برنامه ریزی فازی را برای حل آن توسعه داد.
لله ویرانلو و همکاران [۱] روش جدیدی را برای حل مساله برنامه ریزی خطی کاملاً فازی با استفاده از عملکرد رتبه بندی پیشنهاد کرد. حسین زاده لطفی و همکاران [۷] مساله برنامه ریزی خطی کاملاً فازی را به دو مساله برنامه ریزی خطی مربوطه مبنی بر مفهوم عدد فازی مثلثی متقارن تبدیل کرده و برای حل چنین مساله ای یک روش الفبایی تهیه کرده است. کومار و همکاران. [۱۰] روش جدیدی را برای یافتن جواب بهینه فازی برای مساله برنامه ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت تساوی پیشنهاد کرد. این مقاله به گونه ای سازمان یافته است که تعاریف و عملگرها را بین اعداد فازی مثلثی در بخش ۲ ارائه می‌دهد، رویکردهای جدید را در FFBLP با استفاده از عملکرد رتبه بندی در بخش ۳ بیان می‌شود، چند مثال عددی را ارائه می دهد تا نحوه اجرای روش ها در بخش ۴ را بیان کند. و در آخر، نتیجه گیری را در بخش ۵ ارائه دهید.

۲. الگوریتم های پیشنهادی

ما الگوریتمی برای مسائل FFBLP با پارامترها و متغیرهای فازی بدون محدودیت ارائه می دهیم.
مرحله ۱: ، مساله زیر را داریم:

$$\underset{x_{1j},y_{1j},t_{1j}}{\text{maximize}}\tilde{F} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n_1}\left(\min\left(p_{1j}x_{1j},r_{1j}x_{1j}\right),q_{1j}y_{1j},\max\left(p_{1j}t_{1j},r_{1j}t_{1j}\right)\right) \oplus \sum_{j=1}^{n_2}\left(\min\left(p_{2j}x_{2j},r_{2j}x_{2j}\right),q_{2j}y_{2j},\max\left(p_{2j}t_{2j},r_{2j}t_{2j}\right)\right)$$

$$\underset{x_{2j},y_{2j},t_{2j}}{\text{maximize}}\tilde{f} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n_1}\left(\min\left(p_{3j}x_{1j},r_{3j}x_{1j}\right),q_{3j}y_{1j},\max\left(p_{3j}t_{1j},r_{3j}t_{1j}\right)\right) \oplus \sum_{j=1}^{n_2}\left(\min\left(p_{4j}x_{2j},r_{4j}x_{2j}\right),q_{4j}y_{2j},\max\left(p_{4j}t_{2j},r_{4j}t_{2j}\right)\right)$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n_1}\left(\min(a_{ij}^{1}x_{1j},a_{ij}^{3}x_{1j}),a_{ij}^{2}y_{1j},\max(a_{ij}^{1}t_{1j},a_{ij}^{3}t_{1j})\right)\oplus\sum_{j=1}^{n_2}\left(\min(b_{ij}^{1}x_{2j},b_{ij}^{3}x_{2j}),a_{ij}^{2}y_{1j},\max(b_{ij}^{1}t_{2j},b_{ij}^{3}t_{1=2j})\right)$$

$$\left(m_i,n_i,p_i\right),\quad \forall i=1,2,\dots,m.$$
$$\left(x_{1j},y_{1j},t_{1j}\right),\left(x_{2j},y_{2j},t_{2j}\right)\in F\left(R\right),\quad j=1,\dots,n.$$

مرحله ۲. با استفاده از تعاریف اعداد فازی، مساله در مرحله ۱ را می توان به شرح زیر نوشت:

$$\underset{x_{1j},y_{1j},t_{1j}}{\text{maximize}}F = \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left(p_{1j}+r_{1j}\right)x_{1j}-\frac{1}{2}\left(r_{1j}-p_{1j}\right)|x_{1j}|+ 2\left(q_{1j},y_{1j}\right)+\frac{1}{2}\left(p_{1j}+r_{1j}\right)t_{1j}+\frac{1}{2}\left(r_{1j}-p_{1j}\right)|t_{1j}|\right)\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left(p_{2j}+r_{2j}\right)x_{2j}-\frac{1}{2}\left(r_{2j}-p_{2j}\right)|x_{2j}|+2\left(q_{2j},y_{2j}\right)+\frac{1}{2}\left(p_{2j}+r_{2j}\right)t_{2j}+\frac{1}{2}\left(r_{2j}-p_{2j}\right)|t_{2j}|\right)\right]$$

$$\underset{x_{2j},y_{2j},t_{2j}}{\text{maximize}}f = \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left(p_{3j}+r_{3j}\right)x_{1j}-\frac{1}{2}\left(r_{3j}-p_{3j}\right)|x_{1j}|\,2\left(q_{3j},y_{1j}\right)t_{1j}+\frac{1}{2}\left(r_{3j}-p_{3j}\right)|t_{1j}|\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{2}\left(p_{4j}+r_{4j}\right)x_{2j}-\frac{1}{2}\left(r_{4j}-p_{4j}\right)|x_{2j}|+2\left(q_{4j},y_{2j}\right)+2\frac{1}{2}\left(p_{4j}+r_{4j}\right)t_{2j}+\frac{1}{2}\left(r_{4j}-p_{4j}\right)|t_{2j}|\right)\right]$$

$$s.t$$
$$\forall i=1,\dots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left(a_{ij}^{1}+a_{ij}^{3}\right)x_{1j}-\frac{1}{2}\left(a_{ij}^{3}-a_{ij}^{1}\right)|x_{1j}|\right)+\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{2}\left(b_{ij}^{1}+b_{ij}^{3}\right)x_{2j}-\frac{1}{2}\left(b_{ij}^{3}-b_{ij}^{1}\right)|x_{2j}|\right)=m_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{2}y_{1j}+\sum_{j=1}^{n_2}b_{ij}^{2}y_{2j}=n_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left(a_{ij}^{1}+t_{ij}^{3}\right)x_{1j}+\frac{1}{2}\left(a_{ij}^{3}-a_{ij}^{1}\right)|t_{1j}|\right)+\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{2}\left(b_{ij}^{1}+b_{ij}^{3}\right)x_{2j}+\frac{1}{2}\left(b_{ij}^{3}-b_{ij}^{1}\right)|t_{2j}|\right)=p_i,$$

$$y_{1j} - x_{1j} \geq 0, y_{2j} - x_{2j} \geq 0, t_{1j} - y_{1j} \geq 0, t_{2j} - y_{2j} \geq 0$$
$$y_{1j}, x_{1j}, t_{1j}, y_{2j}, x_{2j}, \in R, \forall: 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \forall j = 1, \dots, n.$$
$$x_{1j}, y_{1j}, t_{1j}, x_{2j}, y_{2j}, t_{2j},$$
$$\tilde{x}_1 = (x_{1j}, y_{1j}, t_{1j}), \tilde{x}_2 = (x_{2j}, y_{2j}, t_{2j}).$$

مرحله ۳: یک جواب بهینه فازی با قرار دادن مقادیر $x_{1j}, y_{1j}, t_{1j}, x_{2j}, y_{2j}, t_{2j}$ در $\tilde{x}_1 = (x_{1j}, y_{1j}, t_{1j})$ و $\tilde{x}_2 = (x_{2j}, y_{2j}, t_{2j})$ برای مساله زیر بدست می‌آوریم.
در

$$\tilde{F}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n_1} (p_{1j}, q_{1j}, r_{1j}) \otimes (x_{1j}, y_{1j}, t_{1j}) \oplus \sum_{j=1}^{n_2} (p_{2j}, q_{2j}, r_{2j}) \otimes (x_{2j}, y_{2j}, t_{2j})$$
$$\tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n_1} (p_{3j}, q_{3j}, r_{3j}) \otimes (x_{1j}, y_{1j}, t_{1j}) \oplus \sum_{j=1}^{n_2} (p_{4j}, q_{4j}, r_{4j}) \otimes (x_{2j}, y_{2j}, t_{2j}).$$

۳. نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتمی جدیدی برای حل بهینه‌سازی فازی مساله FFBLP با محدودیت‌های برابری و متغیرهای فازی غیر منفی یا متغیرهای فازی بدون محدودیت ارائه شده است. در این الگوریتم، مساله برنامه ریزی خطی دو طرفه فازی، با استفاده از رتبه بندی، به یک مساله برنامه ریزی قطعی تبدیل می شود.

مراجع

[1] T. Allahviranloo, F. H. Lot_, M. K. Kiasary, N. A. Kiani, L. Alizadeh, Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function, *Applied Mathematical Sciences* 2 (2008) 19-32.
[2] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, Decision Making in A Fuzzy Environment, *Management Science* 17 (1970) 141-164.
[3] M. Cecchini, J. Ecker, M. Kupferschmid, R. Leitch, Solving nonlinear principal-agent problems using bilevel programming, *Eur. J.Oper. Res.* 230 (2013) 364-373.
[4] S. Dempe, Foundations of bilevel programming, *Kluwer, Dordrecht,* 2002.
[5] S. Dempe, Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints, *Optimization* 52 (2003) 333-359.
[6] S. Dempe, V. Kalashnikov, G. A. Prez- Valds, N. Kalashnykova, Bilevel programming problems, *Springer, Berlin*, 2015.
[7] F. Hosseinzadeh Lot_, T. Allahviranloo, M. Alimardani Jondabeh, L. Alizadeh, Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution, *Applied Mathematical Modelling* 33(2009) 3151-3156.
[8] V. V. Kalashnikov, S. Dempe, G. A. Prez-Valds, N. I. Kalashnykova, J. F. Camacho- Vallejo, Bilevel programming and applications,*Mathematical Problems in Engineering* (2015) http://dx.doi.org/10.1155/2015/310301/.
[9] J. Kaur, A. Kumar, Exact fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with unrestricted fuzzy variables,*Appl. Intell.* 37 (2012) 145-154.
[10] A. Kumar, J. Kaur, P. Singh, A new method for solving fully fuzzy linear programming problems, *Applied Mathematical Modelling*35 (2011) 817-823.*S. F. Tayebnasabet al., /IJIM Vol. 12, No. 1 (2020) 1-11* 11
[11] M. Labb , A. Violin, Bilevel programming and price setting problems, *4OR-Q J. Oper. Res.* 11 (2013) 1-30.
[12] H. S. Naja_, S. A. Edalatpanah, A note on A new method for solving fully fuzzy linear programming problems, *Appl. Math. Model.*37 (2013) 7865-7867.
[13] A. Ren, A Novel Method for Solving the Fully Fuzzy Bilevel Linear Programming Problem, Mathematical Problems in Engineering(2015) http://dx.doi.org/10. 1155/2015/280380/.
[14] A. Ren, Solving the Fully Fuzzy Bilevel Linear Programming Problem through Deviation Degree Measures and a Ranking Function Method, *Mathematical Problems in Engineering* (2016) http://dx.doi.org/10.1155/2016/7069804/.
[15] A. Ren, Y. Wang, X. Xue, Interactive programming approach for solving the full fuzzy bilevel linear programming problem, *Knowledge-Based Systems* 99 (2016) 103-111. programming problems with fuzzy parameters, *Fuzzy Set Syst.* 109 (2000) 3-19.
[16] J. Xu, P. A. Wei, Bilevel model for locationallocation problem of construction and demolition waste management under fuzzy random environment, *Int. J. of Civ. Eng.* 10 (2012) 1-12.
[17] M. W. Xu, J. J. Ye, A smoothing augmented Lagrangian method for solving simple bilevel programs, *Comput. Optim. Appl.* 59 (2014) 353-377.
[18] R. R. Yager, A procedure for ordering fuzzy numbers of the unit interval, *Information Sciences* 24 (1981) 143-161.
[19] G. Zhang, G. Zhang, Y. Gao , J. Lu, Competitive strategic bidding optimization in electricity markets using bilevel programming and swarm technique, *IEEE Trans- actions on Industrial Electronics* 58 (2011) 2138-2146.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–210، صص. ۳۸۹–۴۰۱

توسعه مدل قیمت گذاری و مقایسه ریسک دم ها با استفاده از مونت کارلو شرطی

کامران آیتی *[آ]، نویده مدرسی [ب]

[آ] دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضیات مالی دانشگاه علامه طباطبایی
[ب] استادیار گروه ریاضیات مالی دانشگاه علامه طباطبایی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
مونت کارلو شرطی
قیمت گذاری اختیار معامله
ریسک دم

2020 MSC:
۲۰۲۰
65C05
91G20
91G30

چکیده

یکی از روشهای متداول برای قیمت گذاری قرارداد های اختیار که بر اساس دارایی های ریسکی مشخص می شوند استفاده از الگوریتم های مونت کارلو می باشد. در این مقاله با استفاده از روش مونت کارلو شرطی، اختیار خرید اروپایی را تحت بهره تصادفی و تلاطم تصادفی قیمت گذاری کرده و کارایی عملیاتی در سرعت الگوریتم و سایر سنجه های بحرانی را با متغیر کنترل مارتینگل و میانگین بهره و تلاطم برای دارایی تصنعی (ساختگی) مقایسه می کنیم. روش علاوه بر قیمت گذاری، ریسک دم ها نسبت به قیمت واقعی مقایسه شده و یک اندازه در الگوریتم به عنوان تفاوت قیمت آنی بازار و قیمت شبیه سازی شده است. رویکرد استفاده از بهره ثابت و تلاطم تصادفی نیز به عنوان حالت خاص در نظر گرفته شده است. از این روش برای قیمت گذاری اختیار معامله که دارایی پایه آنها شاخص سهام بازار بورس اوراق بهادار تهران می باشد استفاده شده است .

۱. مقدمه

مطالعات گذشته نشان می دهند که قیمت گذاری مطالبات مشروط از جمله اختیارهای اروپایی در دو گونه جواب های فرم ـبسته و عددی هستند که با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی صورت می گیرند و همچنین روش تبدیل فوریه به دست می آیند[۴][۳] . در روش هایی که با کمک معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی صورت می گیرند از گسسته سازی زمانی و قیمتی و تقریب ها در هر فاصله زمانی بر اساس روش هایی مانند نیوتن، اویلر، اویلر ماریاما، ذوزنقه و سایر روش های عددی استفاده می شوند [۵] . در این روش ها که بسته به تعداد دارایی پایه و نرخ همگرایی و خطای برشی و مطلق عددی مورد بررسی قرار می گیرند. معمولا این روش ها در بعضی مسائل با افزایش تعداد ابعاد مسئله دارای پیچیدگی محاسباتی بالا می باشند. برای مثال قیمت گذاری سبد سهام های بزرگ با تعداد سهام زیاد و بررسی ریسک بازار تحت تکانش های لحظه ای، زودگذر است. با توجه به آن که زمان در حال گذر است ، بعضی از این روش ها جای خود را به روش های سریعتر ازجمله تبدیل فوروریه داده اند. برای تقریب وتخمین قیمت مشتقه با استفاده از تابع مشخصه تبدیل فوریه به کار گرفته شده است. در این روش وجود تابع مشخصه در بازه های زمانی یا برای هر دارایی پایه به عنوان مبنای محاسبات تقریب یابی امری نابدیهی است. روش جایگزین مونت کارلو به عنوان روشی برای حالاتی که تابع مشخصه غیر قابل دستیابی و یا نرخ همگرایی در روش های عددی نامناسب می باشد به عنوان راه حل جایگزین استفاده می شود [۷][۶] . این روش بر اساس قانون قوی اعداد بزرگ و همگرایی قیمت ها در شبیه سازی مسیرهای نمونه ای به مقدار واقعی ، امکان وارد کردن نرخ های تلاطم و بهره از تابلو قیمت را فراهم می سازد [۸] . استفاده از مونت کارلو شرطی و سایر روش های کاهش دهنده واریانس وخطای محاسباتی به عنوان روشی به منظور افزایش دقت و کاهش خطا و همچنین افزایش دهنده سرعت پردازش بدون اجبار به شبیه سازی های مکرر زیاد را فراهم می نماید [۹] .در این این مقاله هدف پیدا کردن جواب عددی برای قیمت اختیار اروپایی

*سخنران
پست الکترونیک: ka.ayati@gmail.com (کامران آیتی)، navideh.modaresi@atu.ac.ir (نویده مدرسی)

تحت تلاطم تصادفی هستون و بهره تصادفی کاکس اینگرسول راسروی یک دارایی سهام می باشد [۲][۱] .در این راستا بر مبنای مدل بلک شولز مرتون جهت پیدا کردن سبد خودتامین و مقایسه آن با متغیر کنترل مارتینگل و دارایی تصنعی پوشش دهنده از قضیه ای استفاده شده است [۴] . از آن جا که احتمال وقوع زیلن سرمایه گذران در دنباله های حدی توزیع بازدهی ناچیز نیست ،بررسی ریسک دم ها و اثران آن در قیمت گذاری دارایی ها و همچنین مشتقات مالی حائز اهمیت است بر این اساس در این مقاله مدل مقایسه ای را برای ریسک فراتخمین ها وفرو تخمین ها با توجه به مدل های خاص به دست آورده و همچنین با فرض بهره ثابت در بازار ایران روش های معرفی شده را به کار برده و به بررسی ریسک دم ها می پردازیم .در فصل ۲ به معرفی مدل وقیمت گذاری اختیار تحت مدل مارتینگل را بررسی کرده ایم. در فصل ۳ روش مونت کارلو شرطی و متغیرهای کنترل مارتینگل و تابع متغیر کنترل ارائه شده است. نهایتا در فصل ۴ نتایج عددی را بیان کرده و ریسک دم ها مقایسه کرده ایم.

۲. معرفی مدل و قیمت گذاری اختیار

با توجه به این که تلاطم یا نوسان تصادفی $\sigma(t)$ دینامیک قیمت یک دارایی پایه خود رانشان می دهد و همچنین نرخ بهره تصادفی در $\mu(t)$ دینامیک قیمت آن دارایی پایه به مانند میانگین قیمت دارایی خود را ظاهر می سازد، این دو پارامتر دینامیک قیمت دارایی پایه میتواند عددی تعینی یا تابعی از زمان مثلا تابعی تناوبی باشند این مقادیر در هر بازار یا در مدل های پیشرفته تر و دارای حجم مبادلات بالا به صورت اعدادی تصادفی که مقدار خود را از دوفرایند مجزای دینامیک تلاطم تصادفی و دینامیک نرخ بهره تصادفی در نظر گرفته شوند [۱۰][۱۱] .دراین بخش فرض های ثابت روی تلاطم و نرخ بهره در مدل بلک شولز را با یک مدل نرخ بهره تصادفی و تلاطم تصادفی هیبرید جایگزین می کنیم [۱۲] . در فضای ریسک خنثی فرایند دارایی پایه ،$S(t)$ فرایند واریانس تصادفی $Y(t)$، (از تلاطم تصادفی ناشی می شوند) و فرایند نرخ بهره تصادفی $r(t)$ است. فرض بر این است که فرایندهای معرفی شده از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر تبعیت می کنند.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + f(Y(t))dW(t) \tag{۱}$$

$$dY(t) = \mu_Y(t,Y(t)) + \sigma_Y(t,Y(t))dZ_1(t) \tag{۲}$$

$$dr(t) = \mu_r(t,r(t)) + \sigma_r(t,r(t))dZ_2(t) \tag{۳}$$

که $f, \sigma_Y, \sigma_r, \mu_Y, \mu_r$ همه توابع تعینی در ارتباط با مدل مشخص تلاطم تصادفی و نرخ بهره تصادفی هستند و می تواند به وسیله تلاطم تصادفی هستون با مدل نرخ بهره تصادفی هول –وایت یا کاکس اینگرسول راس محاسبه شوند [۱۳] . هم چنین dW, dZ_1, dZ_2 حرکت های براونی همبسته با ماتریس کوواریانس زیر می باشند.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} dW(t)dW(t) & dW(t)dZ_1(t) & dW(t)dZ_2(t) \\ dZ_1(t)dW(t) & dZ_1(t)dZ_1(t) & dZ_1(t)dZ_2(t) \\ dZ_2(t)dW(t) & dZ_2(t)dZ_1(t) & dZ_2(t)dZ_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_{12} \\ \rho_2 & \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} \tag{۴}$$

۲ .۱ . قیمت گذاری مارتینگلی اختیار

در یک قیمت گذاری اختیار اروپایی، فرض می کنیم که تابع عایدی به ازای تاریخ سررسید T ، $h(S(T))$ باشد. برای اختیار خرید اروپایی استاندارد $h(S(T)) = max(S(T) - K, 0)$ که K قیمت توافقی قرارداد می باشد. با قضیه قیمت گذاری مارتینگل قیمت اختیار در لحظه t با $V(t,s,y,r)$ نمایش داده می شود.

$$V(t,s,y,r) = E\left[e^{-\int_t^T r(s)\,ds} h(S(T)) | S(t) = s, Y(t) = y, r(t) = r\right] \tag{۵}$$

امید $E[.]$ در فضای ریسک خنثی محاسبه شده است. در واقع قیمت دارایی اولیه S_0 واریانس اولیه Y_0 و نرخ بهره r_0 قیمت اختیار اروپایی در لحظه شروع می باشند.

$$V(0,S_0,Y_0,r_0) = E\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} h(S(T))\right] \tag{۶}$$

شبیه سازی مونت کارلو میتواند برای محاسبه برمبنای قیمت ابتدای اختیار استفاده شده باشد .برای شروع نیاز داریم تا فرایندهای سه حرکت براونی $W(t), Z_1(t), Z_2(t)$ را شبیه سازی کنیم .برای مسیرهای نمونه ای شبیه سازی شده فرایند $r(t)$ و $S(t)$ و سپس تنزیل عایدی $e^{-\int_0^T r(s)ds}$ آنها را بدست می آوریم [۱۵] . آن گاه از نمونه های عایدی تنزیل یافته میانگین می گیریم و میانگین نمونه رابه عنوان یک براورد از قیمت اختیار استفاده می کنیم. این یک روش مستقیم وسرراست پیشرو اما با سرعت همگرایی نسبتا کم است.

۳. روش مونت کارلو شرطی و متغیر کنترل مارتینگل

حل یک مساله تصادفی با روش مونت کارلو در سه مرحله انجام می شود. نخست باید نمونه های مستقل از پارامترها و توابع تصادفی موجود در صورت مساله تصادفی تولید شوند .سپس باید مساله های تعینی حاصل متناظر با نمونه های تولید شده در مرحله قبل حل شوند.سرانجام لازم است که مجموعه جواب های تعینی برای برآورد ویژگی های جواب مساله تحلیل آماری شوند.[۱۴]

۳ .۱ روش مونت کارلو شرطی

مونت کارلو شرطی برای کاهش واریانس شبیه سازی مونت کارلو به کار می رود و زمانی که یک مسئله قیمت گذاری اختیار اروپایی را در نظر به گیریم یا $E[Y]$ یی را روی یک متغیر تصادفی Y تعریف کنیم آن گاه مونت کارلو یک انتخاب معمول برای مدل سازی است.با این حال برای متغیر تصادفی دیگری مانند X اگر فرم –بسته امید شرطی Yروی X یعنی $E[Y|X]$ را به دانیم. آن گاه این امید شرطی همچنین یک برآوردگر ناااریب $E[Y]$ با توجه به فرمول امید مضاعف. و تجزیه واریانس به نامساوی زیر می رسیم.

$$Var[Y] \geq Var(E[Y|X])$$

نامساوی اخیر نشان می دهد که واریانس امید شرطی $E[Y|X]$ همواره کوچکتر از Y است. مونت کارلو شرطی به این دلیل به این نام نامیده شده است که از امید شرطی متغیر تصادفی $E[Y|X]$ بجای متغیر تصادفی اصلی Y استفاده می کند و میتواند واریانس را به طور مشخص کاهش دهد.

به منظور قیمت گذاری مونت کارلو شرطی برای مسئله (۶) از امید شرطی تنزیل عایدی $e^{-\int_0^T r(s)ds}h(S(T)$ روی بعضی متغیرهای تصادفی دیگراستفاده می کنیم. اولا تجزیه چولسکی [1] از حرکت براونی با توجه به رابطه (۴) انجام شده است و

$$dW(t) = \rho_1 dZ_1 + \rho_2 dZ_2 + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}d\tilde{W}(t) \qquad (۷)$$

که $d\tilde{W}(t)$ مستقل از $dZ_1(t)$ و $dZ_2(t)$ می باشد. سپس فرمول ایتو را به ازای $ln(S(t))$ روی بازه $[t,T]$ به کار می بریم و به رابطه زیر می رسیم

$$dLn(S(t) = (r(t) - \frac{1}{2}f^2(Y(t)))dt + \rho_1 f(Y(t))dZ_1(t) + \rho_2 f(Y(t))dZ_2(t) + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}f(Y(t))d\tilde{W}(t)$$

با انتگرال گیری از هر دو طرف معادله بالا به نتیجه زیر می رسیم.

$$S(T) = S(t)\xi_1(t,T)\xi_2(t,T)e^{-\int_t^T r(s)ds}e^{-\frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{2}\int_t^T f^2(Y(s))ds} + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\int_t^T f(Y(s))d\tilde{W}(s) \qquad (۸)$$

که

$$\xi_1(t,T) = e^{-\frac{\rho_1^2}{2}\int_t^T f^2(Y(s))ds+\rho_1\int_t^T f(Y(s))dZ_1(s)}$$

$$\xi_2(t,T) = e^{-\frac{\rho_2^2}{2}\int_t^T f^2(Y(s))ds+\rho_2\int_t^T f(Y(s))dZ_2(s)}$$

نکته: با توجه به اطلاعات داده شده $[Z_1(s), Z_2(s), t \leq s \leq T]$ ، متغیرهای تصادفی $r(s)(t \leq s \leq T), \xi_1(t,T), \xi_2(t,T)$ تعینی هستند و تنها متغیر تصادفی $\tilde{W}(s)$ را در رابطه (۸) داریم.

$$A(t) = E[e^{-\int_t^T r(s)d(s)}h(S(T))|Z_1(s), Z_2(s), t \leq s \leq T] \qquad (۹)$$

فرض می کنیم که فرمول بلک شولز برای مسئله قیمت گذاری متناظر تحت مدل بلک شولز با تابع عایدی $h(S(T))$ وجود داردیا به عبارت دیگر

$$V^{BS}(t,S,\sigma,r) = E[e^{-r(T-t)}h(S(T))|S(t) = S] \qquad (۱۰)$$

یک فرم بسته دارد. برای مثال برای یک اختیار خرید با فرض اینکه قیمت دارایی از یک فرایند انتشار لگ نرمال با تلاطم ثابت σ و نرخ بهره ثابت r پیروی می کند. به این ترتیب با امیدگرفتن از $\tilde{W}(s)$ در (۹) فرم بسته برای $A(t)$ به صورت زیر داریم.

$$A(t) = V^{BS}(t, S(t), \xi_1(t,T)\xi_2(t,T), \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T)) \qquad (۱۱)$$

[1] Cholesky decomposition

که

$$\bar{\sigma}^{۲}(t,T) = \frac{۱}{T-t}\int_t^T Y(s)ds$$

میانگین واریانس روی بازه $[t,T]$ است و

$$\bar{r}(t,T) = \frac{۱}{T-t}\int_t^T r(s)ds$$

میانگین نرخ بهره روی بازه $[t,T]$. برمبنای این مشاهده مهم و فرمول بلک شولز یک فرمول قیمت گذاری مونت کارلو شرطی برای اختیار اروپایی تحت مدل تصادفی هیبرید وجود دارد که به صورت زیر بدست آمده است.

$$V(t,S(t),Y(t),r(t)) = E[A(t)] \qquad (۱۲)$$

و قیمت اختیار در لحظه شروع عبارت است از

$$V(۰,S_۰,Y_۰,r_۰) = E[A(۰)] \qquad (۱۳)$$

با مقایسه رابطه مونت کارلو در (۶) فقط به شبیه سازی دو منبع تصادفی $Z_۱(t)$ و $Z_۲(t)$ نیازداریم. در این چارچوب مونت کارلو شرطی (۱۳) و میانگین نمونه امید شرطی تنزیل یافته عایدی $A(۰)$ رابه عنوان یک تخمین قیمت اختیار استفاده می کنیم. از جمله فواید شبیه سازی مونت کارلو شرطی، صرفه جویی در زمان [۲] و کاهش واریانس [۳] است.

۲.۳ . متغییر کنترل مارتینگل

برای کاهش واریانس بیشتر در شبیه سازی $A(۰)$ در (۱۳) از متغیرهای کنترل مارتینگل برای ترکیب با شبیه سازی مونت کارلو شرطی استفاده می شود. در ابتدا خلاصه ای از روش متغیر کنترل را بیانمی کنیم.

روش متغیر کنترل در خلال اغلب تکنیک های وسیع و کاربردی و از ساده ترین روش برای استفاده موثر کاهش واریانس می باشد.روش متغیر کنترل از اطلاعات درباره خطاها در برآورد کمیت های ناشناخته برای کاهش خطا در یک برآورد کمیت ناشناخته بهره برداری می کند [۱۳] .

برای نوشتن ایده به صورت شفاف تر ، مسئله محاسبه امید یک متغیر تصادفی V یعنی $E[V]$ را در نظر می گیریم

در روش مونت کارلو نمونه های تصادفی $V_۱, V_۲, ..., V_m$ با توزیع میانگین نمونه ای V را شبیه سازی می کند

$$\bar{V} = \frac{V_۱ + V_۲ + ... + V_m}{m}$$

به عنوان یک برآوردگر می توان $E[V]$ را در نظر گرفت .فرض کنیم که گرفتن خروجی X_i ی متغیر تصادفی دیگر X در حین شبیه سازی V_i آسان بوده و $E[X]$ معلوم باشد. سپس برای هر ضریب ثابت bمی توانیم، برآوردگر متغیر کنترل $E[V]$ را از فرمول زیر محاسبه کرد [۴] .

$$\bar{V}_b = \bar{V} - b[\bar{X} - E[X]]$$

خطای مشاهده شده $\bar{X} - E[X]$ یک کنترل می باشد.برآوردگر کنترل شده $\bar{V}_b$یک برآوردگر نااریب بدیهی است و این واریانس می تواند با ضریب بهینه $b^* = \frac{cov(X,V)}{Var(x)}$ کمینه شود مانند

$$Var(\bar{V}_{b^*}) = (۱ - \rho_{XV}^{۲})Var(\bar{V}).$$

نرخ کاهش واریانس $R^۲$ به عنوان نرخ واریانس برآوردگر کنترل نشده بهینه بر حسب برآوردگر کنترل شده به صورت زیرتعریف می شود [۴] .

$$R^۲ = \frac{Var(\bar{V})}{Var(\bar{V}_{b^*})} = \frac{۱}{(۱ - \rho_{XV}^{۲})})$$

[2] Time-saving
[3] Variance-reduction

قضیه ۱.۳. (نمایش مارتینگل) *: اگر فرایند دارایی پایه معادلات دیفرانسیل تصادفی در روابط (1) تا (3) صدق کنند، قیمت اختیار خرید اروپایی با تابع عایدی $h(s(T))$ از فرمول زیر بدست می آید*

$$e^{-\int_{\circ}^{T} r(t)d(t)}h(S(T)) - V(\circ, S_{\circ}, Y_{\circ}, r_{\circ}) = \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t)V_s dW(t) + \sigma_Y(t, Y(t))V_y dZ_{\text{۱}}(t) + \sigma_r(t, r(t)V_r dZ_{\text{۲}}(t) \quad (۱۴)$$

فرایند X را می توان به صورت انتگرالی زیر نمایش داد.

$$X = \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds}(S(t)f(Y(t)V_s dW(t) + \sigma_Y(t, Y(t))V_y dZ_{\text{۱}}(t) + \sigma_r(t, r(t)V_r dZ_{\text{۲}}(t)$$

سمت چپ رابطه (۱۴) تفاوت بین عایدی تنزیل یافته وقیمت اولیه اختیارو سمت راست مارتینگل صفر X را نشان می دهد. با گرفتن امید شرطی از دو طرف عبارت روی اطلاعات $\{Z_{\text{۱}}(t), Z_{\text{۲}}(t), \circ \le t \le T\}$ ما به عبارت زیر می رسیم.

$$A(\circ) - V(\circ, S_{\circ}, Y_{\circ}, r_{\circ}) = \hat{X} \quad (۱۵)$$

که در آن

$$\hat{X} = E[X|Z_{\text{۱}}(t), Z_{\text{۲}}(t), \circ \le t \le T] \quad (۱۶)$$

$\hat{X}$ یک مارتینگل صفر می باشد و رابطه (۱۵) نشان می دهد که واریانس متغیر تصادفی $A(\circ)$ که در یک شبیه سازی مونت کارلو شرطی استفاده شده است تعینی با مارتینگل صفر می باشد. چون $V(\circ, S_{\circ}, Y_{\circ}, r_{\circ})$ یک مقدار ثابت می باشد. $\hat{X}$ از لحاظ تئوری یک متغیر کنترلی برای شبیه سازی مارتینگل شرطی است . حال با جایگزینی تجزیه چولسکی (۷) در عبارت (۱۶) X داریم

$$X = \rho_{\text{۱}} \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s dZ_{\text{۱}} + \rho_{\text{۲}} \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s dZ_{\text{۲}}$$

$$+ \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} \sigma_Y(t, Y(t)V_y dZ_{\text{۱}} + \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} \sigma_r(t, r(t))V_r dZ_{\text{۲}}$$

$$+ \sqrt{\text{۱} - \rho_{\text{۱}}^{\text{۲}} - \rho_{\text{۲}}^{\text{۲}}} \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} \sigma_Y(t, Y(t)V_y dZ_{\text{۱}} + \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s d\tilde{W}(t).$$

برای محاسبه $\hat{X}$ امید شرطی روی X را با اطلاعات $\{Z_{\text{۱}}(t), Z_{\text{۲}}(t), \circ \le t \le T\}$ بدست می آوریم.عبارت انتگرال در $\hat{X}$ با توجه به استقلال $d\tilde{W}(t)$ از $dZ_{\text{۱}}(t), dZ_{\text{۲}}(t)$ از جمله $d\tilde{W}(t)$ حذف شده وبنابر این داریم

$$\hat{X} = E[\rho_{\text{۱}} \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s dZ_{\text{۱}} + \rho_{\text{۲}} \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s dZ_{\text{۲}}$$

$$+ \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} \sigma_Y(t, Y(t)V_y dZ_{\text{۱}} + \int_{\circ}^{T} e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} \sigma_r(t, r(t))V_r dZ_{\text{۲}} | Z_{\text{۱}}(t), Z_{\text{۲}}(t), \circ \le t \le T].$$

با جابجایی ترتیب انتگرال به عبارت $\hat{X}$ داریم

$$\hat{X} = \rho_{\text{۱}} \int_{\circ}^{T} \hat{f}_{\text{۱}}(t) dZ_{\text{۱}}(t) + \rho_{\text{۲}} \int_{\circ}^{T} \hat{f}_{\text{۱}}(t) dZ_{\text{۲}}(t) + \int_{\circ}^{T} \hat{f}_{\text{۲}}(t) dZ_{\text{۱}}(t) + \int_{\circ}^{T} \hat{f}_{\text{۳}}(t) dZ_{\text{۲}}(t) \quad (۱۷)$$

که درآن

$$\hat{f}_{\text{۱}}(t) = E[e^{-\int_{\circ}^{t} r(s)ds} S(t)f(Y(t))V_s(t, S(t), Y(t), r(t))|Z_{\text{۱}}(s), Z_{\text{۲}}(s), \circ \le s \le t] \quad (۱۸)$$

$$\hat{f}_2(t) = E[e^{-\int_0^t r(s)ds}\sigma_Y(t,Y(t))f(Y(t))V_y(t,S(t),Y(t),r(t))|Z_1(s),Z_2(s),0\le s\le t] \quad (۱۹)$$

$$\hat{f}_3(t) = E[e^{-\int_0^t r(s)ds}\sigma_r(t,r(t))f(Y(t))V_r(t,S(t),Y(t),r(t))|Z_1(s),Z_2(s),0\le s\le t]. \quad (۲۰)$$

چون عبارت دقیقی از $V(t,S(t),Y(t),r(t))$ نداریم، نمی توانیم جواب صریح این مارتینگل کامل صفر را داشته باشیم .یک راه ممکن این است که ما قیمت اختیار $V(t,S(t),Y(t),r(t))$ را با قیمت اختیار بلک شولز با بعضی انتخاب های دقیق تلاطم و نرخ بهره به عنوان پارامتر تقریب بزنیم. به عبارت دیگر ما تقریب های مشتقات و مارتینگل صفر $\hat{X}$ را در نظر می گیریم.

روش ۱:
قیمت بلک شولز اختیار $V^{BS}(t,S(t),f(Y(t)),r(t))$ می باشد و برای تقرب قیمت واقعی استفاده شده است. $V(t,S(t),Y(t),r(t))$ این ایده روی بازه $[t,T]$ و تلاطم و بهره تصادفی $f(Y(s)),r(s)$ تقریب زده شده با حالت شروع $r(t),f(Y(t))$ بنابر این مشتقات $V(t,S(t),Y(t),r(t))$ را در (18) تا (20) به صورت زیر تقریب می زنیم.

$$V_s(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx V_S^{BS}(t,S(t),f(Y(t)),r(t))$$

$$V_y(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx V_\sigma^{BS}(t,S(t),f(Y(t)),r(t))f'(Y(t))$$

$$V_r(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx V_r^{BS}(t,S(t),f(Y(t)),r(t))$$

به طور مشابه با استفاده از فرمول ایتو برای $dLn(S(t))$ (۸) روی بازه $[0,t]$ داریم

$$S(t) = S(0)\xi_1(0,t)\xi_2(0,t)e^{\int_0^t r(s)ds}e^{-\frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{2}\int_0^t f^2(Y(s))ds} + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\int_0^t f(Y(s))d\tilde{W}(s) \quad (۲۱)$$

که در آن

$$\xi_1(t,T) = e^{-\frac{\rho_1^2}{2}\int_t^T f^2(Y(s))ds+\rho_1\int_t^T f(Y(s))dZ_1(s)}$$

$$\xi_2(t,T) = e^{-\frac{\rho_2^2}{2}\int_t^T f^2(Y(s))ds+\rho_2\int_t^T f(Y(s))dZ_2(s)}$$

می نویسیم که جزء $e^{-\frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{2}\int_0^t f^2(Y(s)ds+\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}}$ در (۲۱) یک مارتینگل نمایی است که امید آن برابر یک می باشد. به این ترتیب امید شرطی $s(t)$ با اطلاعات $\{Z_1(s),Z_2(s),0\le s\le t\}$ را محاسبه می کنیم.

$$\hat{S}(T) = E[S(t)|Z_1(s),Z_2(s)0\le s\le t] = S(0)\xi_1(0,t)\xi_2(0,t)e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (۲۲)$$

و با استفاده از مشتق های تقریب زده شده و جایگزینی $S(t)$ با $\tilde{S}(t)$ در (18) تا (20) مقادیر تقریبی به دست می آیند.

$$\hat{f}_1(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\hat{S}(t)f(Y(t))V_S^{BS}(t,\hat{S}(t),f(Y(t)),r(t)) \quad (۲۳)$$

$$\hat{f}_2(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\sigma_Y(t,Y(t))V_\sigma^{BS}(t,\hat{S}(t),f(Y(t)),r(t))f'(Y(t)) \quad (۲۴)$$

$$\hat{f}_3(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\sigma_r(t,r(t))V_r^{BS}(t,\hat{S}(t),f(Y(t)),r(t)) \quad (۲۵)$$

به عبارت دیگر ابتدا متغیر کنترل مارتینگل را در نظر می گیریم.

$$\hat{X}_1 = \rho_1\int_0^T \hat{f}_1(t)dZ_1(t) + \rho_2\int_0^T \hat{f}_1(t)dZ_2(t) + \int_0^T \hat{f}_2(t)dZ_1(t) + \int_0^T \hat{f}_3(t)dZ_2(t) \quad (۲۶)$$

و آن را متغیر کنترل مارتینگل ۱ می نامیم. در واقع برای حساب کردن انتگرال در $\hat{X}_1$ نیاز به محاسبه مسیر شبیه سازی $\{Z_1(t), Z_2(t)\}$ داریم که جزئیات بیشتر در آزمون های عددی ارائه شده است .

روش ۲:

قیمت بلک شولز اختیار $V(t,s(t),Y(t),r(t))$ است که برای تقریب $V^{BS}(t,S(t),f(E[Y(t)]),E[r(t)])$ استفاده شده است. این ایده روی بازه $[t,T]$ تلاطم تصادفی $f(Y(s))$ به ازای $(t \le s \le T)$ و نرخ بهره تصادفی $r(s)$ می باشد که با امید مقدار اولیه $f(E(Y(t)))$و $E[r(t)]$ در (۱۸)-(۲۰) می تواند همانند فرمول زیر تقریب زده شود

$$V_s(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx V_s^{BS}(t,S(t),f(E[Y(t)]),E[r(t)])$$
$$V_y(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx 0$$
$$V_r(t,S(t),Y(t),r(t)) \approx 0.$$

در این رویکرد امید های شرطی $\hat{f}_2(t),\hat{f}_3(t)$ تقریبا صفر می باشند و جایگزین $S(t)$ و $\hat{S}(t)$ سپس $\hat{f}_1(t)$ در ادامه با فرمول زیر تقریب زده شده است

$$\tilde{\hat{f}}_1(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\hat{S}(t)f(Y(t))V_s^{BS}(t,\hat{S}(t),f(E[Y(t)]),E[r(t)]) \quad (۲۷)$$

حال متغیر کنترل مارتینگل دیگری را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\tilde{X}_2 = \rho_1 \int_0^T \tilde{\hat{f}}_1(t)dZ_1(t) + \rho_2 \int_0^T \tilde{\hat{f}}_1(t)dZ_2(t). \quad (۲۸)$$

و آن را متغیر کنترل مارتینگل ۲ می نامیم.
به وضوح روش ۱ بسیار پیچیده تر وزمان برتر از روش ۲ است.از آنجایی که روش۱ مشتق ها را با توجه به تلاطم و نرخ بهره میگیرد انتظار داریم استقامتی تر باشد وشتاب بیشتر، سریع تر و موثر در محیط های مختلف داشته باشد که در فصل چهارم به آن اشاره شده است.

۳.۳ . *متغیر کنترل تابع*

به عنوان یک کنتراست استفاده کردن ایده مطرح شده در مقاله را می توانیم با متغیرکنترل دیگر برای مدل تصادفی هیبرید بسازیم. فرایند قیمت دارایی تصنعی را در نظر بگیرید که در دینامیک زیر صدق کند.

$$\frac{d\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t)} = \tilde{r}(t)dt + \tilde{\sigma}(t)dW(t)$$

در آن $\tilde{r}(t),\tilde{\sigma}(t)$ توابع تعینی هستند . اولین دو گشتاور قیمت دارایی پایه قرار می دهیم $E[\tilde{S}(t)] = E[S(t)], E[\tilde{S}^2(t)] = E[S^2(t)]$ و راه حل $e^{-\int_0^T r(s)ds}h(S(T)]$ است $\tilde{r}(t) = E[r(t)], \tilde{\sigma}^2(t) = E[f^2(Y(t))]$ $e^{-\int_0^T r(s)ds}h(\tilde{S}(T)]$ را به عنوان یک متغیر کنترل برای در نظر می گیریم و

$$E[e^{-\int_0^T \hat{r}(t)dt}h(\hat{S}(T)] = V^{BS}(t,S_0,\tilde{\sigma},\tilde{r})$$

که در آن

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\sigma}^2(t)dt$$

ومیانگین واریانس روی بازه $[0,T]$به صورت

$$\tilde{r} = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{r}(t)dt$$

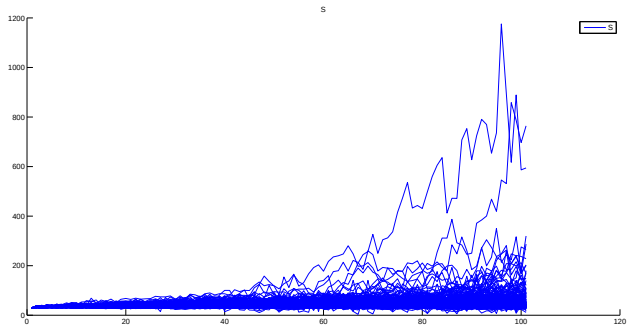
است. این روش را تابع متغیر کنترل می نامیم.

۴. تحلیل عددی

درآزمون های عددی بازه زمانی را به N قسمت مساوی تقسیم می کنیم و می نویسیم $\Delta t = \frac{T}{N}$. در روش مونت کارلو سنتی مقادیر اولیه را S_0, Y_0, r_0در نظر می گیریم و یک طرح گسسته سازی برش اویلر برای شبیه سازی فرایند تصادفی به ازای k=۰،۱،....،N-۱ به صورت زیر است

$$S(t_{k+1}) = S(t_k)e^{(r(t_k)^+ - \frac{1}{2}Y(t_k)^+)\Delta t + \sqrt{Y(t_k)^+}\sqrt{\Delta t}(\rho_1 Z_{1,k+1} + \rho_2 Z_{2,k+1} + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\tilde{Z}_{k+1})} \quad (۲۹)$$

همانطور که در تصویر (۱) مشاهده می کنید شبیه سازی مسیرهای نمونه ای دارایی پایه انجام شده است.



شکل ۱: مسیرهای قیمت سهم بر اساس مدل هندسی بروانی

$$Y(t_{k+1}) = Y(t_k)) + a_Y(\theta_Y - Y(t_k)^+)\Delta t + \sigma_Y\sqrt{Y(t_k)^+}\sqrt{\Delta t}Z_{1,k+1} \quad (۳۰)$$

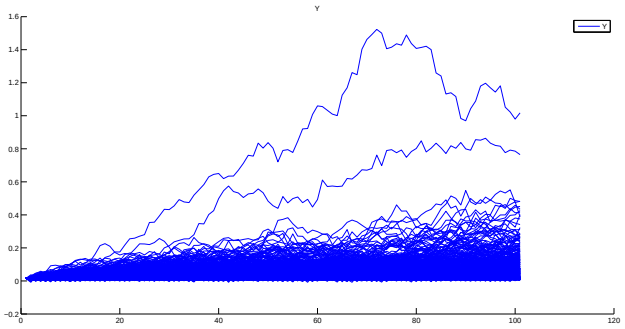
در تصویر (۲) شبیه سازی مسیرهای نمونه ای تلاطم های تصادفی با پارامترهای تعریف شده ترسیم شده است.

$$r(t_{k+1}) = r(t_k)) + a_r(\theta_r - r(t_k)^+)\Delta t + \sigma_r\sqrt{r(t_k)^+}\sqrt{\Delta t}Z_{2,k+1} \quad (۳۱)$$

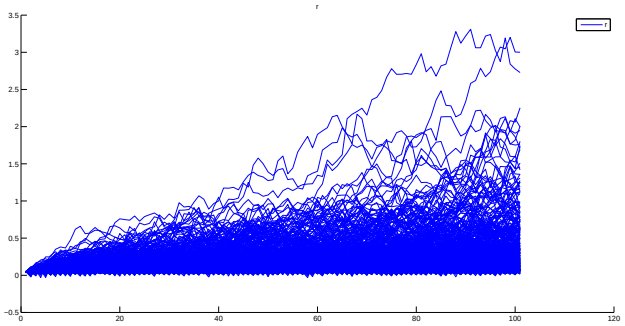
شبیه سازی مسیرهای نمونه ای بهره های تصادفی با پارامترهای اولیه مطابق شکل (۳) ترسیم شده است.
در این نمایش $x^+ = max(x,0)$ و $\tilde{Z}_k, Z_{1,k}, Z_{2,k}(k = 1,2,....,N)$ متغیرهای مستقل و دارای توزیع یکنواخت استاندارد نرمال هستند.
برای متغیر های کنترل مارتینگل $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ آنها در ادامه شبیه سازی شده می تواند باشد

$$\hat{S}(t_{k+1}) = \hat{S}(t_k)e^{-\frac{\rho_1^2}{2}Y(t_k)^+\Delta t + \rho_1\sqrt{Y(t_k)^+}\sqrt{\Delta t}Z_{1,k+1}}e^{-\frac{\rho_2^2}{2}Y(t_k)^+\Delta t + \rho_2\sqrt{Y(t_k)^+}\sqrt{\Delta t}Z_{2,k+1}}e^{r(t_k)^+\Delta t}$$

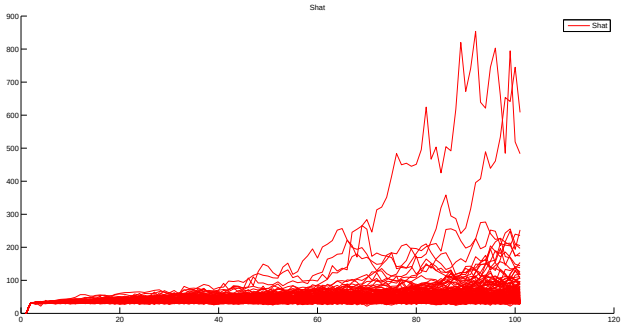
شبیه سازی مسیرهای نمونه ای برآورد قیمت سهم در شکل (۴) ترسیم شده است.



شکل ۲: مسیرهای تلاطم تصادفی بر اساس مدل هستون



شکل ۳: مسیر های بهره تصادفی بر اساس مدل کاکس اینگرسول راس

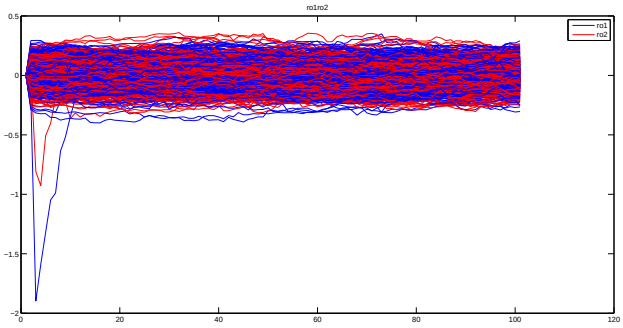


شکل ۴: مسیرهای نمونه ای سهم با روش بلک شولز معادل در متغیر کنترل مارتینگل

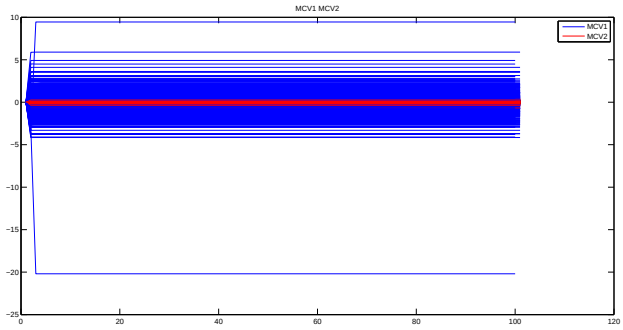
$$\tilde{X}_1(t_{k+1}) = \tilde{X}_1(t_k)(\rho_1 \tilde{f}_1(t_k) + \tilde{f}_2(t_k))\sqrt{\Delta t} Z_{1,k+1} + (\rho_2 \tilde{f}_1(t_k) + \tilde{f}_3(t_k))\sqrt{\Delta t} Z_{2,k+1}$$

$$\tilde{X}_2(t_{k+1}) = \tilde{X}_2(t_k) + \rho_1 \tilde{\tilde{f}}_1(t_k)\sqrt{\Delta t} Z_{1,k+1} + \rho_2 \tilde{\tilde{f}}_1(t_k)\sqrt{\Delta t} Z_{2,k+1}$$

شبیه سازی مسیرهای نمونه ای همبستگی های نمونه ای شکل (۵) و متغیر های کنترل شکل (۶) ترسیم شده است .



شکل ۵: همبستگی متغیرهای تلاطم و بهره تصادفی در مسیرهای شبیه سازی

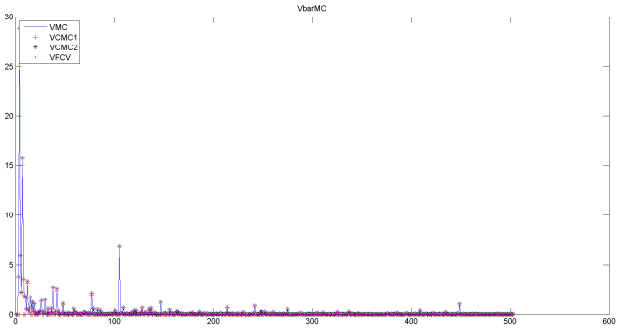


شکل ۶: متغیرهای کنترل مارتینگل یک و دو

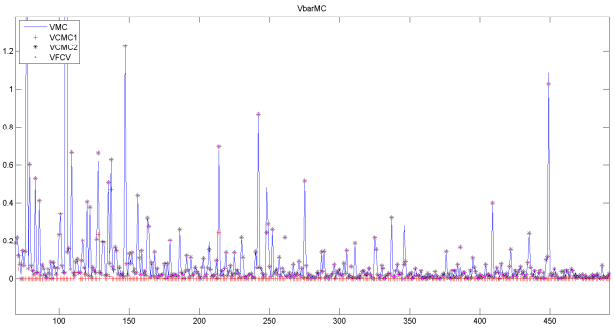
با مقادیر اولیه $\tilde{S}(۰) = S(۰) = ۰$ همچنین از متغیرهای $\tilde{X}_۱(۰) = ۰, \tilde{X}_۲(۰) = ۰$ به عنوان متغیر های کنترل $\tilde{X}_۱ = \tilde{X}_۱(t_N), \tilde{X}_۲ = \tilde{X}_۲(t_N)$ استفاده می کنیم .

در این مقاله با توجه به بهبود عملکرد واستواری روش مونت کارلو شرطی با استفاده از متغیر کنترل مارتینگل ۱ (۷) مشاهده شده است که افزایش قیمت محاسبه شده در اثر دقت واستواری بیشتر روش می باشد و روش متغیر کنترل مارتینگل ۲ (۸) در مقایسه با روش قبل دارای برآورد بیشتر قیمت می باشد. همچنین با توجه به سنجه های بحرانی $R۱, R۲, R۳$ که در شکل (۹) مشاهده می شود مونت کارلو شرطی به علت استواری در مسیرهای نمونه ای دارای مقدار R بیشتری می باشد و دو روش دیگر مقدار R کمتری دارند که به مفهوم استواری کمتر و شتاب بیشتر در سرعت الگوریتم متغیر کنترل مارتینگل ۲ نسبت به متغیر کنترل مارتینگل ۱ می باشد . همچنین میانگین ارزش سبد اختیار با استفاده از روش های گوناگون در شکل (۱۰) نمایش داده شده است و روش ها در زمان بالا به قیمت واحد متغیر کنترل مارتینگل ۲ میل می نماید و روش ۲ دارای ارزش بهبود برآورد قیمت اختیار اروپایی نسبت به سایر روش ها می باشد.

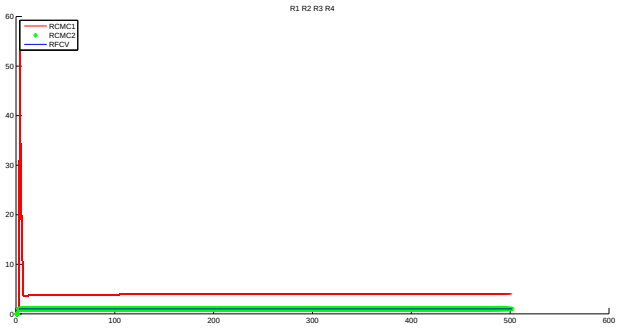
همانطور که مشاهده می شود در شکل (۵)همبستگی بین مسیرهای تلاطم تصادفی و بهره تصادفی باقیمت سهم دارای مقادیر متفاوت بوده و این نتایج حاصل شده است بالطبع در حالتیکه همبستگی مثبت یا منفی به صورت ثابت در مسیرهای نمونه ای ظاهر شود نتایج ملموس ساده تری از مسئله خواهد بود ضمن اینکه در این مقاله همبستگی بین تلاطم تصادفی وبهره تصادفی صفر در نظر گرفته شده است که برای محاسبه میتوان مقدار آنرا در ماتریس تجزیه چولسکی غیر صفر قرارداد و به نتایج مشابه خواهیم رسید. در شکل (۸) روش های متعیر کنترل ماریتنگل ۱ و ۲ در دو رنگ در مسیرها شبیه سازی شده اند که میانگین آنها حول نقطه صفر با احتمال ۱ بوده است و به این نکته اشاره می کند که قیمت بلک شولز معادل و تلاطم معادل محاسبه شده پارامتری مناسب جهت کنترل کردن وپارامتر برآورد کنترلی قیمت اختیار در دو حالت قیمت سهم S و $\hat{S}$ می باشد.



شکل ۷: مسیرهای قیمت سبد معادل بر اساس ۴ روش محاسبه شده



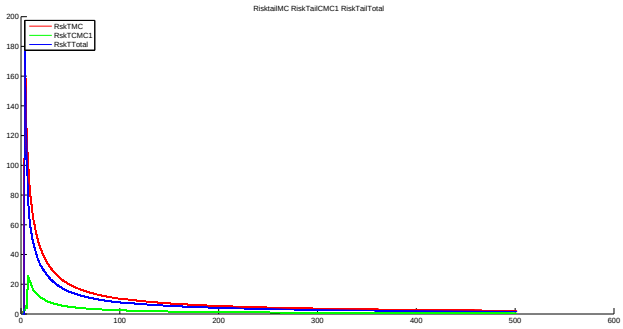
شکل ۸: بزرگنمایی قیمت برآورد شده در ۴ روش



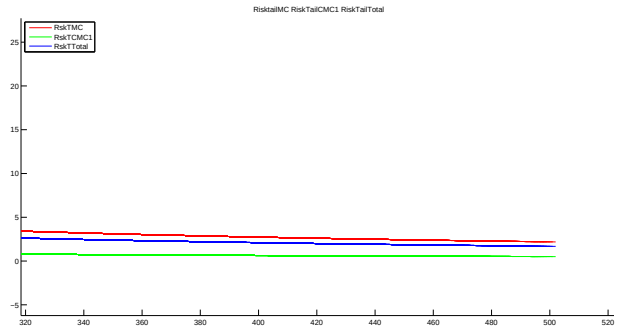
شکل ۹: مقایسه سنجه های بحرانی کارایی سرعت والگوریتمی پردازش

۴ .۱ . *مقایسه با روش مونت کارلوستنی*

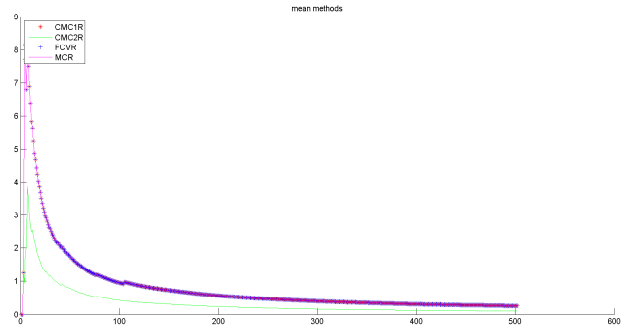
ابتدا تاثیر شتاب شبیه سازی مونت کارلو شرطی با مونت کارلو سنتی را بررسی می کنیم. تعداد گام های زمانی را =۱۰۰N در نظر می گیریم. تعداد شبیه سازی =۱۰۰۰،۱m مرتبه و پارامتر $S_0 = k = ۳۰$ ، $a_Y = a_r = ۲$ و $\theta_Y = ۰/۰۱$ و $\theta_r = ۰/۰۵, \sigma_Y = ۰/۰۵, \sigma_r = ۰/۱, T =$ ۱, $Y_0 = ۰/۰۱۵, r_0 = ۵٪$. با توجه به آن که $\rho_1^2 + \rho_2^2 \leq ۱$ نتایج عددی با ضرایب متفاوت همبستگی هستند .در مورد مدل ریسک تفاوت قیمت اختیار با روش مونت کارلو شرطی ومونت کارلو سنتی ابتدا پس از شبیه سازی هر مسیر نمونه ای میانگین، واریانس وانحراف معیار هر مسیر نمونه ای رامحاسبه و سپس همه مسیر های نمونه ای فاصله انحراف از میانگین قیمت اختیار در دوحالت مونت کارلو شرطی و سنتی به عنوان ارزش در معرض خطر (Var) از معادل مشابهش کسر میشود. سری بدست آمده به ازای $۰ \leq \alpha \leq ۱$ نسبت به مقادیر نهایی شبیه سازی



شکل ۱۰: نمایش سری اختلاف ریسک دم ها در مسیرهای شبیه سازی



شکل ۱۱: بزرگنمایی ریسک دم ها و اختلاف آنها در انتهای شبیه سازی



شکل ۱۲: مقایسه سنجه های میانگین ارزش سبد در مسیرهای نمونه ای در روش های مختلف

می شود. همانطور که در تصویر مشاهده می شود (۱۰) که حد دم ریسک ها در% ۰.۹۵ به صفر میل می نماید و روش مونت کارلو شرطی ریسک کمتری را در طول مسیر ودر دم ها برآورد می نماید.

مراجع

[1] Menachem Abudy and Yehuda Izhakian. Pricing stock options with stochastic interest rate. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, 1(3):250–277, 2013.

[2] Leif BG Andersen. Efficient simulation of the heston stochastic volatility model. *Available at SSRN 946405*, 2007.
[3] Nomesh Bolia, Sandeep Juneja, and Paul Glasserman. Function-approximation-based importance sampling for pricing american options. in *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, 2004.*, volume 1. IEEE, 2004.
[4] Phelim Boyle, Mark Broadie, and Paul Glasserman. Monte carlo methods for security pricing. *Journal of economic dynamics and control*, 21(8-9):1267–1321, 1997.
[5] Phelim P Boyle. Options: A monte carlo approach. *Journal of financial economics*, 4(3):323–338, 1977.
[6] Mark Broadie and Özgür Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations research*, 54 (2):217–231, 2006.
[7] Peter Carr and Dilip Madan. Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of computational finance*, 2(4):61–73, 1999.
[8] John C Cox, Jonathan E Ingersoll Jr, and Stephen A Ross. A theory of the term structure of interest rates. in *Theory of valuation*, pages 129–164. World Scientific, 2005.
[9] Duy-Minh Dang, Kenneth R Jackson, and Mohammadreza Mohammadi. Dimension and variance reduction for monte carlo methods for high-dimensional models in finance. *Applied Mathematical Finance*, 22(6):522–552, 2015.
[10] Duy-Minh Dang, Kenneth R Jackson, and Scott Sues. A dimension and variance reduction monte-carlo method for option pricing under jump-diffusion models. *Applied Mathematical Finance*, 24(3):175–215, 2017.
[11] Kemal Dinçer Dingeç and Wolfgang Hörmann. Control variates and conditional monte carlo for basket and asian options. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(3):421–434, 2013.
[12] Jean-Pierre Fouque and Tracey Andrew Tullie. Variance reduction for monte carlo simulation in a stochastic volatility environment. *Quantitative Finance*, 2(1):24, 2002.
[13] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer, 2004.
[14] Lech A Grzelak and Cornelis W Oosterlee. On the heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2 (1):255–286, 2011.
[15] Lech A Grzelak and Cornelis W Oosterlee. On cross-currency models with stochastic volatility and correlated interest rates. *Applied Mathematical Finance*, 19(1):1–35, 2012.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–295، صص. ۴۰۲–۴۰۴

نگاهی به نظریه بازی‌ها در اقتصاد

سامان ستاری*،آ

آفارغ التحصیل دکتری ریاضی، تهران، موسسه ژیوار

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
نظریه بازی‌ها ۱
انواع بازی ۲
تعادل ۳

2020 MSC:
34B16
34B40
65M70

چکیده

نظریه بازی‌ها، نظریه‌ای ریاضی است که به بررسی مشخصه‌های کلی رقابت‌ها می‌پردازد و به دنبال بهترین دستاورد برای هر کدام از شرکت کنندگان است. نظریه بازی‌ها هم‌اکنون در بسیاری از علوم مانند اقتصاد، مدیریت، سیاست، مهندسی، جامعه‌شناسی و روان‌شناسی کاربردهای فراوانی دارد. در این مقاله به بررسی مفهوم‌های اصلی تشکیل دهنده نظریه بازی‌ها می‌پردازیم.

۱. مقدمه

نظریه بازی‌ها در سال ۱۹۲۸ توسط جان فُن نیومن پایه‌گذاری شد و در سال ۱۹۴۴ اقتصاددانی به نام اسکار مورگن استرن مفاهیم اولیه را بسط داد و کاربرد این نظریه را در علم اقتصاد تشریح کرد. نظریه بازی علم تصمیم‌گیری است. در همه جوامع تصمیم‌گیرندگان دائماً در تعامل هستند. گاهی تعاملات همکاری جویانه و گاهی رقابتی هستند و در اکثر موارد تلفیقی از این دو می‌باشند. هر رقیب در پی بهترین دستاورد است و موقعیتش وابسته است به راهبردهایی که دیگر رقبا انتخاب می‌کنند. در بازی‌های موسوم به «بازی با حاصل‌جمع صفر»، منافع بازیکن‌ها به طور کامل با یکدیگر در تعارض هستند، به طوری که بهره‌ای که یک شخص کسب می‌کند همواره معادل ضرر فرد دیگر است. بازی‌هایی که در آن‌ها همه بازیکنان ممکن است به منفعت دست یابند «بازی با حاصل‌جمع مثبت» و بازی‌هایی که در آن‌ها همه بازیکنان ممکن است به ضرر دست یابند «بازی با حاصل‌جمع منفی» گفته می‌شوند که مرسوم‌ترند.
نظریه بازی یعنی به کارگیری مدل‌های ریاضی در تجزیه و تحلیل رفتار حاکم بر موقعیتی استراتژیک برای اخذ بهترین تصمیم در مورد موجوداتی که منطقی فکر می‌کنند. این نظریه در ابتدا برای درک مجموعه بزرگی از رفتارهای اقتصادی به عنوان مثال نوسانات شاخص سهام در بورسِ اوراق بهادار و اُفت و خیز بهای کالاها در بازار مصرف کنندگان ایجاد شد. تحلیل پدیده‌های گوناگون اقتصادی و تجاری نظیر پیروزی در یک مزایده، معامله، داد و ستد، شرکت در یک مناقصه، از دیگر مواردی است که نظریه بازی در آن نقش ایفا می‌کند. در این مقاله مفاهیم اساسی تشکیل دهنده نظریه بازی‌ها را بررسی می‌کنیم و سپس در قالب چند مثال، کاربرد این نظریه در علم اقتصاد را مطالعه می‌کنیم.

۲. انواع بازی‌ها

انواع بازی‌ها را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد:
۱. بازی‌های متقارن و نامتقارن:

*سخنران
پست الکترونیک: saman.satari84@gmail.com (سامان ستاری)

بازی متقارن به بازی گفته می‌شود که هر استراتژی تنها به سایر استراتژی‌ها وابسته است و از این‌که چه بازیکنی این استراتژی را انتخاب می‌کند مستقل است. جدول این بازی‌ها معمولاً یک ماتریس متقارن ۲ × ۲ می‌باشد. به طور مثال اگر دو راننده با سرعت به سوی همدیگر در حرکت باشند و بازنده آن است که اول از مسیر منحرف شود (بازی ترسوها) یک بازی متقارن است. حالت‌های به وجود آمده عبارت است از: الف) یک نفر می‌ترسد و منحرف می‌شود و دیگری برنده می‌گردد. ب) هر دو منحرف می‌شوند و می‌بازند. پ) هیچ‌کدام منحرف نمی‌شوند و هر دو برنده می‌شوند (با خطر مالی و جانی).

۲. بازی‌های با مجموع صفر و غیرصفر:

بازی‌های مجموع صفر، ارزش بازی در طول بازی ثابت می‌ماند و کاهش یا افزایش پیدا نمی‌کند، یعنی برد یکی به معنای باخت دیگری است. در ابتدا نظریه بازی معادل با بازی مجموع صفر بود. رقابت دو شرکت بر سر سهم بازار و یا رقابت دو دانشگاه برای جذب دانشجوی بیشتر در یک شهر مثال‌هایی از بازی‌های مجموع صفر هستند. در بازی‌های غیر صفر، راهبردی وجود دارد که برای همه بازیکنان مفید است. بسیاری از موقعیت‌های اقتصادی مجموع غیر صفر هستند، به این دلیل که کالاهای ارزشمند و خدمات می‌توانند تولید شوند، از بین روند و یا به شکل نامناسبی تخصیص یابند که تمام این موارد سود یا ضرری به تعداد زیادی سرمایه‌گذار وارد می‌کند. برای بررسی مثالی مبسوط‌تر از بازی مجموع صفر، به این مثال دقت کنید: طبیعت یا شرایط اقلیمی را می‌توان به عنوان رقیب کشاورز در یک بازی دو نفره با جمع صفر در نظر گرفت که می‌تواند بازده مزرعه را کاهش دهد در این صورت تصمیم‌گیری برای انتخاب برنامه کشت مزرعه جهت افزایش مطلوبیت کشاورز تحت شرایط عدم حتمیت است. بدین منظور سه حالت بد، خوب و عالی برای طبیعت فرض می‌شود. همچنین فرض می‌شود که کشاورز در برنامه کشت مزرعه خود گندم، جو و یا چغندر قند را انتخاب می‌کند. گندم در شرایط بد ۴۰، در شرایط خوب ۸۰ و در شرایط عالی ۱۰۰ خواهد بود. همچنین جو در شرایط بد ۳۰، در شرایط خوب ۸۵ و در شرایط عالی ۹۰ و چغندر قند در شرایط بد ۵۰، در شرایط خوب ۷۰ و در شرایط عالی ۹۵ خواهد بود. بر اساس این روش کشاورز از معیار maximin و بازیکن دوم (طبیعت) از معیار minimax استفاده می‌کند. در این حالت هر یک از بازیکنها کمترین بازده تعیین شده در هر استراتژی را مشخص می‌کند سپس آن استراتژی را انتخاب می‌کند که بهترین نتایج را از بین مقادیر حداقل بازده بدست می‌آورد. بر اساس این روش استراتژی مناسب برای کشاورز این است که محصولی را انتخاب کند که بیشترین بازدهی را در بین بدترین نتایج برای کشاورز داشته باشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که کشاورز استراتژی سوم یعنی کشت چغندر قند را انتخاب کند. همچنین استراتژی مناسب برای طبیعت این است که شرایطی را انتخاب کند که کمترین زیان را در بین بدترین نتایج برای طبیعت داشته باشد (انتخاب کمترین زیان در بین مقادیر حداکثر زیان در هر استراتژی طبیعت). بنابراین طبیعت استراتژی اول خود یعنی شرایط بد اقلیمی را انتخاب می‌کند. مقدار بازده تعیین شده برای بازی ۵۰ می‌باشد که ارزش بازی نامیده می‌شود.

۳. بازی‌های شانسی و غیرشانسی:

بازی‌های شانسی (تصادفی) بازی‌هایی هستند که عناصر تصادفی مانند پرتاب سکه در آن‌ها وجود دارند. بازی‌های غیرشانسی (غیرتصادفی) بازی‌هایی هستند که راهبردهای آن‌ها صرفاً منطقی می‌باشند. بازی شطرنج از این دسته است.

۳. بازی‌های با آگاهی کامل و بدون آگاهی کامل:

بازی‌های با آگاهی کامل به بازی‌هایی اطلاق می‌شود که در هر لحظه تمام بازیکنان می‌توانند از تمامی ترکیب بازی مطلع باشند، مانند بازی شطرنج. از سوی دیگر در بازی‌های بدون آگاهی کامل ظاهر و ترکیب کل بازی برای بازیکنان پوشیده است، مانند بازی‌هایی که با ورق انجام می‌گیرد. که عناصر تصادفی مانند پرتاب سکه در آن‌ها وجود دارند. بازی‌های غیرشانسی (غیرتصادفی) بازی‌هایی هستند که راهبردهای آن‌ها صرفاً منطقی می‌باشند. بازی شطرنج از این دسته است.

۳. بازی‌های مشارکتی و غیر مشارکتی:

در بازی‌های مشارکتی فرض بر این است که بازیکنان می‌توانند با هم ارتباط داشته باشند ولی این فرض در بازی‌های غیرمشارکتی وجود ندارد. بازی‌های ترکیبی نیز وجود دارند که در آن بازیکنان می‌توانند با هم به صورت موقت ارتباط داشته باشند ولی بازی آن‌ها غیرمشارکتی انجام می‌شود.

۳. بازی‌های همزمان و ترتیبی:

در بازی‌های همزمان هر دو بازیکن با هم بازی می‌کنند و یا حتی اگر همزمان نیز نباشد تا زمانی که یک بازیکن بازی نکرده باشد از تصمیم بازیکن دیگر خبر نخواهد داشت که همان بازی همزمان را تداعی می‌کند. در حالت ترتیبی (بازی پویا) حرکت شرکت کنندگان پیرو ترتیب و نظم خاصی است. شکل بازنمایی بازی همزمان صورت ماتریسی و بازی ترتیبی را به صورت درختی (توسعه یافته) نمایش می‌دهند.

۳. مفهوم‌های اصلی تشکیل دهنده نظریه بازی‌ها

عقلانیت: اولین فرض نظریه بازی این است که بازیکنان عقلانی رفتار می‌کنند. عقلانیتی که در این‌جا مد نظر است بر پایه نظریه انتخاب عقلانی است که شکل خاص آن به صورت عقلانیت ابزاری است. این نظریه به صورت مختصر می‌گوید هر بازیکن بهترین انتخابش را از میان انتخاب‌های موجود و ممکن برای او و مطابق با ترجیحات خود انجام می‌دهد. در نظریه بازی‌ها، مدل مطلوبیت انتظاری مورد استفاده قرار می‌گیرد، نوعی فردگرایی حاکم است که دارای دو جزء است: وجود مجموعه‌ای از همه گزینه‌های موجود و در دسترس برای بازیگر و ترجیحات بازیگر در ارتباط با گزینه‌هایش. بازیگران بر اساس این مدل پیگیر حداکثر ساختن منافع شخصی خود هستند. اذعان به وجود عقلانیت همه بازیکنان در بازی به صورت یک آگاهی عمومی در اختیار همه قرار دارد. در چنین مدلی بازیکنان رفتار خود را با توجه به عدم اطمینانی که در بروز نتایج وجود دارد و لزوم پرهیز از ریسک‌های مخاطره امگیز انتخاب می‌کنند.

راه حل: راه حل در نظریه بازی با مفهوم و اصطلاح فنی تعادل نشان داده می‌شود. این فرضیه می‌گوید که در تمامی بازی‌ها حداقل یک تعادل وجود دارد. این فرضیه در ابتدا توسط جان فون نیومن مطرح شد و سپس به وسیله جان نش توسعه و شهرت یافت و از آن پس به تعادل نش معروف شد. مفهوم تعادل نش کاملاً با فرضیه عقلانیت مرتبط است، یعنی این که در بازی‌های عقلانیت که به صورت آگاهی عمومی در اختیار همه بازیگران قرار دارد باعث پیدایش تعادل می‌شود. در حالت تعادل، بازیکنان با حالت آگاهی از پیامدهای حاصل از انتخاب گزینه‌های خود و باور درست نسبت به انتخاب دیگر بازیکنان بهترین انتخاب را انجام داده و به حالتی دست می‌یابند که حرکت از آن به حالت دیگر که متضمن انتخاب‌های پایین‌تر نسبت به سطح بهینه است موجب می‌شود که پیامد هر بازیکن نسبت به حالت تعادل کاهش یابد.

۴. نتیجه‌گیری

نظریه بازی‌ها در طول یک قرن شاهد پیشرفت‌های زیادی بوده و وارد عرصه عملیاتی در حوزه‌های موضوعی گوناگون شده است. در شرایط تعارض منافع که اکثر مسائل و کنش‌های اقتصادی در این شرایط قرار می‌گیرند، به جرأت می‌توان گفت که دیگر جایی برای مطلق‌گرایی وجود ندارد و اصرار برای به دست آوردن شرایط آرمانی اکثراً بدترین استراتژی پیش رو خواهد بود. لذا علم اقتصاد نیز مانند سایر علوم، نیازمند درک عمیق و استفاده صحیح از نظریه بازی‌ها و نقطه تعادل نِش می‌باشد، که به نظر این‌جانب، همکاری ریاضی‌دانان و اقتصاددانان می‌تواند در این زمینه شکوفایی‌های علمی و اقتصادی به بار بیاورد.
در ادامه مراجع [۱–۳] آورده شده‌اند.

مراجع

[۱] طاهرخوانی، ستاره. درآمدی بر نظریه بازی. *فصل‌نامه سیاست خارجی*، ۱:۲۱۹–۲۴۲، ۱۳۹۰.
[۲] رئوفینیا، مرجان. توسعه تئوری مدل بازی‌های پویا به منظور تحلیل رقابت در ساختار بازی‌های انحصاری چندجانبه. *چشم‌انداز مدیریت صنعتی*، ۳۱:۶۳–۹۴، ۱۳۹۷.
[۳] یگانگی دست‌گردی، وحید. تئوری بازی‌ها. *دانش‌نامه اقتصاد شهر*، ۸:۱۳۴–۱۴۱، ۱۳۸۹.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–297، صص. ۴۰۵–۴۱۲

مدلسازی ادعاهای خسارت دریافتی در بیمه با استفاده از فرایندهای هاوکس

نسترن زنگنه‌پور*، نویده مدرسی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
فرایند هاوکس
مدل ریسک
احتمال ورشکستگی
تقریب انتشار
ارزش در معرض خطر شرطی
بازار ناکامل

2020 MSC:
60G55
91B05
91G70
97M30

چکیده

یکی از سوالات اساسی در ادبیات بیمه درمورد چگونگی مدلسازی فرایندهای تصادفی است که ادعاهای خسارت دریافتی (مطالبات) را توصیف می‌کنند و شرکت‌های بیمه درصدد کاهش ریسک و افزایش سرمایه‌ی خود در طول زمان می‌باشند. بنابراین ما به مدلی مبتنی بر فرایندهای خودبرانگیخته‌ی هاوکس پرداخته و با استفاده از قانون اعداد بزرگ به تعیین حق‌بیمه‌ها می‌پردازیم و با استفاده از قضیه حدمرکزی تابعی احتمال ورشکستگی شرکت بیمه را بررسی می‌کنیم. در پایان با استفاده از مدل میانگین ارزش در معرض خطر شرطی یک پرتفوی بهینه برای دارایی‌های شرکت بیمه استخراج می‌کنیم.

۱. مقدمه

درسال‌های اخیر، مدل ریسک کرامر لوندبرگ برای ادعاهای خسارت[1] دریافتی شرکت بیمه مورد مطالعه قرارگرفته است که در این مدل، از فرایند پواسن همگن برای مدلسازی ادعاهای خسارت استفاده شده است. ادعاهای خسارت دریافتی شرکت بیمه نمی‌توانند از یک فرایند پواسن همگن با خاصیت بی‌حافظگی پیروی کنند. زیرا ادعاها همیشه به دلیل نوعی شدت (نرخ ورود ادعاها) ثابت نیستند. به عنوان مثال، پیشامد بلایای طبیعی باعث می شود که میزان ورود مطالبات بلافاصله پس از وقوع فاجعه بالا باشد، اما ممکن است چندین ادعا به تعویق افتاده و بعدا گزارش شوند، در نتیجه نرخ ورود خسارت کاهش می‌یابد.
چنین رخدادهایی برای مدت طولانی شرکت بیمه را تحت تاثیر قرار می‌دهند. بنابراین، مدل‌هایی که می‌توانند این نوع انتقال ریسک و خوشه‌بندی خسارت ها را ثبت کنند، بسیار مورد توجه قرارگرفته‌اند. در واقع یک حادثه (رخداد) واحد ممکن است چندین ادعای تاخیری را ایجاد کند، مانند تصادف رانندگی که ممکن است منجر به ادعاهای متفاوتی مانند آسیب به خودرو، جراحت فرد، فوت (رشته های مختلف بیمه) شود. این ویژگی با استفاده از فرایندهای به اصطلاح خودبرانگیخته[2]ی هاوکس مدلسازی می‌شوند.
بنابراین مدل ریسک جدیدی مبتنی بر فرایندهای هاوکس مرکب عمومی که ادعاهای خسارت دریافتی شرکت بیمه را توصیف می‌کنند، مورد بررسی قرارگرفته است. مدل موردنظر برای محاسبه‌ی سرمایه‌ی مورد نیاز برای پرداخت بدهی‌های شرکت بیمه و مدلسازی شاخص‌های مختلف

*نسترن زنگنه‌پور
پست الکترونیک: zangene.nastaran75@gmail.com (نسترن زنگنه‌پور)، n.modarresi@atu.ac.ir & n.modarresi@gmail.com (نویده مدرسی)

[1] Claim arrivals
[2] Self-Exciting

ریسک مانند ریسک ورشکستگی استفاده شده است. همچنین به بررسی رفتار مجانبی احتمالات ورشکستگی شرکت بیمه با توجه به مدل معرفی شده در توزیع ادعاهای خسارت که یکی از موضوعات اصلی نظریه ریسک می باشد، پرداخته شده است. در سال های اخیر مدل کلاسیک ریسک کرامر لوندبرگ [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است اما سیل در سال ۱۹۸۳ نشان داد بطور کلی خسارت‌های دریافتی بیمه نمی‌توانند با فرایند پواسن همگن بی‌حافظه مدلسازی شوند[۱۵]. آلبرچو و آسموسن با استفاده از شدتی از نوع وابسته به زمان، توزیع ادعاهای تجمیع شده و احتمالات ورشکستگی را برای مدل ریسکی که از ترکیب یک فرایند پواسن همگن و یک فرایند پواسن مضاعف تشکیل شده است، مورد بررسی قرار دادند[۲]. داسیوس و جانگ در سال ۲۰۰۳ از فرایند پواسن مضاعف برای مدلسازی ادعاهای خسارت دریافتی برای قیمت‌گذاری بیمه اتکایی بلایا استفاده کردند[۷].

در کاربردهای مالی وابستگی زمانی نرخ های ورود رخدادها و خوشه‌بندی آنها ممکن است ناشی از خود فرایند باشند، بنابراین فرایند خودبرانگیخته‌ی هاوکس برای اولین بار درسال ۱۹۷۱ توسط هاوکس معرفی شد[۱۱]. اولین کسانی که در سال ۲۰۱۰ فرایند هاوکس مرکب و مدل ریسک مبتنی برآن را معرفی کرده و از آن در مطالعه‌ی مسئله‌ی احتمال ورشکستگی در افق زمانی متناهی و نامتناهی با فرض ادعاهای خسارت دم سبک استفاده کردند و فرایند نقطه‌ای ساده‌ی هاوکس را جایگزین فرایند پواسن کردند، استابیل و توریسی بودند همچنین آنها برای محاسبه‌ی حق بیمه‌ها پیشنهاد کردند که حق بیمه‌ی بالاتری در رشته‌های مختلف بیمه اعمال شود[۱۶] و داسیوس و ژائو احتمالات ورشکستگی مشابهی را با استفاده از یک فرایند خودبرانگیخته، درنظرگرفتند[۸] و کار آنها توسط ژو با فرض ادعاهای خسارت دم سنگین گسترش یافت[۱۹].

جانگ و داسیوس برای بیمه یک فرایند خودبرانگیخته را مورد مطالعه قراردادند که شامل نرخ ثابت بطور نمایی کاهشی است که بعنوان ارزش زمانی پول از آن تعبیر شده است[۷]. چنگ و سئول در سال ۲۰۱۸ تقریب‌های انتشار را برای احتمال ورشکستگی مدل ریسک با ادعاهای خسارت هاوکس مطالعه کردند و مثال‌های عددی برای پرش‌هایی با توزیع نمایی و گاما ارائه می‌دهند. آنها دریافتند که حد انتشار یک فرایند گاوسی است که می‌تواند به یک فرایند گاوسی متمرکز و یک حرکت براونی مستقل تجزیه شود[۵]. سوییشچک در سال ۲۰۱۷ برای اولین بار از فرایندهای هاوکس مرکب عمومی برای مدلسازی فرایند ریسک در بیمه استفاده کرده است که ادعاهای خسارت از فرایند هاوکس و اندازه ادعاها از زنجیر مارکوف زمان پیوسته تبعیت می‌کردند[۱۷] و آن را در سال ۲۰۲۱ گسترش داد[۱۸] مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ مدل پرتفوی دارایی مبتنی بر میانگین–واریانس را که نقطه عطف نظریه‌ی مدرن مدیریت سبد دارایی است را برای بدست آوردن پرتفوی بهینه توسعه داد[۱۴]. الکساندر برای انتخاب پورتفوی، از مدل ارزش در معرض خطر استفاده کرد[۳]. امبرشت در بیمه از ارزش در معرض خطرشرطی استفاده کرده است[۹]. سوییشچک در سال۲۰۲۰ با بررسی تاثیر ریسک برانتخاب پرتفوی سرمایه‌گذار میانگین –واریانس، ویژگیهای پرتفوی کارا و همچنین رفتار پوشش ریسک بیمه گر را در حضور ریسک مورد مطالعه قرارداده است[۱۸].

در نظریه‌ی ریسک، ورشکستگی مهمترین مسئله موردبحث می‌باشد و هدف تحقیق بهبود بخشیدن مدل کلاسیک کرامر برای کاهش ورشکستگی و تعیین حق بیمه‌های بهینه‌تری است. در مدل ارائه‌شده، فرایند هاوکس را با تابع شدت شرطی به طور نمایی کاهشی(نرخ ورود ادعاهای خسارت) در نظرگرفتیم و با توجه به میزان تاثیری که مطالبات گذشته بر نرخ ورود مطالبات آینده دارند، به مدلسازی آن پرداخته‌ایم. آنچه برای شرکت بیمه مهم است، این است که حق بیمه‌ها به گونه‌ای تعیین شوند که احتمال ورشکستگی کاهش یابد.

از این رو در تعیین ادعاهای خسارت و انتخاب‌های متفاوت اصول حق بیمه با توجه به احتمال ورشکستگی، مطالعات زیادی انجام گرفته است. درنهایت با اعمال کردن قانون اعداد بزرگ در مدل ریسک، حق بیمه‌های پرداختی بیمه‌گذار با توجه به ریسک هر بیمه‌نامه تعیین می‌کنیم و با استفاده از قضیه حد مرکزی تابعی، مدل ریسک را با یک فرایند انتشار تقریب زده که منجر به فرمول‌های بسته برای احتمالات ورشکستگی می‌شود. همچنین به مطالعه‌ی پرتفوی بهینه برای بیمه‌گری می‌پردازیم که فرایند دارایی‌های ریسکی آن از یک حرکت براونی با رانش در یک بازار ناکامل تبعیت می‌کنند و با استفاده از مدل میانگین –ارزش در معرض خطر شرطی درصدد کاهش ریسک بیمه‌گر با توجه به ریسک بالاتر فرایند هاوکس نسبت به پواسن هستیم.

ازدلایل علاقه‌مندی شرکت بیمه به استفاده از فرایندهای هاوکس در مدلسازی‌های خود، استفاده از تحلیل خوشه‌ای برای پیش‌بینی خسارت‌ها می باشد که ناهمگونی ریسک را در پرتفوی بیمه خود پوشش دهند. از ویژگی خوشه‌ای بودن مدل، در تقسیم و تجمیع ریسک استفاده می‌شود. درواقع وقتی میزان خسارت پرداختی بیمه‌گر از میزان مورد انتظار آنها بیشتر می‌شود، اگر بیمه‌گر تمایلی به دریافت مبلغ اضافه بر قرارداد بیمه از بیمه‌گذار خود نباشد، اتکای آنها بر سرمایه در گردش شرکت برای جبران خسارت‌ها می‌باشد. از طرفی تقسیم و تجمیع ریسک از اهمیت بالایی برخوردار است اما الگوی خسارت بیمه‌گران بی ثبات است و شرکت بیمه باید با نوسانات الگوی خسارت در عمل مقابله کند. بیمه‌گران برای کاهش خسارات ناشی از تقبل یا انتقال ریسک بیمه‌نامه‌های خود به کمک تجمیع، تعداد زیادی از بیمه‌نامه‌هایی که در معرض ریسک مشترکی هستند، به صورت گروه بیمه‌شوندگان در می‌آورند (ویژگی خوشه‌بندی) و تعداد هرچه بیشتر آنها در پیش‌بینی خسارت‌ها کمک می‌کند و در نتیجه حق بیمه‌های بهینه‌تری برای بیمه‌گذاران تعیین و احتمال ورشکستگی کاهش پیدا می‌کند.

اخیرا در زمینه مدیریت ریسک و بیمه به مسئله‌ی تخصیص بهینه دارایی توجه زیادی شده است. یک بیمه‌گر قصد دارد بازده موردنظر خود را به حداکثر برساند یا ریسک پرتفوی را به حداقل برساند. از آنجا که اندازه‌گیری ریسک با واریانس تنها بر مشخص کردن نوسانات در اطراف بازده مورد انتظار تمرکز می‌کند و با افزایش دارایی‌های موجود در پرتفوی باید ریسک ناشی از نگهداری آن کاهش یابد و با توجه به بیشتربودن ریسک فرایند هاوکس نسبت به پواسن، ما به دنبال راه‌حلی برای کاهش هر چه بیشتر ریسک هستیم و از طرف دیگر در مدل میانگین – ارزش در معرض خطر به دلیل ویژگی عدم تحدب و عدم جمع‌پذیری ریسک دارای نارسایی‌هایی است که ویژگی عدم تحدب در یک تابع هدف سبب ایجاد نقاط حداقل و حداکثرهای متعددی می‌شود بنابراین بدست آوردن یک نقطه مینیمم یا ماکزیمم بهینه و درنهایت رسم منحنی کارا مشکل است. از طرفی عدم ویژگی جمع‌پذیری ریسک در این مدل بیانگر این است که با تنوع‌سازی در دارایی‌ها سبب کاهش ریسک نمی‌شود بنابراین

مدل میانگین–ارزش درمعرض خطر شرطی که نارسایی‌های هردو مدل را پوشش می‌دهد برای پرتفوی خود انتخاب می‌کنیم[۱].
در بخش۲ فرایند هاوکس و مدل ریسک مبتنی بر فرایند هاوکس مرکب عمومی را برجسته می‌کنیم. در بخش۳ به بررسی احتمال ورشکستگی شرکت بیمه در افق زمانی متناهی ونامتناهی می‌پردازیم و در بخش ۴ برای بیمه‌گر یک پرتفوی بهینه در یک بازار ناکامل با استفاده از مدل میانگین –ارزش در معرض خطرشرطی درنظر می‌گیریم ودر بخش۵ به نتایج مقاله می‌پردازیم.

۲. معرفی مدل

در این بخش در ابتدا فرایند هاوکس معرفی شده و مدل ریسک مبتنی بر فرایند هاوکس مرکب عمومی و کاربرد قانون اعداد بزرگ برای مدل ریسک بررسی شده است.

۲ .۱ . *فرایند هاوکس*

فرایند هاوکس، فرایند نقطه‌ای ساده‌ای است که دارای ویژگی‌های خودبرانگیختگی، اثر خوشه‌ای و حافظه بلند مدت است که برای مدلسازی دنباله‌ای از ورودها به یک سیستم در طول زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد.
حال اگر تابع اندازه‌پذیر نامنفی $\lambda^*(t)$ برای فرایند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ با پالایه‌ی $\{\mathcal{F}^N(t), t \geq ۰\}$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\lambda^*(t) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[N(t+h) - N(t) | \mathcal{F}^N(t)]}{h} \qquad (۱)$$

آنگاه تابع شدت شرطی است.

تعریف ۱.۲. فرایند هاوکس تک‌بعدی
فرایند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ را که از طریق روابط زیر بدست می‌آید را درنظر بگیرید.

$$\mathbb{P}\big(N(t+h) - N(t) = m | \mathcal{F}^N(t)\big) = \begin{cases} \lambda^*(t)h + o(h) & m = ۱ \\ o(h) & m > ۱ \\ ۱ - \lambda^*(t)h + o(h) & m = ۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

که توسط تابع شدت شرطی زیر مشخص می‌شود.

$$\lambda^*(t) = \lambda + \int_{۰}^{t} \mu(t-s) \mathrm{d}N(s) \qquad (۳)$$

که $\lambda > ۰$ و $\mu : [۰, +\infty) \to (۰, +\infty)$ و $N(.)$ فرایند هاوکس می‌باشد.

یک انتخاب رایج برای تابع $\mu(.)$ بصورت زیر است.

$$\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}; \quad \alpha, \beta \geq ۰ \qquad (۴)$$

درنتیجه تابع شدت بصورت زیر می‌باشد.

$$\lambda^*(t) = \lambda + \int_{۰}^{t} \alpha e^{-\beta(t-s)} \mathrm{d}N(s) \qquad (۵)$$

به این تابع، تابع شدت شرطی بطور نمایی کاهشی می‌گویند و برای جلوگیری از تعداد پرش‌های نامتناهی در بازه‌های زمانی کوچک خواهیم داشت.

$$\hat{\mu} = \int_{۰}^{+\infty} \alpha e^{-\beta s} \mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta} < ۱ \leftrightarrow \alpha < \beta \qquad (۶)$$

و تابع شدت ازمعادله‌ی دیفرانسیل تصادفی زیر تبعیت می‌کند.

$$\mathrm{d}\lambda^*(t) = \beta\big(\lambda - \lambda^*(t)\big)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}N(t), \quad t \geq ۰ \qquad (۷)$$

که دارای جواب زیر می‌باشد[۱۲].

$$\lambda^*(t) = e^{-\beta t}\left(\lambda^*(\circ) - \lambda\right) + \lambda + \int_{\circ}^{t} \alpha e^{-\beta(t-s)} \mathrm{d}N(s) \qquad (۸)$$

در واقع ویژگی خودبرانگیختگی فرایند هاوکس بیانگر این است که افزایش تعداد ادعاهای خسارت، شدت فرایند را افزایش می‌دهد و این ویژگی با یک اثر بازگشت به میانگین متوازن می‌شود. به عبارت دیگر اگر هیچ ادعای خسارتی دریافت نشود، شدت تمایل به بازگشت، به مقدار ثابت خود را دارد.

۲.۲ . مدل ریسک

فرض کنید $N(t)$ یک فرایند هاوکس تک بعدی معرفی شده در (۲) باشد که تعداد کل مطالبات را تا زمان t محاسبه می‌کند همچنین $\{X_k\}_{k=۱,۲,\dots}$ زنجیر مارکوف زمان پیوسته ارگودیک با فضای حالت $\mathbb{N}$ می‌باشد که بیانگر اندازه‌ی ادعاهای خسارت هستند و $a(x)$ تابعی کراندار و پیوسته است آنگاه مدل ریسک مبتنی بر فرایند هاوکس مرکب عمومی به صورت زیر است[۱۷].

$$R(t) := u + ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} a(X_k) \qquad (۹)$$

که در آن u سرمایه اولیه شرکت بیمه و $R(\circ) = u$، c نرخی که با آن حق بیمه‌ها پرداخت می‌شوند.
مدل ریسک معرفی شده، سرمایه موجود شرکت بیمه یا بخشی از آن را در طول زمان توصیف می‌کند که با مدل تصادفی کل فرایند مرتبط است و منبع ریسک مدل، کل پورتفوی شرکت بیمه را دربرمی‌گیرد. در مدل‌های ریسک شرکت بیمه دو مقدار حائز اهمیت در تعیین سود شرکت نقش دارند که یکی از آنها خسارت‌های وارده در یک دوره زمانی مشخص که به عنوان بدهی شرکت بیمه محسوب می‌شوند و دیگری حق بیمه‌های دریافتی که به عنوان درآمد شرکت بیمه محسوب می‌شوند. خسارت‌های دریافتی، ترکیبی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند که به صورت متغیرهای تصادفی با توزیع های احتمالاتی مناسب مدلسازی می‌شوند. معمولا تعداد خسارت‌ها از فرایندهای شمارشی و اندازه‌ی آنها از توزیع‌های پیوسته تبعیت می‌کنند. در مدل معرفی شده از فرایندهای خودبرانگیخته‌ی هاوکس برای تعداد ادعاهای خسارت و از زنجیر مارکوف زمان پیوسته‌ی ارگودیک با فضای حالت متناهی برای اندازه‌ی ادعاهای خسارت استفاده شده است.

۲.۳ . *قانون اعداد بزرگ برای مدل ریسک*

از طرفی در این پژوهش چگونگی کاربرد قانون اعداد بزرگ[۳] برای سنجش تفاوت خسارت‌های واقعی و میانگین برآوردی آنها بررسی می‌شود که منجر به تبیین حق بیمه‌های متفاوت برای بیمه‌گذاران متفاوت و یا ارزیابی بدهی‌های بیمه‌گر می‌شود. این قانون برای ادعاهای خسارت دریافتی (فرایند هاوکس) به صورت زیر می‌باشد.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{\lambda}{۱ - \hat{\mu}} \qquad (۱۰)$$

قضیه ۲.۲. *مدل ریسک $R(t)$ معرفی شده در (۹) که $\{X_k\}_{k=۱,۲,\dots}$ زنجیر مارکوف با احتمالات ایستای π_k^* در نظر بگیرید. فرض می کنیم که $\circ < \hat{\mu} = \int_{\circ}^{+\infty} \alpha e^{-\beta s}\mathrm{d}s < ۱$، آنگاه*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = c - a^* \frac{\lambda}{۱ - \hat{\mu}} \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$a^* = \textstyle\sum_{k\in X} a(k)\pi_k^*$$

و a^* مقدارمیانگین اندازه‌های خسارت‌های دریافتی است[۱۷].

از قانون اعداد بزرگ برای بیان ویژگی‌های اصلی مدل ریسک معرفی شده از جمله شرط سود خالص [۴] و اصل حق بیمه‌های دریافتی استفاده شده است که که اصل ارزش موردانتظار برای تعیین حق بیمه‌ها مورد توجه قرارگرفته است. شرط سود خالص یک مفهوم شناخته شده در نظریه‌ی ورشکستگی می‌باشد و شرکت بیمه درصدد است که نرخ حق بیمه‌ها را به گونه‌ای قیمت‌گذاری کند که خطر ورشکستگی را پوشش دهد. اگر درآمد مورد انتظار در حق بیمه بیشتر از خروجی پول مورد انتظار باشد، احتمال ورشکستگی شرکت کاهش می‌یابد و این همان شرطی است که به عنوان شرط سود خالص از آن یاد می‌شود.

[3] Law of Large Number
[4] Net profit condition

نتیجه ۳.۲. *شرط سود خالص برای مدل* $R(t)$ *بصورت زیراست*[۱۷].

$$c > a^* \frac{\lambda}{۱ - \hat{\mu}} \tag{۱۲}$$

چگونگی تعیین حق بیمه‌ها و قیمت‌گذاری آنها بستگی به سطح ریسک بیمه‌نامه‌ها دارد، بیمه نامه‌هایی با عوامل ریسکی بیشتر باید حق بیمه‌های بالاتری پرداخت کنند . برای این امر به اصل حق بیمه براساس ارزش مورد انتظار، پرداخته شده است . فرض کنیم $S(t)$ *هزینه‌های تجمیعی شرکت بیمه باشند .*

$$S(t) = \sum_{k=۱}^{N(t)} a(X_k)$$

در اینصورت

$$c = (۱ + \theta)\frac{E\big(S(t)\big)}{t}$$

که

$$c = (۱ + \theta)a^* \frac{\lambda}{۱ - \hat{\mu}} \tag{۱۳}$$

و θ *پارامتر متناظر حق بیمه مازاد است .*

۳. احتمال ورشکستگی

آنچه برای شرکت بیمه مهم است، این است که حق بیمه‌ها به گونه‌ای تعیین شوند که احتمال ورشکستگی[۵] کاهش یابد . از این رو در تعیین ادعاهای خسارت و انتخاب‌های متفاوت اصول حق بیمه با توجه به احتمال ورشکستگی، مطالعات زیادی انجام گرفته است. مدل ریسک قصد دارد سرمایه موجود شرکت بیمه را در طول زمان توصیف کند و احتمال ورشکستگی یعنی رخدادی که سرمایه برای اولین بار به زیر صفر می‌رسد. بنابراین زمان ورشکستگی با توجه به سرمایه اولیه‌ی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tau(u) = \inf\{t > ۰ : R(t) < ۰ | R(۰) = u\} \tag{۱۴}$$

نتیجه ۱.۳. *احتمال ورشکستگی در افق زمانی متناهی* t *بصورت زیراست*[۱۸].

$$\begin{aligned} \psi(u,t) &= \mathbb{P}(\tau(u) \le t | R(۰) = u) \\ &= \mathbb{P}(\inf_{۰<s\le t} R(t) | R(۰) = u) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

و احتمال ورشکستگی در افق زمانی نامتناهی بصورت زیر است .

$$\psi(u) = \lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \mathbb{P}(\inf_{t>۰} R(t) | R(۰) = u) \tag{۱۶}$$

۱.۳ . *تقریب انتشار*

قضیه حد مرکزی تابعی برای توضیح تجمیع ادعاهای خسارت برای مکانیسم بیمه است. در واقع افزایش تعداد بیمه‌گذارها به کاهش احتمال ورشکستگی منجر می‌شود. از قضیه حد مرکزی تابعی برای تقریب مدل ریسک با فرایند انتشار مدل ریسک استفاده شده است و به دنبال آن، احتمالات ورشکستگی، برای مدل ریسک بررسی شده است. با استفاده از قضیه حد مرکزی تابعی نتیجه گرفته می‌شود که فرایند هاوکس مرکزی شده به طور مجانبی به حرکت براونی استاندارد یعنی توزیع نرمال میل می‌کند.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t) - \bar{\lambda}t}{\sqrt{t}} = \sigma W(t), \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{۱ - \hat{\mu}} \tag{۱۷}$$

به عبارت دیگر توزیع تعداد ادعاهای خسارت در افق زمانی بزرگ به حرکت براونی استاندارد میل می‌کنند.

[5] Ruin probability

قضیه ۲.۳. *قضیه حد مرکزی تابعی برای مدل ریسک* $R(t)$ *معرفی شده در* (۹) *که* $\{X_k\}_k = ۱, ۲, \dots$ *زنجیر مارکوف با احتمالات ایستای* π_k^* *در نظر بگیرید . فرض می کنیم که* $\hat{\mu} = \int_۰^{+\infty} \alpha e^{-\beta s} \mathrm{d}s < ۱$ *بصورت زیر است*[۱۷] . .

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t) - \big(ct - a^* N(t)\big)}{\sqrt{t}} = \sigma\phi(۰, ۱) \tag{۱۸}$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(nt) - \big(cnt - a^* N(nt)\big)}{\sqrt{n}} = \sigma W(t) \tag{۱۹}$$

نتیجه ۳.۳. *با توجه به قضیه بالا* $R(t)$ *را می توان با فرایند پرش انتشار زیر تقریب زد .*

$$R(t) = u + ct - a^* N(t) + \sigma W(t) := u + D(t) \tag{۲۰}$$

عبارت $D(t)$ *دارای جمله رانش* $c - a^* \frac{\lambda}{۱-\hat{\mu}}$ *و جمله انتشار* σ *است . و در نتیجه اگر* T_u *یک زمان ورشکستگی باشد آنگاه احتمال ورشکستگی با توجه به فرایند پرش انتشار در زمان* τ *به صورت زیر است .*

$$\begin{aligned} \psi(u, \tau) &= \mathbb{P}(T_u < \tau) \\ &= \mathbb{P}(\min R(t) < ۰)_{۰<t<\tau} \\ &= \mathbb{P} < (\min D(t) < -u)_{۰<t<\tau} \end{aligned} \tag{۲۱}$$

۴. پورتفوی دارایی‌های مدل

در یک بازار ناکامل[۶] برای دارایی‌های بیمه‌گر پرتفوی[۷] بهینه‌ای با رویکرد مبتنی بر میانگین – ارزش درمعرض خطر شرطی [۸] بررسی کرده‌ایم. ارزش در معرض خطر شرطی نسبت به شکل توزیع بازده‌ها حساس بوده برابر است با میانگین وقوع بازده‌های کوچکتر از ارزش در معرض خطر در سطح اطمینان $\alpha - ۱$. در واقع ارزش در معرض خطر شرطی معادل میانگین سطح زیر منحنی بازده‌هاست به شرط آن که مقدار آنها کمتر از ارزش در معرض خطر باشد(۱). یک بازار مالی با $n + ۱$ دارایی که بطور مداوم معامله می‌شوند و با m عامل تصادفی را در نظر بگیرید که در آن $n \le m$ پس بازار مدل ناکامل است از طرفی دارایی بدون ریسک از دینامیک زیر تبعیت می کند.

$$\mathrm{d}S_۰(t) = r(t)S_۰(t)\mathrm{d}t, \quad S_۰(۰) = ۱ \tag{۲۲}$$

که در آن $r(t)$ نرخ بهره بدون ریسک است.
و دینامیک دارایی های ریسکی براساس حرکت براونی هندسی می‌باشند.

$$\mathrm{d}S_i(t) = b_i(t)S_i(t)\mathrm{d}t + \sigma_i(t)S_i(t)\mathrm{d}W(t), \quad S_i(۰) = s_i \in \mathbb{R} \tag{۲۳}$$

که $i = ۱, ۲, \dots, n$ و $W(t) := \big(W_۱(t), \dots, W_m(t)\big)'$ و برزار تلاطم دارایی‌های ریسکی بصورت زیر است.

$$\sigma_i(t) := \big(\sigma_{i۱}(t), \dots, \sigma_{im}(t)\big) \tag{۲۴}$$

$$\sigma(t) := \big(\sigma_۱'(t), \dots, \sigma_n'(t)\big)' \tag{۲۵}$$

و نرخ بازده دارایی‌های ریسکی بصورت زیر است.

$$b(t) := \big(b_۱(t), \dots, b_n(t)\big)' \tag{۲۶}$$

[6] Incomplete market
[7] Portfolio
[8] Condition value at risk

حال برای مدلسازی پورتفوری بهینه اگر فرض کنیم $f(x,R)$ تابع زیان [۹] پورتفوی دارایی باشد که $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حاوی وزن‌های متناظر با هر یک از دارایی‌ها باشد و R ماتریس حاوی بازده‌های n دارایی موردنظر برای تشکیل پورتفوی باشد. ارزش در معرض خطر شرطی در سطح اطمینان α درصد بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$CVaR_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{f(x,R)\le VaR_\alpha(x)} f(x,R)P(R)\mathrm{d}R \qquad (۲۷)$$

، که تابع $P(R)$ چگالی احتمال توزیع بازده‌هاست. حال باید مقدار ارزش در معرض خطر را به گونه‌ای پیدا کنیم که مقدار ارزش در معرض خطر شرطی حداقل گردد. بنابراین از تابع هدف زیر استفاده می‌کنیم.

$$F_\alpha(x,\gamma) = \gamma + \frac{1}{\alpha}\int_{f(x,R)>\gamma} [f(x,R)-\gamma]p(R)\mathrm{d}R \qquad (۲۸)$$

به دلیل دشوار بودن تعیین تابع چگالی احتمال از متغیر کمکی γ استفاده می‌کنیم که متغیری است که به ازای آن ارزش در معرض خطر شرطی حداقل می‌گردد و مقدار آن در فرایند بهینه‌سازی تعیین می‌شود. حال توزیع بازده‌ها را بصورت یک فرایند تصادفی در نظر گرفته و تابع هدف زیر را تشکیل می‌دهیم که در آن s تعداد حالت‌های ممکن برای بازده‌ها و $R_{p,s}$ بازده پرتفوی دارایی P در دوره s ام می‌باشد که تابعی از بردار وزن‌ها و بازده‌هاست.

$$F_\alpha(x,\gamma) = \gamma + \frac{1}{\alpha S}\sum_{s=1}^{S}[R_{p,s}-\gamma]^+ \qquad (۲۹)$$

در نهایت، پورتفوی دارایی‌ها بصورت زیر مدلسازی می‌شوند.

$$\min \gamma + \frac{1}{\alpha S}\sum_{s=1}^{S} R_{p,s}^+ \qquad (۳۰)$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{i=1}^{n} x_i R_{i,s} = R_{p,s} \\ & R_{p,s}^+ \ge R_{p,s} - \gamma \quad ; \quad s = 1,2,\dots,S \\ & R_{p,s}^+ \ge 0 \quad ; \quad s = 1,2,\dots,S \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{R}_i = R_{expected} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$

که با حل مدل بهینه‌سازی بالا تنها یک نقطه کارا برروی مرز کارا ایجاد می‌شود که در نتیجه برای تعیین مرز کارا باید به تعداد نقاط مورد نظر بر روی این مرز بازده‌های مورد انتظار مختلف حل شود[۱].

۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله، مدل ریسکی را با دریافت ادعاهای خسارت مبتنی بر فرایندهای هاوکس مرکب عمومی معرفی کردیم و نشان دادیم که برای مدلسازی در بیمه مناسب است. با فرض فرایند هاوکس تک بعدی با شدت بطور کاهشی نمایی به بررسی خواص نظری همچون قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی برای مدل ریسک پرداختیم. از این قوانین برای تعیین حق بیمه‌ها و تقریب مدل ریسک با یک فرایند انتشار برای محاسبه احتمال ورشکستگی استفاده کردیم. درنهایت پرتفوی بهینه‌ای از دارایی‌های شرکت بیمه با هدف کاهش ریسک مدل درنظرگرفتیم.

[9] Loss function

مراجع

[۱] احمد نریمانی ـرضا نریمانی مدیریت سبد دارایی با استفاده از متلب و گمز، انتشارات ناقوس، چاپ اول ۱۳۹۲.
[2] Albrecher، H. ، Teugels، J.L. ،(2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. J. Appl. Probab. 43 (1) ، 257–273.
[3] Alexander، S. ، Coleman، T.F. ، Li، Y.، (2006). Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives. J. Bank. Financ. 30، 583–605.
[4] Albrecher، H., Asmussen، S. ، (2006). Ruin probabilities and aggregrate claims distributions for shot noise cox processes. Scand. Actuar. J.، 86–110.
[5] Cheng، Z. ، Seol، Y. ، (2018). Gaussian approximation of a risk model with stationary Hawkes arrivals of claims. Available on arXiv.
[6] Daley, D.J. ، Vere-Jones, D. (Eds.) ، (2003). An Introduction to the Theory of Point Processes. In: Probability and its Applications، Springer-Verlag، New York.
[7] Dassios، A. ، Jang، J.-W. ، (2003). Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the cox process with shot noise intensity. Finance Stoch. 7 (1) ، 73–95.
[8] Dassios, A. ، Zhao، H. ، (2013). A risk model with delayed claims. J. Appl. Probab. 50 (03) ، 686–702.
[9] Embrechts، P. Kluppelberg، S. T. Mikosch. ، (1997). Extremal Events in Finance and Insurance. Springer Verlag.
[10] Errais، E. ، Giesecke، K. ، Goldberg, L.R. ، (2010). Affine point processes and portfolio credit risk. SIAM J. Financial Math. 1 (1) ، 642–665.
[11] Hawkes, A.G., (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. Biometrika 58 (1), 83–90.
[12] Laub, P.J., Taimre, T., Pollett, P.K., (2015). Hawkes processes. Available on arXiv.
[13] Lundberg، F.، (1903). I. Approximerad framstallning af sannolikhetsfunktionen: Ii. Aterforsakring af kollektivrisker. Almqvist Wiksell.
[14] Markowitz، H.M. (1952) Portfolio Selection. Journal of finance، 7(1) ، 77–91.
[15] Seal، H.L. ، (1983). The poisson process: Its failure in risk theory. Insurance Math. Econom. 2 (4) ، 287–288.
[16] Stabile، G. ، Torrisi، G.L., (2010). Risk processes with non-stationary Hawkes claims arrivals. Methodol. Comput. Appl. Probab. 12 (3) ، 415–429.
[17] Swishchuk، A. ، (2017). Risk model based on general compound Hawkes processes. Available on arXiv.
[18] Swishchuk، A. (2021). Hawkes process in insurance: Risk model، application to empirical data and optimal investment.
[19] Zhu، L. ، (2013). Ruin probabilities for risk processes with non-stationary arrivals and subexponential claims. Insurance Math. Econom. 53 (3) ، 544–550.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–179، صص. ۴۱۳–۴۱۷

بررسی درک ریاضی دانشجویان از مفهوم درخت با استفاده از نظریه پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا

مریم تقی‌زاده بیلندی*[آ]، فرزاد رادمهر[ب،آ]

[آ] دانشگاه فردوسی مشهد
[ب] دانشگاه علم و صنعت نروژ

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
نظریه پیشرفت طرحواره
درخت
نظریه گراف
درک ریاضی

2020 MSC:
97K30
97C30
97C70

چکیده

مبحث درخت یکی از مباحث اولیه و مهم در نظریهٔ گراف است. هدف اصلی مطالعهٔ حاضر، بررسی درک ریاضی دانشجویان از مفهوم درخت با استفاده از نظریهٔ پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا است. بدین منظور ۱۸ دانشجوی کارشناسی رشتهٔ ریاضی در مصاحبه های نیمه ساختاریافته شرکت نمودند. این دانشجویان در حال گذراندن درس نظریهٔ گراف و کاربردها در یکی از دانشگاه‌های شرق کشور بوده‌اند. با استفاده از پژوهشی کیفی، دانشجویان به نه سؤال در مورد مفهوم درخت پاسخ دادند. این سؤالات پیشرفت طرحوارهٔ درخت دانشجویان را مورد ارزیابی قرار داد. نتایج این پژوهش نشان داد از دانشجویان شرکت کننده در مصاحبه تنها سه نفر طراحواره درخت را تا مرحلهٔ Trans توسعه داده بودند و درصد بالایی از دانشجویان از طرحوارهٔ منسجمی پیرامون مفهوم درخت برخوردار نبودند. نتایج این پژوهش با مشخص کردن نقاط ضعف دانشجویان در حل مسائل مرتبط با درخت و بررسی شماری از علل ایجاد آن‌ها، گامی در جهت بهبود یاددهی و یادگیری دروس ترکیبات و نظریه گراف برمی‌دارد. همچنین پیشنهاداتی به مدرسین این دروس جهت ایجاد یک طرحواره منسجم در ذهن دانشجویان ارائه می‌نماید.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، نظریهٔ گراف به یک ابزار مهم ریاضی در رشته‌های مختلفی مانند علوم کامپیوتر، مهندسی برق، معماری، شیمی، ژنتیک، زبان شناسی، جغرافیا و جامعه شناسی تبدیل شده است و در عین حال، به عنوان یک زمینه ریاضی ارزشمند نیز شناخته می‌شود [۹،۱۷]. دانش دانشجویان از نظریهٔ گراف به عنوان ابزاری قدرتمند برای درک سایر رشته‌ها نظیر شیمی، فیزیک و علوم کامپیوتر شناخته شده است [۱۰].
تدریس نظریهٔ گراف به فراگیران دارای چندین مزیت است؛ به فراگیران این امکان را می دهد که کاربردهای ریاضیات را درک نمایند و قدرت استدلال و استنتاج آن‌ها را تقویت می‌کند [۸]. همچنین گراف‌ها دارای این مزیت هستند که بسیاری از مفاهیم و مسائل آن‌ها را می‌توان با استفاده از ترسیم بیان کرد؛ به عبارت دیگر، گراف می‌تواند نمایش تصویری مفاهیم و روابط بین آن‌ها باشد [۷] و به جای اینکه به یک سری از قوانین برای حفظ و به کارگیری محدود شود؛ می توان از آن برای توسعهٔ چشم‌انداز ریاضیات استفاده کرد [۸،۱۵].
جامعه محققان آموزش ریاضیات، توجه ویژه‌ای به یاددهی و یادگیری ریاضیات گسسته در دهه‌های اخیر داشته‌اند و اخیراً یک گروه تخصصی در این زمینه در سیزدهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی ایجاد شده است [۱۱]. ریاضیات گسسته با مطالعهٔ ساختارهای مبتنی بر مجموعه‌های گسسته (مجموعه‌های متناهی یا قابل شمارش) مانند اعداد صحیح، گراف‌ها یا کدها مرتبط است [۳،۱۰]. با این حال، همانطور که توسط هازان و

* سخنران
پست الکترونیک: ma.taghizadeh1@gmail.com (مریم تقی‌زاده بیلندی)، farzad.radmehr@ntnu.no (فرزاد رادمهر)

هادار[1] [۱۲]، مدووا، پالنیکووا، ریبانسکوی و نائتیکا[2] [۱۴] و گونزالس[3] و همکاران [۱۰] اشاره شده است، مطالعات کمی در مورد درک دانشجویان در مورد نظریهٔ گراف انجام شده است.

اصطلاح گراف، به عنوان یک سیستم از نقاط و خطوط، از عبارت نماد گرافیکی[4] اخذ شده است؛ ریاضیدانی به نام کیلی[5] متوجه شد که بسیاری از گراف‌ها دارای این ویژگی هستند که بین هر جفت نقطهٔ آن‌ها یک مسیر منحصر به فرد از خطوط وجود دارد؛ گراف‌هایی با این خاصیت را درخت می‌نامند؛ در واقع، درختان از مهم‌ترین انواع گراف‌ها هستند [۹]. کیلی در سال ۱۸۵۷ از درختان برای شمارش انواع خاصی از ترکیبات شیمیایی استفاده کرد [۵]. درخت گرافی همبند و بدون دور است و از مشهورترین و کاربردی‌ترین انواع گراف محسوب می‌شود [۵]. از بسیاری جهات یک درخت، ساده‌ترین نوع گراف غیر بدیهی[6] است. این ویژگی چندین مزیت دارد؛ نظیر اینکه هر دو رأس توسط یک مسیر منحصر به فرد متصل می‌شوند و گاهی اوقات در اثبات یک نتیجهٔ کلی برای گراف‌ها، اثبات آن برای درختان آسان‌تر است؛ در واقع، حدس‌های متعددی که برای گراف‌های دلخواه اثبات نشده‌اند؛ برای درخت‌ها درست شناخته شده‌اند [۱۷]. درخت‌ها همچنین به عنوان ابزاری برای سازماندهی و استفاده از داده‌ها در علوم کامپیوتر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۳،۵].

از نظر محققین، در درس نظریهٔ گراف دانشجویان یادگیری مباحث اولیه گراف را به خوبی شروع می‌کنند اما در حل مسائل یا اثبات قضایای مرتبط با نظریه گراف دچار مشکلاتی می‌شوند. از آنجا که نظریهٔ گراف یک دانش کاربردی است و توانایی حل مسائل مختلف با استفاده از مفاهیم اولیهٔ آن از اهمیت بالایی برخوردار است، در این پژوهش به بررسی میزان درک فراگیران از یکی از مفاهیم اساسی این درس، مفهوم درخت، پرداخته‌ایم. درختان از مهم‌ترین گراف‌ها هستند؛ این عمدتاً به دلیل این واقعیت است که بسیاری از کاربردهای نظریهٔ گراف، به طور مستقیم یا غیرمستقیم، درخت‌ها را درگیر می‌کند [۹]. همانطور که پیش‌تر اشاره شد تعداد پژوهش‌هایی که به بررسی درک دانشجویان از نظریه گراف پرداخته‌اند بسیار محدود است و تاکنون پژوهشی به بررسی درک دانشجویان از مفهوم درخت نپرداخته است؛ از این رو بررسی درک دانشجویان از این مفهوم می‌تواند در شناسایی نقاط قوت و ضعف تفکر فراگیران و ارائهٔ روش‌هایی برای ارتقای یاددهی و یادگیری نظریهٔ گراف مفید واقع شود. بدین منظور در این پژوهش از نظریه پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا استفاده شده است. این نظریه فهم ریاضی دانشجویان را با توجه به میزان پیشرفت طرحواره ریاضی آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد. از این نظریه برای بررسی درک ریاضی دانشجویان در پژوهش‌های متعددی [۱۶،۴] به علت ارتباط مستقیم بین میزان پیشرفت طرحواره و توانایی حل مسائل ریاضی استفاده شده است.

۱ .۱ . *نظریهٔ پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا*

طرحواره یک ساختار شناختی پیچیده است که توسط اعمال، فرآیندها، اشیاء، سایر طرحواره‌ها و روابط متقابل آن‌ها شکل گرفته است؛ این ساختارها، به طور آگاهانه یا ناآگاهانه در ذهن فرد مرتبط هستند و به او اجازه می‌دهند تا با موقعیت‌های مختلف در حل مسائل روبرو شود [۲]. عمق و پیچیدگی درک فرد از یک مفهوم به توانایی او در ایجاد ارتباط بین ساختارهای ذهنی تشکیل دهندهٔ آن بستگی دارد. این ارتباطات اساس یک طرحواره هستند که انسجام آن در توانایی فرد به منظور درک موقعیت‌های ریاضی مربوط به مفهوم، بسیار مهم است [۲]. روابط بین اجزای یک طرحواره به صورت پویا تکامل می‌یابند و این پیشرفت ممکن است در افراد مختلف متفاوت باشد. برای توصیف تکامل طرحواره‌ها، سه گانه[7] Intra، Inter و Trans توسط پیاژه و گارسیا (۱۹۸۳) پیشنهاد شده است [۴]. در ادامه این مراحل همراه با مراحل پیشرفت طرحواره درخت بیان می‌گردد.

در مرحله Intra، فرد اعمال، فرآیندها و اشیاء موجود در طرحواره را جداگانه در نظر می‌گیرد و این ساختارها به طور معنادار با ساختارهای شناختی دیگر با ماهیت مشابه ارتباط ندارند [۴]. به عبارت دیگر فرد می‌داند برخی ساختارها در طرحواره به نوعی با هم مرتبط هستند اما قادر به توضیح یا توجیه رابطه نیست [۴]. فرد در مرحلهٔ Intra از طرحواره درخت، اعمال، فرآیندها و اشیاء مختلفی شامل تعاریف،گزاره‌ها و قضایای مرتبط با درخت در ذهن دارد، اما قادر به ارتباط دادن موارد ذکر شده نمی‌باشد و با آن‌ها جدا از هم و به صورت ایزوله کار می‌کند. به عنوان مثال، فرد در این مرحله برای تشخیص درخت بودن یک گراف، همبندی و بدون دور بودن را بررسی می‌کند و اگرچه از قضایای دیگر درخت آگاه است اما قادر به پیوند آن‌ها با فرآیند تشخیص درخت نیست. در این مرحله، فرد توانایی حل مسئله‌ای پیرامون درخت را ندارد که نیاز به هماهنگی تعدادی گزاره و قضیه برای حل آن است و بعضاً دچار سردرگمی می‌شود.

در مرحله Inter فرد شروع به ایجاد هماهنگی بین ساختارهای ریاضی می‌کند و دانش خود را توسعه می‌دهد که چگونه تغییر در یک ساختار منجر به تغییر در ساختارهای دیگر می‌شود و می‌تواند روابط ریاضی را توضیح دهد یا توجیه کند [۴]. در مرحلهٔ Inter از طرحواره درخت، فرد شروع به هماهنگ کردن تعدادی از گزاره‌ها و قضایای مرتبط با درخت می‌کند؛ اما این هماهنگی به طور کامل شکل نگرفته‌است و با محدودیت‌هایی روبرو است. به عنوان مثال، فرد برای تشخیص درخت بودن یک گراف رابطهٔ بین تعداد رئوس و یال‌ها را بررسی می‌کند و اگر تعداد یال‌ها از

---

[1] Hazzan & Hadar
[2] Medová, Páleníková, Rybanský, and Naštická
[3] González
[4] Notation graphic
[5] Cayley
[6] گراف با یک رأس و بدون یال را گراف بدیهی می‌نامند.
[7] Triad

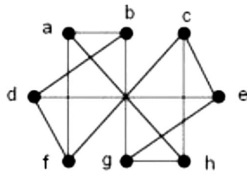
تعداد رئوس یکی کمتر نباشد، نتیجه می‌گیرد که گراف درخت نیست. اما ممکن است این قضیه را در جای دیگری به گونه‌ای به کار ببرد که او را از جواب صحیح منحرف سازد.

در مرحله Trans، فرد روابط ایجاد شده در مرحله Inter را هماهنگ می‌کند؛ این مرحله شامل ارتباط متقابل ساختارهای طرحواره، آگاهی از ویژگی‌ها و وضعیت مسئله‌ای است که ممکن است طرحواره به کار رود [۴]. به طور کلی می‌توان گفت، در سطح Inter، شناسایی ارتباط بین فرآیندها و اشیاء مختلف و انتقال بین آن‌ها در حال شروع شدن است و مرحله Trans، زمانی است که ارتباط‌های شناسایی شده در مرحله قبل به صورت یک ساختمان از ساختارهای منسجم ظاهر شوند [۱]. در مرحلهٔ Trans از طرحواره درخت، فرد قادر به هماهنگ کردن و پیوند کلیهٔ گزاره‌ها و قضایای مرتبط با درخت است. به عبارت دیگر فرد طرحوارهٔ منسجمی را در ذهن خود شکل می‌دهد و به این ترتیب می‌تواند تشخیص دهد در مواجهه با یک مسئله مرتبط با درخت باید کدام گزاره‌ها و قضایا را استفاده نماید و در صورت نیاز با یکدیگر پیوند دهد. از نظریه پیشرفت طرحواره تاکنون در مباحثی نظیر قاعدهٔ زنجیره‌ای [۶]، جبر خطی [۱۶]، مشتق اول و دوم [۱] و توابع یک متغیره [۴] استفاده شده است؛ اما تاکنون این نظریه در مورد مباحث نظریه گراف از جمله مبحث درخت به کار نرفته است.

۲.۱. *روش انجام پژوهش*

جامعهٔ آماری پژوهش حاضر شامل دانشجویان کارشناسی رشتهٔ ریاضی یکی از دانشگاه‌های شرق کشور است. در این دانشگاه درس نظریهٔ گراف و کاربرد آن در هر ترم ارائه می‌شود که در نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹، ۴۵ دانشجو در حال گذراندن این درس بودند. از این دانشجویان به منظور انجام مصاحبهٔ نیمه ساختار یافته ۱۸ نفر داوطلب شدند؛ محققین با تعیین وقت قبلی برای هر دانشجو، در نیمهٔ دوم اردیبهشت ماه ۱۴۰۰، با هر نفر به صورت جداگانه مصاحبه کردند. با توجه به همه‌گیری بیماری کرونا انجام مصاحبه به صورت ارتباط آنلاین انجام و کلیهٔ مکالمات ضبط گردید. در این پژوهش، به منظور بررسی سطح درک دانشجویان از مبحث درخت، نه سؤال طراحی و انتخاب گردید که چهار سؤال در ادامه معرفی شده است:

۱) آیا گراف زیر درخت است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.



۲) آیا درختی با دنباله درجات (۱،۱،۱،۱،۲،۲،۳،۳،۳،۴) وجود دارد؟ چرا؟

۳) درخت T دارای پنج رأس با درجه ۷ و شش رأس با درجه ۵ و هشت رأس با درجه ۲ و بقیه رئوس درخت T از درجه یک می‌باشند تعداد رئوس با درجه یک در درخت T را مشخص کنید.

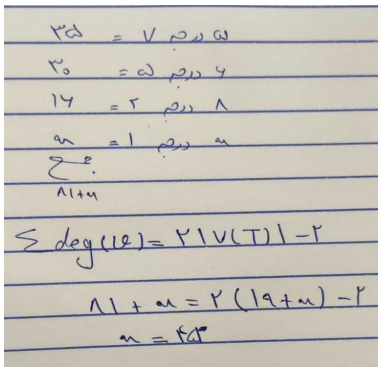
۴) فرض کنید G یک جنگل با k مؤلفه باشد. نشان دهید: $|E(G)| = |V(G)| - k$

۲. نتایج اصلی

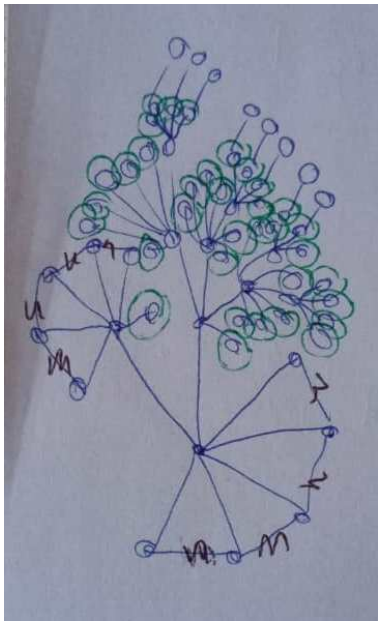
در مجموع با بررسی پاسخ‌های دانشجویان به سؤالات مصاحبه، از ۱۸ دانشجوی شرکت کننده در مصاحبه، ۱۱ دانشجو در سطح Intra، چهار دانشجو در سطح Inter و سه دانشجو در سطح Trans قرار گرفتند. در ادامه نمونه‌هایی از عملکرد دانشجویان در هر یک از مراحل پیشرفت طرحواره درخت بیان می‌شود. این نمونه‌ها شواهدی از ساخت روابط بین اجزای طرحواره درخت را منعکس می‌کنند.

دانشجویانی که در سطح Intra قرار گرفتند در حل سؤال یک نتوانستند بین طرحوارهٔ *تشخیص درخت بودن یک گراف* و ویژگی‌هایی نظیر *در درخت حداقل دو رأس درجه یک وجود دارد* یا *در درخت تعداد یال‌ها از تعداد رئوس یکی کمتر است* ارتباط برقرار کنند؛ در واقع این دانشجویان با استفاده از تعریف درخت یعنی بررسی همبندی و بدون دور بودن به سؤال یک پاسخ دادند؛ اما پس از اینکه از آن‌ها خواسته شد با روش دیگری به این سؤال پاسخ دهند، قادر به توجیه و بیان روش دیگری نبودند. این عملکرد نشان دهندهٔ این امر است که طرحوارهٔ بیش از نیمی از دانشجویان در مورد تشخیص درخت، در مرحلهٔ Intra قرار دارد. به عبارت دیگر در طرحوارهٔ تشخیص درخت ارتباط بین اجزای مختلف طرحواره در ذهن آن‌ها شکل نگرفته است. همچنین سؤال دو و سه مصاحبه نیاز به هماهنگی دو رابطه (۱) $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = ۲\,|E(G)|$ و (۲) $|E(T)| = |V(T)| - ۱$ دارد؛ نمونه‌ای از پاسخ دانشجویان به سوال سه که از دو رابطه ذکر شده در حل آن استفاده شده است در شکل ۱ مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است این سؤالات با رسم شکل نیز قابل حل شدن است، اما سؤال سه با رسم شکل بسیار زمان‌بر است.

دانشجویانی که در سطح Intra قرار داشتند قادر به هماهنگی و توجیه روابط فوق نبودند و عده‌ای با رسم شکل به این سؤالات پاسخ دادند که در مورد سؤال سه، پس از صرف زمان زیاد، فقط یک دانشجو به نتیجه رسید (شکل ۲). همچنین، این دانشجویان در پاسخ به سؤال چهار مصاحبه ناموفق بودند. این سؤال با استفاده از اینکه هر مؤلفه جنگل یک درخت است و با استفاده از رابطه (۲) قابل حل است. لذا عدم موفقیت در این سؤال می‌تواند نشان دهنده ناتوانی در برقراری ارتباط بین ویژگی‌های دو مفهوم درخت و جنگل در طرحوارهٔ درخت دانشجویان باشد.



شکل ۱: پاسخ یکی از دانشجویان به سؤال سه به کمک روابط (۱) و (۲)



شکل ۲: پاسخ یکی از دانشجویان به سؤال سه با رسم گراف

همانطورکه اشاره گردید چهار دانشجو در سطح Inter قرار گرفتند. این دانشجویان شواهدی بر ایجاد بعضی روابط بین اجزای طرحواره درخت نشان دادند، اما هنوز نتوانسته بودند طرحواره منسجمی شکل دهند و در بعضی موارد هنگام ارتباط بین اجزای طرحواره با مشکلاتی روبرو بودند. به عنوان مثال، این دانشجویان برای حل سؤال دو مصاحبه از روش مورد استفاده برای اثبات قضیهٔ کیلی که در کلاسشان مطرح شده بود و بیان می‌کند تعداد درختان نشان‌دار[۸] n رأسی برابر است با n^{n-2} استفاده کردند. این دانشجویان اگر چه زمان زیادی را صرف انجام این قضیه کردند اما هیچکدام به نتیجهٔ قابل قبولی نرسیدند. در واقع این دانشجویان ارتباط بین اجزای طرحواره را ایجاد کرده بودند ولی این ارتباط به گونهٔ مناسبی ایجاد نشده بود. به عنوان نمونه‌ای دیگر، دانشجویی که از روابط نام برده در حل سؤال سه استفاده نکرده بود، گمان می‌کرد رابطهٔ (۱) مربوط به درخت‌ها نیست؛ که این موضوع نیز عدم ارتباط مناسب بین اجزای طرحواره درخت را آشکار می‌سازد.

در انتها با بررسی جواب‌های دانشجویان سه دانشجو در مرحلهٔ Trans قرار گرفتند. این دانشجویان ارتباط بین اجزای مختلف طرحواره را به خوبی ایجاد کرده و از طرحواره منسجمی برخوردار بودند. آن‌ها در سؤال یک به روابط و ویژگی‌های موجود برای تشخیص درخت بودن اشاره کردند؛ در سؤال دو و سه با ایجاد هماهنگی بین روابط ذکر شده به این سؤالات پاسخ دادند؛ و همچنین در سؤال چهار موفق عمل کردند؛ و در حین مصاحبه رفتاری نشان ندادند که ناشی از ارتباط نامناسب بین اجزای طرحواره درخت باشد.

[۸] اگر رأس‌های یک گراف را با اعداد ۱، ۲، ... برچسب‌گذاری کنیم، آنگاه گوییم گراف مورد نظر نشان‌دار شده است.

۳. بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با استفاده از نظریه پیشرفت طرحواره پیاژه و گارسیا، پاسخ‌های دانشجویان به نه سؤال مصاحبه را مورد بررسی قرار داد و در نهایت مشخص شد تقریباً ۱۵ درصد دانشجویان در سطح Trans از طرحوارهٔ درخت قرار دارند. عدم ارتباط مناسب بین اجزای یک طرحواره، در بیش از نیمی از دانشجویان مشاهده شد. برجی و علم‌الهدایی [۱] نیز در پژوهشی دریافتند که دانشجویان مشکلات اساسی در رسم نمودار f با استفاده از شرایط داده شده در مسئله دارند؛ اکثر دانشجویان قادر به هماهنگ کردن شروطی که برای رسم نمودار نظیر پیوستگی تابع، اطلاعاتی در مورد حد تابع، مشتق اول و دوم به آن‌ها داده می‌شود، نیستند و فقط یک دانشجو از ۱۴ دانشجوی حاضر در این پژوهش در سطح Trans از طرحوارهٔ خصوصیت و فاصله که به این منظور در نظر گرفته شده بود، قرار داشت. در پژوهشی دیگر پیرامون مفهوم مشتق‌گیری ضمنی برجی و مارتینز-پلانل[۹] [۴] گزارش نمودند که از بیست و پنج دانشجوی شرکت نموده در پژوهش، طرحواره ۱۸ نفر در مرحله Inter، چهار نفر در مرحله Intra، و تنها سه نفر در مرحله trans قرار داشت. لذا می‌توان بیان نمود نتایج پژوهش حاضر در راستای پژوهش‌های انجام شده در این چارچوب نظری است.

نتایج این پژوهش نشان داد اکثر دانشجویان ساختارهای شناختی موجود در طرحوارهٔ درخت را به طور جداگانه در نظر می‌گیرند. این موضوع سبب شده بود حل بعضی سؤالات (مانند سؤال چهار مصاحبه) که نیاز به ارتباط مناسب بین اجزای طرحواره دارد، برای دانشجویان مشکل شود. علاوه بر این داشتن طرحوارهٔ منسجم پیرامون مفهوم درخت به فرد این امکان را می‌دهد که از روش‌های کوتاه و مختصرتری برای حل مسائل ریاضی در این زمینه استفاده کند. به عنوان مثال، فراگیرانی که ارتباط بین اجزای طرحواره را تا حدودی ایجاد کرده بودند؛ در سؤال یک، با استفاده از روابط و ویژگی‌های مربوط به درخت، توانستند از روش‌های آسان‌تری نسبت به تنها استفاده از تعریف درخت، برای حل این سؤال استفاده کنند. این موضوع در پاسخ به سؤالات دو و سه مصاحبه نیز مشاهده شد. بنابراین این مطالعه بر اهمیت کمک به دانشجویان در جهت ایجاد یک طرحواره منسجم پیرامون مفهوم درخت تأکید می‌کند. همچنین لازم به ذکر است همانطور که ایجاد ارتباط مناسب بین اجزای طرحواره در حل سؤالات کمک‌کننده است؛ ایجاد ارتباط نامناسب می‌تواند موجب سردرگمی در حین حل سؤالات شود. نمونه‌ای از این ارتباطات نامناسب در دانشجویانی که در سطح Inter قرار گرفتند در حل سؤال سه مصاحبه مشاهده گردید. بنابراین در یاددهی و یادگیری این مفهوم علاوه بر سعی در ایجاد ارتباط بین اجزای مختلف طرحوارهٔ درخت و ایجاد یک طرحوارهٔ منسجم، باید اقداماتی در جهت پیشگیری از ایجاد ارتباطات نامناسب صورت پذیرد. یکی از این اقدامات می‌تواند تلاش برای آگاهی کامل دانشجویان از کاربرد و جزئیات قضایا، روابط و ویژگی‌های مربوط به درخت و جلوگیری از حفظ طوطی‌وار آن‌ها باشد.

مراجع

[۱] وحید برجی و حسن علم‌الهدایی. درک نموداری دانشجویان سال اول دانشگاه از مشتق اول و دوم تحت چارچوب APOS-Triad. *کنفرانس ریاضی ایران*، ۴۷، ۲۶-۲۲، ۱۳۹۵.

[2] I. Arnon, J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktac, S. Roa, M. Trigueros, and K. Weller. *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2014.

[3] N. L. Biggs. *Discrete mathematics* (2nd ed.). Oxford University Press, 2003.

[4] V. Borji, , and R. Martínez-Planell. On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, 105(2), 163-179, 2020.

[5] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang. *Graphs & digraphs* (Vol. 22). London: Chapman & Hall, 1996.

[6] J. M. Clark, F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. John, G. Tolias, and D. Vidakovic. Constructing a schema: The case of the chain rule?. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345-364, 1997.

[7] V. Dagdilelis, and M. Satratzemi. DIDAGRAPH: Software for teaching graph theory algorithms. *ACM SIGCSE Bulletin*, 30(3), 64-68, 1998.

[8] D. Ferrarello, and M. F. Mammana. Graph theory in primary, middle, and high school. In *Teaching and learning discrete mathematics world-wide: Curriculum and research* (pp. 183-200). Springer, Cham, 2018.

[9] L. R. Foulds. *Graph theory applications*. Springer Science & Business Media, 1992.

[10] A. González, I. Gallego-Sánchez, J. M. Gavilán-Izquierdo, and M. L. Puertas. Characterizing Levels of Reasoning in Graph Theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(8), 1-16, 2021.

[11] E.W. Hart, & J. Sandefur. (Eds.) *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*. Springer, 2017.

[12] O. Hazzan, and I. Hadar. Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24*(3), 255-272, 2005.

[13] V. N. Kasyanov. Support tools for graphs in computer science education. In *Proceedings IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies* (pp. 307-308). IEEE, August 2001.

[14] J. Medová, K.Páleníková, Ľ. Rybanský, and Z. Naštická. Undergraduate students' solutions of modeling problems in algorithmic graph theory. *Mathematics*, *7*(7), 572, 2019.

[15] MIUR. Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclod'istruzione, 2012.

[16] M. Trigueros. The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM*, *51*(7), 1055-1068, 2019.

[17] R. J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Pearson Education India, 1979.

[9] Martínez-Planell

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–187، صص. ۴۱۸–۴۲۷

بررسی تاثیرآموزش خود تنظیمی و باورهای انگیزشی با پیشرفت تحصیلی دردرس ریاضی دانش‌آموزان پایه ششم شهرستان نکا

سودابه مشتاقی [۱]

کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی ساری، ایران، ساری

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
راهبردهای یادگیری خودتنظیمی
آموزش راهبردهای خودتنظیمی
پیشرفت تحصیلی
درس ریاضی

چکیده

هدف ازانجام این پژوهش بررسی اثربخشی آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌برپیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه ششم شهرنکا می‌باشد.جامعه آماری این پژوهش را کلیه دانش‌آموزان پایه ششم شهرنکا در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ که تعدادشان ۱۱۱۸ نفر (۵۱۲دختر و ۶۰۶ پسر) می‌باشد (۴۵/۸۰ درصد را دختران و ۵۴/۲۰ درصد را پسران) تشکیل می‌دهند. حجم نمونه مورد پژوهش تعداد ۲۸۶ نفر دانش‌آموز (۱۵۶ پسر و ۱۳۰ دختر) می‌باشد که با روش نمونه گیری تصادفی چندمرحله‌ای براساس جدول مورگان انتخاب شده اند. این دانش‌آموزان دردو گروه کنترل و آزمایش قرارگرفتند.دانش آموزان گروه آزمایش ۷جلسه آموزش راهبردهای خودتنظیمی‌دریافت کردند ولی دانش آموزان گروه منترل هیچ نوع آموزشی دریافت نکردند. این بررسی به روش نیمه آزمایشی صورت گرفته است.جمع آوری داده‌ها از طریق پرسشنامه راهبردهای انگیزشی در یادگیری (MSLQ) پینتریچ و دی گروت و پیشرفت تحصیلی از طریق بررسی وضعیت ریاضی در کارنامه کیفی –توصیفی در بهمن و خرداد سال جاری، انجام شده است و برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از نرم افزارSPSS استفاده شد. نتایج با ضریب تعیین P<۰۵.۰ نشان داد که بین گروه آزمایش و گروه کنترل، آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی اثر معناداری بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در درس ریاضی دارد.

۱. مقدمه

امروزه عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان به عنوان یک شاخص مهم برای ارزیابی نظام آموزشی مورد توجه قرارمی گیرد. همواره عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان، یکی ازمهمترین راههای ارزیابی عملکرد معلمان محسوب می شود و برای دانش آموزان نیز نمرات و معدل تحصیلی معرف توانایی های علمی آنها برای ورود به مقاطع تحصیلی بالاترمی باشد. ازاین رو، عملکرد تحصیلی همواره برای معلمان، دانش آموزان، والدین و پژوهشگران حوزۀ تربیتی حائز اهمیت بوده است و به همین علت، محققان و متخصصان تربیتی بسیاری پژوهشهای خود را بر شناخت عوامل موثر و مرتبط با پیشرفت تحصیلی متمرکز کرده اند (پالاردی، رامبرگر و باتلر، ۲۰۱۵). موفقیت و کارایی نظامهای آموزشی به پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در دوره های تحصیلی بستگی دارد)طالبی، خوانساری،۲۰۲۰،به نقل ازابوطالبی،۱۳۹۹). منظورازپیشرفت تحصیلی یا موفقیت تحصیلی، میل یا اشتیاق برای کسب موفقیت وشرکت درفعالیتهای آموزشی وتحصیلی است که موفقیت درآنها به کوشش وتوانایی شخص وابسته است(مومنی مهمویی وبارزای،۱۳۹۵،به نقل ازجنا آبادی،جوادیان، ۱۴۰۰). پیشرفت تحصیلی عبارت است ازمعلومات یا مهارت اکتسابی عمومی یا خصوصی درموضوع های درسی وتجلی جایگاه تحصیلی یک دانش آموز.(سوت فین،۲۰۱۲،به نقل ازسیادتیان، یارمحمدیان،۱۳۹۵). انگیزه‌ی پیشرفت ریاضی یکی از متغیرهای بسیار مهم در حوزه‌ی روانشناسی تربیتی و پیش‌بینی کننده‌ی پیشرفت و موفقیت‌های تحصیلی و شغلی در آینده می‌باشد. هر چه سطح انگیزش دانش‌آموزان بیشتر باشد، علا قه آن‌ها به یادگیری افزایش می‌یابد. از آنجا که انگیزه، عامل فعال ساز رفتار انسان و علت اختصاصی رفتاری

پست *الکترونیک:* S.moshtaghi3@gmail.com (سودابه مشتاقی)

مشخص می‌باشد، در یادگیری نقش مهمی‌را ایفا می‌کند. انگیزه‌ی پیشرفت، پیش نیازی مهم برای یادگیری محسوب می‌شود و تاثیر آن بر آموزش و یادگیری روشن است. از این رو شناسایی عواملی که بر انگیزه‌ی پیشرفت تاثیر می‌گذارند می‌تواند یکی از اساسی‌ترین مباحث در آموزش و پرورش باشد. (عطایی، ۱۳۹۴). در جامعه کنونی خوب زیستن نیازمند توانایی‌های انتخاب گری، استدلال، تصمیم گیری وحل مسئله است. آموزش و پرورش، رسالتی بزرگ در ایجاد چنین توانایی‌هایی دارد. توسعه جوامع در گرو دانش سازمان یافته ای است که به مدد پژوهش به دست آمده است و ریاضیات اساس بسیاری از این یافته های پژوهشی می باشد؛ لذا سطح به کارگیری دانش ریاضی در جوامع می تواند یکی از ملاک های توسعه باشد(احساندوست،۱۳۹۶). براین اساس، امروزه نظام های آموزش در سراسر دنیا در تلاش هستندکه با گنجاندن مباحث ریاضی در برنامه درسی خود به پرورش توانایی های ذهنی و قدرت استدلال منطقی در یادگیرندگان خود کمک کنند و آنها را برای همگامی با تحولات علمی و پیشرفتهای فناوری و زندگی آینده یاری کنند (رستگار، قربان جهرمی، غالمعلی لواسانی و نیکبخت، ۱۳۹۴) با توجه به اهمیت پیشرفت تحصیلی، محققان، عوامل تاثیر گذار در پیشرفت تحصیلی همانند روش‌های تربیتی (صمدی، ۱۳۸۶) باورهای انگیزشی (کجباف، ۱۳۸۲) و نظایر آن‌ها را مورد دقت قرار داده‌اند. یکی از عوامل مهم که ممکن است در پیشرفت تحصیلی تاثیر گذار باشد، عامل خود تنظیمی‌است. (مردعلی، ۱۳۸۷) در طی سالیان گذشته تغییر قابل توجهی در مطالعه انگیزش رخ داده است که این تغییر منجر به درک روشن‌تر مفهوم انگیزش و یافته‌های قابل تکرار مرتبط با تعلیم و تربیت گردیده است. (جلالی، ۱۳۹۲). شناخت و عاطفه به عنوان دو مولفه‌ی اساسی یادگیری همواره از طرف روان‌شناسان‌تربیتی و مربیان مورد تاکید قرار گرفته است و شناخت در برگیرنده‌ی پارهای از توانایی‌ها و اعمال ذهنی از قبیل دانش، درک کردن، تشخیص دادن، تفکر، قضاوت و استدلال می‌باشد. عاطفه بیشتر با مسائلی از قبیل انگیزش، هیجان، نگرش، ارزش‌گذاری و نظایر این‌ها در ارتباط می‌باشد. (همان منبع). انگیزش جنبه مهم تدریس و یادگیری است، در حقیقت برخی محققان معتقدند که یادگیری و انگیزش آنقدر از درون به هم وابسته‌اند که امکان درک یادگیری بدون درک انگیزش وجود ندارد(مورنو، ۲۰۱۰). شاهد این رابطه همبستگی مثبت قوی بین انگیزش و پیشرفت تحصیلی است. دانش‌آموزان دارای انگیزش بالاتر برای یادگیری در مقایسه با آنان که انگیزش کمتری برای یادگیری دارند، بیشتر یاد می‌گیرند و پیشرفت می‌کنند (مک درموت، موردل، استولتزفوس[۱]، ۲۰۰۱، به نقل از مورنو[۲]، ۲۰۱۰). در دنیای واقعی انگیزش به خاطر نتایجی که در بر دارد بسیار با ارزش می‌باشد. انگیزش تحصیلی عامل نیرو دهنده به یادگیرنده در جهت انجام تکلیف درسی و علاقمندی به پیگیری قلمداد می‌شود (آرتینو و استفانس[۳]، ۲۰۰۹)پژوهش پینتریچ و دی گروت[۴] (۱۹۹۰) بیان می‌دارد فراگیرانی که از انگیزش تحصیلی بالایی برخوردارند در مقایسه با سایر فراگیران موقعیت آموزشی برتری دارند .یکی از نظریه‌های مربوط به انگیزش که در روانشناسی پرورشی جای مهمی‌دارد نظریه "<انگیزش پیشرفت>" می‌باشد. این نظریه به تلا ش‌هایی اشاره دارد که فرد در فعالیت‌های خود به کار می‌برد تا انسانی با کفایت و شایسته تلقی شود. این اصطلاح را موری[۵](۱۹۳۸) مطرح کرد و آن را عاملی در رشد شخصیت دانست. سپس مک کللند، اتکینسون[۶] و دیگران (۱۹۵۳)به مطالعه این پدیده پرداختند. از نظر آنان، افراد دارای انگیزه پیشرفت، کسانی‌اند که برای دستیابی به برتری در یک رشته تحصیلی می‌کوشند و هدفشان کسب پیشرفت است تا پاداش به عبارت دیگر، این افراد نیاز شدیدی به پیشرفت دارند. (عطایی، ۱۳۹۴). پژوهش‌ها نیز نشان داده‌اند که انگیزش دانش‌آموزان در یادگیری اهمیت مطلوب تری در مقایسه با هوش دارد و افراد با انگیزش پیشرفت بالا بهترین برنامه‌ریزی‌ها را درجهت استفاده از زمان انجام می‌دهند. (ایوانس[۷]، ۲۰۰۵)انگیزش یک مقوله مهم در یادگیری ریاضیات است. فرض بر این است که پژوهش‌های انجام شده بر روی انگیزش در ریاضیات متفاوت از انگیزش در سایر زمینه‌ها است و همین طور از انگیزش به طور کلی متفاوت است. (کلوسترمن، ۱۹۹۷)(همان منبع). انگیزه یکی از مشهورترین مفاهیمی است که مورد توجه دانشمندان قرار گرفته و از مهم ترین عوامل موفقیت درآموزش عالی به حساب می آید .انگیزه به عنوان یک ساختار قابل توجه درفرایند یادگیری درنظر گرفته می شود وبسیار با پیشرفت تحصیلی وپایداری در مدارس ارتباط دارد(کارابیک،۲۰۲۰). در سالهای اخیر، یکی از مهمترین عوامل موفقیت تحصیلی دانش آموزان که در حوزه عوامل فردی قرار می گیرد و کانون توجه پژوهشگران و صاحب نظران تعلیم وتربیت بوده است، یادگیری خودتنظیمی می باشد (اتس، ۲۰۱۹) . خودتنظیمی‌سازهای است که از سال۱۹۶۷ از سوی بندورا طرح شد. پژوهش‌ها بیانگرآن هستند که تسلط بر مفاهیم ریاضی واستفاده مناسب وخالقانه درموقعیت‌های مختلف، مستلزم بکارگیری موثرازراهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌است (سیف و همکاران، ۱۳۸۵). آموزش راهبردهای خودتنظیمی برعملکرد دانش‌آموزان تأثیرمی‌گذارد)دیاسمول، هیروگ، و کیر، دیواس و وندیولد ، ۲۰۱۸؛ گارسیا، فالکنر و ویویان ، ۲۰۱۸ (و می تواند در افزایش پیشرفت تحصیلی)جلیل زاده و زارعی، ۱۳۹۷؛ اردونی، مرزیه و پورفاز، ۱۳۹۶) مؤثر باشد. خودتنظیمی، یک جنبه مهم یادگیری وعملکرد تحصیلی دانش آموزان در محیط کلاسی است. نظریه‌های خودتنظیمی به طور کلی به دنبال این سؤالات هستند که بدانند چرا و چگونه دانش آموزان به یادگیری روی می‌آورند؟ و برای یادگیری مستقل چه چیزی را می‌باید در مورد خود و کارهای تحصیلی خود بدانند؟، به بیان دیگر دانش‌آموزان چگونه یادگیری خود را هدایت می‌کنند؟ و چگونه انتخاب راهبردهای شناختی، فراشناختی و رفتاری موجب افزایش تلاش آنها می گردد؟ (ریسانن، پوستاروف و لیندبلوم–یالنی ، ۲۰۱۶). آموزش راهبردهای خودتنظیمی پیامدهای ارزشمندی در فرآیند آموزش و یادگیری دارد و سازگاری و موفقیت درمدرسه مستلزم آن است که دانش آموزان با توسعه خودتنظیمی یا فرآیندهای مشابه شناخت، عواطف و یا رفتارهای خود را در

---

۱ Astvltzfvs Murdel، McDermott،
۲ Moreno
۳ Stephens and Rtynv
۴ Groot De and Pintrich
۵ Murray
۶ Atkinson McClelland،
۷ Evans

جهت دستیابی به اهداف گسترش دهند وتقویت کنند (کازان ، ۲۰۱۳). آموزش راهبردهای خودتنظیمی باعث می‌شود که یادگیرندگان دردانش فراشناختی کسب مهارت کرده و بدانند که چگونه فرآیندهای ذهنی خود را در جهت پیشرفت و اهداف فردی سوق دهند. همچنین چگونه در مراحل مختلف یادگیری ، اقدام به برنامه‌ریزی،خودنظارتی،خودکنترلی و خودسنجی کنند (برادبنت شناختی،۲۰۱۷).از ویژگی این راهبردها این است که قابل آموزش هستند. براین اساس مونتاگو[۸] (۱۹۹۶)مدل شناختی ــ عاطفی حل مسئله ریاضی تنظیم کرد. دراین مدل راهبردهای شناختی حل مسئله عبارتند از: خواندن مسئله، بیان مجدد مسئله، ترجمان مسئله با رسم شکل، نمودار مسئله، سمبل‌ها، عملیات یا هر روش دیگر که مسئله را به شیوه‌های روشن‌تر و قابل فهم‌تر نشان دهد. در پژوهش عابدی و سبحانی نژاد (۱۳۹۵) نتایج نشان داد که بین راهبردهای یادگیری خودتنظیم و انگیزش پیشرفت تحصیلی با عملکرد تحصیلی ریاضی دانش آموزان رابطه معناداری وجود دارد. به علاوه، سهم نسبی انگیزش پیشرفت تحصیلی و راهبردهای یادگیری خودتنظیم در تبیین عملکرد تحصیلی دانش آموزان در درس ریاضی به ترتیب ۲۰ %و ۱۸ %است. در نتیجه با توجه به اهمیت نقش خودتنظیمیو باورهای انگیزشی در پیشرفت تحصیلی و به ویژه درس ریاضی، در این پژوهش سعی بر آن شد تا رابطه این دو عامل (خودتنظیمیو باورهای انگیزشی) را با پیشرفت تحصیلی در این درس بررسی شود.

۲. روش

با توجه به اینکه در این پژوهش قصد محقق اثر بخشی آموزش راهبردهای خود تنظیمی بر دانش‌آموزان پایه ششم شهر نکا در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ است، ازروش شبه آزمایشي‌استفاده می‌شود. چرا که محقق با اجراي‌آموزش راهبردهای خود تنظیمی‌به مقایسه تغییرات گروه تحت آموزش با گروه گواه می‌پردازد. از بین ۱۱۱۸ نفر از دانش آموزان پایه ششم شهر نکا، ۲۸۶ نفر با استفاده از جدول مورگان به عنوان نمونه انتخاب شدند. که شامل ۱۳۰ نفر دختر و ۱۵۶نفر پسر بودند. به روش نمونه گیری تصادفی ساده، تعداد ۶۵نفر به عنوان گروه آزمایش دختران و ۶۵ نفر به عنوان گروه کنترل دختران و تعداد ۷۸نفربه عنوان گروه آزمایش پسران و ۷۸ نفر به عنوان گروه کنترل پسران انتخاب می‌گردند. برای گروه آزمایش، طی۷ جلسه۴۵ دقیقه ای، راهبردهای خودتنظیمی‌آموزش داده شدو گروه کنترل هیچ آموزشی را دریافت نکرد.

۳. ابزار

پرسشنامه راهبردهای انگیزشی برای یادگیری (:MSLQ) در این پژوهش برای جمع‌آوری داده‌ها مربوط به متغیر باورهای انگیزشی از پرسشنامه راهبردهای انگیزشی برای یادگیری (MSLQ) پینتریچ و دی‌گروت (۱۹۹۰) استفاده شده است که شامل دو بخش باورهای انگیزشی (۲۵ماده) و راهبردهای یادگیری خودتنظیمی (۲۲ماده) می‌باشد و مجموع ماده‌های این مقیاس ۴۷ ماده است مقیاس باورهای انگیزشی (۲۵ماده)، سه خرده آزمون، خودکارآمدی، ارزش‌گذاری درونی و اضطراب امتحان را شامل می‌شود و مقیاس راهبردهای یادگیری خودتنظیمی (۲۲ماده) نیز دارای دو خرده آزمون استفاده از راهبردهای شناختی و خودتنظیمی‌می‌باشد. این پرسشنامه توسط پینتریچ و دی‌گروت (۱۹۹۰) برای اندازه‌گیری انگیزش و استفاده از راهبردهای شناختی و فراشناختی یادگیرندگان تهیه شده است. ماده‌های این پرسشنامه از نوع آزمون "جسته پاسخ"> پنج گزینه‌ای است (از کاملاً مخالفم =۱، تا کاملاً موافقم=۵) پینتریچ و دی‌گروت برای بررسی پایانی روایی پرسشنامه راهبردهای یادگیری انگیزشی، از روش تحلیل عواملی استفاده کردند و پنج عامل را مشخص کردند. مقیاس خودکارآمدی (۰/۸۳)، ارزش‌گذاری درونی (۸۷%)، اضطراب امتحان (۰/۷۵)، استفاده از راهبردهای شناختی (۰/۸۳)، و خود نظم‌دهی (۰/۷۴)، هم چنین موسوی نژاد (۱۳۷۶) پایانی کل آزمون را با استفاده از روش آلفای کرو نباخ ۰/۸۲ گزارش کرده است. در تحقیق حسینی رامشه (۱۳۷۷)، گویه‌های مورد استفاده در تحقیق پینتریچ و دی‌گروت (۱۹۹۰) بدون اینکه وضعیت روایی آن‌ها تغیر یابد به بیان دیگری مطرح شده است و MSLQ با ۴۷ گویه در دو بخش باورهای انگیزشی و راهبردهای یادگیری مورد تحلیل عامل قرار گرفت. بدین ترتیب که ابتدا گویه‌های مربوط به باورهای انگیزشی به روش چرخشی واریماکس و بعد از آن با چرخش ایلیمن تحلیل شد. پس از حذف گویه‌های نامربوط، سه عامل اضطراب امتحان، خودکارآمدی و ارزش‌گذاری استخراج شد. گویه‌های مربوط به اضطراب امتحان (۰/۷۷) شامل ۶ گویه بیان‌گر حالات عاطفی و هیجانی دانش‌آموز در هنگام انجام امتحان و یا هنگام پرسش معلم، ۷ گویه مربوط به خودکارآمدی بودن (۰/۶۸). گویه‌ها که در دو عامل مجزا بار عاملی داشته‌اند. به جهت قرابت گویه‌ها، این دو عامل خودکارآمدی نام گرفته‌اند (مثلاً می‌دانم که مطالب درسی را می‌توانم یاد بگیرم) و ۴ گویه دیگر به ارزش‌گذاری درونی (۰/۴۱) مربوط بود که اهمیت و جذابیت دروس را می‌سنجد (مثلاً، من حتی درس‌هایی را هم که در آن ضعیفم، دوست دارم). در تحلیل عوامل گویه‌های مربوط به راهبردهای یادگیری نیز سه عامل راهبردهای شناختی سطح بالا، سطح پایین و خود نظم‌دهی استخراج گردید. راهبردهای شناختی سطح بالا (۰/۶۸) و راهبردهای بسط دهی و سازمان‌دهی را شامل می‌شود که بیان‌گر توانایی طبقه‌بندی و سازمان‌دهی اطلاعات جدید و مرتبط کردن آن اطلاعات به دانش قبلی بود. راهبردهای شناختی بسط پایین (۰/۶۴)، دو عامل مجزا راهبرد مرور ذهنی و یادداشت برداری را شامل می‌شود. همانند تحقیق پینتریچ و دی‌گروت (۱۹۹۰) و موسوی‌نژاد (۱۳۷۶) دو سازه راهبردهای فراشناختی و راهبردهای نظارت بر تلاش از هم دیگر مجزا نشدند. بنابراین ترکیب این دو سازه طبق نام‌گذاری محققان قبلی در پژوهش حسینی رامشه نیز خودنظم‌دهی (۰/۵۵) نام گرفت. به طور خلاصه حسینی رامشه

[8] Montague

(۱۳۷۷) در تحقیق خود، راهبردهای یادگیری خود نظم داده شده در دو بخش باورهای انگیزشی (اضطراب امتحان، خودکارآمدی و ارزش‌گذاری درونی) و راهبردهای یادگیری (راهبردهای شناختی سطح بالا، راهبردهای شناختی سطح پایین، خودنظم‌دهی) مورد بررسی قرار گرفت. پایایی پرسشنامه در این پژوهش با استفاده از محاسبه ضریب آلفای کرونباخ انجام گرفت. پایایی کل پرسشنامه برابر با (۰/۶۴) و برای هر کدام از مقیاس‌های باورهای انگیزشی (۰/۷۵)، ارزش گذاری درونی (۰/۷۵)، اضطراب امتحان (۰/۸۴)، استفاده از راهبرد شناختی (۰/۸۱) و خود نظم دهی (۰/۷۳) محاسبه شد.

۴. شیوه اجرا

برای اجرای پرسشنامه و جمع‌آوری داده‌ها، به اداره آموزش و پرورش شهرستان نکا مراجعه و اطلاعاتی در رابطه با تعداد مدارس و کلاس‌ها و دانش‌آموزان گرفته شد. سپس با توجه به مدارس انتخاب شده به آنجا مراجعه نموده و تعدادی دانش‌آموز به روش تصادفی از کلاس‌هایی که به همین روش انتخاب شده بودند تعیین و برای اجرای پرسش‌نامه به منظور فراهم آوردن جوی مناسب جهت اجرای مطلوب پژوهش و بالا بردن میزان اعتبار درونی آن تدابیری به کار بسته شد. به منظور دقت بالا و جلوگیری از کاستی‌های عمدی یا سهوی توزیع و جمع‌آوری پرسش‌نامه‌ها توسط خود پژوهشگر و یا با کمک گرفتن از همکاران مدارس انجام پذیرفت که قبل از اجرای پرسش‌نامه توضیحات کامل راجع به نحوه پاسخگویی دانش‌آموزان به همکاران داده شد. قبل از اجرای پرسش‌نامه توضیحات کلی درباره هدف پژوهش و نحوه پاسخ‌دهی به سوالات و اطمینان از محرمانه بودن به دانش‌آموزان داده شد و پس از اتمام زمان تعیین شده پرسش‌نامه‌ها جمع‌آوری شد. برای گروه آزمایش، طی۷ جلسه۴۵ دقیقه ای، راهبردهای خودتنظیمی‌آموزش داده شدو گروه کنترل هیچ آموزشی را دریافت نکرد. شرح جلسات آموزشی به شرح زیر است:

جلسه اول: معرفی طرح و اخذ پیش آزمون

جلسه‌ی دوم : تعیین هدف و برنامه‌ریزی (با سه موضوع تعیین هدف، مدیریت زمان و سازماندهی).

جلسه‌ی سوم : بخش راهبردی یادگیری و مطالعه

جلسه چهارم (قسمت دوم شناخت) : سازماندهی و کاربست روش‌ها (نقشه‌ی مفهومی–خلاصه نویسی یک مطلب درسی بهترین وبسط با اندخته‌های قبلی توسط دانش آموزان)

جلسه‌ی پنجم (راهبردهای فراشناخت) : برنامه‌ریزی، نظارت و ارزشیابی و نظم دهی چرایی و چگونگی استفاده از آن‌ها راهبردهای شناختی راه‌های یادگیری هستند. در قیاس با آن‌ها، راهبردهای فراشناختی تدبیرهایی هستند برای نظارت بر راهبردهای شناختی و کنترل و هدایت آن‌ها.

جلسه ششم : راهبردهای شناختی حل مسئله ریاضی

جلسه هفتم : بررسی طرح مطالعاتی در این جلسه (جلسه هفتم) طرح با همکاری خود دانش‌آموزان و پژوهشگر جمع‌بندی شد و یک مدل جامع برای استفاده همه دانش‌آموزان ارائه شد و راه کارهایی جهت رفع موانع ارائه شد و از دانش‌آموزان شرکت کننده در طرح تقدیر و تشکر به عمل آمد.

۵. یافته‌ها

بعد از استخراج اطلاعات مورد نیاز، از طریق برنامه آماری spss مورد تجزیه و تحلیل واقع شد. جهت تجزیه و تحلیل دادها از دو روش استفاده گردید:۱–آمارتوصیفی: بخشی از دادهای پژوهش به صورت توصیفی که شامل جداول توزیع فراوانی و میانگین نمرات آزمودنی‌ها است. ۲– آماراستنباطی : در این پژوهش برای تجزیه و تحلیل داده‌ها به دلیل استفاده از ۲ گروه متفاوت که میانگین آن‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرد از آزمون من ویتنی استفاده می‌شود.

داده‌های جدول ۱ نشان می‌دهد که؛ از بین ۲۸۶ نفر نمونه آماری، ۴۵/۵% (۱۳۰ نفر) را دختران و ۵۴/۵% (۱۵۶نفر) را پسران تشکیل می‌دهند. که ۲۲/۷% دختران در گروه آزمایش و ۲۲/۷% در گروه کنترل قرار گرفتند. همچنین از ۵۴/۵% پسران، ۲۷/۳ درصد در گروه آزمایش و ۲۷/۳ درصد به گروه کنترل اختصاص یافتند.
داده‌های جدول ۲ نشان می‌دهد که؛ در مرحله پیش آزمون از ۴۵/۵% (۱۳۰ نفر) دختران، پیشرفت تحصیلی ۲/۱ % از دختران نیازمند تلاش، ۱۶/۴% قابل قبول، ۲۵/۲ % خوب و ۱/۷% در سطح خیلی خوب بوده است و همچنین از ۵۴/۵% (۱۵۶ نفر) از پسران، پیشرفت تحصیلی

جدول ۱: توزیع فراوانی وضعیت دانش آموزان بر حسب گروه آزمودنی‌ها و جنسیت

جنسیت	آزمایش		کنترل		کل	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
دختر	۶۵	%۷.۲۲	۶۵	%۷.۲۲	۱۳۰	%۵.۴۵
پسر	۷۸	%۳.۲۷	۷۸	%۳.۲۷	۱۵۶	%۵.۵۴
جمع کل	۱۴۳	۵۰	۱۴۳	۵۰	۲۸۶	%۰.۱۰۰

جدول ۲: توزیع فراوانی وضعیت پیشرفت تحصیلی دانش آموزان بر حسب جنسیت درمرحله پیش آزمون

جنسیت		پیشرفت تحصیلی				
		نیازمند تلاش	قابل قبول	خوب	خیلی خوب	کل
دختر	فراوانی	۶	۴۷	۷۲	۵	۱۳۰
	درصد	%۱.۲	%۴.۱۶	%۲.۲۵	%۷.۱	%۵.۴۵
پسر	فراوانی	۱۰	۵۷	۸۳	۶	۱۵۶
	درصد	%۵.۳	%۹.۱۹	%۰.۲۹	%۱.۲	%۵.۵۴
جمع کل	فراوانی	۱۶	۱۰۴	۱۵۵	۱۱	۲۸۶
	درصد	%۶.۵	%۴.۳۶	%۲.۵۴	%۸.۳	%۰.۱۰۰

جدول ۳: توزیع فراوانی وضعیت پیشرفت تحصیلی دانش آموزان بر حسب جنسیت درمرحله پس آزمون

جنسیت		پیشرفت تحصیلی				
		نیازمند تلاش	قابل قبول	خوب	خیلی خوب	کل
دختر	فراوانی	۱	۳۴	۷۱	۲۴	۱۳۰
	درصد	%۳.	%۹.۱۱	%۸.۲۴	%۴.۸	%۵.۴۵
پسر	فراوانی	۶	۳۰	۹۴	۲۶	۱۵۶
	درصد	%۱.۲	%۵.۱۰	%۹.۳۲	%۱.۹	%۵.۵۴
جمع کل	فراوانی	۷	۶۴	۱۶۵	۵۰	۲۸۶
	درصد	%۴.۲	%۴.۲۲	%۷.۵۷	%۵.۱۷	%۰.۱۰۰

۳/۵% نیازمند تلاش، ۱۹/۹% قابل قبول، ۲۹/۰۰ % خوب و ۲/۱% در سطح خیلی خوب بوده است و بطور کلی، در مرحله پیش آزمون، بیشترین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در سطح خوب (۵۴/۲%) و کمترین درصد در سطح خیلی خوب (۳/۸%) می‌باشد.
داده‌های جدول ۳ نشان می‌دهد که؛ در مرحله پس آزمون از ۴۵/۵% (۱۳۰ نفر) دختران، پیشرفت تحصیلی ۰/۳ % از دختران نیازمند تلاش، ۱۱/۹% قابل قبول، ۲۴/۸ % خوب و ۸/۴% در سطح خیلی خوب بوده است و همچنین از ۵۴/۵% (۱۵۶ نفر) از پسران، پیشرفت تحصیلی ۲/۱% نیازمند تلاش، ۱۰/۵% قابل قبول، ۳۲/۹ % خوب و ۹/۱% در سطح خیلی خوب بوده است و بطور کلی، در مرحله پس آزمون، بیشترین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در سطح خوب (۵۷/۷%) و کمترین درصد در سطح نیازمند تلاش (۲/۴%) می‌باشد.

جدول ۴: توزیع فراوانی وضعیت پیشرفت تحصیلی دانش آموزان برحسب گروه آزمودنی‌ها درمرحله پیش آزمون

گروه		پیشرفت تحصیلی				
		نیازمند تلاش	قابل قبول	خوب	خیلی خوب	کل
آزمایش	فراوانی	۸	۵۴	۷۷	۴	۱۴۳
	درصد	%۸.۲	%۹.۱۸	%۹.۲۶	%۴.۱	%۰.۵۰
کنترل	فراوانی	۸	۵۰	۷۸	۷	۱۴۳
	درصد	%۸.۲	%۵.۱۷	%۳.۲۷	%۴.۲	%۰.۵۰
جمع کل	فراوانی	۱۶	۱۰۴	۱۵۵	۱۱	۲۸۶
	درصد	%۶.۵	%۴.۳۶	%۲.۵۴	%۸.۳	%۰.۱۰۰

داده‌های جدول ۴ نشان می‌دهد که؛ در مرحله پیش آزمون، در گروه آزمایش از ۵۰% نمونه، پیشرفت تحصیلی ۲/۸% نیازمند تلاش، ۱۸/۹ % قابل قبول، و ۲۶/۹% در سطح خوب و ۱/۴% در سطح خیلی خوب بوده است و همچنین در گروه کنترل از ۵۰% نمونه، پیشرفت تحصیلی

۲/۸% نیازمند تلاش، ۱۷/۵% قابل قبول، ۲۷/۳ % خوب و ۲/۴% در سطح خیلی خوب بوده است و بطور کلی، در مرحله پیش آزمون، بیشترین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در سطح خوب (۵۴/۲%) و کمترین درصد در سطح نیازمند تلاش (۳/۸%) می‌باشد.

جدول ۵: توزیع فراوانی وضعیت پیشرفت تحصیلی دانش آموزان برحسب گروه آزمودنی‌ها درمرحله پس آزمون

گروه		پیشرفت تحصیلی				
		نیازمند تلاش	قابل قبول	خوب	خیلی خوب	کل
آزمایش	فراوانی	۰	۵	۹۵	۴۳	۱۴۳
	درصد	%۰.	%۷.۱	%۲.۳۳	%۰.۱۵	%۰.۵۰
کنترل	فراوانی	۷	۵۹	۷۰	۷	۱۴۳
	درصد	%۴.۲	%۶.۲۰	%۵.۲۴	%۴.۲	%۰.۵۰
جمع کل	فراوانی	۷	۶۴	۱۶۵	۵۰	۲۸۶
	درصد	%۴.۲	%۴.۲۲	%۷.۵۷	%۵.۱۷	%۰.۱۰۰

داده‌های جدول ۵ نشان می‌دهد که؛ در مرحله پس آزمون، در گروه آزمایش از ۵۰% نمونه، پیشرفت تحصیلی ۱/۷% قابل قبول، ۳۳/۲ % خوب و ۱۵/۰۰% در سطح خیلی خوب بوده است و همچنین در گروه کنترل از ۵۰% نمونه، پیشرفت تحصیلی ۲/۴% نیازمند تلاش، ۲۰/۶% قابل قبول، ۲۴/۵ % خوب و ۲/۴% در سطح خیلی خوب بوده است و بطور کلی، در مرحله پس آزمون، بیشترین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در سطح خوب (۵۷/۷%) و کمترین درصد در سطح نیازمند تلاش (۲/۴%) می‌باشد.

سوال اول تحقیق: آیا آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌بر پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پایه ششم تاثیر دارد؟

جدول ۶: نتایج آزمون من ویتنی برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان بر حسب گروه آزمودنی ها

متغیرها	مصرف مواد مخدر	تعداد	مینگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
پیش آزمون	آزمایش	۱۴۳	۸۲.۱۴۰	۰۰.۲۰۱۳۷	۶۱۶.-	۵۳۸.
	کنترل	۱۴۳	۱۸.۱۴۶	۰۰.۲۰۹۰۴		
	کل	۲۸۶				
پیش آزمون	آزمایش	۱۴۳	۳۲.۱۸۲	۰۰.۲۶۰۷۲		
	کنترل	۱۴۳	۶۸.۱۰۴	۰۰.۱۴۹۶۹	۹۲۳.۸-	۰۰۰.
	کل	۲۸۶				

برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در مرحله پیش آزمون و پس آزمون بر حسب گروه آزمایش و کنترل از آزمون من ویتنی استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در مرحله پیش آزمون از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است (sig > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پیش آزمون، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد. اما در مرحله پس آزمون، مقدار سطح معناداری از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر است (sig < ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق تایید می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پس آزمون، تفاوت آماری معناداری وجود دارد که بر توجه به میانگین رتبه ای دو گروه مشاهده می‌شود میانگین رتبه ای گروه آزمایش (۱۸۲/۳۲) نسبت به گروه کنترل (۱۰۴/۶۸) بیشتر بوده است درنتیجه گروه آزمایش از پیشرفت تحصیلی بهتری برخوردار بودند. بنابراین می‌توان گفت آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌بر پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پایه ششم تاثیر دارد.

سوال دوم تحقیق: آیا آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌برپیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه ششم تاثیر دارد؟

برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر در مرحله پیش آزمون و پس آزمون بر حسب گروه آزمایش و کنترل از آزمون من ویتنی استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در مرحله پیش آزمون از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است (sig > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پیش آزمون، ، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد. اما در مرحله پس آزمون، مقدار سطح معناداری از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر است (sig < ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق تایید می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پس آزمون،، تفاوت آماری معناداری وجود دارد. که بر توجه به میانگین رتبه ای دو گروه مشاهده می‌شود میانگین رتبه ای گروه آزمایش (۸۵/۴۶) نسبت به گروه کنترل (۴۵/۵۴) بیشتر بوده است درنتیجه گروه آزمایش از پیشرفت تحصیلی بهتری برخوردار بودند. بنابراین می‌توان گفت آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌بر پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان دختر پایه ششم تاثیر دارد.

جدول ۷: نتایج آزمون من ویتنی برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان دختر بر حسب گروه آزمودنی ها

متغیرها	مصرف مواد مخدر	تعداد	مینگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
پیش آزمون	آزمایش	۶۵	۸۳.۶۲	۰۰.۴۰۸۴	۹۱۳.-	۳۶۱.
	کنترل	۶۵	۱۷.۶۸	۰۰.۴۴۳۱		
	کل	۱۳۰				
پیش آزمون	آزمایش	۶۵	۴۶.۸۵	۰۰.۵۵۵۵		
	کنترل	۶۵	۵۴.۴۵	۰۰.۲۹۶۰	۷۰۱.۶-	۰۰۰.
	کل	۱۳۰				

جدول ۸: نتایج آزمون من ویتنی برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پسر بر حسب گروه آزمودنی ها

متغیرها	مصرف مواد مخدر	تعداد	مینگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
پیش آزمون	آزمایش	۷۸	۴۸.۷۸	۵۰.۶۱۲۱	۰۰۶.-	۹۹۵.
	کنترل	۷۸	۵۲.۷۸	۵۰.۶۱۲۴		
	کل	۱۵۶				
پیش آزمون	آزمایش	۷۸	۲۷.۹۷	۰۰.۷۵۸۷		
	کنترل	۷۸	۷۳.۵۹	۰۰.۴۶۵۹	۹۱۶.۵-	۰۰۰.
	کل	۱۵۶				

سوال سوم تحقیق: آیا آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌برپیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه ششم تاثیر دارد؟
برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پسر در مرحله پیش آزمون و پس آزمون بر حسب گروه آزمایش و کنترل از آزمون من ویتنی استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در مرحله پیش آزمون از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است sig) > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پسر گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پیش آزمون، ، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد. اما در مرحله پس آزمون، مقدار سطح معناداری از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر است sig) < ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق تایید می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پسر گروه آزمایش و گروه کنترل در مرحله پس آزمون،، تفاوت آماری معناداری وجود دارد. که بر توجه به میانگین رتبه ای دو گروه مشاهده می‌شود میانگین رتبه ای گروه آزمایش (۹۷/۲۷) نسبت به گروه کنترل (۵۹/۷۳) بیشتر بوده است درنتیجه گروه آزمایش از پیشرفت تحصیلی بهتری برخوردار بودند. بنابراین می‌توان گفت آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌بر پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه ششم تاثیر دارد.
سوال چهارم تحقیق: آیا بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه آزمایش تفاوت وجود دارد؟

جدول ۹: نتایج آزمون من ویتنی برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان دختر و پسر در گروه آزمایش بر حسب جنسیت

متغیرها	جنسیت	تعداد	مینگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
پیش آزمون	دختر	۶۵	۵۰.۷۱	۵۰.۴۶۴۷	۱۴۸.-	۸۸۲.
	پسر	۷۸	۴۲.۷۲	۵۰.۵۶۴۸		
	کل	۱۴۳				
پیش آزمون	دختر	۶۵	۸۲.۷۴	۰۰.۴۸۶۳		
	پسر	۷۸	۶۵.۶۹	۰۰.۵۴۳۳	۹۰۰.-	۳۶۸.
	کل	۱۴۳				

برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه آزمایش از آزمون من ویتنی استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در مرحله پیش آزمون و پس آزمون از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است sig) > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه آزمایش ، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد.
سوال پنجم تحقیق: آیا بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه کنترل تفاوت وجود دارد؟
برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه کنترل از آزمون من ویتنی استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در مرحله پیش آزمون و پس آزمون از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است sig) > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر و پسر در گروه کنترل، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد.

جدول ۱۰: نتایج آزمون من ویتنی برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان دختر و پسر در گروه کنترل بر حسب جنسیت

متغیرها	جنسیت	تعداد	میانگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
پیش آزمون	دختر	۶۵	۷۴٫۶۱	۴۸۴۹٫۵۰	−٫۷۷۱	۰٫۴۴۱
	پسر	۷۸	۶۹٫۸۳	۵۴۴۶٫۵۰		
	کل	۱۴۳				
پیش آزمون	دختر	۶۵	۶۹٫۴۳	۴۵۱۳٫۰۰		
	پسر	۷۸	۷۴٫۱۴	۵۷۸۳٫۰۰	−٫۷۵۱	٫۴۵۳
	کل	۱۴۳				

سوال ششم تحقیق: آیا بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان قبل و بعد از آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی تفاوت وجود دارد؟

جدول ۱۱: نتایج آزمون ویلکاکسون برای مقایسه پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان قبل و بعد از آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی

متغیرها		تعداد	مینگین رتبه ها	مجموع رتبه ها	z	sig
آزمایش	رتبه مثبت	0^a	٫۰۰	٫۰۰	$-8{,}525^a$	٫۰۰۰
	رتبه منفی	85^b	۴۳٫۰۰	۳۶۵۵٫۰۰		
	کل	۱۴۳				
کنترل	رتبه مثبت	18^a	۱۵٫۰۰	۲۷۰٫۰۰		
	رتبه منفی	11^b	۰۰.۱۵	۰۰.۱۶۵	$-1{,}300^a$	٫۱۹۴
	کل	۱۴۳				

برای مقایسه پیشرفت تحصیلی دانش آموزان قبل وبعد از آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌از آزمون ویلکاکسون استفاده شده است. نتایج آزمون نشان داده است چون مقدار سطح معناداری در گروه آزمایش از مقدار ۰/۰۵ کوچکتر است (sig < ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق تایید می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان قبل و بعد از آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌در گروه آزمایش، تفاوت آماری معناداری وجود دارد. اما چون مقدار سطح معناداری در گروه کنترل از مقدار ۰/۰۵ بزرگتر است (sig > ۰۵.۰) درنتیجه فرضیه تحقیق رد می‌شود بنابراین بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان قبل و بعد از آموزش راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌در گروه آزمایش، تفاوت آماری معناداری وجود ندارد.

۶. بحث ونتیجه‌گیری

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که آموزش خودتنظیمی‌در افزایش راهبردهای یادگیری و پیشرفت تحصیلی در درس تأثیر داشته است و دانش‌آموزان دریافت کننده آموزش خودتنظیمی، در مقایسه با گروه کنترل که آموزش دریافت نکرده بودند، میزان استفاده از راهبردهای شناختی، راهبرد فراشناختی و راهبردهای مدیریت منابع را بیشتر گزارش کرده بودند و همچنین پیشرفت تحصیلی بالایی داشتند. این یافته با یافته‌های (توران و دمیرل، ۲۰۱۰؛ بمبنیوتی، ۲۰۰۸؛ ایفنتالر، ۲۰۱۲، مالمبرگ (۲۰۱۴)، شانک (۲۰۰۵)، علی‌بخشی و زارع (۱۳۸۹)، مصطفایی (۱۳۸۷)، محمدامینی (۱۳۸۷)، سلیمان‌نژاد و شهرآرای (۱۳۸۰)، یعقوبی و همکاران (۱۳۹۲)، عسگری و همکاران (۱۳۹۰) و صمدی (۱۳۸۶) همسو است. با استناد به نظریه پینتریچ و دی‌گروت (۱۹۹۰) و نتیجه پژوهش زیمرمن و مانینز– پونس (۱۹۹۰) دانش‌آموزان خودتنظیم از نظر تحصیلی به مراتب برتر از سایر دانش‌آموزان هستند. همچنین با توجه به تحقیقات شانک (۲۰۰۵) مبنی بر آموزش خودتنظیمی‌و تنظیم اهداف برای دانش‌آموزان، می‌توان این‌گونه استدلال کرد که خودتنظیمی‌قابلیت ارتقاء و افزایش پیشرفت تحصیلی را دارد و می‌توان به خودتنظیمی‌به عنوان یک مهارت تحصیلی نگریست که با آموزش آن می‌توان به افزایش پیشرفت تحصیلی دست یافت. پینتریچ (۲۰۰۴) خودتنظیمی‌را یک فرایند فعال و سازمان یافته می‌داند که یادگیرندگان از طریق آن اهداف یادگیری خود را تنظیم کرده و تلاش می‌کنند بر شناخت، انگیزش و رفتار خود نظارت کنند. راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌شامل مهارت‌های خودآموزی، سؤال پرسیدن ازخود، خودبازبینی و تقویت خود است که به یادگیرندگان کمک می‌کند تا با استفاده از فرایندهای شناختی، یادگیری‌شان تسهیل شود. مالمبرگ (۲۰۱۴) در تحقیق خود به این نتیجه رسید که آموزش خودتنظیمی‌وسیل‌های برای چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تاکتیک مطالعه و استراتژی تنظیم شناختی است. همسو با این تحقیق علی‌بخشی و زارع (۱۳۸۹) آموزش خودتنظیمی‌را در یادگیری مؤثر یافتند. مهارت‌هایی مانند سازماندهی و ذخیره‌سازی دانش و سهولت

بهره‌برداری از آن‌ها، یادداشت‌برداری و استفاده از استراتژی‌ها برای مرور و ذخیره‌سازی اطلاعات در حافظه مانند نقشه مفهومی‌و رمزگردانی و آموزش راهبردهای نظم دادن به ذهن، دانش‌آموزان را قادر می‌سازد تا بر فرایند یادگیری و مطالعه خود تسلط یابند. دانش‌آموزان خودگردان درهنگام تدریس معلم سعی می‌کنند همان زمان با معنادار کردن اطلاعات و ایجاد ارتباط با اطلاعات قبلی، با کنترل این فرایند و ایجاد محیط یادگیری مناسب، مطالب را یاد بگیرند و عملکرد تحصیلی خود را بالا ببرند. پژوهش اشعری و همکاران (۱۳۸۸) با هدف بررسی تأثیر آموزش راهبردهای خودتنظیمی‌بر عمکرد تحصیلی یادگیری خودتنظیم در بین دانش‌آموزان دختر با عملکرد پایین بود که برای گروه آزمایشی طی ۱۰ جلسه تکنیک‌های یادگیری خودتنظیم شامل خودارزیابی، هدف گذاری، سازماندهی اطلاعات، ساخت‌دهی محیط، مرور مطالب و تطبیق مطالب جدید با اطلاعات ذخیره شده در حافظه آموزش داده شد و بعد گذشت یک ماه پیگیری نتایج نشان داد که بین گروه آزمایشی و کنترل از نظر سطح عمکرد تحصیلی و یادگیری خودتنظیمی‌تفاوت معنی‌دار وجود دارد و نتایج پژوهش حاضر همسو با این پژوهش‌ها است و گروه آزمایشی دانش‌آموزان پایه ششم دریافت کننده آموزش خودتنظیمی‌توانستند عمکرد تحصیلی بهتری نسبت به گروه کنترل از خود نشان دهند. این نتیجه را می‌توان این گونه تبیین نمود که آموزش یادگیری خودتنظیمی‌با به کارگیری راهبردهای شناختی و فراشناختی و همچنین راهبردهای مدیریت مناسب منابع، سعی درافزایش یادگیری و درک و تمرکز دانش‌آموزان دارد؛ از این رو موجب بهبود پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش‌آموزان می‌گردد. در نتیجه، آموزش یادگیری خودتنظیمی‌با کاربرد راهبردهای شناختی و خودتنظیمی‌مهارت‌های دانش‌آموزان را در تکالیف ارتقا داده و موجب می‌شود دانش آموزان، تکالیف درسی را بیشتر پی‌گیری کنند. همچنین می‌توان گفت که یادگیرنده‌ی خودتنظیم، مشارکت کنندگان فعال در فرایند یادگیری هستند. برای پی گیری اهداف یادگیری خود، این دانش آموزان با استفاده از راهبردهای یادگیری گوناگون و به طور مداوم پیشرفت خود را نظارت می‌کنند و در صورت لزوم روش خود را تغییر می‌دهند. با توجه به مطالب فوق و نتیجه پژوهش حاضر می‌توان آموزش خودتنظیمی‌را به عنوان تسهیل کننده در امر یادگیری و عاملی مؤثر درپیشرفت تحصیلی برای مجریان امر تعلیم و تربیت پیشنهاد داد.

مراجع

[۱] اردونی، س.، مرزیه، ا و پورقاز، ع. (۱۳۹۶). رابطهٔ انگیزش تحصیلی و راهبردهای خودتنظیمی با اضطراب درس آمار دانشجویان. فصلنامه مطالعات روانشناسی تربیتی ۲۶، ۶۲-۳۷.

[۲] ابوطالبی، حمید.(۱۳۹۹). تأثیر اشتیاق تحصیلی و جدیت تحصیلی در پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر دوره ابتدایی منطقه ۷ شهر کرج. فصلنامه مدیریت و چشم انداز آموزش، دورهٔ دوم، شمارهٔ چهارم (پیاپی ششم) زمستان ۱۳۹۹.

[۳] امینی، زرار. (۱۳۸۷). رابطه راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌و باورهای انگیزشی با پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان. اندیشه‌های نوین تربیتی، دوره‌ی ۴، شماره۴.

[۴] سبحانی‌نژاد، مهدی؛ عابدی، احمد (۱۳۹۵). بررسی رابطه بین راهبردهای یادگیری خودتنظیم و انگیزه پیشرفت دانش‌آموزان دوره متوسطه شهر اصفهان با عملکرد تحصیلی آنان در درس ریاضی. فصلنامه علمی‌پژوهشی، روانشناسی دانشگاه تبریز، شماره۱، سال اول.

[۵] سلیمان نژاد، اکبر؛ شهر آرای، مهرناز، ارتباط منبع کنترل و خودتنظیمی‌با پیشرفت تحصیلی (۱۳۸۰)، مجله روانشناسی و علوم تربیتی، دانشگاه تهران، دوره۳۱، شماره۲.

[۶] سیادتیان، سید حسین، یارمحمدیان، احمد. (۱۳۹۵). اثربخشی مداخلات روانشناختی–آموزشی بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دبیرستانی (۱۳۸۴-۱۳۹۱). پژوهش در برنامه ریزي درسي .سال ۱۳،دوره دوم،شماره ۲۱ (پیاپی۴۸) ص۱۷۹-۱۶۶.

[۷] سیف، دیبا. (۱۳۸۵). رابطه هوش، باورهای معرفت‌شناختی، باورهای انگیزشی، راهبردهای خود نظم‌دهی انگیزش ویادگیری با پیشرفت تحصیلی و بررسی این عوامل در سطوح تفاوت هوش، رساله‌ی دکتری، دانشگاه شیراز.

[۸] جلالی، فاطمه، بررسی رابطه راهبردهای یادگیری خودتنظیمی و باورهای انگیزشی با پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان سوم متوسطه ناحیه ۳ شهر بندرعباس در سال تحصیلی ۹۱-۹۲، پایان‌نامه.

[۹] جلیل زاده، ح و زارعی، ح.ع. (۱۳۹۷). اثربخشی آموزش راهبردهای خودتنظیمی بر انگیزش تحصیلی و اضطراب امتحان در دانش آموزان. نشریه آموزش وارزشیابی ۱۱(۴۲)،۳۲-۱۳.

[۱۰] جنا آبادی،ح،جوادیان، ن. (۱۴۰۰). رابطهٔ میان سبکهای شناختی نوگریز – نوگرا با اهمال کاری تحصیلی و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان. "ح دوفصلنامه راهبردهای شناختی دریادگیری ،سال نهم، شماره هفدهم. پاییزوزمستان ۱۴۰۰.

[۱۱] صمدی، معصومه (۱۳۸۶). بررسی تاثیر راهبردهای خودتنظیمی‌والدین و راهبردهای خودتنظیمی‌در یادگیری دانش‌آموزان بر عزت نفس دانش‌آموزان دختر دوره راهنمایی شهر تهران. فصلنامه اندیشه‌های نوین تربیتی، دانشکده علوم تربیتی و روان‌شناسی. دانشگاه الزهرا، شماره۱و۲، صص ۱۵۳-۱۳۷.

[۱۲] طالبی خوانساری، ل (۱۳۹۹). رابطه مدیریت کلاس درس تمرین ها و مهارت های ارتباطی با پیشرفت تحصیلی انگیزه دانش آموزان مقطع ابتدایی شهرستان چابکسر. مدیریت و دیدگاه آموزشی،۲(۳).۱۱۳-۱۳۱. https://dx.doi.org/10.22034/jmep.2020.243991.1030..

[۱۳] عطایی، مریم، حمیدی، فریده، نصری، صادق، رابطه‌ی راهبردهای یادگیری خودتنظیمی و خودپنداشت ریاضی با انگیزه پیشرفت ریاضی، مجله روان شناسی، سال۱۹، شماره۴، زمستان۹۴

[۱۴] کجباف، محمدباقر، مولوی، حسین و تهرانی، علی رضا (۱۳۸۲). رابطه باورهای انگیزشی و راهبردهای یادگیری خودتنظیمی‌با عملکرد دانش‌آموزان دبیرستانی. فصل‌نامه تازه‌های علوم شناختی. شماره ۱، دوره ۵، صص ۳۳-۲۷.

[۱۵] مردعلی، لیلا، رابطه خود تنظیمی و پیشرفت تحصیلی، فصلنامه اندیشه و رفتار، دوره دوم، شماره۷،بهار ۱۳۸۷

[۱۶] مصطفایی، علی. (۱۳۸۷). بررسی اثر بخشی آموزش مولفه‌های راهبردهای یادگیری خوتنظیمی‌مبتنی بر مدل پینتریچ بر خودکارآمدی، منبع کنترل و پیشفت تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه سوم دبیرستان، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده روان‌شناسی و علوم تربیتی.

[۱۷] مؤمنی مهمویی، حسین و جاللی بارزاری، سعید. (۱۳۹۵) رابطهٔ خوش بینی تحصیلی معلمان با ادراک حمایت اجتماعی، انگیزه پیشرفت و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان "ح دوماهنامه علمی –پژوهشی رهیافتی نو در مدیریت آموزشی "ح، ۷(۲۶ ،)۱۸۱-۲۰۰.

[18] Broadbent, J. (2017). Comparing online and blended learner's self-regulated learning strategies and academic performance. The Internet and Higher Education, 33, 24-32.

[19] Cazan, A. (2013). Teaching self-regulated learning strategies for psychology students. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 78, 743-747.

[20] DeSmul, M., Heirweg, S., VanKeer, H., Devos, G., & Vandevelde, S. (2018). How competent do teachers feel instructing self-regulated

learning strategies? Development and validation of the teacher self-efficacy scale to implement selfregulated learning. Teaching and Teacher Education, 71, 214-225.
[21] Karabıyık C. The interplay between academic motivation and academic achievement of teacher trainees. International Journal of Curriculum and Instruction 2020; 12 (2): 209 - 225.
[22] Oates, S. (2019). The Importance of Autonomous, Self-Regulated Learning in Primary Initial Teacher Training. Curriculum, Instruction, and Pedagogy. 1-8.
[23] Montague, Marjorie. (2007). Self Regulation and Mathematics instruction. Learning Disabilities Research & practice, 22 (1), 75 – 83.
[24] Suet Fin, L.& Ishak,Z.(2012). A Priori Model of Students' Academic Achievement: The Effect of Gender as Moderator. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 65(3), pp 1092-1100.
[25] Shunck, D. H. (2005). Learning theories (3 ed. Ed). Upper saddle River, Nj: Merrill prentice Hall.
[26] Palardy, G. J., Rumberger, R. W., & Butler, T. (2015). The Effect of High School Socioeconomic, Racial, and Linguistic Segregation on Academic Performance and School Behaviors. Teachers College Record, 117(12), n12.
[27] Pintrich, P. R, & Degroot, E. V. (1990). Motivational and self regulated learning components of classroomacademic performance. Journal of Educational psychology, 82, 33 – 40.
[28] Raisanen, M., Postareff, L., & Lindblom-Ylanne, S. (2016). University students' self- and co-regulation of learning and processes of understanding: A personoriented approach. Learning and Individual Differences, 47, 281-288 .
[29] Zimmerman, B. , & Mortinez – Pons, M.(1990) , Construct Validation of a strategy model of student self – regulated learning, journal of Educational psychology, 80, 284 – 290,.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–196، صص. ۴۲۸–۴۳۴

بررسی تاثیر یادگیری مشارکتی در بهبود روابط اجتماعی دانش آموزان در درس ریاضی

آرزو حسینی*[،آ]، مائده روح نواز[۱]، فاطمه معاون[۱آ]

[آ] استادیار دانشگاه فرهنگیان ـ پردیس نسیبه ـ مرکز آموزش عالی‌شهید شرافت

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی :
یادگیری
یادگیری مشارکتی
خودکار آمدی

چکیده

هدف پژوهش حاضر، بررسی تاثیر یادگیری مشارکتی در بهبود روابط اجتماعی دانش آموزان در درس ریاضی، پایه یازدهم تجربی در فضای مجازی است. پژوهش حاضر از نوع بنیادی می‌باشد. طرح پژوهشی نیمه آزمایشی و با استفاده از پیش آزمون، پس آزمون و تهیه پرسشنامه صورت می‌گیرد. با استفاده از روش نمونه گیری تصادفی ۱۵ نفر از دانش آموزان انتخاب شدند. ابزار های مورد استفاده عبارتند از: پرسشنامه و آزمون پیشرفت تحصیلی. دانش آموزان به گروه های ۳ و ۴ نفره تقسیم شدند، به هر گروه ۳ سوال داده شد تا با همکاری و مشارکت هم به حل سوالات بپردازند. و در نهایت از چند گروه به صورت انتخابی درخواست شد تا پاسخ سوالات گروه خود را در گروه کلاسی برای دانش آموزان دیگر نیز توضیح دهند. با توجه به بازخورد مثبت دانش آموزان نسبت به اجرای این فعالیت در کلاس و نتایج نظرسنجی دانش آموزان و اعلام رضایت اکثر دانش آموزان، نشان دهنده موقیت پژوهش ما می‌باشد.

۱. مقدمه

طبق مشاهدات صورت گرفته از کلاس درس ، تدریس معلم بیشتر به شیوه سخنرانی انجام می‌شود و باتوجه به شرایط مجازی هم کلاس درس را خسته کننده تر می‌کند و موجب می‌شود کلاس جذابیت خود را ازدست داده و میزان مشارکت دانش‌آموزان در فعالیت های کلاسی پایین بیاید و البته معلم هم برای جذب و پویایی دانش‌آموزان نه شیوه تدریس مشارکتی را پیش می‌گیرد و نه از ترفندهایی مثل ایجاد سوال های چالش برانگیز، در نظر گرفتن نمرات مثبت جهت فعالیت دانش‌آموزان و انواع کار های خلاقانه دیگر جهت برانگیختن انگیزه و پویایی دانش‌آموزان بهره می‌گیرد که به تبع با وجود چنین شیوه‌ای میزان یادگیری دانش‌آموزان نیز پایین می آید. در کل موارد زیر در کلاس درس مطرح است: عدم تقویت روحیه انجام کار گروهی بین دانش‌آموزان کلاس

ـ متکلم وحده بودن معلم در تدریس

ـ عدم تعیین تکلیف گروهی برای دانش‌آموزان جهت ارائه به معلم و گاها در کلا

ـ کاهش فعالیت های گروهی و بحث بین معلم و دانش‌آموزان

ـ کاهش مشارکت بین معلم و دانش‌آموزان در ارائه مباحث درسی

معلمین در فرایند تدریس نقش به سزایی دارند و لازم است آنها در مدارس برای تدریس، روش‌هایی را به کار ببرند تا دانش‌آموزان را به صورت فعال و متفکرانه در فرایندیادگیری دخالت کنند. دانش‌آموزان به لحاظ تحصیلی و اجتماعی، وقتی فرصت هایی برای تعامل با یکدیگر بدست می‌آورند و زمانی که به صورت مشترک روی اهداف کار می‌کنند، موفقیت های بیشتری کسب می‌کنند ؛ از طریق تعامل، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند

*سخنران
پست الکترونیک : a.hosseini@cfu.ac.ir (آرزو حسینی)

که با یکدیگر موضوعات را مورد بررسی قرار دهند، در ایده ها و اندیشه های یکدیگر سهیم شوند، تفاوت های خود را بهتر بشناسند و فهم جدیدی را بنا نهند. به علاوه آنها یاد می گیرند تا از زبان برای توضیح دادن تجربیات و واقعیت های جدیدی که به آنها کمک می کند تا با روش‌های جدید تفکر و احساس آشنا شوند، استفاده کنند ،همچنین وقتی دانش‌آموزان به صورت مشارکتی با یکدیگر کار می‌کنند، فعالیت بیشتری را از خود در بحث های گروهی نشان می‌دهند و در سطوح بالای مباحثه با یکدیگر به بحث می‌پردازند و وقتی دیگران صحبت می‌کنند به خوبی گوش می‌دهند و به طور عقلانی مشارکت ارزشمندتری را بوجود می‌آورند کار مشارکتی دانش‌آموزان اتفاق نظر خود را از اهداف گروه افزایش می‌دهند و نیاز به کمک و حمایت از یادگیری یکدیگر را درک می‌کنند و این موضوع آنها را بر می‌انگیزد تا بازخوردها و اطلاعات مطلوب را برای یکدیگر فراهم آورند و تلاش می‌نمایند تا از طریق آن یادگیری خود و دیگران را به حداکثر برسانند. به منظور اطمینان از نتایج حاصل از تحقیق صورت گرفته پرسش نامه ای تهیه و اجرا گردید که در ذیل قرار داده شده است. طی تحقیق درباره پیشینه تحقیق به این نتیجه دست یافته شد

سوالات / گزینه	خیلی زیاد	زیاد	متوسط	کم	خیلی کم
انجام فعالیت گروهی به چه میزان در یادگیری شما موثر بوده است؟					
چقدر برای برطرف کردن اشکالات یک دیگر تلاش کرده اید؟					
آیا انجام این فعالیت موجب بالا رفتن اعتماد به نفس شما شده است؟					
این فعالیت به چه میزان در روابط اجتماعی یا دوستانه شما موثر بوده است؟					
آیا با انجام این فعالیت ها استرس شما کاهش پیدا کرده است؟					

شکل ۱: پرسشنامه

که در رویکرد مشارکتي دانش آموزان مسئولیت یادگیري خود وسایر هم تیمي هاي خود را بر عهده مي گیرند، از این رو با همدیگردرتعامل بوده وبا قرار گرفتن در موقعیت هاي یادگیري وحل مسئله بهتر فرا مي گیرند واز سوي دیگر ماهیت درس رياضي ولزوم یادگیري عمیق وتواناییي تجزیه وتحلیل این درس نیز کار مشارکتي دانش آموزان را تسهیل نموده وآنها را در تدریس به یکدیگر وکمک به دانش آموزان ضعیف گروه، ضمن بهبود بخشیدن به یادگیري اعضاي متوسط وضعیف گروه، یادگیري خود را بهبود مي بخشند. این شیوه یادگیري فرصت اندیشیدن، خلاقیت، تفکر منطقي وتجربه متعامل دانش آموزان با همدیگر را فراهم آورده و تاثیر مثبتي برموفقیت تحصیلي آنها در دروسي مانند ریاضي مي گذارد، چیزي که روش هاي سنتي و معمول یادگیري فاقد آن مي باشند.(صفرعلی و ادیب ،۱۳۹۴) یادگیری مشارکتی مجموعه ای از روش‌های آموزشی است که دانش‌آموزان را برای کار در گروه های کوچک با توانایی های مختلف آماده می‌کند، به آنها کمک می‌کند تا یادگیری یکدیگر را تسهیل نمایند به اهمیت کارکردن با یکدیگر پی ببرند و از این طریق یادگیری خود و دیگران را افزایش دهند. به هرحال برای اینکه یادگیری مشارکتی مؤثر واقع شود، طراحی مناسب نحوة مشارکت ضروری است ، و برای یادگیری انفرادی هر یک از اعضای گروه، مشارکت فعال هر یک از دانش‌آموزان گروه حیاتی است .عملکرد گروه باید بیش از عملکرد انفرادی باشد، کار گروهی موفق ممکن است دستاوردهای یادگیری را از طریق خودکارآمدی جمعی فزایش دهد. یادگیری مشارکتی می‌تواند کسب دانش بسط موضوعات ، توجه و آ گاهی ،را افزایش دهد. یادگیری مشارکتی، احترام متقابل و یادگیری در میان دانش‌آموزان با توانایی ها و استعدادهای مختلف، زبان ها و زمینه نژادی و قومی مختلف را تشویق می‌کند .همچنین یادگیری مشارکتی در افزایش دستاوردهای دانش‌آموزان مؤثر است . یادگیری مشارکتی برون دادهای رفتاری از قبیل پرورش مشارکت و ارتباط با دیگران تیم سازی و مهارت های کار تیمی و حذف تقلب را افزایش می‌دهد. در حوزة عاطفی نیز، مشارکت یک محیط یادگیری خوشایند را ایجاد می‌کند ،و با سطوح بالای رضایت دانش‌آموزان همبسته است و اضطراب امتحان پایین تر را نیز در پی دارد. همچنین پذیرش اجتماعي افراد را بهبود بخشیده و در حین اجرا احساس عدم قابلیت را کاهش داده و به فرد اعتماد به نفس میدهد.(کرامتی ، حیدری، عنایتی و هدایتی ،۱۳۹۱) در محیط یادگیری مشارکتی فرایند یادگیری از نتیجه آن مهم‌تر است و کسی به خاطر ندانستن مورد مواخذه قرار نمیگیرد. دانش آموزان با یکدیگر مقایسه نمی‌شوند و به رقابت با هم نمی پردازند در گروه های مشارکتی به دانش آموزان فرصت داده می‌شود با سوال پرسیدن و کمک خواستن از اعضای گروه مفاهیم پیچیده ریاضی را یاد بگیرند و به این وسیله، اعتماد به توانایی‌های یادگیری ریاضی را افزایش و اضطراب را کاهش می یابد. در چنین فضای آموزشی است که دانش آموز می تواند احساس آرامش، امنیت، عدم نگرانی و ترس داشته

باشد.(لواسانی و همکاران ، ۱۳۹۰)
یادگیري مشارکتي به روش آموزشی اشاره می کند که در آن معلمان، دانش آموزان را در گروه هاي کوچك سازمان مي دهند، تا در یادگیري محتواي تحصیلي با هم کار کنند و یکدیگر را در این امر یاري رسانند. ویژگی مهم این روش آن است که در آن اعضاي گروه با هم کار مي کنند تا به هدف مشترکي برسند که هم کل گروه و هم فرد فرد اعضای گروه از آن سود میبرند (سیف،۱۳۷۵)
در یادگیری مشارکتی دانش آموزان یاد میگیرند تفاوت های خود را بهتر بشناسند و فهم جدیدی را بنا نهند. به علاوه آنها یاد می گیرند تا از زبان برای توضیح دادن تجربیات و واقعیت های جدیدی که به آنها کمک می کند تا با روش های جدید تفکر و احساس آشنا شوند، استفاده کنند، همچنین وقتی دانش آموزان به صورت مشارکتی با یکدیگر کار می کنند، فعالیت بیشتری را از خود در بحث های گروهی نشان می دهند و در سطوح بالایی مباحثه با یکدیگر به بحث می پردازند و وقتی دیگران صحبت می کنند به خوبی گوش می دهند، به طور عقلانی مشارکت ارزشمندتری را بوجود می آورند .(خلیلی و احمدی،۱۳۹۷)
کار مشارکتی دانش آموزان اتفاق نظر خود را از اهداف گروه افزایش می دهند و نیاز به کمک و حمایت از یادگیری یکدیگر را درک می کنند و این موضوع آنها را برمی انگیزد تا بازخورد ها و اطلاعات مطلوب را برای یکدیگر فراهم آورند و تلاش می نمایند تا از طریق آن یادگیری خود و دیگران را به حداکثر برسانند. یادگیری مشارکتی مجموعه ای از روش های آموزشی است که دانش آموزان را برای کار در گروه های کوچک با توانایی های مختلف آماده می کند، به آنها کمک می کند تا یادگیری یکدیگر را تسهیل نمایند، به اهمیت کارکردن با یکدیگر پی ببرند و از این طریق یادگیری خود و دیگران را افزایش دهند. (کریمی،میرشاه،شرفی،۱۳۹۴)
بسیاری از تحقیقات نشان داده اند که دانش آموزان به لحاظ تحصیلی و اجتماعی، وقتی فرصت هایی برای تعامل با یکدیگر بدست می آورند و زمانی که به صورت مشترک روی اهداف کار می کنند، موفقیت های بیشتری کسب می کنند؛ از طریق تعامل، دانش آموزان یاد می گیرند که با یکدیگر موضوعات را مورد بررسی قرار دهند، در ایده ها و اندیشه های یکدیگر سهیم شوند، به هرحال برای اینکه یادگیری مشارکتی مؤثر واقع شود، طراحی مناسب نحوۀ مشارکت ضروری است. برای یادگیری انفرادی هر یک از اعضای گروه، مشارکت فعال هر یک از دانش آموزان گروه حیاتی است.(خندقی،۱۳۸۹)

۱.۱ . *تعریف مسئله تحقیق*

اجرای یادگیری مشارکتی در گروه کلاسی دانش آموزان دختر پایه یازدهم تجربی، (واقع در منطقه ۱۹ شهر تهران) به منظور بهبود یادگیری دانش آموزان و به دست آوردن درک عمیق تر و بهتر در درس ریاضی.

۱.۲ . *فرضیه ها*

۱ یادگیری مشارکتی چه تاثیری بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در درس ریاضی خواهد داشت؟
*در این روش آموزشی، چون دانش آموزان خودشان به همراه همکلاسی ها و دوستانش به یادگیری و درک مبحث ریاضی می پردازند لذا درک عمیق تر و بهتری نسبت به روش های آموزشی سنتی به دست خواهند آورند.

۲ یادگیری مشارکتی چه تاثیری در بهبود روابط اجتماعی دانش آموزان خواهد داشت؟
*چون در این روش دانش آموزان به بحث و تبادل نظر با یکدیگر می پردازند لذا بنظر می آید تاثیر خوبی در روابط اجتماعی آنان خواهد گذاشت.

۳ یادگیری مشارکتی چه تاثیری بر کاهش اضطراب دانش آموزان در درس ریاضی خواهد داشت؟
*چون در این فرآیند یادگیری دانش آموزان با کمک یکدیگر به فهم عمیق تر و بهتری از مباحث دست میابند بنابراین استرس و اضطراب کمتری هم خواهند داشت(رضایي نکویي، ۱۴۰۰)..

۲. روش تحقیق

جامعه آماری، نمونه، روش نمونه گیری و ابزار سنجش
هدف پژوهش حاضر از نوع بنیادی می باشد. طرح پژوهشی نیمه آزمایشی و با استفاده از پیش آزمون، پس آزمون و تهیه پرسشنامه صورت می گیرد. با ا ستفاده از روش نمونه گیری تصادفی ۱۵ نفر از دانش آموزان دختر پایه یازدهم، استان تهران انتخاب خواهند شد. شیوه گرد آوری مطالب در این پژوهش مشاهده است. ابزارهای مورد استفاده عبارتند از: پرسشنامه و آزمون پیشرفت تحصیلی، داده های جمع آوری شده به صورت کمی خواهند بود. گروه آزمایشی در یک روز به یادگیری بخشی از مبحث حد به شیوه یادگیری مشارکتی می پردازند و پیشرفت تحصیلی آن ها پیش و پس از یادگیری به این شیوه، ارزیابی خواهند شد. افزایش نمرات پس آزمون دانش آموزان و مقایسه میانگین نمرات آنها قبل و بعد از اجرای یادگیری مشارکتی و ر ضایت دانش آموزان از اجرای یادگیری مشارکتی نشان دهنده موفقیت این برنامه است.

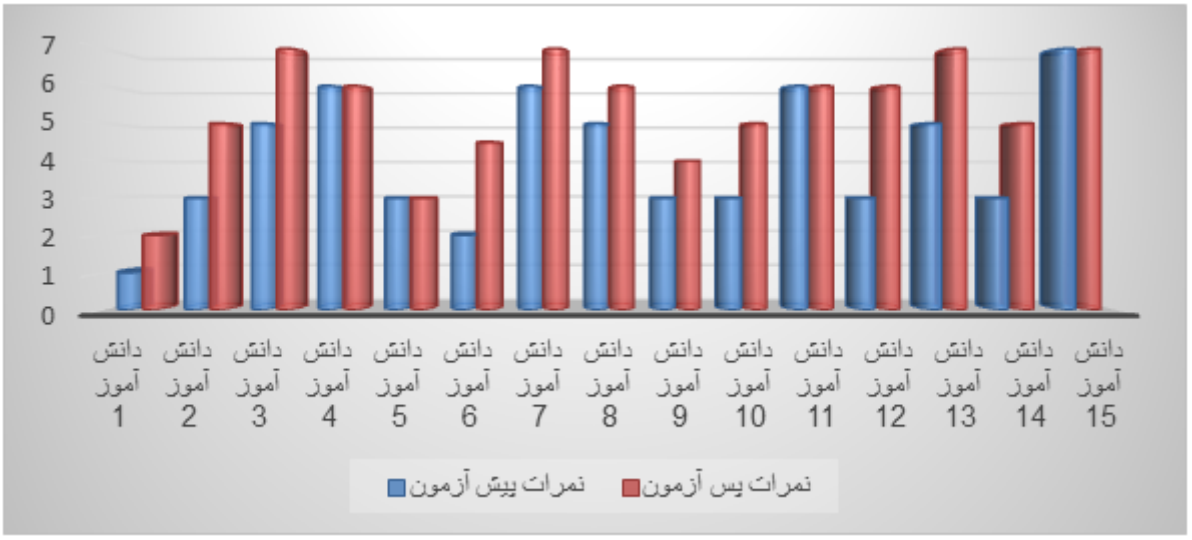
۳. نتایج

فعالیت مشارکتی در نظرگرفته شده از مبحث تازه تدریس شده معلم از ادامه فصل حد و پوستگی بود و به نوعی تثبیت مباحث حساب می شد ، از طرفی برای جدی گرفتن این فعالیت توسط دانش آموزان و کمکی به آن ها، معلم این فعالیت را، بخشی از نمره میان ترم در نظر گرفتند که بنظر فرصت خیلی خوبی برای دانش آموزان در یادگیری و کسب نمره خوب و مثبتی بود.
به همین دلیل دانش آموزان در انجام فعالیت مشارکتی، استقبال خوبی داشتند و موافقت کردند. پس تصمیم گرفتیم دانش آموزان را به گروه های سه یا دو نفره بنا بر در خواست خودشان تقسیم کنیم و متناسب با هر گروه دوتا سوال تشریحی در نظر گرفتیم، از آنجا که سوالات گروهی بود، کمی سطح سوالات بالاتر از کتاب و برای کاهش تقلب احتمالی ،سوالات هر گروه با دیگری متفاوت در نظر گرفته شد.
برای اینکه دانش آموزان همگی با یک دیگر همکاری داشته باشند ، اعلام کردیم که آخر سر ،از چند گروه ها به صورت انتخابی میخواهیم که جواب سوالات شان را در گروه برای دوستانشان توضیح دهند تا هم خودشان سوالات را به خوبی درک کنند تا بتوانند به خوبی بیان کنند و هم دیگر دانش آموزان با انواع سوالات آشنا بشوند که این کار مورد رضایت دانش آموزان واقع شد و برایشان جالب بود و تازگی داشت که به جای معلم، دوستشان مطالب را توضیح دهد.
و در کل چیزی که ما با توجه به جواب ها و برخوردها متوجه شدیم که تمام اعضای گروه به خوبی با یکدیگر در رسیدن به جواب صحیح همکاری داشتند و دانش آموزانی که اشکال داشتند، با انجام این فعالیت ایراداتشان تا حدودی برطرف شد.

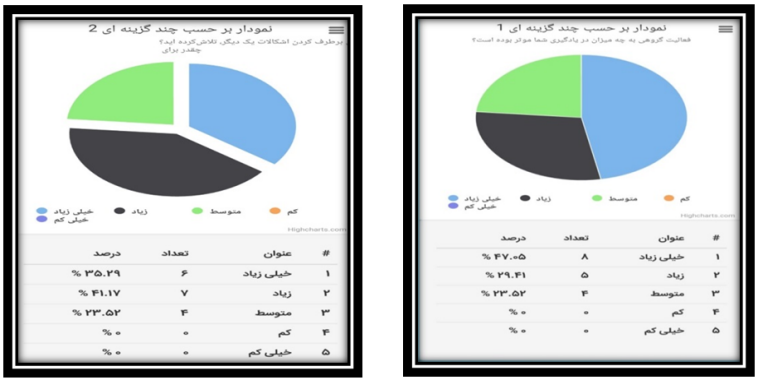
نام و نام خانوادگی	نمره پس آزمون	سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	سوال ۵	سوال ۶	نمره پیش آزمون
دانش آموز ۱	2	2_	درست	درست	صفر	گزینه دو صحیح است	0 , 2_	۱
دانش آموز ۲	5	2_	درست	درست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۴
دانش آموز ۳	7	2.5_	درست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۵
دانش آموز ۴	6	2.5_	نادرست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۶
دانش آموز ۵	3	2.5_	نادرست	نادرست	صفر	گزینه یک صحیح است	4, 2-	۳
دانش آموز ۶	4/5	2.5_	نادرست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	1_, 0	۲
دانش آموز ۷	7	2.5_	درست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۶
دانش آموز ۸	6	2_	درست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۵
دانش آموز ۹	4	3	نادرست	نادرست	4	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۴
دانش آموز ۱۰	5	2_	درست	درست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۴
دانش آموز ۱۱	6	2.5_	درست	نادرست	4	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۶
دانش آموز ۱۲	6	2.5_	نادرست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۴
دانش آموز ۱۳	7	2.5_	درست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۵
دانش آموز ۱۴	5	2_	درست	درست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۴
دانش آموز ۱۵	7	2.5_	درست	نادرست	صفر	گزینه سه صحیح است	0 , 1-	۷

شکل ۲: نمرات پیش آزمون و پس آزمون دانش آموزان

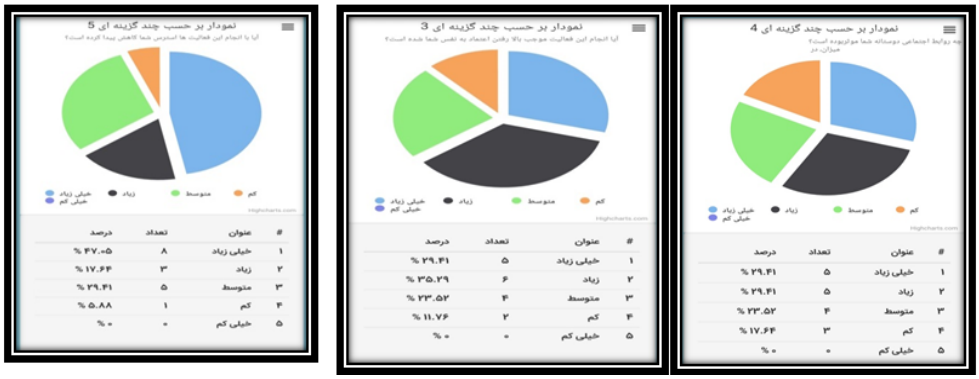
باتوجه به پس آزمون و مقایسه دونمودار، پیشرفت دانش آموزان بعد از فعالیت مشارکتی مشخص است که دلایل زیادی را شامل می شود.
اول اینکه وقتی دانش آموزان با کمک یکدیگر سعی می کنند که سوالات را حل کنند و برای یکدیگر سوالات را توضیح می دهند و اگر سوالی داشته باشند از هم میپرسند در حالی که ممکنه در صورت حل انفرادی خجالت بکشند از معلم سوال بپرسند و سوالشان بی جواب بماند، در نتیجه یادگیری مشارکتی میتواند به بهبود پیشرفت تحصیلی دانش آموز کمک کند.
مطالعه آنویوبازي نیز نشان داد دانش آموزاني که در گروه هاي یادگیري مشارکتي به یادگیري میپردازند نسبت به کساني که به طور انفرادي یاد مي گیرند پیشرفت تحصیلي و احساس مسئولیت بیشتري دارند . در واقع یادگیري مشارکتي در تحریك شاگردان براي بحث و گفت وگو پیرامون مسائل ریاضي نقش مهمي را ایفا میکند و همچنین دانش آموزان زمانی که در گروه موظف می شوند برای هدف مشترکی، تلاش کنند و با یکدیگر تعامل درست برای هدف واحد داشته باشند، در واقع روحیه اجتماعی و رواط اجتماعی آنان نیز بالا می رود و همین امر موجب عزت نفس آنان



شکل ۳: نمودار مقایسه پیش آزمون و پس آزمون



شکل ۴: نظرسنجی



شکل ۵: نظرسنجی

نیز می گردد و همین که دانش آموزان با یک دیگر تعامل دارند و در گروه برای برطرف کردن مشکلات یکدیگر و حل سوالات می کوشند، در یادگیری و پیشرفت آنان موثر خواهد بود و همین امر موجب کاهش اضطراب امتحان نیز می شود (رضایی نکویی، ۱۴۰۰).
رویکرد یادگیری مشارکتی موجب می شود که دانش آموزان مفاهیم پیچیده ریاضی را به راحتی یاد بگیرند، به درس ریاضی علاقه مند شوند، درست سؤال کردن را عملاً تجربه کنند، اضطراب کمتر و حس همکاری بیشتری در کلاس درس ریاضی داشته باشند، با فرا گرفتن مهارت های علمی یاد بگیرند که چگونه یاد بگیرند، به تناسب ظرفیت خود رشد کنند . از آموخته های خود در زندگی واقعی بهره بگیرند، احساس خود کفایی بیشتری داشته باشند ، و از طریق تعامل و ارتباط چهره به چهره و بحث و گفت وگوی سازنده زمینه های گشوده شدن باب گنجهای پنهان خلاقیت فراهم گردد. (کرامتی، ۱۳۸۵)
علاوه بر آن، طبق تعاملی که با دانش آموزان داشتیم، هرچند سوالات کمی از سطح کتاب بالاتر و چالش برانگیز بود، همگی برای پیدا کردن جواب درست تلاش می کردند و در فهم موارد به یک دیگر کمک می کردند و آن جایی هم که با اشکالاتشان رو به رو می شدیم راهنمایی شان می کردیم و از اینکه برای گروهشان وقت گذاشته ایم تا به جواب درست برسند از ما تشکر می کردند و خیلی خوشحال بودند که اشکالات شان برطرف شده است . هم چنین، دانش آموزان از ارائه دوستانشان خیلی استقبال کردند و اظهار کردند که بزایشان تازگی داشت کسی غیر از معلم شان ، بتواند به خوبی سوالات را توضیح دهد و چیزهای جدیدی یادگرفتند و از این روش راضی بودند که گاهی در کلاسشان اجرا شود.
طبق نظرسنجی هم که آخر کلاس گرفته شد و نظرات مثبتی که در پی وی شخصی ارسال کردند، دانش آموزان، از اجرای این فعالیت رضایت داشتند (کرامتی، ۱۳۸۵و دامغانیان، ۱۳۹۸).
وقتی دانش آموزان به صورت مشارکتی با یکدیگر کار می کنند، فعالیت بیشتری را از خود در بحث های گروهی نشان می دهند و در سطوح بالایی مباحثه با یکدیگر به بحث میپردازند و وقتی دیگران صحبت میکنند به خوبی گوش می دهند و به طور عقلانی مشارکت ارزشمندتری را بوجود می آورند کار مشارکتی دانش آموزان اتفاق نظر خود را از اهداف گروه افزایش می دهند و نیاز به کمک و حمایت از یادگیری یکدیگر را درک می کنند و این موضوع آنها را برمی انگیزد تا بازخوردها و اطلاعات مطلوب را برای یکدیگر فراهم آورند. نتایج پژوهش نشان داد که بین اضطراب امتحان دانشآموزانی که به روش مشارکتی آموزش دیده بودند نسبت به دانش آموزانی که به روش متداول آموزش دریافت کرده بودند در سطح ۰/۰۵ تفاوت معناداری وجود داشت. به طوری که میانگین تعدیل شده اضطراب امتحان برای گروهی که به روش یادگیری مشارکتی آموزش دیده بودند برابر ۴۱/۴۲ و برای گروهی که به روش متداول آموزش دیده بودند برابر ۵۲/۹۶ به دست آمد. این نتیجه بدان معنی است که دانش آموزانی که به روش یادگیری مشارکتی آموزش دریافت کرده بودند نسبت به دانش آموزانی که به روش متداول آموزش دریافت کردند از اضطراب امتحان کمتری برخوردار بودند. در این راستا پژوهشهای (هنشاو، ۱۹۸۲؛ مویر وتریسی، ۱۹۹۹)نشان داده است که تحصیل در گروههای مشارکتی باعث کاهش اضطراب امتحان می شود. همچنین پژوهشهای (ویلسون، ۱۹۹۸؛ گوک و دین، ۲۰۰۷؛ اولودیپ و اوکوی، ۲۰۱۰) نشان داده است که یادگیری مشارکتی باعث کاهش اضطراب در بین دانشآموزان میشود که نتایج این پژوهش نتایج تحقیقات آنها را مورد تأیید قرار می دهد.(کرامتی، حیدری ،عنایتی،۱۳۹۱)
با توجه به نتایج حاصل از پژوهش و در نظر گرفتن باور دانش آموزان مبنی بر مؤثر بودن کار گروهی حل مساله ریاضی در آموزش یادگیری ریاضی و یادگیری ریاضی آنان و استفاده از دیدگاه های نوین، در جهت رفع بسیاری از مشکالت آموزش و یادگیری ریاضی که هم اکنون گریبان گیر تدریس ریاضی و یادگیری ریاضی است، کار گروهی کوچک در حل مسائل ریاضی راهکاری مفید و مقرون به صرفه به نظر می رسد. شواهد ناشی از این نظر سنجی بیانگر کم توجهی و بی توجهی به این راه کار از سوی مسئولین، مدرسان و مؤلفان کتب درسی می باشد. نگارندگان بر این اعتقادند که در صورت تصحیح نگرش ها بر نگارش کتب درسی و گنجاندن کارهای گروهی در اجرای پروژه ها و همچنین اجرای روش حل مساله ریاضی در گروه های کوچک کلاس درس، می توان به جای حل تمام مسایل از سوی مدرس با دانش آموزان بصورت انفرادی، با حل گروهی دو یا سه مساله که پوشاننده ی تمام مطالب اصلی مربوط به مبحث درس می باشد، توسط فراگیران و با نظارت مدرس، در آموزش یادگیری و یادگیری ریاضی بهره بیشتری برد. تجربه نشان دهنده ی این واقعیت است که زمان زیادی جهت حل، توضیح و تشریح تمام مسائل درس و نکات حل مساله مورد نیاز می باشد در صورتی که با ارزیابی درست چند مساله از سوی مدرس و حل گروهی آن ها توسط فراگیران، با نظارت مدرس می توان زمان را کوتاهتر نمود و یا در همان زمان با کمی بیشتر به اهداف بیشتری دست یافت که در طول دوره با کاهش تکرار برخی مسایل قابل آموزش از این روش در کل زمان صرفه جویی خواهد شد. همچنین برای حرکت به سوی بهتر و سریعتر حل شدن مسایل و درک بهتر و سریعتر مطالب ریاضی راهکار حل مساله گروهی ریاضی بسیار مفید می باشد. (بیک، حسین زاده و شاهورانی، ۱۳۸۸)
پیشرفت تحصیلی دانشجویانی که در فضای مجازی به صورت مشارکتی آموزش دیده بودند به نحو چشمگیری بهتر از دانشجویان آموزش دیده به روش سنتی بود. همچنین نتایج تحقیقات درباره مقایسه روش تدریس سخنرانی با روش تدریس آموزش الکترونیکی حاکی از آن است که عملکرد گروه آموزش دیدهٔ الکترونیکی بیش ازحد متوسط، و بهتر از عملکرد گروه گواه بوده است. در پژوهش خود به این نتیجه دست یافتند که بین پیشرفت تحصیلی دانشآموزان و روش تدریس مشارکتی ازطریق آموزش الکترونیکی همبستگی معناداری وجود دارد . همچنین روش یادگیری مشارکتی نیز، به عنوان یکی از روش‌های پرورش خلاقیت، توسعهٔ چشمگیراست.(اسماعیلی وموسوی،۱۳۹۵)

مراجع

[۱] حدیان ،محمد و آقازاده، محرم (۱۳۷۸). راهنمای روش‌های نوین تدریس، تهران، ناشر آژییر.

[۲] سماعیلی ، ابراهیم و موسوی، فرانک (۱۳۹۴). مقایسه روش تدریس مشارکتی ازطریق محیط یادگیری الکترونیکی با شیوهٔ سخنرانی و تأثیر آنها بر خلاقیت و پیشرفت درسی. فصلنامه علمي پژوهشي مطالعات آموزشي و آموزشگاهي دوره ۴، شماره ۱ بهار و تابستان ۱۳۹۴ صفحه ۹۷-۱۰۹.
[۳] یک، فرزانه ، حسین زاده ، فرزانه و شاهورانی، احمد (۱۳۸۸). بررسی باور دانش‌آموزان درباره کار گروهی حل مساله ریاضی، حقیق در عملیات در کاربردهای آن . ۱۳۸۸؛ ۳ (۲۲) :۵۰-۳۵.
[۴] افظی نژاد،محمد، (۱۳۹۰).مدیریت کلاس و تدریس راحت با کار گروهی، https://raveshtadris.com/
[۵] سینی، سید محمدحسن (۱۳۹۳) . سبک یادگیری گروهی، مجله پژوهش و برنامه ریزي در آموزش عالي بهار ۱۳۸۰ ، دوره ۷، شماره (۱۹)۱ ؛ صص۹۳-۱۱۴.
[۶] لیلی، حامد ، احمدی، محدثه و احمدی، محمد حسین (۱۳۹۷) .تاثیر همکاری و مشارکت دانش‌آموزان درپیشرفت تحصیلی، چهارمین کنفرانس بین المللی علوم انسانی و آموزش و پرورش.
[۷] ندقی، امیر (۱۳۸۹). روندها و رویکردهای یادگیری مشارکتی در محیط آموزش الکترونیک، پنجمین کنفرانس ملی و دومین کنفرانس بین‌المللی یادگیری و آموزش الکترونیکی.
[۸] امغانیان، زهرا (۱۳۹۸). نقش یادگیری مشارکتی در بهبود مهارت های یادگیرنده، ششمین کنفرانس بین المللی دستاوردهای نوین پژوهشی در علوم اجتماعی و علوم تربیتی و روانشناسی.
[۹] ضایي نکویي، سید هادي (۱۴۰۰). تاثیر یادگیری آنلاین مشارکتی بر رشد مهارت های اجتماعی و پیشرفت تحصیلی درس ریاضی متوسطه اول؛ همایش ملی پژوهش های حرفه ای در روانشناسی و مشاوره با رویکرد ازنگاه معلم.
[۱۰] یف، علی اکبر (۱۳۷۵).روان شناسی پرورشی (روان شناسی یادگیری و آموزش) . تهران :انتشارات آگاه.
[۱۱] فرعلي ملیحه و ادیب ، یوسف (۱۳۹۴) . تـاثیر یـادگیري مشـارکتي درتعامـل بـا سبك هـاي یـادگیري (وابسـته بـه زمینـه ونابسته بـه زمینـه) بـر پیشـرفت تحصـیلي درس ریاضي دانش آموزان دختـر پایـه اول دبیرستان – دو فصلنامه علمي– پژوهشي دانشگاه شاهد – سال بیست و دوم – دوره جدید –شماره ۶.
[۱۲] ریمی ، نیلی، میرشاه، محمدرضا و شرفی ، عاطفه (۱۳۹۴). بررسی مهمترین الزامات روش تدریس مشارکتی از دیدگاه استادان و دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان، رویکردهای نوین آموزشی سال نهم بهار و تابستان ۱۳۹۳ شماره ۱ (پیاپی ۱۹)
[۱۳] رامتی، محمدرضا (۱۳۸۵) .تـأثیر یادگیري مشارکتي بر رشد پیشرفت تحصیلي ریاضی،مجله روانشناسان علوم تربیتی، بهار ۱۳۸۶ ، دوره ۳۷ ، شماره ۱؛ صص۳۹-۵۵.
[۱۴] رامتی ،محمدرضا، حیدری، ابوذر ،عنایتی ،علی وهدایتی ،اکبر (۱۳۹۱). تأثیر یادگیری مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی درس علوم تجربی، نوآوری های آموزشی سال یازدهم زمستان ۱۳۹۱ شماره ۴۴ .
[۱۵] یضی، ایوب و مصرآبادی،جواد (۱۳۹۵). فراتحلیل تعامل جنسیت فراگیران بر تأثیر روش هاي تدریس مشارکتي و بحث گروهي آموزش و ارزشیابی سال نهم بهار ۱۳۹۵شماره ۳۳، صص۸۳-۱۰۳.
[۱۶] واسانی ، غلامعلی و همکاران (۱۳۹۰) . بررسی اثر بخشی روش یادگیری مشارکتی بر اضطراب ریاضی و رفتار کمک طلبی – مجله روانشناسی – سال پانزدهم – شماره ۴.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–198، صص. ۴۳۵–۴۴۰

تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی بر مبنای طبقه‌بندی دوبعدی شناختی اندرسون و کراتول

احمد رضائی*[آ]، امیر رضائی[ب]، امین رضائی[ج]

[آ] دانشجوی رشته آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان خراسان جنوبی
[ب] دکترای تخصصی آمار دانشگاه بیرجند
[ج] عضو هیئت‌علمی گروه کاردرمانی دانشگاه علوم پزشکی زنجان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تحلیل محتوا
کتاب ریاضی
پنجم ابتدایی
اندرسون و کراتول

2020 MSC:
97U20
97C30

چکیده

هدف از انجام پژوهش حاضر، تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی با استفاده از طبقه‌بندی دوبعدی شناختی اندرسون ـ کراتول می‌باشد. این پژوهش از منظر روش، توصیفی ـ تحلیلی و با توجه به هدف، از نوع کاربردی است. جامعه آماری این پژوهش کتاب فارسی پایه پنجم ابتدایی و نمونه آماری نیز ۵۵ پرسش برای هریک از بخش‌های فعالیت‌ها، تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها که به‌صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، می‌باشد. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که مؤلفان در طراحی سؤال‌های کتاب بر سطوح پایین فرآیند شناختی و به‌طور ویژه بر سطح به کار بستن تأکید بیشتری داشته‌اند. علاوه بر این، آنان در بعد دانش نیز، به دانش مفهومی و فراشناختی به ترتیب بیشترین و کمترین توجه را داشته‌اند. سطح آفریدن در طراحی سؤالات تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها نسبت به فعالیت‌ها به میزان بیشتری مورد تأکید پدیدآورندگان کتاب درسی بوده است.

۱. مقدمه

دوره ابتدایی به عنوان پیشتاز، راهنما و پایه برای تحصیلات متوسطه است، بنابراین برنامه‌های درسی این دوره به خصوص کتب درسی آن پیوسته باید مورد ارزشیابی و تجدیدنظر قرار گیرد. لذا اگر دانش‌آموز در تجارب یادگیری سهیم گردد، یادگیری او عمیق و معنادار صورت خواهد گرفت. پس لازم است چگونگی شیوه ارائه محتوا با روش فعال مشخص گردد تا آموزشی طراحی گردد که به عنوان آزمایشگاهی برای یادگیری چگونه آموختن باشد [۲].

در سیستم آموزش و پرورش، کتاب‌های درسی از عناصر مهم می‌باشند و محتوا نیز یکی از عناصر کتاب‌های درسی است که لازم است با عنوان کتاب متناسب و همسو باشد. اهمیت محتوای کتاب درسی از آن جهت است که تحقق اهداف بدون محتوای خوب امکان‌پذیر نمی‌باشد (میر لوحی، ۱۳۸۶؛ به نقل از [۲]). به عبارت دیگر، در بین رسانه‌های درسی - آموزشی، کتاب درسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و با دارا بودن پیام‌های نوشتاری و تصویری، دستیابی به اهداف آموزش را آسان می‌سازد [۱۰].

آموزش کتاب ریاضی به هر شکلی می‌تواند دانش را به دانش‌آموزان منتقل کند اما ماندگاری و کاربردی بودن محتوای آن جای بحث دارد. اگرچه ریاضی در برنامه درسی بسیاری از کشورها گنجانده شده است، اما پرورش افرادی که در حل مسائل موفق هستند، بسیار پیچیده است و به مهارت‌های زیادی نیاز دارد.

*سخنران
پست الکترونیک: ahmadrezaei4444@gmail.com (احمد رضائی)، amir.rezaei.st@gmail.com (امیر رضائی)، aminrezaeiot@zums.ac.ir (امین رضائی)

از کتاب‌های درسی به عنوان یکی از رشته‌های عصبی تأثیرگذار در آموزش ریاضی یاد می‌کنند که نقش محوری و اساسی در تدریس و یادگیری در کلاس درس دارد. از سوی دیگر یکی از دلایلی که فوردنتال بر ضرورت مطالعه‌ی کتاب‌های درسی ریاضی تأکید می‌کند، تحقیقاتی است که نشان می‌دهد رویکرد کتاب‌های درسی ریاضی، در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان مؤثر هستند [۳].
با نگاهی به اهداف آموزش ریاضی در مقاطع مختلف تحصیلی مشخص می‌شود که این اهداف در راستای پرورش فرآیند تفکر ازجمله حدس زدن، برآورد حل مسئله، مسئله آفرینی، پرورش تفکر شهودی و . . . است. اما عملکرد دانش‌آموزان در درس ریاضی در سطوح مختلف تحصیلی حاکی از این است که آموزش ریاضی نتوانسته است آن چنان که باید به اهداف خود جامه عمل بپوشاند [۸].
متأسفانه، در فرآیند فعالیت‌های آموزشی مدارس ما، اغلب معمولی‌ترین و شاید عمومی‌ترین هدف‌های آموزشی، کسب دانش و یادآوری است و بر همین اساس، غالباً اندازه‌گیری‌های موفقیت‌های تحصیلی نیز به‌وسیله بازگفتن حقایقی که یادگیرنده به حافظه خویش سپرده است، صورت می‌گیرد. البته در چنین موقعیتی، الزاماً موفقیت‌هایی هم برای به کار بردن محفوظات فراهم شده است، اما از آنجایی که بین "دانستن"، "توانستن" و "انجام دادن" فاصله چشمگیری وجود دارد، تأکید بر محفوظات نمی‌تواند بازگوکننده یک روند سالم آموزشی باشد. اگر معلمان و مربیان از سطوح مختلف هدف‌ها در حیطه شناختی آگاه باشند، آموزش را متناسب با سطوح مختلف آن تدارك خواهند دید و در ضمن، به فراگیر نیز فرصت خواهند داد که تمام مهارت‌های شناختی را در خود پرورش دهد [۶].
حیطه شناختی به طور کلی به یادگیری مطالب و کسب شناخت و معرفت درباره آن‌ها مربوط می‌شود. نتایج حاصل از آموزش‌های شناختی به مهارت‌های ذهنی از قبیل بازشناسی، یادآوری، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته‌ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی منتهی می‌گردد. سلسله مراتب آموختنی‌های حیطه شناختی از روند آسان به مشکل پیروی می‌کند و دامنه آن از یادگیری سطحی تا درك بسیار عمیق از مطالب، متغیر است. حیطه شناختی از شش طبقه یا سطح تنظیم شده و هر طبقه بالاتر مستلزم کسب مهارت‌های شناختی طبقه یا طبقات (سطح یا سطوح) پایین‌تر است. بنجامین بلوم در سال ۱۹۵۶ با معرفی این شش سطح، طبقه‌بندی حیطه شناختی بلوم را به جهانیان عرضه کرد [۵].
چند نفر از صاحب‌نظران آموزشی از جمله ، اندرسون و کراتول (۲۰۰۱) در طبقه‌بندی حوزه شناختی معروف به طبقه‌بندی بلوم تجدید نظر کرده و طبقه‌بندی تازه‌ای با نام " یک طبقه‌بندی برای یادگیری، آموزش و سنجش " پدید آوردند. در طبقه‌بندی تجدید نظر شده حوزه شناختی، یک بعد دانش و یک بعد فرآیند شناختی وجود دارد. بعد دانش شامل دانش واقعی، دانش مفهومی، دانش روندی و دانش فراشناختی است. بعد فرایند شناختی در برگیرنده دانش، فهمیدن، به کار بستن، تحلیل کردن، ارزشیابی و ترکیب است. طبقه‌بندی‌های هر دو بعد این طبقه‌بندی به صورت سلسله مراتبی، یعنی از عینی به انتزاعی و از ساده به پیچیده تنظیم شده‌اند [۶].
از طریق تحلیل محتوا می‌توان به ویژگی‌های یک کتاب درسی پی برد و ضعف‌ها را در محتوای کتاب‌های درسی شناسایی و معرفی نمود. از سوی دیگر، با توجه به این که نظام آموزش و پرورش ایران از نوع متمرکز است، اغلب وقت کلاس به کتاب درسی اختصاص پیدا می‌کند و همه آموخته‌های دانش‌آموزان بر اساس کتاب درسی سنجیده می‌شود؛ پس در کشور ما به لحاظ اهمیت و جایگاه کتاب درسی، تحلیل محتوا ضرورت بیشتری پیدا می‌کند [۷].
این پژوهش درصدد پاسخگویی به این سؤال می‌باشد که پرسش‌های بخش‌های" فعالیت، تمرین و کار در کلاس " کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی در کدام‌یک از ابعاد و سطوح طبقه‌بندی شناختی اندرسون و کراتول قرار دارند؟

۲. پیشینه پژوهش

عیسی زاده نظیف و همکاران (۱۳۹۵)، در پژوهشی تحت عنوان " تحلیل محتوای آزمون‌های ریاضیات کانگورو بر مبنای طبقه‌بندی حیطه شناختی اندرسون " پس از تجزیه و تحلیل یافته‌های پژوهش دریافتند که در آزمون‌های مربوطه، به تمام سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه شده است.
دریا پیما (۱۳۹۸)، در پژوهشی با عنوان " تحلیل محتوای کتاب هندسه ۳ به روش اندرسون - کراتول " با استفاده از روش تحلیل محتوا، تمامی سؤالات مربوط به مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرینات پایانی هر درس را مورد بررسی قرار داد. نتایج بررسی نشان داد که ۱۷/۱۷ درصد سؤالات مثال‌ها در سطوح پایین طبقه‌بندی آموزشی بلوم (به یاد آوردن، فهمیدن و به کار بستن)، ۱۵ درصد سؤالات مربوط به کار در کلاس و ۳۷/۹۳ درصد سؤالات تمرین‌ها در این طبقه قرار گرفته‌اند. با توجه به درصدهای به دست آمده و نزدیک بودن آن‌ها به درصد طبقه بالای شناختی (تحلیل، ارزشیابی و آفریدن) نشان می‌دهد که کتاب جدیدالتألیف هندسه ۳ فعالیت محور بوده و دانش آموزان را به تحلیل و تفکر درباره فرایند حل مسئله ترغیب می‌کند.
یافته‌های پژوهش یعقوبی و میت‌میر (۱۳۹۹) با عنوان " تحلیل محتوای ریاضی ششم ابتدایی به روش اندراسون ـ کراتول " نشان می‌دهد که سطح بالای اهداف آموزشی فقط در حد ۴۰ درصد، از نظر بعد دانشی که قسمت مفهومی آن ۵/۳۵ درصد، قسمت فرا شناختی نیز حدود ۶ درصد است.
نتایج پژوهش شیروانی شیری و همکاران (۱۳۹۹) به عنوان " تحلیل محتوای کتاب ریاضی پنجم دبستان از منظر شاخص گیلفورد " نشان داد که کتاب ریاضی پنجم ابتدایی از منظر شاخص‌های خلاقیت گیلفورد به سطوح حافظه شناختی و تفکر همگرا بیشترین توجه و به سطح های تفکر واگرا و تفکر ارزشیاب توجه کمتری داشته است. علاوه بر این، در بخش‌های فعالیت، کاردرکلاس و تمرین به تفکر واگرا و تفکر ارزشیاب نیز به میزان کمتری توجه شده است و اشکال این کتاب تنها به سطح حافظه شناختی توجه دارد.
نتایج پژوهش مالمیر (۱۴۰۰) تحت عنوان " تحلیل محتوای کتاب ریاضی و آمار (۱) به روش اندرسون ـ کراتول " نشان می‌دهد که محتوای کتاب از منظر فعالیت شناختی بیشترین میزان توجه به سطح‌های به یاد آوردن و به کار بستن می‌باشد و کمترین توجه به مقوله‌های آفریدن و

ارزشیابی شده است. در بعد دانش بیشترین میزان توجه به دانش روندی است و به دانش امور واقعی بسیار کم توجه شده است. در محتوای کتاب درسی ریاضی و آمار(۱) سؤالاتی با سطوح بالای شناختی به صورت نامتوازن، پراکنده شده‌اند که بایستی در این مورد بازنگری و اصلاحاتی صورت پذیرد.

۳. روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع توصیفی و تحلیل محتوا و از نظر هدف کاربردی می‌باشد. جامعه آماری تمامی سؤالات بخش‌های فعالیت، تمرین و کار در کلاس کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی و نمونه آماری نیز ۵۵ پرسش از هر یک از بخش‌های بیان‌شده می‌باشد که به صورت تصادفی انتخاب گردیده است. تمامی ۱۶۵ پرسش بخش‌های فعالیت‌ها، تمرین‌ها و کار در کلاس‌های این کتاب بر اساس ۲۴ هدف طبقه‌بندی دوبعدی اندرسون – کراتول بررسی گردید. داده‌های پژوهش به‌وسیله آمار توصیفی تجزیه و تحلیل شد.
طبقه‌بندی دو بعد شناختی و دانشی اندرسون و کراتول به صورت می‌باشد:

جدول ۱: طبقه‌بندی دوبعدی فرایند شناختی و دانشی اندرسون و کراتول

بعد دانش	بعد فرآیند شناختی					
	به یاد آوردن	فهمیدن	به کار بستن	تحلیل کردن	ارزشیابی کردن	آفریدن
امور واقعی	فهرست کردن	خلاصه کردن	پاسخ دادن	انتخاب	بررسی	تولید
مفهومی	تشخیص	دسته‌بندی	فراهم کردن	تمایز دادن	تعیین	گردآوری
روندی	به یاد آوردن	تصریح	انجام	کامل کردن	قضاوت کردن	طراحی
فراشناختی	تمیز	پیش‌بینی	استفاده	بازسازی	منعکس کردن	خلق کردن

۴. یافته‌های پژوهش

در این بخش با توجه به سؤال پژوهش، هریک از بخش‌های فعالیت‌ها، تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها به تفکیک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فعالیت‌ها:

جدول ۲: فراوانی مقوله‌های مربوط به طبقه‌بندی دوبعدی اندرسون و کراتول در فعالیت‌ها

بعد دانش	بعد فرآیند شناختی						
	به یاد آوردن	فهمیدن	به کار بستن	تحلیل کردن	ارزشیابی کردن	آفریدن	مجموع	درصد
امور واقعی	۱۰	۶	۸	۳	۰	۰	۲۷	٪۰۹/۴۹
مفهومی	۴	۱	۶	۱۱	۱	۱	۲۴	٪۶۴/۴۳
روندی	۰	۰	۳	۰	۰	۰	۳	٪۴۶/۵
فراشناختی	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	٪۸۱/۱
مجموع	۱۵	۷	۱۷	۱۴	۱	۱	۵۵	٪۱۰۰
درصد	٪۲۸/۲۷	٪۷۳/۱۲	٪۹/۳۰	٪۴۷/۲۵	٪۸۱/۱	٪۸۱/۱	٪۱۰۰	

فعالیت‌های کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی با هدف ارائه و آموزش مباحث جدید هر درس در قالب یک مسئله می‌باشد. با توجه به جدول ۲، از نظر بعد فرایند شناختی ۱۶ پرسش مربوط به سطوح بالایی شناختی (تحلیل کردن، ارزیابی کردن، آفریدن) و ۳۹ مورد مربوط به سطوح پایین شناختی (به یاد آوردن، فهمیدن، به کار بستن) می‌باشد. در بعد دانش، بیشترین تأکید بر دانش امور واقعی با ٪۰۹/۴۹ و کمترین توجه به دانش فراشناختی با ٪۸۱/۱ است. علاوه بر این در بعد فرایند شناختی، سطح به کار بستن با ٪۹/۳۰ بیشترین و سطوح ارزشیابی کردن و آفریدن با ٪۸۱/۱ کمترین فراوانی را دارند.

تمرین‌ها:
این بخش از کتاب درسی برای تقویت و تعمیق یادگیری موضوعات آموزش داده شده از طریق تکرار و مرور آن در خلال سؤالات گوناگون در فضا و زمان دیگری خارج از کلاس، طراحی شده است. از ۵۵ پرسش بررسی شده در بخش تمرین‌ها، ۴۳ مورد مربوط به سطوح پایین شناختی و ۱۲ مورد بر سطوح بالا شناختی تأکید دارند. لازم به ذکر است دانش مفهومی و دانش فراشناختی به ترتیب با ٪۷۲/۵۲ و ٪۰، بیشترین و کمترین فراوانی را در بعد دانش دارند و در بعد فرایند شناختی، بیشترین تأکید بر سطح به کار بستن با ٪۶۰ فراوانی می‌باشد.

جدول ۳: فراوانی مقوله‌های مربوط به طبقه‌بندی دوبعدی اندرسون و کراتول در تمرین‌ها

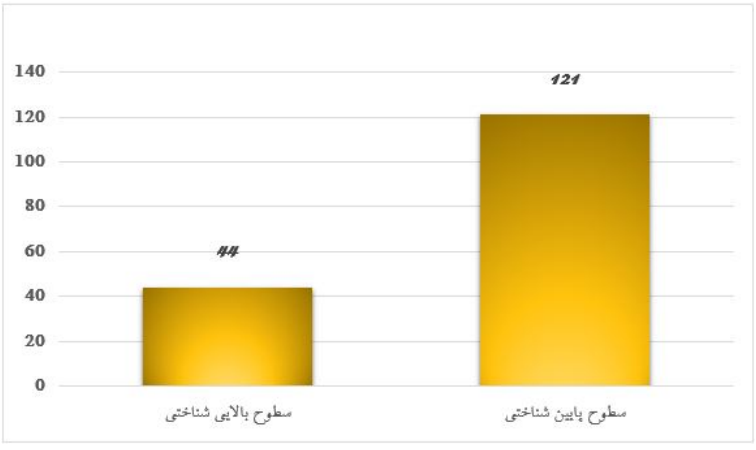
بعد دانش	بعد فرآیند شناختی							
	به یاد آوردن	فهمیدن	به کار بستن	تحلیل کردن	ارزشیابی کردن	آفریدن	مجموع	درصد
امور واقعی	۶	۳	۲	۰	۰	۰	۱۱	٪۲۰
مفهومی	۱	۰	۱۸	۳	۲	۵	۲۹	٪۷۲/۵۲
روندی	۰	۰	۱۳	۰	۱	۱	۱۵	٪۲۸/۲۷
فراشناختی	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	٪۰
مجموع	۷	۳	۳۳	۳	۳	۶	۵۵	٪۱۰۰
درصد	٪۷۳/۱۲	٪۴۵/۵	٪۶۰	٪۴۶/۵	٪۴۶/۵	٪۹/۱۰	٪۱۰۰	

کار در کلاس‌ها:

جدول ۴: فراوانی مقوله‌های مربوط به طبقه‌بندی دوبعدی اندرسون و کراتول در کار در کلاس‌ها

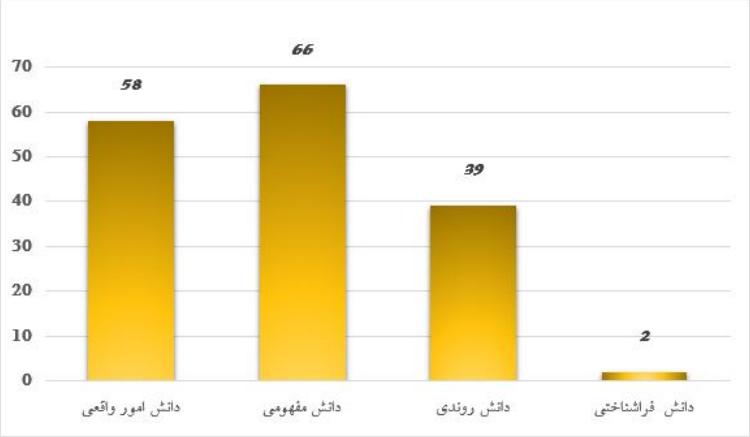
بعد دانش	بعد فرآیند شناختی							
	به یاد آوردن	فهمیدن	به کار بستن	تحلیل کردن	ارزشیابی کردن	آفریدن	مجموع	درصد
امور واقعی	۴	۱	۱۰	۳	۱	۱	۲۰	٪۳۷/۳۶
مفهومی	۲	۱	۲	۴	۲	۲	۱۳	٪۶۴/۲۳
روندی	۳	۱	۱۴	۱	۰	۲	۲۱	٪۱۸/۳۸
فراشناختی	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	٪۸۱/۱
مجموع	۱۰	۳	۲۶	۸	۳	۵	۵۵	٪۱۰۰
درصد	٪۱۹/۱۸	٪۴۵/۵	٪۲۸/۴۷	٪۵۴/۱۴	٪۴۵/۵	٪۰۹/۹	٪۱۰۰	

با توجه به جدول ۴، از ۵۵ پرسش بررسی شده در بخش کار در کلاس، ۳۹ (٪۹۲/۷۰) پرسش مربوط به سطوح پایین شناختی (به یاد آوردن، فهمیدن و به کار بستن) و ۱۶ (٪۰۸/۲۹) مورد مختص سطوح بالا شناختی (تحلیل کردن، ارزشیابی کردن و آفریدن) می‌باشد. در بعد دانش نیز با ٪۱۸/۳۸ بیشترین توجه به دانش روندی و کمترین توجه با ٪۱۸/۱ مربوط به سطح فراشناختی می‌باشد.
با توجه به نمودار ۱ می‌توان دریافت از مجموع ۱۶۵ سؤال بررسی شده، در بعد فرایند شناختی حدود ۷۳ درصد به سطوح پایین شناختی و ۲۷ درصد نیز مربوط به سطوح بالای شناختی می‌باشد.



نمودار ۱: نمودار توزیع فراوانی بعد فرایند شناختی

نمودار ۲ نشان می‌دهد که از مجموع ۱۶۵ پرسشی که در بخش‌های فعالیت‌ها، تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها مورد بررسی قرار گرفته است، دانش مفهومی با ۶۶ پرسش (٪۴۰) و دانش فراشناختی با ۲ مورد (٪۲۱/۱)، به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار را به خود اختصاص داده‌اند.



نمودار ۲: نمودار توزیع فراوانی بعد دانش

۵. نتیجه‌گیری

نتایج تحقیق نشان داد، پدیدآورندگان در طراحی سؤال‌های کتاب بر سطوح پایین فرآیند شناختی تأکید بیشتری داشته‌اند که این حکایت از عدم توجه به مقوله خلاقیت و پرورش مهارت حل مسئله در فراگیران دارد. علاوه بر این، آن‌ها در سطح به کار بستن در بعد فرآیند شناختی نیز تأکید بیشتری نموده‌اند و این بیانگر آن است که مؤلفان به دنبال تثبیت یادگیری از طریق طرح سؤالات صرفاً با هدف تکرار و تمرین می‌باشند.

نتایج تحقیق مبین آن است که پدیدآوران کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی، کمترین میزان توجه را به سطح فراشناخت (آگاهی و دانش فراگیر درباره‌ی شناخت خود) در بعد دانش داشته‌اند که این یافته با نظر عموم پژوهشگران صرف‌نظر از جهت‌گیری‌های نظری که با رشد و تحول یافتن دانش آموزان، از چگونگی اندیشیدن خود آگاه‌تر می‌شوند و نسبت به شناخت به‌طورکلی مطلع‌تر می‌گردند و همراه با عمل کردن روی این آگاهی بهتر خواهند آموخت، همخوانی ندارد.

در بخش تمرین‌ها به سطح دانش مفهومی نسبت به سایر سطوح توجه بیشتری شده است. این گویای آن است که مؤلفان در قالب سؤالات بخش تمرین‌ها درصدد ارزشیابی میزان فهم حاصل از دانش ارائه‌شده توسط معلم و کتاب می‌باشند.

نتایج پژوهش نشان داد که مؤلفان کتاب درسی در طراحی سؤالات تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها به سطح آفریدن توجه بیشتر داشته‌اند. از آنجا که در اغلب اوقات تمرین‌ها به عنوان تکلیف در منزل تعیین می‌شوند و کار در کلاس‌ها نیز امکان استفاده از نظر سایرین را فراهم می‌آورد، طبیعی است که میزان تأکید این سطح در بخش‌های تمرین‌ها و کاردرکلاس‌ها بیشتر باشد.

نتایج پژوهش حاضر با یافته‌های پژوهش شیروانی شیری و همکاران (۱۳۹۹) مبنی بر آنکه کتاب درسی ریاضی پایه پنجم ابتدایی به میزان کمتری توانسته است شرایط مناسب جهت بروز و رشد خلاقیت دانش آموزان را فراهم آورد و نیز اینکه پرسش‌های کتاب، پاسخ مشخص و از پیش تعیین شده دارند؛ همخوانی دارد.

۶. پیشنهادات

با توجه به نقش اساسی خلاقیت و مهارت حل مسئله در مواجه شدن دانش آموزان مقطع ابتدایی با مسائل مختلف، ضرورت توجه به زمینه‌های رشد و تقویت آن‌ها در کتاب‌های درسی، بیش از پیش احساس می شود. لذا پیشنهاد می‌گردد که پدیدآورندگان در بخش " تمرین " با توجه به ماهیت آن، از طرح سوالاتی کلیشه‌ای پرهیز و در صدد ارائه سوالاتی چالش برانگیز برای دانش آموزان برآیند.

از آنجا که در تدوین کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی به سطح به کار بستن در بعد فرایند شناختی بیشتر تاکید شده است؛ پیشنهاد می گردد مولفان به سطوح دیگر فرآیند شناختی (به یاد آوردن، فهمیدن، تحلیلی کردن و . . .) در فرآیند طراحی بخش‌های مختلف کتاب توجه دوچندان نمایند.

سپاس‌گزاری

بدین وسیله از زحمات و همکاری‌های بی دریغ و بی شائبه استاد ارجمند جناب آقای غلامرضا رضائی که در تمام مراحل تدارک، تنظیم و تدوین این مقاله، نویسندگان را راهنمایی و ارشاد فرمودند، صمیمانه سپاسگزاری نموده و توفیق روز افزون ایشان را در راه تعالی و پیشرفت آموزش عالی کشور عزیزمان، از درگاه خداوند متعال خواستاریم.

مراجع

[۱] دریا پیما، راضیه (۱۳۹۸). تحلیل محتوای کتاب هندسه ۳ به روش اندرسون– کراتول، دومین کنفرانس ملی پژوهش‌های حرفه‌ای در روان‌شناسی و مشاوره با رویکرد دستاوردهای نوین در علوم تربیتی و رفتاری «از نگاه معلم»، میناب، مدیریت آموزش و پرورش شهرستان میناب.

[۲] رحیم زاده، شادی؛ حاجی، بینا و پورقلی، حمید (۱۳۹۵). تحلیل محتوای کتاب علوم تجربی پنجم ابتدایی بر اساس روش ویلیام رومی و فرمول خوانایی فرای. کنفرانس جهانی روان‌شناسی و علوم تربیتی، حقوق و علوم اجتماعی در آغاز هزاره سوم، شیراز، دانشگاه زرقان با همکاری مشترك موسسه آموزش عالی علامه خویی.

[۳] رفیع پور گتابی، ابوالفضل (۱۳۸۹). طراحی چارچوبی برای ایجاد تعامل در برنامه درسی ریاضی متوسطه ایران، رساله دکتری، دانشگاه شهید بهشتی.

[۴] شیروانی شیری، علی؛ جمالی، محمد رضا و آزادی، نفیسه (۱۳۹۹). تحلیل محتوای کتاب ریاضی پنجم دبستان از منظر شاخص خلاقیت گیلفورد، پویش در آموزش علوم پایه، ۶(۲۱)، ۵۸-۶۷.

[۵] صفوی، امان‌الله (۱۳۹۰). کلیات روش‌ها و فنون تدریس، تهران: نشر معاصر.

[۶] عیسی زاده نظیف، عیسی؛ رسولی، حمید؛ معصومی، میرمظفر و بهزادی، محمدحسن (۱۳۹۵). تحلیل محتوای آزمون‌های ریاضیات کانگورو بر مبنای طبقه‌بندی حیطه شناختی اندرسون، اولین کنفرانس ملی پژوهش‌های نوین در روانشناسی، مشاوره و علوم تربیتی، اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شادگان.

[۷] کرمی، زهره؛ اسد بیگی، پژمان و کرمی، مهدی (۱۳۹۲). تحلیل محتوای کتاب ریاضی ۱ پایه اول متوسطه بر اساس تکنیک ویلیام رومی و حیطه شناختی بلوم، پژوهش در برنامه درسی، ۱۰(۳۷)، ۱۶۶-۱۷۸.

[۸] کیامنش، علیرضا (۱۳۷۷). یافته‌های سومین مطالعه بین‌المللی TIMSS ریاضیات دوره ابتدایی، تهران: انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت.

[۹] مالمیر، امیر (۱۴۰۰). تحلیل محتوای کتاب ریاضی و آمار (۱) به روش اندرسون– کراتول، اولین کنفرانس ملی مطالعات کاربردی در فرآیندهای تعلیم و تربیت، بندرعباس، آموزش و پرورش شهرستان میناب و دانشکده علوم انسانی.

[۱۰] نوریان، محمد (۱۳۸۶). تحلیل محتوای کتاب‌های فارسی سال اول دبستان در ایران. روان‌شناسی تحولی: روان شناسان ایرانی، ۳(۱۲)، ۳۶۶-۳۵۷.

[۱۱] یعقوبی، مریم و میت‌میر، سمانه (۱۳۹۹). تحلیل محتوای ریاضی ششم ابتدایی به روش اندرسون - کراتول، پنجمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، آموزش و پرورش مازندران.

[12] Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001), *A taxonomy for learning, teaching, and assessing:A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*, Longman.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–199، صص. ۴۴۱–۴۶۴

شناسایی بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی و روش‌هایی برای رفع آن‌ها در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

عفت زهیری هاشم‌آبادی*[آ]، شریفه رضاقلی[ب]

[آ] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه پیام نور کرمان
[ب] عضو هئیت علمی دانشگاه پیام نور کرمان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
بدفهمی
حل مسأله
استدلال
درک مفهوم اعداد منفی

چکیده

هدف از تحقیق حاضر، شناسایی بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی و روش‌هایی برای رفع آن‌ها در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ بود. تحقیق حاضر از نظر هدف، کاربردی و از نظر اجرا، توصیفی از نوع زمینه‌یابی است. جامعه آماری تحقیق، شامل کلیه دانش‌آموزان پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان می‌باشد که در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ مشغول به تحصیل بودند. به دلیل انتخاب دانش‌آموزان پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان و همچنین به علت متفاوت بودن جمعیّت دانش‌آموزان در این گروه‌ها، روش خوشه‌ای چندمرحله‌ای و در خوشه‌ها روش نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌ای نسبی و نمونه‌گیری تصادفی ساده مورد استفاده قرار گرفت؛ در نتیجه پرسشنامه‌ها بین ۴۵۸ نفر از دانش‌آموزان توزیع گردید؛ از این تعداد، ۴۴۳ پرسشنامه مورد بررسی قرار گرفت که حجم نمونه دانش‌آموزان را تشکیل داد و بقیه پرسشنامه‌ها به دلیل ناقص بودن اطلاعات وارد شده توسط دانش‌آموزان، مورد بررسی واقع نشد. همچنین در این تحقیق، پرسشنامه‌ای محقق‌ساخته طراحی گردید. برای تجزیه‌وتحلیل داده‌های این تحقیق در بخش آمار توصیفی از جدول توزیع فراوانی، نمودار دایره‌ای و بیان درصد داده‌ها و در بخش استنباطی از آزمون t مستقل برای مقایسه میانگین نمرات بر اساس جنسیّت و از آزمون X^2 برای مقایسه فراوانی و درصد فراوانی، همچنین برای آزمون اصلی تحقیق از آزمون میانگین تی ـ تک نمونه‌ای (T-TEST)، برای بررسی تأثیر عوامل رفع بدفهمی‌ها و آزمون فریدمن برای اولویت‌بندی این عوامل استفاده گردید. در نهایت نتایج تحقیق نشان داد که اغلب دانش‌آموزان، درک و فهم مناسبی از اعداد منفی در ریاضیات مدرسه‌ای ندارند و در پیاده‌سازی دانسته‌های خود در حل مسائل ریاضی شامل اعداد منفی با مشکل مواجه هستند.

۱. مقدمه

ریاضیات و کاربرد آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حلِ مشکلاتِ زندگی در حوزه‌های مختلف به شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیّت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات، موجب تربیتِ افرادیَ خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و دربارهٔ پدیده‌های پیرامونی، تئوری‌های جامع بسازند (غلام‌آزاد، ۱۳۹۳)؛ اما ممکن است در این مسیر دچار خطا و اشتباه شوند، هر چند بروز خطا ضمن یادگیری امری طبیعی است اما گاهی این خطاها در ریاضیات به مراتب بیش‌تر و عمیق‌تر از سایر دروس رُخ می‌دهد و علت آن در قابلیّت بد فهمیده شدن مفاهیم ریاضی به لحاظ ماهیّتی (مجرد بودن مفاهیم در عین کاربردی بودن مسائل، تسلسل مفهومی و پیش‌نیاز داشتن مطالب) با روش آموزشی و ... می‌باشد. بد فهمیدن یا به اصطلاح بدفهمی باعث اشتباهات نظام‌مند و بعضاً مستدلی می‌شود که

*سخنران
پست الکترونیک: efatzahirihashem@gmail.com (عفت زهیری هاشم‌آبادی)، rezagholi@pnu.ac.ir (شریفه رضاقلی)

عمدتاً ناشی از تفسیرهای ذهنی نادرست دانش‌آموزان ضمن یادگیری می‌باشد و با درک متخصصان متفاوت است (زهره‌وند و همکاران، ۱۳۹۵). بدفهمی از نظر آلن[1] (۲۰۰۷)، فکر، تصور یا دید اشتباه است که از درک غلط چیزی ناشی می‌شود. به عبارت دیگر، ممکن است روابط شکل گرفته در ذهن فرد دربارهٔ یک مفهوم کاملاً نامناسب باشد و صحت علمی نداشته باشد. همچنین برداشت‌ها و تصورات نادرست ذهنی دربارهٔ یک مفهوم ریاضی ممکن است از طریق تجربیاتی که فرد با قرار گرفتن در موقعیّت‌های متفاوت و در زمان‌های مختلف کسب کرده است، به وجود آمده و شکل گرفته باشد؛ از این رو، نه آنی به وجود می‌آیند و نه به سرعت کنار گذاشته می‌شوند؛ پس باید آموزش و یادگیری مفاهیم ریاضی به گونه‌ای باشد که به دانش‌آموزان کمک کند تصورات مفهومی[2] خود را همزمان با تشریح معنای مفاهیم به کار رفته در آن شکل دهند؛ زیرا تصورات مفهومی ناصحیح را به دشواری می‌توان به یک تصور صحیح تبدیل کرد، به‌ویژه زمانی که به شکل مُنسجِم و یکپارچه در ذهن و اندیشهٔ دانش‌آموزان ایجاد شده باشد (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۵). اصطلاح تصور مفهومی را تال و وینر[3] (۱۹۸۱)، برای توصیف کلی ساختارهای شناختی که با مفهوم ارتباط دارند، معرفی کردند و شامل تصاویر ذهنی و خواص و فرآیندهای وابسته‌اند که ممکن است در طول سال‌ها از طریق انواع تجربه ساخته شده و قابل تغییر باشند (محتشم، ۱۳۹۳). این اصطلاح در مقابل تعریف مفهوم[4] قرار دارد که با تصور مفهومی کاملاً متفاوت است. تعریف مفهومی به صورت شکلی از کلمات است که آن مفهوم را مشخص می‌کند. این تعریف می‌تواند رسمی و بر اساس یک نظریهٔ ریاضی و منطبق بر آن باشد یا حتی شخصی بوده و از سوی خود شخص برای توصیف ذهنی از آن مفهوم ابداع شده باشد. اما "تصور مفهوم" به هر حال ممکن است جنبه‌های دیگری را نیز در بر گیرد؛ بنابراین بدفهمی‌ها زمانی ایجاد می‌شوند که میان تعریف مفهومی و تصور مفهومی صحیح از یک طرف و تصورات شخصی و توصیفات ذهنی فرد از طرف دیگر، سازگاری وجود نداشته باشد (بخشعلی‌زاده و بروجردیان، ۱۳۹۶). لذا عدد منفی[5]، از جمله مفاهیمی است که در فرآیند آموزش ریاضی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار بوده و وقتی برای اولین بار در ریاضیات مطرح می‌شود، یک مفهوم دشوار بوده و اغلب برای بزرگسالان حتی بعد از سال‌ها تمرین و تجربه یک مفهوم دشوار باقی می‌ماند. در واقع وقتی یک مسألهٔ ریاضی مطرح می‌شود، در بسیاری از مواقع استفاده از عملیات اعداد منفی مورد نیاز است. کیلهامن[6] (۲۰۱۱)، بیان می‌کند که گسترش دامنهٔ عددی از اعداد طبیعی به اعداد صحیح یک مؤلفهٔ ضروری است که دانش‌آموزان در ریاضیات مدرسه‌ای باید به آن دست یابند. با معرفی اعداد منفی، دانش‌آموزان با یک مجموعهٔ جدید از اعداد آشنا می‌شوند که انتظار دارند یک دسته قواعد جدید را برای کار با این اعداد یاد بگیرند که با قوانین عملیات با اعدادی که قبلاً یاد گرفته‌اند در تضاد است. همچنین کاسکارت و همکاران[7] (۲۰۰۳)، استدلال می‌کنند که چون دانش‌آموزان در سال‌های بعدی مدرسه با اعداد منفی در جبر کار خواهند کرد، باید کشف اعداد منفی را به شیوه‌ای معنی‌دار و بدون عجله شروع کنند (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۵). بال[8] (۱۹۹۳)، بیان می‌کند که آموزش اعداد منفی به دانش‌آموزان، تلاشی برای اتصال دادن مقادیر کمّی زندگی روزمره با ریاضیات رسمی است. به طور متعارف در برنامه‌های درسی ریاضیات، آموزش رسمی اعداد منفی و عملیات روی آن‌ها در پایه‌های پنجم تا هشتم شروع می‌شود. جولیک و همکاران[9] (۲۰۱۲)، معتقدند که استفاده روان از اعداد منفی نیاز به پذیرش مقادیر کمتر از صفر دارد که فاقد معنی ملموس مقادیر مثبت هستند. در حالی که ما می‌توانیم از داشتن "دو کتاب" صحبت کنیم، از لحاظ فیزیکی ما نمی‌توانیم "منفی دو کتاب" داشته باشیم. همچنین شلیمن و همکاران[10] (۲۰۰۳)، از طریق مطالعهٔ دانش‌آموزان پایه‌های دوم تا چهارم متوجه شد که این بچه‌ها قادر بودند ایدهٔ عدد منفی را بپذیرند، اما برای عملیات روی این اعداد به چالش کشیده شدند. بوفردینگ[11] (۲۰۱۴)، نیز از طریق مصاحبه با دانش‌آموزان پایهٔ چهارم به این نتیجه رسید که بسیاری از دانش‌آموزان تلاش می‌کنند مفهوم اعداد منفی را درک کنند، زیرا ظاهراً این اعداد را با درک ایجاد شده از اعداد نامنفی‌شان در تناقض می‌بینند. البته درک اعداد منفی در گذشته حتی برای ریاضیدانان نیز در ابتدا دشوار بوده است. بیری و همکاران[12] (۲۰۰۴)، معتقدند که: "ریاضیدانان مشکلات با اعداد منفی را قبل از قرن سوم ثبت کرده‌اند؛ البته اوایل ریاضیدانان اغلب در وجود و معنای اعداد منفی شک داشتند" (بخشعلی‌زاده و بروجردیان، ۱۳۹۶). بنابراین اگر آن‌ها درک مفهوم اعداد منفی را دشوار می‌دانستند، پس چطور آموزشگران امروزی می‌توانند از دانش‌آموزان، بزرگسالان و کودکان آموزش‌ندیده انتظار داشته باشند مفهوم اعداد منفی را به میزانی بیش‌تر از یکسری قوانین حفظ شده یاد بگیرند؟ (کاراهر و همکاران[13]، ۲۰۰۶). همچنین بهاسکارا[14] ریاضیدان قرن هفتم، بیان کرد که مردم یک عدد منفی مطلق را تأیید نمی‌کنند. اواخر قرن ۱۷، دکارت[15] جواب‌های منفی را به عنوان کاذب رد کرد، چون آن‌ها چیزی کمتر از هیچ چیز را بازنمایی می‌کردند (بیشاپ

1. Allen
2. concept image
3. Tall & Vinner
4. concept definition
5. negative number
6. Kilhamn
7. Cathcart et al.
8. Ball
9. Gullick et al.
10. Schliemann et al.
11. Bofferding
12. Beery et al.
13. Carraher et al.
14. Bhāskara
15. Descartes

و همکاران[16]، ۲۰۱۱). امروزه نیز به دلیل این که مفهوم عدد منفی در زندگی روزمره کمتر استفاده می‌شود، برای اغلب دانش‌آموزان یک مفهوم دشوار تلقی می‌شود. وقتی از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود که چرا مفهوم عدد منفی را دشوار می‌یابند، اغلب انتزاعی بودن مفهوم عدد منفی و عدم ارتباط آن با جهان واقعی را به عنوان دلیل ذکر می‌کنند. لیمونیدیس و پلیتیدیس[17] (۲۰۱۰)، بر این باورند که درک اعداد منفی و انجام عملیات روی این اعداد موضوعی است که اغلب دانش‌آموزان آن را دشوار می‌یابند. آن‌ها معتقدند منشأ این مشکلات معرفت‌شناختی[18] است و تعداد پدیده‌های طبیعی که می‌توانند عملیات با اعداد منفی را بازنمایی کنند، محدود است. همچنین کیلهامن (۲۰۱۱)، معتقد است اعداد، اشیائی انتزاعی هستند که ما مفهوم آن‌ها را از طریق استعاره‌ها[19] درک می‌کنیم. همچنین وی معتقد است، وقتی اعداد منفی در ریاضیات مدرسه ظاهر می‌شوند، برخی از خواص اعداد طبیعی متناقض می‌شوند. همچنین وی بر این باور است که دانش‌آموزان اعداد منفی را به دلیل انتزاعی بودن این اعداد و عدم ارتباط با جهان واقعی، دشوار می‌یابند (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۵). علی‌رغم اهمیّت زیاد اعداد منفی در آموزش ریاضی، در کشور ما به مقولهٔ اعداد منفی و میزان درک دانش‌آموزان از این اعداد به اندازه کافی توجه نشده است؛ لذا نیازمند به پژوهش‌های بیش‌تر در این زمینه است؛ چرا که به دلیل اثرات منفی بدفهمی در یادگیری ریاضی، این مسأله مهم باید بیش‌تر مورد عنایت معلمان قرار گیرد تا بتوان به پیامدهای مفیدی در آموزش این درس پایه دست یافت؛ زیرا آگاهی از مفاهیم درک شده و بدفهمی‌های دانش‌آموزان از عناصر اساسی دانش پداگوژیکی محتواست. در واقع این آگاهی، معلم را در فرآیند طراحی آموزشی و اجرای آن یاری می‌دهد؛ لذا معلمان می‌توانند برای جلوگیری از بروز بدفهمی‌ها یا اصلاح آن‌ها، آمادگی لازم را در خود ایجاد نمایند. همچنین نتایج این پژوهش می‌تواند در جهت جلوگیری و رفع بدفهمی‌ها مفید واقع شود اما تحلیل و واکاوی این پژوهش و گردآوری راهکارهای ارائه شده در رفع بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم عدد منفی در درس ریاضی به صورت یک مجموعه مختصر و مُدوَّن به خصوص جهت استفاده نومعلمان، امری مهم و ضروری به نظر می‌رسد؛ چرا که با توجه به تأثیری که اصلاح و پیشگیری بدفهمی‌های ریاضی در بهبود یادگیری و پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان دارند، لازم است که معلمان ریاضی به خصوص نومعلمان علاوه بر آشنایی با این بدفهمی‌ها، راهکارهای رفع آن‌ها را نیز مطالعه و تجربه نمایند؛ لذا در پژوهش حاضر، با تحلیل موضوعی برخی منابع و پژوهش‌های مرتبط با بدفهمی‌های ریاضی به‌ویژه بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی، به بیان راهکارهایی جهت پیشگیری و اصلاح آن‌ها خواهیم پرداخت؛ این راهکارها می‌تواند در جهت بهبود یادگیری ریاضی دانش‌آموزان کمک شایان توجه‌ای نماید؛ چرا که وقتی معلمان با ایده‌ها و راهکارهایی جهت رفع بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های آن آشنا باشند، با ارائهٔ آموزشی مناسب، دانش‌آموزان را برای ساختن مفاهیم به شکلی صحیح به چالش می‌کشند؛ که این امر موجب می‌شود تا احتمال شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی به‌ویژه بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی در دانش‌آموزان کاهش یابد؛ لذا محقق در این پژوهش سعی دارد به بیان راهکارهایی جهت پیشگیری و اصلاح بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم در حوزه اعداد منفی بپردازد تا بتواند گامی هر چند کوچک در راه رشد و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان بردارد. لذا پژوهش حاضر به منظور پاسخگویی به این سؤال اساسی است که: بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ چیست؟ و چه روش‌هایی برای رفع آن‌ها وجود دارد؟

۲. مبانی نظری

۲. ۱. *اعداد منفی*

مطالعه اعداد منفی بدون بررسی سیر تکامل تاریخی آن بی‌ارزش است. در طول تاریخ ریاضیات، ریاضیدانان مفهوم اعداد منفی را به عنوان موضوعی مورد بحث و چالش‌برانگیز درک کرده‌اند. دانش‌آموزان امروزی نیز به این درگیری ادامه می‌دهند. برخلاف اعداد مثبت که اشیاء ملموس را بازنمایی می‌کنند، اعداد منفی اشیاء غیرملموس را بازنمایی می‌کنند. اوایل، ریاضیدانان از اعداد منفی در حل معادلات استفاده می‌کردند، اما معتقد بودند به دلیل این که اعداد منفی نمی‌توانند با اشیاء فیزیکی بازنمایی شوند، پس نمی‌توانند وجود داشته باشند؛ البته هنوز هم بسیاری از دانش‌آموزان، محاسبات با اعداد منفی را مانند ریاضیدانان اولیه با حفظ مجموعه‌ای از قوانین برای انجام عملیات بدون درک مفهوم یاد می‌گیرند (بیری و همکاران، ۲۰۰۴). تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌آموزان در دوره‌های مختلف تحصیلی در فهم اعداد منفی و محاسبه با این اعداد با مشکل مواجه می‌شوند. همانگونه که می‌دانیم در ریاضیات مدرسه‌ای مفهوم اعداد منفی در دوره راهنمایی آغاز و در تمام دوره‌های بالاتر همواره جزء جدا نشدنی ریاضی محسوب می‌شود، همچنین این اعداد در محاسبات ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارند و روش آموزش و یادگیری این مجموعه از اعداد در ریاضیات مدرسه‌ای در شکل‌گیری این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان، نقش مهمی ایفاء می‌کند؛ لذا در نحوه تدریس و آموزش آن لازم است که نهایت دقت و حساسیّت را به خرج داد، چرا که فهم ناقص یا غلط این مفهوم، راه را برای اشتباهات و بدفهمی‌های مباحث دیگر هموار خواهد کرد. توجه به تاریخچه مفاهیم در ریاضیات و چگونگی شکل‌گیری آن‌ها می‌تواند در بهبود روش آموزش معلمان تأثیرگذار باشد. لازم به ذکر است که دانش‌آموزان فرصت‌های کمی برای مواجهه با اعداد منفی در زندگی واقعی خود دارند و معلمان نباید از

16. Bishop et al.
17. Lemonidis & Polytidis
18. epistemological
19. metaphors

رشد درک شهودی افراد از اعداد منفی در مدارس غفلت نمایند. در واقع آگاهی از تاریخچه اعداد منفی می‌تواند در این زمینه راهنمای آموزش معلمان باشد (کیلهامن، ۲۰۰۹). لرمن[۲۰] در سال ۱۹۹۴ از نیروی بالقوه تاریخ ریاضیات در عرصه آموزش مباحث مختلف ریاضی یاد می‌کند و معتقد است شیوه معمول ما در آموزش اعداد منفی، بی‌نهایت‌ها، حدها و ... در ایجاد بصیرت و آگاهی دانش‌آموزان توفیقی نداشته است. او حتی معتقد است که اعداد منفی توسط بابلیان ۱۵۰۰ سال قبل از میلاد، بهتر از بسیاری از ریاضیدانان انگلیسی قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ درک شده است (علم‌الهدایی، ۱۳۸۸). هجنی[۲۱] دانش رسمی را به عنوان آگاهی از قوانین بدون درک واقعی توصیف می‌کند. وی معتقد است، هنگامی که می‌خواهیم قواعد رسمی را حذف کنیم، می‌توانیم تاریخ ریاضیات را جستجو کنیم و با تجزیه‌وتحلیل تاریخ ریاضیات ایده‌های مفیدی در مورد پیدایش تفکر دریافت نماییم و در تدریس خود به کار بریم. آرکاوی معتقد است یک مزیت بکارگیری تاریخ در آموزش و یادگیری ریاضیات، نقش آن در استفاده از موارد زیر می‌باشد:

۱- اشتباهات، ۲- مفاهیم جایگزین، ۳- تغییر دیدگاه در مورد یک موضوع، ۴- تجدیدنظر در فرضیات و مفاهیم، ۵- استدلال شهودی، که به صورت تاریخی ظاهر می‌شود و ممکن است در آموزش ریاضیات به صورت مفیدی مورد استفاده قرار بگیرد (مولیتوریسوا[۲۲]، ۲۰۱۱).

هیفر[۲۳] (۲۰۰۸)، معتقد است اگر چه محور اعداد یک ابزار متداول برای آموزش اعداد منفی می‌باشد اما ممکن است برای آموزش‌های اولیه عملیات مربوط به اعداد منفی مناسب نباشد. اعداد منفی فقط می‌تواند از طریق موقعیّت‌های ملموس مانند طبقات یک ساختمان یا مقیاس دما درک شود. در واقع هیفر در مورد تاریخ ریاضیات بر علیه استفاده از محور اعداد بحث می‌کند (کیلهامن، ۲۰۱۱). اواخر ۱۸۰۳ کاردانو ریاضیدان معروف فرانسوی در مورد واقعیّت اعداد منفی نگران شده بود: "برای به‌دست آوردن یک مقدار منفی، لازم است تا یک مقدار مؤثر از صفر کم کنیم، چیزی از هیچ چیز برداریم: عملیات غیرممکن؛ بنابراین چگونه یک مقدار منفی را تصور کنیم." برخی ریاضیدانان قرن هفدهم که اعداد منفی را مورد استفاده قرار داده‌اند، بیان کرده‌اند که در مورد معنای اعداد منفی و به خصوص در مورد ریشه دوم اعداد منفی نگران نباشید، آن‌ها متوجه شدند که می‌توانند برخی از معادلات بسیار مشکل مانند معادلات مکعبی را حل کنند. اگر چه گام‌های میانی یک محاسبه ممکن بود شامل اعداد منفی باشد، جواب اغلب یک عدد حقیقی یا مثبت به‌دست می‌آمد که در واقع همان چیزی بود که آن‌ها می‌خواستند (آلن، ۲۰۰۷). از آن زمان به بعد ریاضیدانان و دانشمندان انواع استفاده برای اعداد منفی را دریافتند. اولین کسی که ارتباط بین اعداد منفی و جهت را تشخیص داد، والیس[۲۴] ریاضیدان قرن هفدهم بود. در واقع وی اولین کسی بود که ایدهٔ محور اعداد را به عنوان یک بازنمایی هندسی دستگاه اعداد معرفی کرد. با این وجود، او فکر می‌کرد که اعداد منفی بزرگتر از بی‌نهایت هستند. امروزه ما از اعداد منفی دقیقاً مانند هر عدد دیگری استفاده می‌کنیم. تاریخچه پیچیده این اعداد نشان می‌دهد که چگونه اصول ریاضی ساده از هزاران سال پیش برای پیشرفت قطعی گرفته شده‌اند. جذر ۱- را در نظر بگیرید، علامت منفیِ (-) آن به تنهایی بی‌معنی به نظر می‌رسد، اما بسیاری از محاسبات در علوم و مهندسی بدون آن امکان‌پذیر نیست **(بلیمی**، ۲۰۱۵).

۲.۲ . *دانش‌آموزان و درک مفهوم اعداد منفی*

تفسیر اندازه و جهت اعداد منفی در ذهن دانش‌آموزان، مهم‌ترین مرحله در یادگیری مفهوم اعداد منفی می‌باشد. پلد و همکاران[۲۵] (۱۹۸۹)، طی مصاحبه با دانش‌آموزان پایه سوم و پنجم متوجه شدند که بیش‌تر آن‌ها فاقد درک مفهوم اعداد منفی بودند. آن‌ها برای تفریق "۷-۵" اغلب دو استراتژی متفاوت به کار می‌بردند؛ یا تفریق را معکوس می کردند و آن را مانند "۵ - ۷" در نظر می‌گرفتند یا بیان می‌کردند حاصل آن برابر صفر است. همچنین وقتی عبارتی مانند "۸ + ۵-" پرسیده می‌شد، آن‌ها به سادگی علامت منفی را نادیده می‌گرفتند و آن را به صورت "۸ + ۵" در نظر می‌گرفتند. از آنجائیکه دانش‌آموزان هیچ آموزش رسمی در مورد اعداد منفی قبل از پایه ششم دریافت نمی‌کردند، محققان نتیجه گرفتند که دانش‌آموزان، مدل‌های ذهنی‌ای را می‌سازند که شامل اعداد منفی قبل از آموزش مدرسه روی مدل‌هایشان برای اعداد مثبت بود. وقتی که وجود اعداد منفی پذیرفته شد، سؤالات بسیاری در مورد خواص این اعداد به‌وجود می‌آید؛ بنابراین پس از آن که دانش‌آموزان وجود اعداد منفی را به صورت اعدادی متمایز از اعداد مثبت پذیرفتند، به‌دنبال خواص و ویژگی‌های این اعداد می‌گردند (ویلوکس[۲۶]، ۲۰۰۸). علاوه بر این، استیسی و همکاران[۲۷] (۲۰۰۱)، کارهای زیادی روی درک دانش‌آموزان از کسر و اعشار انجام دادند. یکی از برداشت‌های غلط رایج این بود که آن‌ها متوجه شدند که اعشار گاهی با اعداد منفی همراه می‌شود و به صورت کمتر از صفر تصور می‌شود. در یک آزمون مقایسه اعشاری حدود ۱% از دانش‌آموزان، اعداد اعشاری را به طور کامل با اعداد منفی مشخص می‌کردند و حدود ۷% فکر می‌کردند که اعشارهایی مانند ۰/۶ و ۰/۲۲ کمتر از صفر هستند (شتین‌گلد، ۲۰۰۸). بال (۱۹۹۳)، اعداد منفی را به عنوان یک موضوع در یک تدریس آزمایشی با آزاد گذاشتن دانش‌آموزان برای این که مدل‌ها و بازنمایی‌های متفاوت را خودشان کشف کنند، معرفی می‌کند. او اشاره می‌کند که علی‌رغم این واقعیّت که دانش‌آموزان تجربه‌هایی با اعداد منفی داشتند (مانند درجه حرارت زیرصفر، بدهکار بودن و ثبت امتیاز منفی در بازی‌ها)؛ آن‌ها هنوز هم ادعا می‌کنند که شما نمی‌توانید

20. Lerman
21. Hejny
22. Molitorisova
23. Heeffer
24. Wallis
25. Peled et al.
26. Wilcox
27. Stacey et al.

۹ تا از صفر بردارید و صفر کمترین عدد است. وقتی اعداد منفی به اعداد طبیعی مثبت اضافه شد، هر دو نوع عدد دارای خاصیّت اندازه و جهت شدند. برای اعداد مثبت خاصیّت اندازه (بزرگی) منطبق و سازگار بود، اما برای اعداد منفی اختلاف پیدا کرد. بال می‌نویسد: "همزمان با درک این که ۵- در یک مفهوم بزرگتر از ۱- و در معنای دیگر کوچکتر از ۱- است، در قلب درک اعداد منفی است. با وجود اعداد مثبت و منفی، صفر به عنوان یک عدد خاص بدون اندازه و جهت ظاهر می‌شود" (استیسی و همکاران، ۲۰۰۱).

۲.۳. *معانی متفاوت علامت منفی*

امروزه علامت منفی دو کاربرد متفاوت دارد یعنی از یکسو به عنوان یک عملگر دوتایی است که برای عمل تفریق استفاده می‌شود و از سوی دیگر، یک عملگر واحد برای نمایش یک عدد منفی یا وارون جمعی است؛ این دو معنی متفاوت همیشه تأیید نشده است. تفکر چینی‌ها از یک عدد منفی به عنوان یک عدد برای کم شدن از یک عدد دیگر هنوز انجام می‌شود (بیری و همکاران، ۲۰۰۴)؛ بنابراین بین این دو معنی متفاوت، فرق نمی‌گذارند. کم کردن ۲ از ۴ در تخته‌های شمارش به صورت ۲ میله قرمز و ۴ میله سیاه قرار داده شده است؛ از هر کدام ۲ تا را حذف می‌کنیم، نتیجه ۲ میله قرمز را می‌دهد. امروزه به صورت ۲- =۴-۲ نمایش داده می‌شود، اگر چه اولین علامت منفی یک عملگر دوتایی و دومین علامت یک عملگر واحد است. یک تمایز روشن بین دو معنای متفاوت توسط وایت‌هد[۲۸] بیان شده است. او معتقد است که ریاضیدانان عادت دارند کسانی را که درگیر ردیابی معانی مفاهیم هستند،گیج کنند؛ اما در عمل استفاده از نماد یکسان در معانی پیوسته هر چند متفاوت مناسب است. یک شرط لازم این است که هر چند معانی آن متنوع باشد، قوانین رسمی برای استفاده از آن همیشه یکسان باشد (گلدین و شتین‌گلد، ۲۰۰۱).

بسیاری از محققان خطاهای رویه‌ای که با فقدان درک مفهومی دانش‌آموزان از علامت منفی ایجاد می‌شوند را مطالعه کرده‌اند. در برخی روش‌ها مایه‌تأسف است که از علامت یکسان برای نمایش عدد منفی و عمل تفریق استفاده می‌شود. تحقیق‌های تجربی و استراتژی‌های آموزشی وجود دارد که دو علامت متفاوت برای دو هدف متفاوت استفاده می‌شود. برای مثال بال (۱۹۹۳)، از یک خم کوچک (^) بالای عدد به جای علامت منفی برای نمایش عدد منفی استفاده می‌کرد. همچنین کوشمن[۲۹] از یک علامت مثبت یا منفی مانند 8^{+} یا 4^{-} استفاده می‌کرد، و شیو[۳۰] نیز یک خط افقی در بالای اعداد می‌گذاشت. همچنین یک انجمن کتاب‌های درسی ریاضی سوئدی، اعداد منفی را در پرانتز می‌نویسد؛ برای نمونه در تساوی ۱= (۳_)_۴- همه اعداد منفی هستند اما فقط یکی با پرانتز مشخص شده است. در یک کتاب درسی سوئدی که معمولاً برای پایه ۸ استفاده می‌شود، اعداد منفی به صورت زیر مشخص می‌شوند:

- اعداد مثبت اعدادی هستند که بزرگتر از صفر هستند.
- اعداد منفی اعدادی هستند که کوچکتر از صفر هستند.
- اعداد منفی با یک علامت منفی در مقابل آن نوشته می‌شوند.

اغلب پرانتزها در اطراف یک عدد منفی قرار داده می‌شوند؛ به عنوان مثال (۴-) نشان می‌دهد که آن عدد منفی ۴ است نه تفریق منهای ۴. تفریق یک عدد مثبت همان نتیجه جمع کردن یک عدد منفی را می‌دهد و وقتی که دانش‌آموز آن را به طور کامل درک کند، استفاده از علامت یکسان آزاد است (ولاسیس[۳۱]، ۲۰۰۴). ولاسیس اصطلاح "حالت منفی بودن" را برای نشان دادن ابعاد متعدد علامت منفی ابداع کرد؛ این ابعاد عبارتند از:

- عملگر واحد[۳۲] به علامت متصل (متعلق) به عدد مربوط می‌شود که برای نشان دادن یک عدد منفی به عنوان یک جواب (راه‌حل) یا یک نتیجه استفاده می‌شود؛ این عملگر مفهوم رسمی یک عدد منفی را نشان می‌دهد.
- عملگر دوتایی[۳۳] به علامت منفی به عنوان یک علامت عملیاتی مربوط می‌شود. این فعالیّت‌های برداشتن، کامل کردن، پیدا کردن تفاوت و حرکت روی محور اعداد را نشان می‌دهد.
- عملگر تقارنی[۳۴] نیز عملیاتی است اما مربوط به فعالیّت برداشتن وارون جمعی است (بیشاپ و همکاران، ۲۰۱۱).

ولاسیس (۲۰۰۲)، اشاره کرد بسیاری از مشکلاتی که دانش‌آموزان به هنگام حل کردن معادله داشتند، به ساختار معادله یا ظاهر متغیر بستگی ندارد بلکه با حضور اعداد منفی رُخ می‌دهد. یک نوع عمده از اشتباهات یافت شده، تفکیک عدد از علامت قبل از آن بود. در این مطالعه دانش‌آموزان پایه هشتم در مورد راه‌حل‌های مربوط به تکالیف چندجمله‌ای‌ها که قبلاً در یک آزمون داده شده بود، مورد مصاحبه قرار گرفتند. سؤالات تحقیق مربوط به روش حل مسأله و همچنین معانی که آن‌ها به علامت منفی می‌دادند، بود (جولیک و همکاران، ۲۰۱۲). همچنین ولاسیس (۲۰۰۴)، دریافت که برای بسیاری از دانش‌آموزان علامت منفی فقط در رابطه با رویه معنادار است و به طور کلی، وقتی بین دو عبارت همانند قرار داده می‌شود به عنوان تفریق (عملگر دوتایی) در نظر گرفته می‌شود اما برای تعدادی همچنین به عنوان یک علامت جداکننده بود. برای مثال عبارت $n5n-7-8+20$ برای محاسبه به دو قسمت $n5n-7$ و $8+20$ تقسیم می‌شد. یکی از دانش‌آموزان گفت: $4n-6n-4$ تنها دو قسمت است. من ابتدا ۴ را انتخاب می‌کنم هیچ عدد دیگری بدون حرف وجود ندارد، من ۴- را می‌نویسم و علامت - را نگه می‌دارم، سپس از عبارت n"۴-

---

28. White head
29. Cushman
30. Shiu
31. Vlassis
32. unary function
33. binary function
34. symmetric function

۶n" حاصل ۲n را به‌دست می‌آورم و در نهایت به عبارت ۲n- ۴ می‌رسم. یک علامت منفی در آغاز یک چندجمله‌ای همیشه به عنوان یک علامت واحد در نظر گرفته می‌شود. ولاسیس مخصوصاً اشاره می‌کند که هیچ دانش‌آموزی در نظر نگرفت که علامت منفی می‌تواند یک وضعیّت دوگانه داشته باشد. البته یادگیری علامت‌ها یک فرآیند دومرحله‌ای است؛ ابتدا باید معانی متفاوت را تشخیص دهیم و سپس ببینیم که معانی بسته به زمینه قابل تغییر هستند (مولیتوریسوا، ۲۰۱۱). ولاسیس (۲۰۰۹)، نشان داد که دانش‌آموزان پایه هشتم در یک گفتمان جبری مشخص در استفاده از علامت منفی توانا نبودند و معنای واحد و دوتایی علامت منفی را درک نکردند. یکی دیگر از ویژگی‌های ناپیدا "مفهوم علامت مثبت" است. در دامنه اعداد صحیح همه اعداد علامت‌دار هستند (به جزء صفر)، اما اعداد صحیح به ندرت با یک علامت مثبت نمادگذاری می‌شوند؛ در دامنه اعداد صحیح ۴-۶ به معنای $۴^{+}-۶^{+}$ است. شاید باید "انعطاف‌پذیری در حالت منفی" همچنین باید شامل "انعطاف‌پذیری در حالت مثبت" باشد (منچستر، ۲۰۱۱).

۲ .۴ . *بدفهمی در ریاضیات*

فهمیدن ریاضیات و یادگیری معنادار آن همواره نگرانی جدی بسیاری از معلمان، برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های ریاضی بوده است. صاحب‌نظران این عرصه همواره کوشیده‌اند تا با چگونگی یادگیری مفاهیم ریاضی توسط فراگیران و مشکلات ناشی از بدفهمی‌های آنان آشنا شوند. پیشنهاد مدل‌های مختلف برای فهم و یادگیری ریاضیات نیز از همین منظر قابل درک است. نکته قابل توجه این است که هر جا آموزش و یادگیری‌ای در میان باشد، امکان فراگیری ناقص و نارسای برخی از مطالب و مفاهیم مورد آموزش بسیار امکان‌پذیر است؛ بنابراین بدفهمی‌ها و ناتوانی‌ها ناشی از آن اتفاق می‌اُفتد. بدفهمی‌ها در ریاضیات بنا به دلایل مختلف و با شیوه‌های متفاوت توسط معلمان و شاگردان بروز می‌نماید و عرصه آن‌ها از اشکالات و ابهام‌های جزئی تا ناتوانی‌های گسترده و مهم تغییر می‌کند (جولیک و همکاران، ۲۰۱۲). بدفهمی‌ها در واقع چگونگی شکل‌گیری ناقص دانش و تجربه ریاضی یک شاگرد را در یک موقعیّت یاددهی – یادگیری نشان می‌دهد که باید شناسایی و ریشه‌یابی گردد. در تبیین چگونگی پیدایش پنداشت‌های غلط ریاضی باید به این مهم توجه نمود که آن‌ها صرفاً به عنوان یک غلط یا اشتباه اتفاقی مطرح نیستند؛ بلکه در قالب یک ساختار ذهنی خوب شکل‌یافته از ایده‌های ناقص قابل توجیه می‌باشند. نکته قابل توجه این است که وجود پنداشت‌های غلط ریاضی‌داری ریشه‌ای تاریخی است و نه تنها شاگردان بلکه ریاضیدانان مشهور نیز در طول تلاش‌های پژوهشی و علمی خود دچار تناقض‌ها و بدفهمی‌هایی شده‌اند. با معرفی اعداد منفی، برخی از ریاضیدانان از پذیرش آن خودداری می‌ورزیدند. یکی از دلایل آنان برای امتناع این بود که با توجه به قواعد اعداد منفی باید $\frac{-۱}{۱} = \frac{۱}{-۱}$. باشد؛ در حالی که چگونه می‌تواند نسبت میان یک مقدار بزرگ و یک مقدار کوچک (یعنی ۱ و ۱) برابر باشد با نسبت یک مقدار مقدار کوچک و یک مقدار بزرگ (یعنی ۱- و ۱)؟! در واقع آنچه موجب چنین پنداشتی شده بود، این باور بود که اعداد به تنهایی مقدار و کمیّت را نشان می‌دهند؛ اتفاقاً با شروع آموزش اعداد منفی بسیاری از شاگردان دچار این قبیل مشکلات می‌شوند (علم‌الهدایی، ۱۳۸۸).

دونالد[35] (۲۰۰۷)، بدفهمی‌های ریاضیات را که در حالت کلی وجود دارند به صورت زیر دسته‌بندی کرده است:

- ریاضیات به اشتباه به عنوان یک مجموعه‌ای سفت و سخت و انعطاف‌ناپذیر و روش‌های مبهم دیده می‌شود که به نظر می‌رسد ربطی به همدیگر ندارند.
- برای بسیاری از افراد ریاضی سخت و دشوار تصور می‌شود و به نظر می‌رسد موضوعی باشد که ضعف در آن نیز به لحاظ اجتماعی قابل‌قبول باشد.
- تفکر ریاضی اساساً برای افرادی که ریاضیات را در شغل‌شان به کار نمی‌برند، بی‌اهمیّت در نظر گرفته می‌شود.
- نقش فراگیر ریاضیات در زندگی روزمره نادیده گرفته شده است (کانگلوسی و همکاران[36]، ۲۰۱۳).

بر این اساس دو نوع از خطاهای عمده‌ای که دانش‌آموزان با آن‌ها درگیر هستند عبارتند از:

- خطاهای محاسباتی و بی‌دقتی که نظام‌مند (قابل پیش‌بینی) نیستند و ما عنوان «اشتباه» را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم؛ در واقع اشتباهات معمولاً خطاهایی هستند که در اثر بی‌دقتی رُخ می‌دهند. هنگامی که معلم از دانش‌آموز می‌خواهد پاسخ‌هایش را بیازماید یا مجدداً محاسباتش را نگاه کند؛ در واقع چنانچه دانش‌آموز مفهوم تدریس شده را به خوبی درک کند، متوجه آن اشتباه می‌شود (پورعظیما، ۱۳۹۱).
- خطاهای نظام‌مند که تحت عنوان «بدفهمی» شناخته می‌شوند. در فرهنگ لغت برخط انکارتا، بدفهمی به معنای یک ایده یا نظر اشتباه است که از یک درک نادرست نتیجه‌گیری شده باشد. معمولاً بدفهمی‌ها زمانی رُخ می‌دهند که در حالت خاص، ایده‌هایی در ذهن دانش‌آموز ایجاد می‌شود و سپس دانش‌آموز در حالت کلی این ایده‌ها را به طور نادرست تعمیم می‌دهد.

نکته مهم این که، مقابله با بدفهمی‌ها مستلزم این است که معلم پرسش‌های دقیقی را مطرح کند و از تکالیف مناسب برای آگاهی دانش‌آموز از بدفهمی ایجاد شده، استفاده نماید (بوفردینگ، ۲۰۱۰).

---

35. Donald
36. Cangelosi et al.

۲ ۵. *بدفهمی دانش‌آموزان در درک مفهوم عدد منفی*

درک عملیات اعداد صحیح یک بخش ضروری از جبر است؛ با این وجود در حالی که مفاهیم جبری در استانداردهای یادگیری اولیه به‌وجود می‌آیند، اعداد منفی این طور نیست. بر طبق گفته شورای ملّی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، ارائه استانداردهای رسمی برای اعداد صحیح در پایه سوم تا پنجم رُخ می‌دهد و عملیات روی آن‌ها در پایه ۶ تا ۸ اتفاق می‌اُفتد. بسیاری از بدفهمی‌های ظاهر شده در جبر ریشه در بدفهمی‌های حساب دارد. شبه معادله ۱۰-=؟+۴- باعث می‌شود بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا آشفته و نگران شوند؛ در واقع این بدفهمی با درک نادرست از اعداد منفی ایجاد می‌شود. برخی از معلمان از اصطلاحاتی مانند: دارایی، وقتی که مقدار مثبت است و قرض، اگر مقدار منفی است، استفاده می‌کنند. در جبر مشکلات متعددی در حل معادله وجود دارد که این عدم درک/ بدفهمی منبع این مشکلات است (دونالد، ۲۰۰۷). در میان محققان پلد و همکاران (۱۹۸۹)، متوجه شدند که دانش‌آموزان ابتدا درک نمی‌کنند که ۴- بزرگتر از ۶- است. از آنجا که درک مفهوم اعداد صحیح توسط دانش‌آموزان به درک‌شان از عملیات اعداد صحیح کمک می‌کند، بررسی کامل درک مفهوم عدد صحیح دانش‌آموزان و این که چطور آن را توسعه می‌دهند، مهم است. همچنین نونز[۳۷] (۱۹۹۹)، نشان داد که کودکان و بزرگسالان آموزش‌ندیده یک درک پایه‌ای از اعداد منفی دارند اما برای بازنمایی‌شان مشکلاتی دارند. وی نقش بازنمایی‌ها را در درک اعداد منفی بررسی کرده است؛ در این روش، بزرگسالان و کودکان به طور تصادفی به یک گروه اختصاص داده شدند که مسائل را در یک حالت شفاهی یا کتبی پاسخ دهند. گروهی که مسائل را به صورت شفاهی حل می‌کردند به طور قابل توجهی بهتر از کسانی بودند که از بازنمایی‌های نوشتاری استفاده می‌کردند. سرانجام که مشخص شد علامت منفی معانی متفاوت عملیات تفریق و معکوس کردن را دارد، عملکرد در حالت کتبی و شفاهی به طور قابل توجهی متفاوت نبودند؛ در نهایت نونز، به این نتیجه رسید که بازنمایی‌های کتبی علت بسیاری از بدفهمی‌ها بود (بسویک[۳۸]، ۲۰۱۱). بیشاپ و همکاران معتقد است که درک اعداد منفی پیچیده است؛ اگر چه کارشناسان چندین استعاره در دست دارند که آن‌ها را قادر می‌سازد تا در میان تفاسیری از اعداد مانند: مقادیر، بزرگی، مقایسه‌ها و تغییر مکان حرکت کنند؛ اما بیش‌تر دانش‌آموزان و بسیاری از بزرگسالان با مشکلات مختلفی هنگام استدلال در مورد اعداد منفی برخورد می‌کنند. در واقع بسیاری از بزرگسالان و کودکان مشکل تصور کردن ۲- سیب یا شغل را دارند. بسیاری از دانش‌آموزانی که با آن‌ها مصاحبه شد وقتی که تلاش می‌کردند تا مفهوم اعداد منفی را بسازند، این مشکلات را انعکاس دادند؛ یکی از دانش‌آموزان پایه دوم توضیح داد که اعداد منفی واقعاً عدد نیستند، آن‌ها درست مانند اعداد دیگر عمل می‌کنند به جزء این که یک علامت منفی در مقابل آن‌ها وجود دارد. اگر چه اعداد منفی برای بسیاری از دانش‌آموزان وجود دارند، اما آن ها مانند بسیاری از ریاضیدانان اولیه برای تفسیر آن‌ها به طور معنی‌داری تلاش می‌کنند (جولیک و همکاران، ۲۰۱۲). بهرند و موس[۳۹] (۲۰۰۶)، یک کلاس درس مبتنی بر پرسش از پایه اول تا دوم را دنبال کردند، تمرکز گزارش‌شان روی تعاملات دانش‌آموزان پیرامون اعداد منفی بود. بعدها در درجه اول، دانش‌آموزان خودبه‌خود اعداد منفی را در عبارت‌های عددی استفاده می‌کردند. برای مثال وقتی از دانش‌آموز می‌خواستند تا عبارت عددی شامل ۱۰ را تولید کند، دانش‌آموز پاسخ می‌داد ۱۰=۱۲+۲-. بعدها در درجه دوم، در یک کلاس پایه سوم یکی از دانش‌آموزان به طور منظم اعداد منفی را در یک الگوریتم تفریق استفاده می‌کرد (برای مثال ۱۱۹=۱- + ۲۰ + ۱۰۰= ۱۲۶-۲۴۵). در پایان پایه دوم، همه به جزء یکی از دانش‌آموزان تفاوت بین ۳-۵ و (۳-) -۵ را تشخیص دادند، چیزی که به سختی برای اکثریت دانش‌آموزان پایه پنجم در همان مدرسه ثابت می‌شد. این رویدادهای قابل توجه که بهرند و موس اصولاً ساختن مفهوم به حساب می‌آورند که برای اتفاق اُفتادن در آن کلاس خاص تشویق شده بود، نشان می‌دهد که دانش‌آموزان تجارب عینی لازم برای معرفی اعداد منفی را بسیار زودتر از پایه پنجم و ششم دارند که توسط بسیاری از برنامه‌های درسی با ساختن بر روی استعاره حرکت در امتداد یک مسیر به عنوان محور اعداد در نظر گرفته می‌شود (آلتیپارمک و اوزدون[۴۰]، ۲۰۱۰). همچنین گالاردو[۴۱] (۲۰۰۲)، نشان داد که در فرآیند انتقال از حساب به جبر است که تجزیه‌وتحلیل ساخت‌وساز یک دانش‌آموز از اعداد منفی معنادار می‌شود. در طول این مرحله، دانش‌آموزان با معادلات و مسائلی روبرو می‌شوند که اعداد منفی را به عنوان ضرایب، ثابت‌ها یا پاسخ‌ها (راه‌حل‌ها) داشتند. او از یک مطالعه تجربی با ۳۵ دانش‌آموز ۱۲-۱۳ ساله، پنج سطح پذیرش اعداد منفی را نتیجه گرفت؛ این سطوح به شرح زیر هستند:

- مفروق[۴۲]: که مفهوم عدد به بزرگی وابسته است در a-b، a همیشه از b بزرگتر است که در آن a و b اعداد طبیعی هستند.
- عدد علامت‌دار[۴۳]: که یک علامت مثبت یا یک علامت منفی با کمیّت همراه می‌شود و هیچ معنای اضافی از اصطلاح لازم نیست.
- عدد نسبی[۴۴]: که ایده کمیّت‌های قرینه در رابطه با یک خصوصیّت در حوزه گسسته مطرح می‌شود و ایده تقارن در حوزه پیوسته مطرح می‌شود.
- عدد تنها[۴۵]: که نتیجه یک عملیات است یا به عنوان یک پاسخ برای یک مسأله یا یک معادله است.

37. Nunes
38. Beswick
39. Behrend & Mohs
40. Altiparmak & Ozdoan
41. Gallardo
42. subtrahend
43. signed number
44. relative number
45. isolated number

– عدد منفی رسمی[۴۶]: در واقع که یک مفهوم ریاضی از عدد منفی را درون یک مفهوم بسط داده شده از عدد که هم اعداد مثبت و هم اعداد منفی (اعداد صحیح امروزی) را شامل می‌شود. معمولاً دانش‌آموزان ۱۲–۱۳ ساله به این سطح نمی‌رسند و مانع بازدارنده عدم تفریق یک عدد بزرگتر از یک عدد کوچکتر به‌وجود می‌آید (گالاردو و هرناندز[۴۷]، ۲۰۰۵).

بسیاری از معلمان و محققان بر این باورند که دانش‌آموزان به سختی جمع و تفریق اعداد منفی را یاد می‌گیرند. همچنین اغلب معلمان فکر می‌کنند که تدریس اعداد منفی بدون استفاده از قوانین بی‌معنی و فوت‌وفن‌ها دشوار است. در یک مطالعه که در سوئد انجام شد، معلمان و پژوهشگران چهار ویژگی بحرانی را کشف کردند که برای درک دانش‌آموزان در پایه ۷ و ۸ مهم است. این ویژگی‌های بحرانی باید برای گروهی که مورد بررسی قرار گرفت به عنوان بحران دیده شود؛ اگر چه منطقی است که برای یادگیرندگان با سن و تجربه یکسان نیز بحرانی باشند؛ این ویژگی‌های بحرانی عبارتند از:

– تفاوت بین علامت عملیاتی برای تفریق و علامت برای یک عدد منفی: در سوئد این علامت به طور یکسان ظاهر می‌شود و به راحتی می‌تواند اشتباه تفسیر شود؛ بنابراین تشخیص تفاوت بین علامت‌ها دارای اهمیّت است.

– روش دیدن تفریق: این ویژگی حاکی از این است که هنگام شمارش با اعداد منفی مرجع (مقدم) است تا تفریق را به عنوان "تفاوت" یا "مقایسه" بین اعداد به جای (شایع‌ترین استعاره) "کاستن" ببینیم.

– جنبه سوم نیز مربوط به تفریق است، چون در تفریق یک جنبه ساخته شده وجود دارد که ما به ندرت در مورد آن صحبت می‌کنیم؛ در واقع منظور این است که هنگام محاسبه کردن برای مثال: (۳–)–(۲–)، تفاوت بین ۲– و ۳– از منظر ۲– دیده می‌شود چون ۲– عدد بزرگتر است (۳–)–(۲–)، برابر ۱ می‌شود.

– جنبه چهارم باید با درک دستگاه عدد انجام شود. در مثال قبلی لازم است بدانیم کدام عدد بزرگتر است، ۲– یا ۳–؟ برخی از دانش‌آموزان از این دیدگاه استفاده نمی‌کنند، چون فکر می‌کنند ۳– عدد بزرگتر است؛ البته ۳– یک عدد منفی بزرگتر است، یا یک بدهی بیش‌تر است، اما ۲– یک عدد بزرگتر در دستگاه عدد است (کولبرگ[۴۸]، ۲۰۰۷).

بنابراین عدد منفی وقتی که برای اولین بار در ریاضیات مطرح می‌شود، یک مفهوم دشوار است و اغلب برای بزرگسالان حتی بعد از سال‌ها تمرین و تجربه یک مفهوم دشوار باقی می‌ماند. استفاده روان از اعداد منفی نیاز به پذیرش مقادیر کمتر از صفر دارد که فاقد معنی ملموس مقادیر مثبت هستند. در حالی که ما می توانیم از داشتن "دو کتاب" صحبت کنیم، از لحاظ فیزیکی ما نمی‌توانیم "منفی دو کتاب" داشته باشیم (جولیک و همکاران، ۲۰۱۲). بر این اساس یافتیان و همکاران (۱۳۹۹)، در تحقیقی با عنوان «مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در خصوص مفهوم اعداد منفی» اعداد منفی یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دانش‌آموزان کشورمان در پایه‌های ششم و هفتم با آن آشنا می‌شوند. شناخت و درک این مفهوم برای دانش‌آموزان همواره با سختی و دشواری همراه بوده است و دانش‌آموزان با بدفهمی‌های مختلف مواجه بوده‌اند. آشنایی دبیران با بدفهمی‌ها و تغییر شیوه آموزش آن‌ها می‌تواند در درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از این مفهوم مؤثر باشد. در مطالعه ای که توسط ریحانی و همکاران (۱۳۹۵)، با عنوان «بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان» که در آن از روش تحقیق توصیفي از نوع زمینه‌یابي و جامعه آماري شامل کلیه دانش‌آموزان پایه دوم راهنمايي شهر تهران در سال تحصيلي ۹۲–۱۳۹۱ و کلیه دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان در میان در سال تحصيلي ۹۳–۱۳۹۲ بود و حجم نمونه ۴۴۳ نفر از دانش‌آموزان پایه دوم راهنمايي و ۵۵ نفر از دانش‌آموزان پایه هفتم که به روش تصادفي خوشه‌اي چندمرحله‌اي انتخاب شدند. ابزار اندازه‌گيري پرسشنامه محقق‌ساخته مبتني بر پرسشنامه «بوفردينگ» و «کيلهامن» بود. نتايج تحقيق نشان داد که اغلب دانش‌آموزان، درک و فهم مناسبي از اعداد منفي در رياضيات مدرسه‌اي ندارند و در پياده‌سازي دانسته‌هاي خود در حل مسائل رياضي با مشکل مواجه مي‌شوند. برخي از دانش‌آموزان علامت «–» را به عنوان يک عملگر کاهشي و برخي نيز علامت «+» را به عنوان يک عملگر افزايشي در نظر مي‌گيرند. همچنين راشدی و همکاران (۱۳۹۲)، تحقیقی با عنوان «دانش‌آموزان در مورد اعداد منفی چگونه می‌اندیشند؟» انجام دادند که به روش کیفی پیمایشی انجام شده و جامعه آماري آن شامل کليه دانش‌آموزان دختر دوم راهنمايي شهرستان قرچک ورامين بود و از اين تعداد ۳۴ نفر به عنوان نمونه اوليه و به روش نمونه‌گيري در دسترس انتخاب شدند. ابزار اندازه‌گيري در آن پژوهش، پرسشنامه‌اي بود که بر اساس پرسشنامه "بوفردينگ" طراحي گرديد. نتايج تحقيق نشان داد که دانش‌آموزان با اينکه از قوانين حاکم بر علامت‌ها آگاهي دارند اما در حل مسائل قادر به پياده‌سازي دانسته‌هاي خود نيستند. همچنين بعد از اينکه ضرب و تقسيم اعداد صحيح به دانش‌آموزان تدريس مي‌شود، دانش‌آموزان از عملگر ضرب براي علامت‌ها در جمع و تفريق استفاده مي‌کنند. اکثريت دانش‌آموزان، تفاوت بين بزرگي و اندازهٔ دو عدد صحيح را درك مي‌کنند و مسائل مقايسهٔ دو عدد صحيح را به درستي حل مي‌کنند. دانش‌آموزان اغلب اعداد را به دو دسته تقسيم مي‌کنند؛ دستهٔ اول، همهٔ اعداد را مثبت فرض کرده و صفر را کوچکترين عدد در نظر مي‌گيرند و دستهٔ دوم اعداد منفي را کوچکتر از مثبت‌ها و بزرگتر از صفر در نظر مي‌گيرند، ولي قادر به مرتب کردن اعداد منفي نيستند. همچنين دانش‌آموزان عدد نزديکتر به ۱۰ و نزديکتر به صفر را نسبتاً خوب تشخيص مي‌دهند ولي در تشخيص عدد نزديکتر به صفر که نسبت به مبدأ مطرح شده، عملکرد بهتري داشتند. نظری (۱۳۹۱)، در تحقیقی با عنوان «بررسی ریشه‌هاي بدفهمي‌هاي دانش‌آموزان سال اول متوسطه شهر قم در رابطه با اعداد منفی» نتايج نشان داد که اکثر دانش‌آموزان سال اول متوسطه در مبحث اعداد منفی و مباحث مرتبط با آن بدفهمی دارند به طوري که اين بدفهمي‌ها سبب شکل‌گيري طرحواره‌هاي ناقص ديگر در ذهن آن‌ها

46. formal negative number
47. Hernandez
48. Kullberg

شده و در نتیجه موجب شکست دانش‌آموزان در حل مسأله شده است. همچنین، وي نشان داد که یکی از مشکلات دانش‌آموزان در حل مسائل مرتبط با اعداد منفی، عدم توانایی در بکارگیري قوانین حاکم بر علامت‌ها است.

در مطالعه‌ای که توسط پراتیوی و همکاران[۴۹] (۲۰۲۱)، با عنوان «تشویق دانش‌آموزان به الگوی نوظهور در درک اعداد منفی» صورت گرفت، نتایج نشان داد که استفاده از الگوهای نوظهور همچون بازی توانسته سبب تشویق دانش‌آموزان در درک بهتر اعداد منفی شود. آی[۵۰] (۲۰۱۹)، تحقیقی با عنوان «بررسی دانش‌آموزان پایه هفتم از اعداد صحیح منفی در ریاضیات بر اساس فعالیّت‌های مدل‌سازی بر اساس تاریخ» انجام داد که نتایج نشان داد که بیش‌تر دانش‌آموزان، اعداد منفی را به‌وسیله علامت تعریف کرده‌اند. به عبارت دیگر، اعداد منفی را اینگونه توضیح داده‌اند که این دسته از اعداد، اعدادی با علامت «-» هستند. در واقع، این مطلب بیانگر آن است که اغلب دانش‌آموزان سعی می‌کردند اعداد منفی را به صورت نمادین بفهمند. فوادیه و سوریادی[۵۱] (۲۰۱۹)، در تحقیقی با عنوان «فعالیّت‌های آموزشی و یادگیری در کلاس درس و تأثیر آن بر بدفهمی دانش‌آموزان: مطالعه موردی در مورد اعداد صحیح منفی» به این نتیجه دست یافتند که به کار بردن این جملات و قوانینی که گاهی پاسخ سؤال را سریع و بدون تأمل به‌دست داده، باعث شده دانش‌آموزان در درک مفهوم مورد نظر دچار مشکل شوند. همچنین، استفاده مکرر معلم از یک نوع سؤال باعث شده است که دانش‌آموزان، بدون تجزیه‌وتحلیل، راه‌حل را طوطی‌وار تکرار نمایند و متوجه مفهوم مورد نظر نشوند و تنها پس از مدتی که با سؤالات گوناگون آن مبحث روبرو شدند، دشواری‌های آن مفهوم را دریافتند. همچنین فوادیه و سوریادی (۲۰۱۷)، تحقیقی با عنوان «بیان مشکلات در درک اعداد منفی که دانش‌آموزان با آن روبرو هستند: کیفیّت تحصیل در مدارس متوسطه اندونزی» انجام داد که نتایج نشان داد که مهارت و تجربه دانش‌آموزان در دوره ابتدایی در زمینه اعداد، بر درک اعداد منفی بسیار تأثیرگذار بوده است. همچنین برخی از معلمان در دوره ابتدایی اعتقاد داشتند که در تفریق همواره عدد بزرگ‌تر، ابتدا آورده شود که این قانون را توضیح خوبی برای تفریق می‌دانند، این گفته شاید برای دانش‌آموزان مقطع ابتدایی که با اعداد منفی آشنایی ندارند، مشکلی ایجاد نکند ولی هنگامی که به پایه‌های بالاتر برود، ممکن است باعث حل نادرست سؤال و بدفهمی در این زمینه شود؛ البته آشنایی معلم با دانش قبلی دانش‌آموزان در پایه‌های پیشین، در کاهش بدفهمی‌های آنان مؤثر است. بلیمی (۲۰۱۵)، در تحقیقی با عنوان «تجزیه‌وتحلیل انتقادی آموزش و یادگیری اعداد منفی» نتایج نشان داد در آموزش مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم اعداد منفی، توجه به تاریخچه این مفاهیم و نحوة شکل‌گیری و توسعه آن‌ها توانسته در بهبود روش‌های آموزش آن مفاهیم نقش مهمی داشته باشد. در واقع امروزه استفاده از محور اعداد یکی از شیوه‌های مناسب برای آموزش این مفهوم محسوب می‌شود. در مطالعه‌ای که توسط المهدیا و برونو[۵۲] (۲۰۱۴)، با عنوان «راهبردهای معلمان پیش دبستانی برای حل مشکلات جمع با اعداد منفی» صورت گرفت، نتایج نشان داد که به کار بردن الگوهای مختلف از جمله شیوه‌های مفید برای تدریس اعداد منفی است؛ به عنوان مثال، برای اعداد مثبت و منفی مُهره‌هایی با رنگ‌های سفید و مشکی انتخاب شد. هر مُهره سفید، نشان دهنده یک واحد مثبت و هر مُهره مشکی، نماینده یک واحد منفی بود. هر عدد را می‌توان از مجموع مُهره‌های سفید و مشکی به‌دست آورد، چون هر مُهره سفید خنثی‌کننده اثر یک مُهره مشکی است، این مفهوم به دانش‌آموزان منتقل شده که مجموع هر سفید و مشکی برابر صفر است. بدین ترتیب مجموع هر دو عدد مثبت و منفی با فاصله یکسان از صفر را صفر در نظر گرفته‌اند. بوفردینگ (۲۰۱۴)، در تحقیقی با عنوان «درک صحیح منفی: توصیف مدل‌های ذهنی دانش‌آموزان کلاس اول» به این نتیجه رسید که بسیاری از دانش‌آموزان تلاش می‌کنند مفهوم اعداد منفی را درک کنند، زیرا ظاهراً این اعداد را با درک ایجاد شده از اعداد نامنفی‌شان در تناقض می‌بینند. جولیک و همکاران (۲۰۱۲)، در تحقیقی با عنوان «درک کمتر از هیچ: تأثیر عصبی فاصله برای اعداد منفی» معتقدند که استفاده روان از اعداد منفی نیاز به پذیرش مقادیر کمتر از صفر دارد که فاقد معنی ملموس مقادیر مثبت هستند؛ در حالی که ما می‌توانیم از داشتن "دو کتاب" صحبت کنیم، از لحاظ فیزیکی ما نمی‌توانیم "منفی دو کتاب" داشته باشیم. کیلهامن (۲۰۱۱)، در تحقیقی با عنوان «درک کردن اعداد منفی» بیان کرد که گسترش دامنة عددی از اعداد طبیعی به اعداد صحیح یک مؤلفة ضروری است که دانش‌آموز در ریاضیات مدرسه‌ای باید به آن دست یابد. با معرفی اعداد منفی، دانش‌آموز با یک مجموعة جدید از اعداد آشنا شده است که انتظار دارند یک دسته قواعد جدید را برای کار با این اعداد یاد بگیرند که با قوانین عملیات با اعدادی که قبلاً یاد گرفته‌اند در تضاد است. کاسکارت و همکاران (۲۰۰۳)، در تحقیقی با عنوان «یادگیری ریاضیات در مدارس ابتدایی و راهنمایی» انجام دادند که نتایج نشان داد چون دانش‌آموزان در سال‌های بعدی مدرسه با اعداد منفی در جبر کار خواهند کرد، باید کشف اعداد منفی را به شیوه‌ای معنی‌دار و بدون عجله شروع کنند. شلیمن و همکاران (۲۰۰۳)، در تحقیقی با عنوان «جبر در دبستان» از طریق مطالعة دانش‌آموزان پایه‌های دوم تا چهارم متوجه شدند که این بچه‌ها قادرند ایدة عدد منفی را بپذیرند اما برای عملیات روی این اعداد به چالش کشیده شدند؛ بنابراین به نظر می‌رسد عوامل متعددي از جمله: نوع آموزش ریاضی دانش‌آموزان، مطالبی که در کتاب‌هاي درسی‌شان مرتبط با اعداد صحیح بیان شده است، دیدگاه معلمان ریاضی، شرایط و محیط آموزشی، برنامة درسی و عوامل دیگري می‌توانند علت این تفاوت عملکرد دانش‌آموزان باشند. در واقع در دنیاي امروز، نسبت به نقش رياضي در صورت‌بندي نظام عالم، تبیین پدیده‌ها و پرورش قوة استدلال و تفکر آدمي اجماع وجود دارد. همانطور که در اصول و معیارهاي برنامة درسي شوراي ملّي معلمان رياضي در امریکا بیان شده است که: «ارتقاي توانايي تفکر در انسان، رياضي و حل مسأله براي کار، رياضي براي جامعة علمي و صنعتي همه و همه نقش بي‌بديل رياضي را در اين عصر روشن‌تر مي‌کنند؛ در چنين شرايطي، داشتن توانايي‌هاي رياضي‌وار، درهايي را براي آينده‌اي پُربار باز مي‌کند که فقدان آن‌ها، اين درها را بسته

[49]. Pratiwi et al.
[50]. Ay
[51]. Fuadiah & Suryadi
[52]. Almeida & Bruno

نگه می‌دارد» (آی، ۲۰۱۹). به دلیل چنین نقشی در نظام آموزشی ایران نیز ریاضی در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای از جایگاه والایی برخوردار است و هزینه و نیروی شایان توجهی به آن اختصاص داده شده است. با این حال، در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای موانعی از جمله بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی وجود دارد که شناختن و مرتفع کردن آن، از دغدغه‌های اصلی آموزشگران ریاضی بوده و هست؛ لذا سؤالات زیر مطرح می‌گردد:

۱- آیا توانایی دانش‌آموزان دختر و پسر دوره متوسطه اول در درک اعداد منفی یکسان است؟
۲- درک و فهم دانش‌آموزان دوره متوسطه اول از مفهوم اعداد منفی و اشتباهات آنان چگونه است؟
۳- آیا دانش‌آموزان توانایی حل مسأله مرتبط با اعداد منفی را دارند؟
۴- آیا دانش‌آموزان توانایی استدلال در مورد پاسخ‌شان در حل مسائل مرتبط با اعداد منفی را دارند؟
۵- بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ چیست؟ و چه روش‌هایی برای رفع آن‌ها وجود دارد؟

۳. روش تحقیق

تحقیق حاضر از نظر هدف، کاربردی و از نظر اجرا، توصیفی از نوع زمینه‌یابی است. جامعه آماری تحقیق، شامل کلیه دانش‌آموزان پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان می‌باشد که در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ مشغول به تحصیل بودند. در تحقیق حاضر، به دلیل انتخاب دانش‌آموزان پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان و همچنین به علت متفاوت بودن جمعیّت دانش‌آموزان در این گروه‌ها، روش خوشه‌ای چند مرحله‌ای و در خوشه‌ها روش نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌ای نسبی و نمونه‌گیری تصادفی ساده مورد استفاده قرار گرفته است. در تحقیق حاضر، پرسشنامه‌ها بین ۴۵۸ نفر از دانش‌آموزان توزیع گردید. از این تعداد، ۴۴۳ پرسشنامه مورد بررسی قرار گرفت که حجم نمونه دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهد. بقیه پرسشنامه‌ها به دلیل ناقص بودن اطلاعات وارد شده توسط دانش‌آموزان، مورد بررسی واقع نشد. در این تحقیق، پرسشنامه‌ای محقق‌ساخته طراحی گردید. همچنین برای تجزیه‌وتحلیل داده‌های این تحقیق از آمار توصیفی و آمار استنباطی استفاده گردید. در بخش آمار توصیفی از جدول توزیع فراوانی، نمودار دایره‌ای و بیان درصد داده‌ها و در بخش استنباطی از آزمون t مستقل برای مقایسه میانگین نمرات بر اساس جنسیّت و از آزمون X^2 برای مقایسه فراوانی و درصد فراوانی، همچنین برای آزمون اصلی تحقیق از آزمون میانگین تی ـ تک نمونه‌ای (T-TEST)، برای بررسی تأثیر عوامل رفع بدفهمی‌ها و آزمون فریدمن برای اولویت‌بندی این عوامل استفاده شده است.

۴. یافته های تحقیق

۴ .۱ . *یافته‌های توصیفی*

سؤال ۱ پرسشنامه: در هر جای خالی عدد مناسب قرار دهید.

الف) ۳۰- = + (۱۰-)

ب) = (۱-) + ۶

همانطور که صورت سؤال نشان می‌دهد، هر یک از موارد "الف" و "ب" به صورت متفاوتی مطرح شده‌اند. در مورد "الف" یکی از عوامل جمع و در مورد "ب" جواب نهایی خواسته شده است. این سؤال توانایی محاسبات دانش‌آموزان را می‌سنجد. در ادامه به هر کدام از قسمت‌های "الف" و "ب" به صورت جداگانه پرداخته می‌شود. نحوه و درصد پاسخگویی به قسمت "الف" سؤال ۱ پرسشنامه در جدول (۱) نمایش داده شده است.

جدول ۱: یافته‌های مربوط به سؤال ۱- الف پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی	
پاسخ درست	-۲۰	۳۳۶	۷۵/۸	
	+۲۰	۵۳	۱۱/۹۶	
پاسخ‌های نادرست	+۴۰	۲۵	۵/۶۴	۲۲/۳
	-۴۰	۵	۱/۱۳	
	غیره	۱۶	۳/۵۷	
عدم پاسخگویی		۸	۱/۸	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	

با توجه به جدول ۴-۱ مشاهده می‌گردد که ۷۵/۸ درصد (۳۳۶ نفر) از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند. ۱/۸ درصد (۸ نفر)، از آن ها هیچ پاسخی نداده‌اند که درصد نسبتاً پایینی است. ۲۲/۳ درصد (۹۹ نفر) پاسخ نادرست داده‌اند که عمده پاسخ‌های غلطی که آن‌ها اشاره کرده بودند، اعداد ۲۰+، ۴۰+ و ۴۰- است که هر کدام می‌تواند ناشی از یک نوع بدفهمی باشد.
نحوه و درصد پاسخگویی به قسمت "ب" سؤال ۱ پرسشنامه در جدول (۲) نمایش داده شده است.

جدول ۲: یافته‌های مربوط به سؤال ۱- ب پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی	
پاسخ درست	۵+	۳۷۰	۸۳/۵۲	
پاسخ‌های نادرست	۷-	۲۱	۴/۷۴	۱۵/۵۸
	۵-	۳۷	۸/۳۵	
	۷+	۶	۱/۳۵	
	غیره	۵	۱/۳۱	
عدم پاسخگویی		۴	۰/۹	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	

با توجه به جدول (۲) مشاهده می‌گردد که ۸۳/۵۲ درصد (۳۷۰ نفر) از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند که نسبت به قسمت "الف" بیش‌تر است. ۰/۹ درصد (۴ نفر) از دانش‌آموزان هیچ پاسخی نداده‌اند. ۱۵/۵۸ درصد (۶۹ نفر) پاسخ نادرست داده‌اند که عمده پاسخ‌های غلطی که به آن‌ها اشاره کرده بودند، اعداد ۷-، ۵- و ۷+ است که هر کدام می‌تواند ناشی از یک نوع بدفهمی باشد.
سؤال ۲ پرسشنامه: در هر جای خالی علامت‌های + و – را طوری قرار دهید تا جواب حاصل، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. سپس مقدار آن را حساب کنید.
= (۹-) (۳+) (۶-) (۵-)
هدف از طرح سؤال ۲ این است که تصور دانش‌آموزان نسبت به کاربرد علامت () مشخص شود. به عبارت دیگر مشخص شود که آیا دانش‌آموزان، علامت منفی را صرفاً به عنوان یک عملگر کاهشی در نظر می‌گیرند یا خیر؟ همچنین علاوه بر این توانایی دانش‌آموزان در محاسبات را نیز مشخص می‌کند. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۲ پرسشنامه در جدول (۳) نمایش داده شده است.

جدول ۳: افته‌های مربوط به سؤال ۲ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی	
پاسخ درست	۱۳+	۱۶۴	۳۷	
پاسخ‌های نادرست	۲۳-	۱۱۸	۲۶/۶۴	۵۱/۷
	۱۷-	۱۶	۳/۶۱	
	غیره	۹۵	۲۱/۴۵	
اشتباه محاسباتی	۱۲+	۱۶	۳/۶	
عدم پاسخگویی		۳۴	۷/۷	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	

با توجه به جدول (۳) نتایج زیر به‌دست آمده است: ۷/۷ درصد (۳۴ نفر) از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند؛ یعنی هیچ علامت و عددی در جای خالی قرار نداده‌اند. ۳۷ درصد (۱۶۴) نفر، از دانش‌آموزان موفق شدند به این سؤال پاسخ درست دهند؛ به این معنی که در سه جای خالی مربوط به علامت‌ها، علامت‌های درست قرار داده‌اند و جواب نهایی را نیز درست به‌دست آورده‌اند. این موضوع بیانگر این است که این دانش‌آموزان نسبت به این موضوع آگاه هستند که علامت "-" گاهی می‌تواند به عنوان یک عملگر افزایشی در محاسبات به کار رود. پاسخ درست دانش‌آموزان بیانگر این است که، تفاوت بین اندازه و ارزش (مقدار) را درک کرده‌اند؛ البته این دانش‌آموزان از توانایی محاسباتی خوبی هم برخوردار بوده‌اند، چون ضمن درک هدف سؤال و انتخاب درست علامت‌ها در جای خالی، حاصل نهایی را نیز درست به‌دست آورده‌اند.
۳/۶ درصد (۱۶ نفر)، از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال دچار اشتباه محاسباتی شده‌اند؛ به این معنا که در جای خالی مربوط به علامت‌ها،

علامت‌های درست را قرار داده‌اند، اما در محاسبه جواب آخر دچار اشتباه شده‌اند. این موضوع نشان می‌دهد که این افراد مفهوم علامت منفی را به خوبی درک کرده‌اند ولی چون از توانایی محاسباتی خوبی برخوردار نبوده‌اند، جواب نهایی را اشتباه به‌دست آورده‌اند. ۵۱/۷ درصد (۲۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند که از این تعداد تقریباً ۲۱/۴۵ درصد (۹۵ نفر)، آن‌ها پاسخ کاملاً غلط داده‌اند، یعنی پاسخ آن‌ها نامربوط است و بر اساس قاعده و قانون خاصی به‌دست نیامده است.

سؤال ۳ پرسشنامه: حاصل تقسیم چه عددی بر ۶- برابر ۱۲ می‌شود؟ (راه‌حل خود را بنویسید)

هدف از طرح سؤال ۳ این است که دانش‌آموزان ارتباط بین ضرب و تقسیم را تشخیص دهند و آن را به صورت یک عبارت ریاضی بنویسند و سپس جواب سؤال را به‌دست آورند. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان در جدول (۴) نمایش داده شده است.

جدول ۴: افته‌های مربوط به سؤال ۳ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۲۶۲	۵۹/۱
پاسخ نادرست	۱۱۹	۲۶/۹
اشتباه محاسباتی	۱۲	۲/۷
عدم پاسخگویی	۵۰	۱۱/۳
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۴) مشاهده می‌شود که ۵۹/۱ درصد (۲۶۲ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند. ۲/۷ درصد (۱۲ نفر)، از دانش‌آموزان توانسته‌اند تقسیم را به درستی بنویسند ولی دچار اشتباه محاسباتی شده‌اند و جواب نهایی را اشتباه به‌دست آورده‌اند؛ این دانش‌آموزان از قدرت درک بالایی برخوردارند، ولی در انجام محاسبات ضعیف عمل کرده‌اند. ۱۱/۳ درصد (۵۰ نفر)، از دانش‌آموزن هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه نکرده‌اند. به نظر می‌رسد که این دانش‌آموزان صورت سؤال را به خوبی درک نکرده‌اند و به همین علت نتوانسته‌اند مسأله را حل کنند. ۲۶/۹ درصد (۱۱۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ اشتباه داده‌اند، که تقریباً برخی از اشتباهات در بین آن‌ها مشترک است.

سؤال ۴ پرسشنامه: با قرار دادن عدد مناسب در مرحله آخر، الگوی زیر را کامل کنید.

۵ = ۲ + ۳

۴ = ۱ + ۳

۳ = ۰ + ۳

۲ = (.....) + ۳

هدف از طرح این سؤال این است تا دانش‌آموزان با استفاده از روش الگویابی به درک درستی از اعداد منفی دست یابند. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۴ پرسشنامه در جدول (۵) نمایش داده شده است.

جدول ۵: یافته‌های مربوط به سؤال ۴ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی	
پاسخ درست	۱-	۳۶۸	۸۳/۱	
	۰	۹	۲/۰۴	
پاسخ‌های نادرست	۵-	۱۰	۲/۲۶	۱۰/۴
	غیره	۲۷	۶/۱	
عدم پاسخگویی		۲۹	۶/۵	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	

همانطور که در جدول (۵) مشاهده می‌شود، ۶/۵ درصد (۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان هیچ پاسخی ارائه نکرده‌اند. با بررسی که پژوهشگر بعد از برگزاری آزمون از برخی از دانش‌آموزان به عمل آورد مشخص شد که برخی از آن‌ها صورت سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، هر چند قبل از اجرای آزمون هدف و منظور سؤال توضیح داده شد. ۸۳/۱ درصد (۳۶۸ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند؛ هر چند در کتاب درسی نمونه‌هایی مانند این مطرح نشده است. این موضوع بیانگر این است که استفاده از روش الگویابی این امکان را برای دانش‌آموزان

فراهم می‌آورد که خود به درک عمیق‌تر اعداد منفی برسند. ۱۰/۴ درصد (۴۶ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند. از این تعداد ۶/۱ درصد (۲۷ نفر) از آن‌ها پاسخی ارائه کرده‌اند که امکان ارائه تحلیل برای آن وجود ندارد.

سؤال ۵ پرسشنامه: اعداد صحیح زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و سپس بزرگترین و کوچکترین عدد را مشخص کنید.

۴-، ۸، ۰، ۴، ۲-، ۳، ۹، ۵-

هدف از طرح سؤال ۵ این است که تا درک و تصور دانش‌آموزان نسبت به عدد صفر و اعداد منفی مشخص شود. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۵ پرسشنامه در جدول (۵) نمایش داده شده است.

جدول ۶: یافته‌های مربوط به سؤال ۵ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۳۳۹	۷۶/۵
پاسخ نادرست	۹۲	۲۰/۸
عدم پاسخگویی	۱۲	۲/۷
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

همانطور که از جدول (۶) مشاهده می‌شود، ۷۶/۵ درصد (۳۳۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند. در واقع این دانش‌آموزان هم مفهوم عدد صفر و هم مفهوم اعداد منفی را به خوبی درک کرده اند. حدود ۲/۷ درصد (۱۲ نفر)، از آن‌ها به این سؤال پاسخ نداده‌اند. ۲۰/۸ درصد (۹۲ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند که دچار بدفهمی‌های مشترکی بوده‌اند.

سؤال ۶ پرسشنامه: کدام یک از اعداد زیر از قرینه (۷-) بزرگتر است؟ (با راه‌حل)

الف) ۹- ب) ۵- ج) ۵+ د) ۹+

هدف از طرح سؤال ۶ این است تا ابتدا درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم قرینه یک عدد منفی مشخص شود و سپس از طریق مقایسه آن با اعداد داده شده در گزینه‌ها درک و تصور آن‌ها نسبت به اعداد علامت‌دار بررسی گردد. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۶ پرسشنامه در جدول (۷) نمایش داده شده است.

جدول ۷: یافته‌های مربوط به سؤال ۶ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۳۸۱	۸۶
پاسخ نادرست	۵۳	۱۲
عدم پاسخگویی	۹	۲
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

همانطور که از جدول (۷) مشاهده می‌گردد، ۲ درصد (۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. ۸۶ درصد (۳۸۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست ارائه کرده‌اند که درصد نسبتاً بالایی است؛ این دانش‌آموزان مفهوم عدد منفی را به خوبی درک کرده‌اند. ۱۲ درصد (۵۳ نفر)، به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند؛ این دانش‌آموزان دچار بدفهمی شده‌اند یعنی اعداد منفی را بزرگتر از اعداد مثبت در نظر گرفته‌اند.

سؤال ۷ پرسشنامه: در هر گزینه کدام عدد به ۱۰ نزدیکتر است؟ دور آن خط بکشید و دلیل خود را بنویسید.

الف) ۲ و ۶

ب) ۴- و ۳

ج) ۹- و ۶

در سؤال ۷ از دانش آموزان خواسته شده است تا در هرمورد عدد نزدیکتر به ۱۰ را پیدا کنند. در مورد "الف" هر دو عدد مثبت هستند و دانش‌آموز باید یکی از آن‌ها را که به ۱۰ نزدیکتر است، انتخاب کند. در مورد "ب" و "ج" یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی است. در ادامه هر یک از موارد "الف"، "ب" و "ج" را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "الف" سؤال ۷ در جدول (۸) نمایش داده شده است.

با توجه به جدول (۸) مشاهده می‌شود که ۶۷/۹ درصد (۳۰۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی را برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۸/۷ درصد (۱۲۷ نفر) از دانش‌آموزان هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه نکرده‌اند؛ چون

جدول ۸: یافته‌های مربوط به سؤال ۷- الف پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۶	۳۰۱	۶۷/۹
پاسخ نادرست	۲	۱۵	۳/۴
عدم پاسخگویی		۱۲۷	۲۸/۷
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

برخی از دانش‌آموزان سؤال را به صورت یک سؤال چند گزینه ای در نظر گرفته‌اند، هر چند قبل از اجرا و در طول اجرای آزمون منظور این سؤال به مراتب توضیح داده شد. ۳/۴ درصد (۱۵ نفر) از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند، یعنی عدد ۲ را انتخاب کرده‌اند.
ب) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ب" سؤال ۷ در جدول (۹) نمایش داده شده است.

جدول ۹: یافته‌های مربوط به سؤال ۷- ب پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۲	۲۸۲	۶۳/۷
پاسخ نادرست	۴-	۲۰	۴/۵
عدم پاسخگویی		۱۴۱	۳۱/۸
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۹) مشاهده می‌شود که ۶۳/۷ درصد (۲۸۳ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۳۱/۸ درصد (۱۴۱ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از دانش‌آموزانی که به این سؤال پاسخ نداده‌اند، آن را به صورت یک سؤال چند گزینه‌ای در نظر گرفته‌اند. ۴/۵ درصد (۲۰ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند. دانش‌آموزانی که همه اعداد را مثبت در نظر می‌گیرند و ۴- را بزرگتر از ۲ تصور می‌کنند، دچار این اشتباه شده‌اند.
ج) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ج" سؤال ۷ در جدول (۱۰) نمایش داده شده است.

جدول ۱۰: یافته‌های مربوط به سؤال ۷- ج پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۶	۲۸۱	۶۳/۴
پاسخ نادرست	۹-	۲۶	۵/۹
عدم پاسخگویی		۱۳۶	۳۰/۷
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۱۰) مشاهده می‌شود که ۶۳/۴ درصد (۲۸۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۳۰/۷ درصد (۱۳۶ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. ۵/۹ درصد (۲۶ نفر)، از دانش‌آموزان به این پاسخ نادرست داده‌اند. دانش‌آموزانی که همه اعداد را مثبت در نظر می‌گیرند و ۹- را بزرگتر از ۶ تصور می‌کنند، دچار این اشتباه شده‌اند.
سؤال ۸ پرسشنامه: یک ساختمان ۲۰ طبقه دارد. ۵ طبقه زیرسطح زمین و ۱۵ طبقه بالای سطح زمین، آسانسور از طبقه هفتم به طبقه سوم زیر زمین می‌آید. آسانسور چند طبقه حرکت می‌کند؟ راه‌حل خود را بنویسید.
هدف از طرح سؤال ۸ این است تا دانش‌آموزان یک مسأله را که مربوط به دنیای واقعی است با روابط ریاضی حل کنند. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۸ در جدول (۱۱) نشان داده شده است.
همانطور که جدول (۱۱) نشان می‌دهد ۴۹/۷ درصد (۲۲۰ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند، که از روش‌ها مختلف برای حل

جدول ۱۱: یافته‌های مربوط به سؤال ۸ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۲۲۰	۴۹/۷
پاسخ نادرست	۱۵۹	۳۵/۹
عدم پاسخگویی	۶۴	۱۴/۴
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

آن استفاده کرده‌اند. ۱۴/۴ درصد (۶۴ نفر)، از دانش‌آموزان هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه نکرده‌اند. ۳۵/۹ درصد (۱۵۹ نفر)، از دانش‌آموزان نیز اقدام به حل مسأله کرده‌اند، ولی پاسخی که ارائه داده‌اند، اشتباه است.

سؤال ۹ پرسشنامه: ابتدای یک بردار ۴- و طول بردار دو برابر قرینه ابتدای آن است. انتهای بردار کدام است؟ (راه‌حل خود را بنویسید)
الف) ۸- ب) ۴- ج) ۴+ ب) ۱۲-

در این سؤال ابتدا و عدد بردار داده شده و از دانش‌آموزان خواسته شده است تا انتهای بردار را پیدا کنند. عدد بردار به صورت کلامی دو برابر قرینه ابتدای آن داده شده است. دانش‌آموزان بایستی نخست قرینه ابتدا را پیدا کنند، سپس با دو برابر کردن آن، عدد بردار را به‌دست آورند. این مسأله با دو روش یعنی رسم بردار و یا نوشتن جمع متناظر با بردار حل می‌شود. نحوه و درصد پاسیخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۹ در جدول (۱۲) نمایش داده شده است.

جدول ۱۲: یافته‌های مربوط به سؤال ۹ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۲۹۵	۶۶/۶
پاسخ نادرست	۱۳۶	۳۰/۷
عدم پاسخگویی	۱۲	۲/۷
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۱۲) مشاهده می‌شود که ۶۶/۶ درصد (۲۹۵ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان از رسم بردار و برخی از نوشتن جمع برای به‌دست آوردن جواب استفاده کرده‌اند؛ البته تعداد افرادی که از رسم بردار استفاده کرده‌اند بیش‌تر از کسانی است که از نوشتن جمع استفاده کرده‌اند. ۲/۷ درصد (۱۲ نفر)، از دانش‌آموزان هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه نکرده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان صورت سؤال را درک نکرده‌اند. ۳۰/۷ درصد (۱۳۶ نفر)، از دانش‌آموزان پاسیخ نادرست داده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان تمام مراحل را درست انجام داده‌اند، ولی چون قرینه را در نظیر نگرفته‌اند، انتهای بردار را عدد ۱۲- به‌دست آورده‌اند.

سؤال ۱۰ پرسشنامه: در هر گزینه کدام عدد بزرگتر است؟ دور آن خط بکشید و دلیل خود را بنویسید.
الف) ۵- و ۰ ب) ۹- و ۱
ج) ۴ و ۴- د) ۹- و ۱-

در سؤال ۱۰ از دانش‌آموزان خواسته شده است تا در هرمورد عدد بزرگتر را پیدا کنند. در مورد "الف" یکی از اعداد صفر و دیگری عددی منفی است و دانش‌آموز باید یکی از آن‌ها را که بزرگتر است، انتخاب کند. در مورد "ب" و "ج" یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی است. در مورد "د" هر دو عدد منفی هستند. در ادامه هر یک از موارد "الف"، "ب"، "ج" و "د" را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "الف" سؤال ۱۰ در جدول (۱۳) نمایش داده شده است.

با توجه به جدول (۱۳) مشاهده می‌شود که ۶۵/۷ درصد (۲۹۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۷/۸ درصد (۱۲۳ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، به همین دلیل نتوانسته‌اند به آن پاسخ دهند. ۶/۵ درصد (۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این پاسخ نادرست داده‌اند؛ این دانش‌آموزان اعداد منفی را بزرگتر از صفر در نظر گرفته‌اند، در واقع از نظر این دانش‌آموزان صفر کوچکترین عدد است.

ب) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ب" سؤال ۱۰ در جدول (۱۴) نمایش داده شده است.

با توجه به جدول (۱۴) مشاهده می‌شود که ۶۶/۸ درصد (۲۹۶ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست

جدول ۱۳: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۰- الف پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۰	۲۹۱	۶۵/۷
پاسخ نادرست	۵-	۲۹	۶/۵
عدم پاسخگویی		۱۲۳	۲۷/۸
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

جدول ۱۴: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۰- ب پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۱	۲۹۶	۶۶/۸
پاسخ نادرست	۹-	۲۳	۵/۲
عدم پاسخگویی		۱۲۴	۲۸
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۸ درصد (۱۲۴ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، به همین دلیل نتوانسته‌اند به آن پاسخ دهند. ۵/۲ درصد (۲۳ نفر)، از دانش‌آموزان به این پاسخ نادرست داده‌اند؛ در واقع این افراد همه اعداد را مثبت در نظر گرفته‌اند و به همین دلیل ۹- را بزرگتر از تصور کرده‌اند.

ج) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ج" سؤال ۱۰ در جدول (۱۵) نمایش داده شده است.

جدول ۱۵: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۰- ج پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۴	۳۰۰	۶۷/۷
پاسخ نادرست	۴-	۲۴	۵/۴
عدم پاسخگویی		۱۱۹	۲۶/۹
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۱۵) مشاهده می‌شود که ۶۷/۷ درصد (۳۰۰ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۶/۹ درصد (۱۱۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، به همین دلیل نتوانسته‌اند به آن پاسخ دهند. ۵/۴ درصد (۲۴ نفر)، از دانش‌آموزان به این پاسخ نادرست داده‌اند؛ نکته جالب توجه این است که برخی از دانش‌آموزان هیچ کدام از اعداد ۴ و ۴- را انتخاب نکرده‌اند و مساوی بودن دو عدد را به عنوان دلیل ذکر کرده‌اند.

د) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "د" سؤال ۱۰ در جدول (۱۶) نمایش داده شده است.

با توجه به جدول (۱۶) مشاهده می‌شود که ۶۵/۵ درصد (۲۹۰ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۸/۷ درصد (۱۲۷ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، به همین دلیل نتوانسته‌اند به آن پاسخ دهند. ۵/۹ درصد (۲۶ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند.

سؤال ۱۱ پرسشنامه: دمای هوای سراب ۶ درجه زیرصفر و دمای هوای بوشهر ۳۵ درجه بالای صفر و دمای هوای اردبیل ۸ درجه زیرصفر است. میانگین دمای هوای این ۳ شهر چند درجه است؟ (راه‌حل خود را بنویسید)

هدف از طرح سؤال ۱۱ این است که دانش‌آموزان دماهای بالای صفر و زیرصفر را به اعداد علامت‌دار تبدیل کنند و سپس میانگین این اعداد را به‌دست آورند. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۱۱ در جدول (۱۷) نمایش داده شده است.

جدول ۱۶: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۰- د پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۱-	۲۹۰	۶۵/۵
پاسخ نادرست	۹-	۲۶	۵/۹
عدم پاسخگویی		۱۲۷	۲۸/۷
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

جدول ۱۷: افته‌های مربوط به سؤال ۱۱ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۳۰۴	۶۸/۶
پاسخ نادرست	۷۱	۱۶
اشتباه محاسباتی	۳۱	۷
عدم پاسخگویی	۳۷	۸/۴
جمع کل	۴۴۳	۱۰۰

همانطور که جدول (۱۷) نشان می‌دهد ۶۸/۶ درصد (۳۰۴ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده‌اند، یعنی هم دماها را به صورت درست به اعداد علامت‌دار تبدیل کرده‌اند و هم محاسبات را به درستی انجام داده‌اند. ۷ درصد (۳۱ نفر)، از دانش‌آموزان دچار اشتباه محاسباتی شده‌اند. در واقع این دانش‌آموزان، دماها را به درستی به اعداد علامت‌دار تبدیل کرده‌اند، ولی چون از توانایی محاسباتی خوبی برخوردار نبوده‌اند، جواب نهایی را اشتباه به‌دست آورده‌اند. ۸/۴ (۳۷ نفر)، از دانش‌آموزان هیچ پاسخی برای این سؤال ارائه نکرده‌اند. ۱۶ درصد (۷۱ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست داده‌اند؛ در واقع این دانش‌آموزان نتوانسته‌اند دماها را به اعداد علامت‌دار تبدیل کنند و همه دماها را مثبت در نظر گرفته‌اند.

سؤال ۱۲ پرسشنامه: در هر گزینه کدام عدد به صفر نزدیکتر است؟ دور آن خط بکشید و دلیل خود را بنویسید.

الف) ۳ و ۵ ج) ۴- و ۲

ج) ۶ و ۹- د) ۲- و ۶-

در سؤال ۱۲ از دانش‌آموزان خواسته شده است تا در هر مورد عدد نزدیکتر به صفر را پیدا کنند. در مورد "الف" هر دو عدد مثبت است و دانش‌آموز باید یکی از آن‌ها را که به صفر نزدیکتر است، انتخاب کند. در مورد "ب" و "ج" یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی است. در مورد "د" هر دو عدد منفی هستند. در ادامه هر یک از موارد "الف"، "ب"، "ج" و "د" را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "الف" سؤال ۱۲ در جدول (۱۸) نمایش داده شده است.

جدول ۱۸: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۲- الف پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۳	۳۰۷	۶۹/۳
پاسخ نادرست	۵	۷	۱/۶
عدم پاسخگویی		۱۲۹	۲۹/۱
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۱۸) مشاهده می‌شود که ۶۹/۳ درصد (۳۰۷ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۹/۱ درصد (۱۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، به همین دلیل نتوانسته‌اند به آن پاسخ دهند. ۱/۶ درصد (۷ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند.

ب) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ب" سؤال ۱۲ در جدول (۱۹) نمایش داده شده است.

جدول ۱۹: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۲- ب پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۲	۲۸۹	۶۵/۲
پاسخ نادرست	-۴	۳۱	۷
عدم پاسخگویی		۱۲۳	۲۷/۸
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۱۹) مشاهده می‌شود که ۶۵/۲ درصد (۲۸۹ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۷/۸ درصد (۱۲۳ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند، چرا که به صورت یک سؤال چهار گزینه‌ای به سؤال نگاه کرده‌اند. ۷ درصد (۳۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند.

ج) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "ج" سؤال ۱۲ در جدول (۲۰) نمایش داده شده است.

جدول ۲۰: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۲- ج پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	۶	۲۸۵	۶۴/۳
پاسخ نادرست	-۹	۲۹	۶/۵
عدم پاسخگویی		۱۲۹	۲۹/۱
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۲۰) مشاهده می‌شود که ۶۴/۳ درصد (۲۸۵ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۹/۱ درصد (۱۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. برخی از این دانش‌آموزان منظور و هدف سؤال را به درستی درک نکرده‌اند. ۶/۵ درصد (۲۹ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند.

د) نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به قسمت "د" سؤال ۱۲ در جدول (۲۱) نمایش داده شده است.

جدول ۲۱: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۲- د پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی
پاسخ درست	-۲	۳۰۴	۶۸/۶
پاسخ نادرست	-۶	۱۷	۳/۸
عدم پاسخگویی		۱۲۲	۲۷/۵
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰

با توجه به جدول (۲۱) مشاهده می‌شود که ۶۸/۸ درصد (۳۰۴ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست داده‌اند. اکثر دانش‌آموزان که پاسخ درست داده‌اند، دلیل درستی نیز برای انتخاب خود ذکر کرده‌اند. ۲۷/۵ درصد (۱۲۲ نفر)، از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نداده‌اند. ۳/۸ درصد (۱۷ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند.

سؤال ۱۳ پرسشنامه: قرینه عدد $-[-(-5)]$ برابر است با:

الف) ۵ ب) -5 ج) $\frac{1}{5}$ د) $-\frac{1}{5}$

هدف از طرح سؤال ۱۳ این است تا میزان درک دانش‌آموزان از مفهوم قرینه و دقت آن‌ها سنجیده شود. همچنین توانایی آن‌ها در استفاده از قانون ضرب نیز بررسی شود؛ چون این سؤال با دو روش قابل حل است، یک روش برای حل این سؤال استفاده از قانون ضرب علامت‌ها است و روش دوم استفاده از قواعد مربوط به قرینه کردن یک عدد است. نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به این سؤال در جدول (۲۲) نمایش داده شده است.

جدول ۲۲: یافته‌های مربوط به سؤال ۱۳ پرسشنامه

نوع پاسخ‌های ارائه شده	فراوانی	فراوانی	درصد فراوانی	
پاسخ درست	+۵	۱۹۱	۴۳/۱	
پاسخ نادرست	-۵	۲۲۴	۵۰/۵۶	۵۵/۵
	$-\frac{۱}{۵}$	۱۵	۳/۳۹	
	$\frac{۱}{۵}$	۷	۱/۵۸	
عدم پاسخگویی		۶	۱/۴	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	

با توجه به جدول (۲۲) مشاهده می‌شود که ۴۳/۱ درصد (۱۹۱ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ درست یعنی ۵+ را به عنوان جواب انتخاب کرده‌اند. ۱/۴ درصد (۶ نفر)، از دانش‌آموزان هیچ پاسخی ارائه نکرده‌اند. ۵۵/۵ درصد (۲۴۶ نفر)، از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند. از این تعداد ۵۰/۵۶ درصد از آن‌ها ۵- را به عنوان پاسخ انتخاب کرده‌اند. این دانش‌آموزان ر اه‌حل را درست انتخاب کرده‌اند ولی چون صورت سؤال را با دقت درک نکرده‌اند، واژه قرینه در صورت سؤال را در نظر نگرفته‌اند. پاسخ نادرست برخی از این دانش‌آموزان به علت درک نکردن صورت سؤال بوده است؛ چون بسیاری از دانش‌آموزانی که گزینه ۵- را انتخاب کرده‌اند، دلایل درستی برای پاسخ‌شان ذکر کرده‌اند. ۳/۳۹ درصد (۱۵ نفر)، از دانش‌آموزان عدد $-\frac{۱}{۵}$ را به عنوان جواب انتخاب کرده‌اند. این دانش‌آموزان مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند. ۱/۵۸ درصد (۷ نفر)، از دانش‌آموزان $\frac{۱}{۵}$ را به عنوان جواب انتخاب کرده‌اند، که مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند ولی قانون ضرب علامت‌ها را درست به کار برده‌اند.

۲. ۴ . *یافته‌های استنباطی*

سؤال اول) آیا توانایی دانش‌آموزان دختر و پسر دوره متوسطه اول در درک اعداد منفی یکسان است؟

جدول ۲۳: میانگین پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات مربوط به درک مفهوم عدد منفی و محاسبه براساس تفکیک جنسیّت

جنسیّت	تعداد	میانگین	انحراف معیار
دختر	۲۱۰	۵/۰۶	۱/۵۲
پسر	۲۳۳	۵/۷۴	۱/۵۵

با توجه به جدول (۲۳) بین دختران و پسران در درک مفهوم عدد منفی تفاوت وجود دارد و میانگین پسران بالاتر از دختران است. بر اساس جدول (۲۴) نیز مشاهده می‌شود که این تفاوت بین دختران و پسران معنی‌دار است.

جدول ۲۴: نتایج آزمون t مستقل برای مقایسه پاسخ دانش‌آموزان دختر و پسر به سؤالات مربوط به درک مفهوم عدد منفی و محاسبه

Df	T	Sig
۴۴۱	-۴/۶۷	۰/۰۰۰ <۰/۰۵

جدول ۲۵: میانگین پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات مربوط به استدلال براساس تفکیک جنسیّت

جنسیّت	تعداد	میانگین	انحراف معیار
دختر	۲۱۰	۱۳/۶۲	۵/۲۰
پسر	۲۳۳	۱۳/۵۹	۴/۵۴

جدول ۲۶: نتایج آزمون t مستقل برای مقایسه پاسخ دانش‌آموزان دختر و پسر به سؤالات مربوط به استدلال

Df	T	Sig
۴۴۱	۰/۰۶۷	۰/۹۵>۰/۰۵

جدول ۲۷: میانگین پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات مربوط به حل مسأله بر اساس تفکیک جنسیّت

جنسیّت	تعداد	میانگین	انحراف معیار
دختر	۲۱۰	۳/۴۵	۱/۵۴
پسر	۲۳۳	۳/۴۸	۱/۳۲

با توجه به جدول (۲۵) مشاهده می‌گردد که بین دختران و پسران تفاوت وجود دارد و میانگین دختران بالاتر است؛ ولی طبق جدول ۴-۲۶ این تفاوت معنی‌دار نیست.
با توجه به جدول (۲۷) مشاهده می‌شود که بین دختران و پسران در حل مسائل مرتبط با اعداد صحیح تفاوت وجود دارد و میانگین پسران بالاتر از دختران است؛ اما بر اساس جدول (۲۸) این تفاوت معنی‌دار نیست.

جدول ۲۸: نتایج آزمون t مستقل برای مقایسه پاسخ دانش‌آموزان دختر و پسر به سؤالات مربوط به حل مسأله

Df	T	Sig
۴۴۱	-۰/۲۰۸	۰/۸۴>۰/۰۵

سؤال دوم) درک و فهم دانش‌آموزان دوره متوسطه اول از مفهوم اعداد منفی و اشتباهات آنان چگونه است؟
پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات ۱، ۲، ۴، ۵، ۶ و ۱۳ می‌تواند پاسخگوی این سؤال تحقیق باشد. پاسخگویی به سؤالات ۲ و ۱۳ بر اساس آزمون X^2 به‌دست آمده و سطح معناداری آن که کمتر از ۰/۰۵ است، نشان دهنده این است که پاسخ‌های نادرست به این دو سؤال ۲ و ۱۳ به طور معناداری بیش‌تر از پاسخ‌های درست می‌باشد؛ اما پاسخگویی به سؤالات ۱، ۴، ۵ و ۶ بر اساس آزمون X^2 به‌دست آمده است و سطح معناداری آن که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، نشان دهنده آن است که پاسخ‌های درست به این چهار سؤال ۱، ۴، ۵ و ۶ به طور معناداری بیش‌تر از پاسخ‌های نادرست می‌باشد.
جدول (۲۹). نشان می‌دهد که با توجه به آزمون X^2 و سطح معناداری که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، به طور معناداری درصد پاسخ‌های درست از بقیه پاسخ‌ها بیش‌تر است.
سؤال سوم) آیا دانش‌آموزان توانایی حل مسأله مرتبط با اعداد منفی را دارند؟
پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات ۳، ۸، ۹ و ۱۱ می‌تواند پاسخگوی این سؤال تحقیق باشد. پاسخگویی به سؤالات ۳، ۸، ۹ و ۱۱ بر اساس آزمون X^2 به‌دست آمده است و سطح معناداری آن که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، نشان دهنده آن است که پاسخ‌های درست به این سؤالات ۳، ۸، ۹ و ۱۱ به طور معناداری بیش‌تر از پاسخ‌های نادرست می‌باشد.
جدول (۳۰). نشان می‌دهد که با توجه به آزمون X^2 و سطح معناداری که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، به طور معناداری درصد پاسخ‌های درست از بقیه پاسخ‌ها بیش‌تر است.
سؤال چهارم) آیا دانش‌آموزان توانایی استدلال در مورد پاسخ‌شان در حل مسائل مرتبط با اعداد منفی را دارند؟

جدول ۲۹: نتایج X^2 برای بررسی معنی‌داری تفاوت پاسخ‌ها

پاسخ	فراوانی	درصد	X^2	سطح معناداری
درست	**۲۱۴۹**	**۶۹/۳۰**	**۳۷۶۷/۰**	۰/۰۰۰
نادرست	**۸۳۴**	**۲۶/۸۹**		
اشتباه محاسباتی	**۱۶**	**۰/۵۳**		
عدم پاسخگویی	**۱۰۲**	**۳/۲۸**		
مجموع	**۳۱۰۱**	**۱۰۰/۰۰**		

جدول ۳۰: نتایج X^2 برای بررسی معنی‌داری تفاوت پاسخ‌ها

پاسخ	فراوانی	درصد	X^2	سطح معناداری
درست	**۱۰۸۱**	**۶۱**	**۱۴۶۰/۹۷**	۰/۰۰۰
نادرست	**۴۸۵**	**۲۷/۳۷**		
اشتباه محاسباتی	**۴۳**	**۲/۴۳**		
عدم پاسخگویی	**۱۶۳**	**۹/۲**		
مجموع	**۱۷۷۲**	**۱۰۰/۰۰**		

پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات ۷، ۱۰ و ۱۲ می‌تواند پاسخگوی این سؤال تحقیق باشد. پاسخگویی به سؤالات ۷، ۱۰ و ۱۲ بر اساس آزمون X^2 به‌دست آمده است و سطح معناداری آن که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، نشان دهنده آن است که پاسخ‌های درست به این سه سؤال ۷، ۱۰ و ۱۲ به طور معناداری بیش‌تر از پاسخ‌های نادرست می‌باشد.

جدول ۳۱: نتایج X^2 برای بررسی معنی‌داری تفاوت پاسخ‌ها

پاسخ	فراوانی	درصد	X^2	سطح معناداری
درست	**۳۲۲۶**	**۶۶/۲۰**	**۲۷۷۸/۱۹**	۰/۰۰۰
نادرست	**۲۴۷**	**۵/۰۷**		
اشتباه محاسباتی	**۰**	**۰**		
عدم پاسخگویی	**۱۴۰۰**	**۲۸/۷۳**		
مجموع	**۴۸۷۳**	**۱۰۰/۰۰**		

جدول (۳۱) نشان می‌دهد که با توجه به آزمون X^2 و سطح معناداری که کمتر از ۰/۰۵ می‌باشد، به طور معناداری درصد پاسخ‌های درست از بقیه پاسخ‌ها بیش‌تر است.

سؤال اصلی) بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ چیست؟ و چه روش‌هایی برای رفع آن‌ها وجود دارد؟

با توجه به جدول (۳۲) مشاهده می‌کنیم که در سطح خطای کمتر از ۰/۰۵، سطح معناداری این آزمون برای تمامی عوامل کمتر از ۰/۰۵ است که این خود نشان از معنی‌دار بودن داده‌های مربوط به تمامی متغیرها است؛ در نتیجه عوامل بالا بر رفع بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی مؤثر می‌باشند.

با توجه به آزمون فریدمن و با کمک جدول (۳۳) مشاهده می‌کنیم که از لحاظ مطلوبیّت و تأثیر به ترتیب: ۱- توجه به ماهیّت سلسله مراتبی بودن مطالب ریاضی، ۲- توجه به مجرد بودن ریاضی، ۳- توجه به تجربه و دانش پیشین دانش‌آموزان، ۴- توجه به تفاوت‌های فردی، رشد شناختی، هوش و سبک یادگیری، ۵- ارتقاء سطح آگاهی، شناخت و تجربه معلم، ۶- اصلاح محتوای کتاب ریاضی، ۷- آموزش اولیاء در رتبه‌های اول تا هفتم قرار گرفته‌اند.

جدول ۳۲: آزمون تی تک نمونه‌ای شناسایی عوامل رفع بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی

	آزمون تی تک نمونه‌ای					
			ارزش مبنا= ۳			
	t	درجه آزادی	سطح معناداری	اختلاف میانگین	سطح اطمینان ۹۵ درصد	
					حد پایین	حد بالا
توجه به ماهیّت سلسله مراتبی بودن مطالب ریاضی	۲/۴۴۱	۴۴۲	۰/۰۱۶	۰/۱۱۲۸۶	۰/۰۲۱۱	۰/۲۰۴۶
توجه به مجرد بودن ریاضی	۲/۲۲۲	۴۴۲	۰/۰۲۹	۰/۱۴۷۵۰	۰/۰۱۵۸	۰/۲۷۹۲
توجه به تجربه و دانش پیشین دانش‌آموزان	۲/۱۸۸	۴۴۲	۰/۰۳۱	۰/۱۵۲۵۰	۰/۰۱۴۲	۰/۲۹۰۸
توجه به تفاوت‌های فردی، رشد شناختی، هوش و سبک یادگیری	۲/۱۵۳	۴۴۲	۰/۰۳۴	۰/۱۳۵۰۰	۰/۰۱۰۶	۰/۲۵۹۴
ارتقاء سطح آگاهی، شناخت و تجربه معلم	-۲/۵۹۵	۴۴۲	۰/۰۱۱	-۰/۱۸۲۵۰	-۰/۳۲۲۱	-۰/۰۴۲۹
آموزش اولیاء	-۲/۴۱۶	۴۴۲	۰/۰۱۸	-۰/۱۷۲۵۰	-۰/۳۱۴۲	-۰/۰۳۰۸
اصلاح محتوای کتاب ریاضی	۲/۳۹۱	۴۴۲	۰/۰۱۹	۰/۱۵۵۰۰	۰/۰۲۶۴	۰/۲۸۳۶

جدول ۳۳: زمون فریدمن شناسایی عوامل رفع بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی

	رتبه‌ها	
ردیف	عوامل	میانگین رتبه
۱	**توجه به ماهیّت سلسله مراتبی بودن مطالب ریاضی**	۵۹/۵
۲	**توجه به مجرد بودن ریاضی**	۵۸/۵
۳	**توجه به تجربه و دانش پیشین دانش‌آموزان**	۵۱/۵
۴	**توجه به تفاوت‌های فردی، رشد شناختی، هوش و سبک یادگیری**	۵۰/۵
۵	**ارتقاء سطح آگاهی، شناخت و تجربه معلم**	۴۱/۴
۶	**اصلاح محتوای کتاب ریاضی**	۳۹/۴
۷	**آموزش اولیاء**	۳۵/۴

۵. بحث و نتیجه گیری

از موضوعات مهم در آموزش مدرسه‌ای، ریاضیات است، قرن‌ها ریاضیات به عنوان والاترین درس برای تربیت "قدرت استدلالی" تلقی می‌شد. در گذشته و حال، متعارف‌ترین پاسخ به این پرسش که چرا این همه ریاضیات در مدرسه هست؟ این بوده است که: "ریاضیات به انسان، فکر کردن بهتر را می‌آموزد." به دلیل چنین نقشی در نظام آموزشی ایران نیز ریاضی در برنامه درسی مدرسه‌ای از جایگاه بالایی برخوردار است. با این حال در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای موانعی وجود دارد که شناختن و مرتفع کردن آن‌ها از دغدغه‌های اصلی آموزشگران بوده است. در واقع آگاهی درست دانش‌آموزان از اشتباهات و بدفهمی‌هایی که در یادگیری و حل مسأله ریاضی دارند عاملی تعیین‌کننده برای رشد عملکرد و پیشرفت ریاضی محسوب می‌شود. معمولاً اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در دروس ریاضی، وقت زیادی از کلاس درس را به خود اختصاص می‌دهد که طبعاً یافتن راه‌حل‌های مناسب برای تشریح و تصحیح آن‌ها، منابع فراوان آموزشی در پی خواهد داشت. وقتی دانش‌آموزی به درستی دریابد که دلایل و ریشه‌های بدفهمی و راه‌حل غلط او در کجا است و خود با راهنمایی‌های معلمش در مقام رفع و تصحیح آن‌ها برآید، بدون شک تجربه مهمی را در یادگیری ریاضی کسب کرده است که در موقعیّت‌های دیگر یادگیری و حل مسائل ریاضی به کمک او خواهد آمد و این امر در واقع به رشد تفکر و بصیرت ریاضی او منجر خواهد شد. اغلب معلمان قادرند تا با اتخاذ شیوه‌های مناسب و درگیر ساختن دانش‌آموزان در فعالیّت‌های درسی آنان را توانا سازند تا خود ضمن بررسی درستی یا نادرستی جواب‌هایشان تصمیم لازم را با اعتمادبه‌نفس اتخاذ کنند. تقویت این توانایی به نوبه خود نخستین گام برای رسیدن به تفکر مستقل ریاضی و ایجاد خلاقیّت و ابتکار در فرد می‌باشد، هر چند که گاه تحقق آن برای معلمان کار ساده‌ای نیست. تا به امروز تحقیقی با این سطح که به شناسایی بدفهمی‌های یادگیری مفاهیم اعداد منفی و روش‌هایی برای رفع آن‌ها در پایه هشتم مدارس ناحیه ۶ شهر اصفهان پرداخته باشد، منتشر نشده و این تحقیق از این جهت نوآور و پیشگام است. بر همین اساس نتایج به‌دست آمده در این تحقیق به طور کلی با نتایج تحقیقات، یافتیان و همکاران (۱۳۹۹)، ریحانی و همکاران (۱۳۹۵)، راشدی و همکاران (۱۳۹۲)، نظری (۱۳۹۱)، پرایتوی و همکاران (۲۰۲۱)، آی (۲۰۱۹)، فوادیه و سوریادی (۲۰۱۹)، فوادیه و سوریادی (۲۰۱۷)، بلیمی (۲۰۱۵)، المهدیا و برونو (۲۰۱۴)، بوفردینگ (۲۰۱۴)، جولیک و همکاران (۲۰۱۲)، کیلهامن (۲۰۱۱)، کاسکارت و همکاران (۲۰۰۳)، و شلیمن و همکاران (۲۰۰۳)، همخوانی دارد.

بر این اساس پیشنهاداتی در جهت کاهش بدفهمی‌ها در درس ریاضی مطرح می‌گردند که عبارتند از:

- پیشنهاد می‌گردد که با برگزاری کارگاه‌ها و دوره‌های مختلف برای معلمان ریاضی در خصوص بدفهمی‌های، مانند: کارگاه‌های بررسی کُتب ریاضی با حضور مؤلفان کتاب با تأکید بر رفع بدفهمی‌ها و نیز تولید مواد آموزشی و دست‌سازه‌های مناسب جهت اصلاح بدفهمی‌ها، زمینه لازم را برای انجام پژوهش‌هایی در جهت بررسی ریشه‌های بروز بدفهمی‌ها و راهکارهای مناسب برای جلوگیری از بروز و یا رفع آن‌ها در حوزه‌های موضوعی مختلف ریاضی و اجرایی نمودن آن‌ها فراهم گردد.
- پیشنهاد می‌گردد به منظور ریشه‌یابی و در نتیجه ارائهٔ راهکار برای برطرف کردن بدفهمی‌ها در دانش‌آموزان، نقش عوامل دیگر از جمله کتاب‌های درسی، معلم، مدرسه، عوامل اقتصادی ـ اجتماعی مورد بررسی قرار گیرد.
- از آنجا که در کشور ما دانش‌آموزان در پایه ششم با اعداد منفی آشنا می‌شوند و این آشنایی در پایه هفتم بسط داده می‌شود، زمان بیشتری برای آموزش و یادگیری آن لازم است. در واقع، صرف زمان بیش‌تر برای تدریس و یادگیری شیوه‌های مختلف آن، از جمله بکارگیری الگوهای عددی، محور اعداد و ... به درک عمیق‌تر دانش‌آموزان کمک می‌کند. شاید به کار بردن قوانین علامت‌ها در این مبحث بتواند برای آموزش این مفهوم مفید باشد، اما ابتدا می‌باید دانش‌آموزان به درک درست و کاملی از آن‌ها برسند تا بتوانند در حل مسائل از این قوانین استفاده کنند و دچار اشتباه نشوند.
- شیوه‌های ارزیابی متفاوت برای سنجش میزان درک و فهم دانش‌آموزان و شناسایی بدفهمی‌های احتمالی آنان مؤثر است. بهتر است در این ارزیابی‌ها مسائلی که به دانش‌آموزان داده می‌شود به گونه‌ای باشد که با مسائل دنیای واقعی نیز روبرو شوند. استفاده کاربردی دانش‌آموزان از این مبحث درک عمیق‌تری را به همراه خواهد داشت و بهتر است از ایشان خواسته شود راه‌حل‌ها و پاسخ‌هایشان را توضیح دهند تا معلمان از استدلال‌هایشان مطلع شوند.
- به نظر می‌رسد تأکید بر آموزش رویه‌ها و الگوریتم‌ها در تدریس باعث شده که اکثر دانش‌آموزان در سطوح مختلف تحصیلی در درک مفهوم عدد منفی دچار بدفهمی شوند و قادر به پیاده‌سازی دانسته‌های خود در حل مسائل نباشند؛ لذا آموزش‌وپرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کُتب درسی و برنامه‌های آموزشی به گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی و دنیای واقعی ایجاد شود.

مراجع

[۱] بخشعلی‌زاده، ش.، و بروجردیان، ن. (۱۳۹۶). شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ابتدایی در حوزهٔ محتوایی هندسه و اندازه‌گیری و مقایسهٔ عملکرد آن‌ها با میانگین عملکرد در سطح بین‌المللی، ***فصلنامه نوآوری‌های آموزشی***، سال شانزدهم، شماره ۶۴، ۱۲۶-۱۰۶.

[۲] پورعظیما، ز. (۱۳۹۱). ***بررسی تأثیر آموزش بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ارتباط با اعداد اعشاری به معلمان بر طراحی‌های آموزشی آنان***، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

[۳] راشدی، ف.، ریحانی، ا.، و حمیدی، ف. (۱۳۹۲). ***دانش‌آموزان در مورد اعداد منفی چگونه می‌اندیشند؟***، **پنجمین همایش ملّی آموزش، تهران.**

[۴] ریحانی، ا.، حمیدی، ف.، و راشدی، ف. (۱۳۹۵). **بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان**، ***نشریه علمی ـ پژوهشی فناوری آموزش***، **دوره دهم، شماره ۱، ۴۱-۲۵.**

[۵] زهره‌وند، ش.، مشهودی، ش.، و حیدری، م. (۱۳۹۵). ***چرا و چگونه دانش‌آموزان در درس ریاضی بیش‌تر اشتباه می‌کنند؟ ! (تجربه‌هایی از بدفهمی‌های آموزش کسرها از کتاب جدید پنجم ابتدایی)***، مجموعه مقالات چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، تهران.

[۶] علم‌الهدایی، ح. (۱۳۸۸). ***اصول آموزش ریاضی***، مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

[۷] غلام‌آزاد، س. (۱۳۹۳). ردپای آموزش ریاضی واقعیّت‌مدار در ریاضی مدرسه‌ای در ایران، ***دوفصلنامه نظریه عمل درسی***، دوره سوم، شماره ۲، ۷۰-۴۷.

[۸] محتشم، ز. (۱۳۹۳). مدل مفهومی تصور مفهوم و اهمیّت آن در آموزش ریاضی، ***فصلنامه رشد آموزش ریاضی***، دوره سی و یکم، شماره ۹۳، ۳۰-۲۱.

[۹] نظري م. (۱۳۹۱). ***بررسی ریشه‌های ي‌بدفهمی‌های ي‌دانش‌آموزان سال اول متوسطه شهر قم در رابطه با اعداد منفی***، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید بهشتی.

[۱۰] یافتیان، ن.، مهدوی، ن.، و مهرآئین، ب. (۱۳۹۹). مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در خصوص مفهوم اعداد منفی، *مجله ریاضی و جامعه*، دوره پنجم، شماره ۱، ۴۸-۳۷.

[11] Allen, G. (2007). ***Misconceptions in mathematics, Department of Mathematics***. Texas A & M University, College Station.

[12] Almeida, R. & Bruno, A. (2014). Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. ***Internat. J. Math. Ed. Sc. Tech****;* 45 (1): 719-737.

[13] Altiparmak, K. & Ozdogan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***; 41(1): 31-47.

[14] Ay, B. (2019). ***An Investigation on Seventh Grade Students'understanding of Negative Integers via Mathematics Historybased Model-eliciting Activities***. Doctoral Dissertation, Middle East Technical University, Ankara.

[15] Ball, D.L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary mathematics. ***Elementary School Journal***; 93(4): 373-397.

[16] Beery, J. Cochell, G. Dolezal, C. Sauk, A. & Shuey, L. (2004). ***Negative numbers***. In V. Katz, J. & K. D. Michalowics (Eds.), Historical Modules Project (CD-ROM). Mathematical Association of America.

[17] Bellamy, A. (2015). A critical analysis of teaching and learning negative numbers. ***Philos. Math. Ed. J***; 29(1): 1-12.

[18] Behrend, J.L. & Mohs, L.C. (2006). From simple questions to powerful connections: A two-year conversation about negative numbers. ***Teaching Children Mathematics***; 12(5): 260-264.

[19] Beswick, K. (2011). Positive experiences with negative numbers:Building on students in and out of school experiences. ***Australian Mathematics Teacher, University of Tasmania***; 67(2): 31-42.

[20] Bishop, J. Lamb, L. Philipp, R. Schappelle, B. & Whitacre, I. (2011). ***An investigation of negative-number reasoning: The case of Violet***. Presentation at the meeting of Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA. (National).

[21] Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. ***Journal for Research in Mathematics Education***; 45(2): 194-245.

[22] Bofferding , L. (2010). Grappling with negative numbers: Uncertainty is progress. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Denver, CO, April/May 2010. ***Journal of Research in Mathematics Education***; 1-12.

[23] Cangelosi, R. Madrid, S. Cooper, S. Olson, O. & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. ***The Journal of Mathematical Behavior***; 32(1): 69-82.

[24] Carraher, D.W. Schliemann, A.D. Brizuela, B.M. & Ernest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. ***Journal for Research in Mathematics Education***; 37(2): 87-115.

[25] Cathcart, W.G. Pothier, Y.M. Vance, J.H. & Bezuk, N.S. (2003). ***Learning mathematics in elementary and middle schools***. (Third Edition.), Upper Saddle River, NJ: Prentice.

[26] Donald, G.A. (2007). ***Student Thinking Lesson 1***. Misconceptions in mathematics Texas A&M University College Station, TX 77843-3368 Department of Mathematics.

[27] Fuadiah, N.F. & Suryadi, D. (2019). Teaching and learning activities in classroom and their impact on student misunderstanding: A case study on negative integers. ***Internat. J. Instruction***; 12(1): 407-424.

[28] Fuadiah, N.F. & Suryadi, D. (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. ***Internat. Ed. Stud.***; 10(1): 3-24.

[29] Heeffer, A. (2008). Negative Numbers as an Epistemic Difficult Concept: Some Lessons from History. In Costas Tzanakis (ed.) History and Pedagogy of Mathematics. Satellite Meeting of International Congress on Mathematical Education 11, 14-18 July 2008, ***Centro Cultural del México Contemporáneo, Mexico City, México, CD-ROM, Section***; 1(1): 1-13.

[30] Gallardo, A. & Hernandez, A. (2005). ***The duality of zero in the transition from arithemetic to algebra***. México; 17-24.

[31] Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algbera. ***Educational Studies in Mathematics***; 49(1): 171-192.

[32] Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). ***Systems of representations and the development of mathematical concepts***. In A.A. Cuoco (Ed), The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 1-23.

[33] Gullick, M.M. Wolford, G. & Temple, E. (2012). Understanding less than nothing: Neural distance effects for negative numbers. ***NeuroImage***; 62(1): 542-554.

[34] Kilhamn, C. (2011). ***Making Sense of Negative Numbers***. Doctoral Thesis, University of Gothenburg. Available online at: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151 (Accessed 10 August 2011). 1-288.

[35] Kilhamn, C. (2009). ***Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning***. In C. Bergsten, B. Grevholm & T. Lingefjord (Eds.), Perspectives on mathematical knowledge. Proceedings of madif6. Link ping, Sweden: SMDF. 30-35.

[36] Kullberg, A. (2007). ***Students opening up dimensions of variation for learning negative numbers***. Paper presented at the World Association of Lesson Studies international conference, 29 Nov-1 Dec., Hong Kong Institute of Education.

[37] Lemonidis, Ch. & Polytidis, D. (2010). ***The implementation of an electronic model in teaching negative numbers and their operations***. 13 th International Conference ICT in the education of the Balkan countries Varna. Balkan Society for Pedagogy and Education. 17-19.

[38] Manchester, P.D. (2011). ***Young Children Conceptualize the Relationships Among Positive and Negative Numbers and Zero***. PHD, Kent State University, College and Graduate School of Education, Health and Human Services / School of Teaching, Learning and Curriculum Studies.

[39] Molitorisova, L. (2011). ***Use of the history of negative numbers in education***. Faculty of Mathematics, Physics & Informatics, Comenius University, Bratislava, Slovakia. 1-7.

[40] Nunes, T. (1999). Young children's representations of negative numbers. ***Institute of Education – University of London***; 19(2): 7-12.

[41] Peled, I. Mukhopadhyay, S. & Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artique (Eds.), ***The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education PME***; 3(1): 108-112.

[42] Pratiwi, W.D. Aisyah, N. & Kurniadi, E. (2021). ***Encouraging student's emergent model in understanding negative number***, 4th Sriwijaya University Learning and Education International Conference, Atlantis Press. 648-652.

[43] Schliemann, A.D. Carraher, D.W. Brizuela, B.M. Earnest, D. Goodrow, A. Lara-Roth. S. & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman , B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), ***Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA, CRDG, College of Education, University of Hawai'i: Honolulu , HI***; 4(1):127-134.

[44] Shteingold, N. (2008). ***Young children thinking about negative numbers***. Ed.D. diss., Rutgers The State University of New Jersey-New Brunswick, 2008. In Dissertations & Theses.

[45] Stacey, K. Helme, S. & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), The 25thinternational conference for the psychology of mathematics education. ***Utrecht, the Netherlands: PME***; 4(1): 217-224.

[46] Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. ***Educational Studies in Mathematics***; 12(2): 151-169.

[47] Vlassis, J. (2009). What do students say about the role of the minus sign inpolynomials? In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rdconference of the international group for the psychology of mathematics education Thessaloniki, ***Greece: PME***; 5(1): 289-296.

[48] Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in negativity. ***Learning and Instruction***; 14(5): 469-484.

[49] Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. ***Educational Studies in Mathematics***; 49(3): 341-359.

[50] Wilcox, V.B. (2008). Questioning zero and negative numbers. ***Teaching Children Mathematics***; 15(1): 202-206.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–211، صص. ۴۶۵–۴۶۹

آموزش شیرین ریاضی با معرفی دو بازی

ندا توانایی[آ]، حسین نصراله نژاد[ب]

[آ]کارشناس ارشد آموزش ریاضی
[ب]دبیر ریاضی، آموزش و پرورش شهرستان بهبهان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
بازی ریاضی
بازی آموزشی
یادگیری ریاضی

چکیده

گاهی لازمه‌ی هر رشد، تغییر در شیوه‌ی ارائه‌ی آن موضوع و بهره‌گیری از روش‌های نوین می باشد. با توجه به اهمیت آموزش ریاضی در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای و چالش‌هایی که در زمینه‌ی تدریس آن برای دبیران و دانش‌آموزان وجود دارد، استفاده از رویکردهای جدید در آموزش ریاضی را که موجب بهبود کیفیت فرآیند یاددهی – یادگیری می‌گردد، بیش از پیش آشکار می‌سازد. استفاده از بازی های آموزشی در کنار تدریس ریاضی می‌تواند شیوه‌ای بسیار دلپذیر برای دانش‌آموزان باشد که یادگیری آن را عمق بخشیده و ماندگار خواهد ساخت. در این مقاله ابتدا نقش و اهمیت یادگیری از طریق بازی‌های ریاضی بیان می‌شود، سپس دو نمونه بازی با نام های "جایگاه۶۵ "> و "نقطه جو"> که توسط نگارندگان طراحی و در کلاس درس اجرا شده است، معرفی می‌گردند.

۱. مقدمه

یکی از چالش‌های دبیران ریاضی این است که، چگونه ریاضی را برای دانش‌آموزان جذاب و قابل درک سازند. دبیران خلاق و مبتکر همواره تلاش می‌کنند با تکیه بر تجارب تدریس خود، روش های جدیدی را ابداع کنند و جایگزین روش‌های سنتی نمایند. یکی از روش‌های جدیدی که از طریق آن می‌توان توجه دانش‌آموزان را جلب کرد و آنها را در فرایند یاددهی – یادگیری شرکت داد، آموزش از راه بازی است. بازی‌ها به عنوان یکی از روش‌های تدریس، موجب ارتقاء یادگیری و افزایش انگیزه در دانش‌آموزان می‌شوند. همچنین آموزش از طریق بازی می‌تواند به پیشرفت مهارت‌های ریاضی و کیفی سازی آن کمک نماید. دانش‌آموزان در حین بازی‌های آموزشی به مفاهیم ذهنی جدیدی دست می‌یابند و تجارب ارزنده‌ای به دست می‌آورند. پس دبیران باید بتوانند دانش و مهارت‌هایی را که می‌خواهند در مدرسه آموزش دهند، گاهی اوقات در قالب سرگرمی تهیه کرده و به این صورت از قدرت بازی‌ها برای آموزش و یاددهی ریاضی استفاده نمایند(لودویگ و اسوان، ۲۰۰۷). با توجه به کم انگیزه شدن دانش‌آموزان نسبت به درس ریاضی، تغییر روش‌های تدریس و اجرای شیوه‌های جذاب جهت انتقال دانش، بسیار حائز اهمیت می‌باشد که این مهم می‌تواند با عبور مسیر مطالب ریاضی از بازی میسر شود.

۲. بازی‌های آموزشی

بازی، فعالیتی قاعده‌مند، خودخواسته و داوطلبانه است که با رعایت قانون و قواعدی برای رسیدن به هدفی خاص تلاش می شود(مارلو و همکاران، ۲۰۱۶؛ به نقل از یافتیان و همکاران، ۱۴۰۰).
بازی ها دارای پنج ویژگی اساسی می باشند.آنها قانونمند، بازخورد دهنده ی سریع، چالش برانگیز و ترغیب کننده بوده و فعالیت گذشته‌ی بازیکنان، به منظور ارزیابی پیشرفت در اهداف را نشان می‌دهند(مایر، ۲۰۱۴).

پست الکترونیک: neda.tavanaie@gmail.com (ندا توانایی)، hosein.alhaf@gmail.com (حسین نصراله نژاد)

بازی‌های آموزشی، بازی‌هایی هستند که با هدف برنامه درسی خاص، طراحی شده‌اند و معمولا برای یادگیری بهتر مفاهیم ریاضی می‌باشند (رویل، ۲۰۰۸). بازی‌های آموزشی فرصت مشارکت در فعالیت یادگیری و تعامل با دیگر دانش‌آموزان را فراهم می‌آورد و امکان پرورش مهارت‌های تفکر انتقادی و تصمیم‌گیری را به وجود می‌آورد. همچنین دانش‌آموزان، لزوم بهره‌گیری از نمادهای انتزاعی را می‌آموزند. بازی‌های آموزشی، به علت اینکه دربرگیرنده‌ی کنش و واکنش متقابل و تبادل ایده‌ها و تفکرات بین بازیکنان (دانش آموزان) است، بر استمرار انگیزش، تقویت علاقه و جذابیت آموزش و یادگیری تاثیر می‌گذارد (کندی و باربلت، ۲۰۱۰). اگر دانش‌آموزان از درس ریاضی لذت ببرند، تمایل بیشتری برای یادگیری ریاضی از خود نشان می‌دهند (رزمی و شادکام، ۱۳۹۵). در حقیقت آموزش از راه بازی یک استراتژی است که از ایده بازی کردن برای رسیدن به اهداف خاص آموزشی اعم از کسب دانش، مهارت ها یا نگرش‌های خاص به کار گرفته می‌شود.
آموزش از طریق بازی یکی از رویکردهای نوینی است که در آن بازی، به عنوان ابزاری برای آموزش و یادگیری به کار می رود (آن و همکاران، ۲۰۱۶؛ یافتیان و همکاران ۱۴۰۰).
مزایای بکار بردن این روش عبارتند از:

- بازی باعث تقویت قدرت استدلال و منطق دانش‌آموزان می‌شود.
- در بازی، آموزش و سنجش به طور همزمان صورت می‌گیرد.
- بازی، یک روش آموزش بی‌کلام است.
- وسایل بازی، یک آزمایشگاه سیار ریاضی است.
- فرصت مشارکت فعال را برای همه‌ی دانش‌آموزان فراهم می‌سازد.
- در حین بازی دانش‌آموز تجاربی را به دست می‌آورد که موجب درک بهتر مفاهیم ریاضی و افزایش دقت او می‌شود.
- بازی تاثیر بسزایی را بر روند یادگیری، مهارت حل مسئله و انگیزه‌ی دانش‌آموزان به جا می‌گذارد.
- فکر کردن برای انتخاب حرکت مناسب در بازی، موجب رشد خلاقیت دانش‌آموزان می‌گردد.
- اوقات فراغت را با هدفی والا پر می‌کند و می‌تواند جایگزین بازی‌های کامپیوتری شود.
- هنر یک معلم آن است که بتواند با زبان ساده، عمیق ترین مفاهیم را انتقال دهد. با این دیدگاه، بازی های ریاضی هنرمندانی زبردست هستند (میرزاوزیری، ۱۳۹۴).

بازی‌های ریاضی تاثیر فراوانی بر دانش‌آموزان بر جای گذاشته که نگارندگان به تجربه آنها را دریافته اند. مهم ترین تا ثیر بازی، پیش زمینه و دیدگاهی است که همان ابتدا در ذهن دانش آموزان به وجود می‌آورد. کلمه‌ی "حبازی"> تداعی کننده‌ی شور و هیجان، لذت و آسودگی و نشاط و شادی در دانش‌آموزان بوده که تاثیرات مثبتی به همراه دارد. اگر هدف از آموزش ریاضی تثبیت و ماندگاری مطالب در ذهن دانش‌آموزان باشد که قطعا هدف مشترک همه‌ی معلمان ریاضی نیز هست، نقاط عطف به این امر کمک می‌نمایند. اما این نقاط عطف چه هستند؟ وقتی دانش‌آموز در طول بازی برنده یا بازنده می شود، باعث خوشحالی یا ناراحتی او می گردد. این برد و باخت‌ها و این خوشحالی و ناراحتی‌ها که تحت تاثیر بازی به‌وجود آمده است، نقاط عطفی هستند که سبب ماندگاری و تثبیت مطالب مورد نظر بازی، در ذهن دانش‌آموز می‌گردد. از دیگر تاثیرات بازی، بحث و گفتگویی است که تا مدت ها بعد از بازی، بین دانش‌آموزان ایجاد می‌شود. این فضای تعاملی به وجود آمده باعث افزایش تجربه‌ی دانش‌آموزان و به تبع آن افزایش یادگیری آنها می‌شود.
در این نوشتار به اهمیت و نقش بازی و تاثیر آن در فرآیند آموزش پرداخته می‌شود و دو بازی آموزشی جهت استفاده‌ی دانش‌آموزان متوسطه اول که از طرف نگارندگان مقاله، طراحی شده است، معرفی می‌گردد. بازی اول با نام "حجایگاه۶۵ "> که به شناخت اعداد صحیح و جمع جبری آنها اختصاص دارد و بازی دوم با نام "حنقطه جو"> می‌باشد، که در جهت یادگیری مختصات نقاط طراحی شده است.

۳. پیشینه پژوهش

بر اساس نظریه‌های پیاژه و ویگوتسکی بازی، اصلی‌ترین عامل رشد شناختی کودک است. آنها در قالب بازی به درک واقعیت‌ها و کنترل مهارت‌های شخصی می‌پردازند و هنگام بازی به ویژه بازی‌های آموزشی به مفاهیم ذهنی جدیدی دست می‌یابند و مهارت‌های سطح بالاتری را کسب می‌کنند (انگجی و عسگری،۱۳۸۵، به نقل از بهاء لو، ۱۳۹۶). پیاژه معتقد است روش‌های تدریس زبانی، از تاثیر کمتری برخوردار بوده و دانش‌آموزان نیاز دارند برای هماهنگی اعمال ذهنی خود، با اشیاء ملموس کار کنند. او باور دارد که مفاهیم ریاضی، بیش از مفاهیم دیگر، نیاز به آزمایش و تجربه دارند تا بدین وسیله دانش‌آموزان به درك دقیقتر مفاهیم ریاضی نائل شوند (مبینی، ۱۳۷۷، به نقل از بهاء لو، ۱۳۹۶). رفتارگرایان بر این عقیده‌اند که از بازی می‌توان به عنوان تجربه‌ای برای یادگیری استفاده نمود (هیوز به نقل از عبدالهی و همکاران، ۱۱۱۱). بسیاری از مربیان آموزش و پرورش به نقش بازی به عنوان یکی از مطلوب ترین عوامل آموزش و پرورش اشاره کردند. مونته سوری، فروبل، دکرونی، پیاژه و

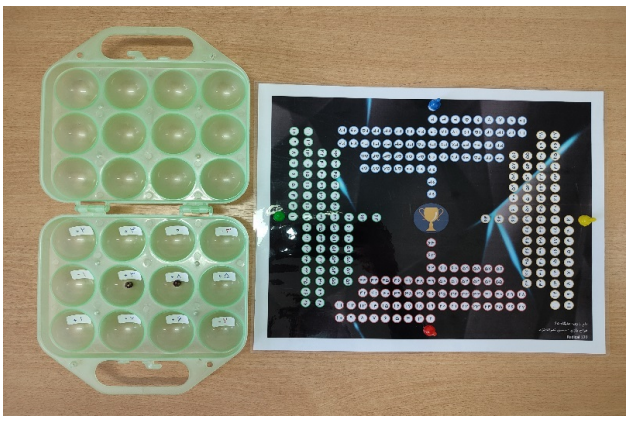
گانیه از جمله کسانی هستند که برای آموزش مفاهیم به کودکان از بازی‌های آموزشی استفاده می‌کردند و بهره‌گیری از آن را به عنوان عمده ترین وسیله آموزش کودک برای یادگیری موضوعات مختلف مورد تاکید قرار داده‌اند (اخوست، ۱۳۸۸). ریاضی‌دانی به نام هالموس بر این باور است که بهترین کار برای یادگیری ریاضی، انجام دادن آن است (میرزاوزیری، ۱۳۹۴).
شورای ملی معلمان ریاضی تاکید کرده‌اند که بهترین روش آموزش ریاضی آن است که دانش آموزان خود به ساخت مفاهیم ریاضی بپردازند.
پولوس و اسنادیر (۱۹۹۴) دریافتند که بازهاي آموزشي براي يادگيري مفاهيم و مهارتهاي جديد رياضي براي دانش آموزان كمك كننده هستند. اين محققان توصيه كردند كه بازي ها در برنامه آموزش درس رياضي به عنوان فعاليت كمكي لحاظ شود. آنها به تجربه دريافتند كه استفاده از بازيهاي آموزشي در درس رياضي به درك بهتر و يادآوري طولاني تر منجر مي شود.
بلوم و یاکوم (۱۹۹۶) اعتقاد دارند که بازی، راهبردهای انگیزشی دانش‌آموزان را جهت تمرین مهارت ها بهبود می‌بخشد و پایه‌ای قوی برای یادگیری آنها بنا می‌سازد.
پژوهش فنگفنگ و باربارا (۲۰۰۷) نشان داد که آموزش به شيوه‌ي بازي در بهبود نگرش و عملكرد رياضي دانش‌آموزان مؤثرتر از روش‌های آموزش سنتي است.
کوپودی و همکاران (۲۰۰۹) دریافتند روش آموزش ریاضی مبتنی بر بازی، باعث پیشرفت در یادگیری دانش‌آموزان شده و همچنین مشکلات یادگیری ریاضی آنها را کاهش می دهد.
نتایج پژوهش ها نشان می‌دهد که به کارگیری روش تدریس مبتنی بر بازی در آموزش ریاضیات، با ایجاد انگیزه و جذابیت در فرایند یادگیری، سبب کاهش اضطراب شده و محیط شادی را به وجود می‌آورد. این نوع تدریس ریاضی تأثیر مثبتی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان به جا می‌گذارد و سبب کاهش مشکلات و چالش‌های ریاضی دانش‌آموزان می‌شود (زاده دباغ،۱۳۸۹).
یکی از بهترین و جذاب‌ترین شیوه‌های آموزشی ریاضی، استفاده از بازی است که باعث ارتقاء یادگیری، افزایش انگیزه و عملکرد بهینه‌ی دانش‌آموزان می‌شود که تاثیر خود را در طول زمان پایدار می‌سازد (عبداللهی و همکاران، ۱۳۹۶).
یکی از اساسی‌ترین نگرانی‌های دست اندرکاران و پژوهشگران چند دهه‌ی اخیر آموزش و پرورش، اصلاحات و نوآوری در شیوه‌ی تدریس معلم بوده است. در پژوهش موسوی و همکاران (۱۴۰۰) میزان تاثیر دو روش آموزش به شیوه‌ی بازی و روش‌های سنتی، بر انگیزه و پیشرفت آموزش ریاضی دانش‌آموزان، مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت که نتایج آن بیانگر تاثیر مثبت و موفق تدریس به روش بازی می‌باشد.
در ادامه به معرفی افرادی می‌پردازیم که در زمینه‌ی بازی‌های آموزشی ریاضی دستاوردهای ارزنده‌ای کسب نموده‌اند. دکتر مجید میرزاوزیری عضو هیئت علمی و استاد تمام دانشگاه فردوسی مشهد و همچنین بنیانگذار شهر ریاضی می‌باشند. ایشان سعی دارند تا مفاهیم ریاضی را برای نوجوانان و دانشجویان به صورت مفهومی و در عین حال ساده بیان نمایند. وی در سال ۱۳۷۷ شهر ریاضی را بنیان نهادند. این مکان که یک پایگاه ریاضی ویژه‌ی نوجوانان بوده، در تلاش است تا مفاهیم ریاضی را با زبانی شیوا و تازه به نوجوانان بیاموزد. دکتر میرزا وزیری مولف کتاب‌های "حیادگیری ریاضی از طریق معما و بازی"، "حبا ذره تا بی‌نهایت مهر"، "حسفر به شهر ریاضی"، "حسیصدویازده"> و کتاب‌های دیگری می‌باشند که هر کدام از شیوه‌ی نگارش بی‌نظیر و جذابی بهره برده‌اند. به طور مثال کتاب "حمثلث"> از هر سو خوانده شود هر بار داستان تازه‌ای را بیان می‌کند. دکتر میرزاوزیری نیز مشاور علمی سامانه آموزشی "حپرگاس"> می‌باشند؛ "حپرگاس"> یک شبکه اجتماعی – دانش‌آموزی است که با همکاری اساتید دانشگاه فردوسی مشهد بنا شده که در آن محتواهای جدید آموزش ریاضی ارائه می‌گردد.
از دیگر فعالان توانمند این عرصه می توان از ابراهیم مرادي دبیر رياضي مدارس شهرستان مریوان نام برد. وی مخترع وسایل کمک آموزشی درس ریاضی هستند که بیش از ۳۱ مجموعه‌ی مختلف را به ثبت رسانده است. ساخت سازه‌های کمک آموزشی ریاضی، نتیجه سالها تلاش ایشان می باشد. تولیدات این دبیر خلاق، باعث رونق پیشرونده‌ی حوزه‌ی آموزش ریاضی، در سطح استان کردستان و کشور گردیده است به طوری که تمام مدارس مریوان مجهز به سازه‌های آموزشی او شده‌اند. هدف ابراهیم مرادی جذاب کردن درس ریاضی و یادگیری راحت تر آن برای دانش‌آموزان می‌باشد.
نگار نصراله زاده کارشناس ارشد آموزش ریاضی، معلم برتر، ایده پرداز و پژوهنده، علاوه بر طراحی سوالات مسابقه کانگرو، تالیف ۱۵ جلد کتاب از جمله "حدست ورزی‌های ریاضی"> را در کارنامه‌ی خود دارد. وی همچنین مبدع دست‌ورزی‌های ریاضی بوده وبه عنوان مدرس خلاقیت و بازی شناخته می‌شوند.

۴. معرفی بازی‌ها

دو بازی "حجایگاه۶۵ "> و "حنقطه جو"> توسط نگارندگان طراحی و در کلاس درس اجرا شده است. همچنین این بازی‌ها و چندین بازی دیگر در جشنواره‌ی ریاضی پاییز ۱۴۰۰ برای دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم، هشتم و نهم، در یکی از مدارس شهرستان بهبهان ارائه شد، که با استقبال بسیار زیاد دانش‌آموزان روبرو گردید. دانش‌آموزان از انجام این بازی‌ها رضایت کافی داشتند و اعلام کردند که این بازی‌ها باعث بهبود یادگیری ریاضی آنها در موضوعات جمع جبری اعداد صحیح و مختصات شده است. در ادامه این دو بازی معرفی می‌شوند. بیان انواع بیشتری از بازی‌های طراحی شده از حوصله‌ی این مقاله خارج می باشد. در آینده، نمونه‌های دیگری از بازی‌های آموزشی ارائه خواهد گردید.

بازی جایگاه ۶۵

جایگاه ۶۵ یک بازی آموزنده و مهیج است که باعث می‌شود دانش‌آموزان جمع جبری اعداد صحیح را بهتر و سریع تر بیاموزند و با اعداد قرینه و عدد صفر به عنوان عضو خنثی عمل جمع آشنا شوند. این بازی باعث تقویت قدرت حافظه می‌گردد.



● وسایل بازی

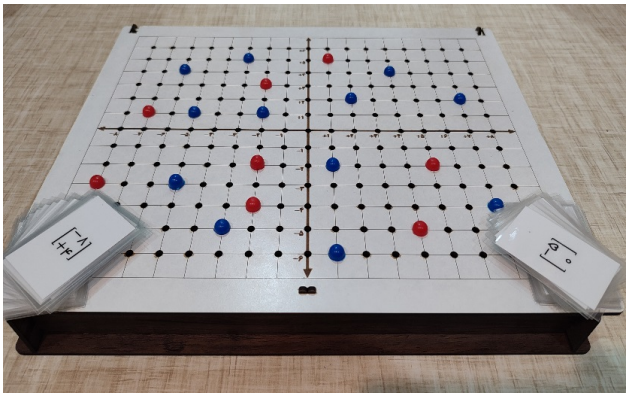
صفحه‌ی بازی، جعبه‌ی اعداد حاوی دو گوی، چهار مهره در چهار رنگ.

● نحوه‌ی اجرا

بازی جایگاه ۶۵ با دو تا چهار بازیکن انجام می‌شود. هر بازیکن در یک ضلع صفحه‌ی مستطیل شکل قرار گرفته و مهره‌ی رنگی خود را در خانه شروع می‌گذارد. هر بازیکن در نوبت خود، ابتدا جعبه‌ی اعداد حاوی دو گوی را تکان داده، سپس جمع جبری اعدادی که گوی ها بر روی آن قرار گرفته است را محاسبه نموده و با توجه به حاصل آن به جلو یا عقب حرکت می‌کند. برنده بازی کسی است که زودتر در خانه‌ی جام طلایی قرار بگیرد. اگر بازیکنی در خانه شروع قرار گرفته باشد و جمع جبری، عددی منفی شود، نیازی نیست مهره‌ی خود را حرکت دهد.

بازی نقطه‌جو

بازی نقطه‌جو یک بازی هیجان‌انگیز و آموزنده است که دانش‌آموزان با نواحی چهارگانه‌ی مختصات، محور طول‌ها و عرض‌ها، اعداد مثبت و منفی روی محور، مختصات نقاط و قرینه‌ی آنها آشنا شده و موجب افزایش دقت و سرعت عمل آنها می‌گردد.



● وسایل بازی

صفحه‌ی مختصات، ۳۰ مهره‌ی آبی، ۳۰ مهره‌ی قرمز، ۲۲۱ کارت مختصات نقاط.

● نحوه‌ی اجرا

بازی نقطه‌جو با دو بازیکن انجام می‌شود. هر یک از بازیکنان ۳۰ مهره‌ی یک رنگ بر می‌دارند و ۳۰ عدد کارت نیز روی میز قرار داده می‌شود. دو بازیکن به طور همزمان شروع به رقابت می‌کنند. هر یک از آنها باید یک کارت بردارد، عدد مختصات را بخواند و مهره‌ی خود را بر روی صفحه‌ی مختصات و در جای مناسب قرار دهد. بازی زمانی به اتمام می‌رسد که دیگر هیچ کارتی روی میز باقی نمانده باشد. هر بازیکن که بتواند نقاط بیشتری را پیدا کند، برنده بازی خواهد بود.

۵. جمع بندی

استفاده از روشهای نوین و فعال تدریس، نیازی است که بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته‌است. دیگر شیوه های مرسوم و سنتی توان رفع نیازهای آموزشی دانش‌آموزان را در این حیطه ندارند. استفاده از راهکار بازی در حین آموزش یکی از شیوه‌های تدریس سرگرم کننده و بانشاطی است که می‌تواند محیط آموزش و یادگیری را سرشار از خلاقیت نماید تا از رهگذر آن دانش‌آموزان مفاهیم و مهارت‌های ریاضی خود را توسعه دهند. آموزش ریاضی با روش‌های سنتی صرفا حفظ روابط و حل مکرر مسائل آن است که آموزش را ایستا نموده و از پویایی و خلاقیت تهی می‌سازد و سرانجام پس از مدتی نیز به دست فراموشی سپرده می‌شود. اما روش‌های نوین بر کشف روابط از طرف دانش آموزان و گسترش خلاقیت آنان تاکید دارد که دانش‌آموزان را قادر به فهم روابط و طرح مسئله می‌گرداند. آموزش ریاضی با بازی، شیوه‌ای است که در آن دانش‌آموزان مطالب درسی را با علاقه می‌آموزند که ضمن آن تجاربی را کسب می‌کنند و مهارت‌های بیشتری را به‌دست می‌آورند. بازی‌های ریاضی نقش تعیین کننده‌ای در تثبیت، تعمیق و تسریع یادگیری دانش‌آموزان ایفا می‌کند که منجر به قدرت تصمیم گیری و تمرکز بیشتر آنان می‌گردد. پس تغییر از تدریس سنتی به تدریس فعال و استفاده از بازی‌های آموزشی، گام بلندی در جهت پیشرفت و بهبود شیوه‌های آموزش ریاضی و پویایی آن خواهد شد.

مراجع

[۱] اخوست، آسیه. (۱۳۸۸). بازی های آموزشی و تاثیر آن بر فرایند یاددهی– یادگیری دانش آموزان کم توان ذهنی آموزش پذیر. مجله تعلیم و تربیت استثنایی،۴(۵)،۹۱-۱۰۲.

[۲] بهاء لو، مریم. (۱۳۹۶). بازی های آموزشی و آموزش ریاضی. مجله رشد آموزش ریاضی، دوره سی و پنجم، شماره ۲.

[۳] رزمی، رقیه و شادکام، مینا. (۱۳۹۵). نقش بازی در فرایند یادگیری و معرفی یک بازی برای آموزش مفهوم کسر. مقاله چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز، ۱۳۹۵.

[۴] زاده دباغ، حسین. (۱۳۸۹). تاثیر بازی رایانه ای آموزشی بر انگیزه و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش آموزان. پایان نامه دوره کارشناسی ارشد، رشته آموزش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. تهران.

[۵] عبداللهی، سیدحسین و ریحانی، ابراهیم و احمدی، غلامعلی. (۱۳۹۶). بازی های آموزشی و نقش آن ها در آموزش ریاضی مدرسه ای. اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضی، کرمانشاه، انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی کرمانشاه.

[۶] موسوی، مهسا و بابایی، مصطفی. (۱۴۰۰). مقایسه ی دو روش آموزش به شیوه ی بازی و سنتی بر انگیزه و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش آموزان. سومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، سمنان، دانشگاه فرهنگیان استان سمنان.

[۷] میرزاوزیری، مجید. (۱۳۹۴). یادگیری ریاضی از طریق معما و بازی. تهران: ترجمان خرد.

[۸] یافتیان، نرگس و عبدی، حدیث. (۱۴۰۰). بازی وارسازی در آموزش ریاضی. مجله رشد آموزش ریاضی، دوره سی و هشتم، شماره ۳.

[9] Blum, H & Yocum, Dorothy, J.(1996). Afun alternative: Using instructional games to foster student learning. www.eric.edu.gov.

[10] Fengfeng, K. & Barba, G. (3113). Game-playing for math's learning. *Journal Educ Technol*, 23(3), 319-319.

[11] Kennedy, Anne & Barbelett, Lennie. (2010). Learning and teaching through play: Supporting the early years learning framework. Early Childhood Australia Inc.

[12] Ludewig, Alexis & Amy, Swan. (2007). 101 great classrooms game: Easy ways to get your students playing, laughing and learning. New Yotk: McGraw Hill ebook.

[13] Mayer, R. E. (2014). Theory: Applying cognitive science to game for learning, Computer games for learning: An evidence-based approach, MIT Press (pp. 4983-).

[14] Nkopodi, N. & M. Mosimege, (3119). Incorporating the Indigenous Game of Morabaraba in the Learning of Mathematics, South African Journal of Education, 233.

[15] Pulos, S. & Shneider, C. (1994). Designing and Evaluating Effective Gamesfor Teaching Science and Mathematics, An Illustration for Coordinate Geometry*, Focus on Learning Problems in Mathematics, 23, 32-13.*

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–270، صص. ۴۷۰–۴۷۲

کج فهمی های رایج در آموزش ریاضی دوره دوم ابتدایی

هانیه موحدی[آ]، محسن مزیدی[آ]، عاطفه ابراهیمی

[آ] مدرس دانشکده فنی و حرفه ای و مراکز علمی کاربردی استان گلستان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
کج فهمی ریاضی
معلمان
دانش آموزان
دوره دوم ابتدایی

چکیده

با توجه به ساختار ریاضیات و گستردگی آن، کج فهمی دانش آموزان می تواند مشکلاتی در یادگیری ریاضی ایجاد کند. شناخت کج فهمی ها و ریشه های ایجاد آن، زمینه ای را برای بهبود یادگیری فراهم می سازد. بدین سبب ارائه راهکارهای مناسب، جهت برطرف کردن این کج فهمی ها، امری مهم و ضروری بشمار می رود.
در این مقاله، بخشی از یافته های پژوهشی در ارتباط با بررسی و ریشه یابی علل وقوع کج فهمی ها، اشتباهات مفهومی دانش آموزان در درس ریاضی و مثال هایی از کج فهمی های رایج و روش های رفع آن، بیان شده است. اطلاعات به دست آمده در پی مصاحبه با تعدادی از معلمان پایه های چهارم، پنجم و ششم ابتدایی تهیه شده است. هدف اصلی از انجام این پژوهش، بررسی کج فهمی های رایج دانش آموزان در حوزه محتوایی ریاضی و ارائه راهکار هایی جهت رفع این چالش برای معلمان و پژوهشگران می باشد.

۱. مقدمه

امروزه تلاش برای فهم و درک ریاضی جهت ارتقای توانایی تفکر و حل مسئله، امری ضروری است. ریاضی در برنامه درسی مدرسه، از جایگاه والایی برخوردار است. با این حال درس ریاضی یکی از حساس ترین دروس برای معلمان، دانش آموزان و اولیای آن ها می باشد. در تدریس و یادگیری ریاضی موانعی وجود دارد که رفع آن ها دغدغه ی اصلی معلمان ریاضی بوده و هست. یکی از این موانع، کج فهمی های ریاضی دانش آموزان است.
کج فهمی ها از عواملی هستند که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می شوند. کج فهمی ها به طور مستقل وجود ندارند بلکه در یک چارچوب مفهومی خاص بروز می کنند و می توانند با تغییرات چارچوب تغییر کنند یا ناپدید شوند. شناخت بدفهمی ها و ریشه های ایجاد آن ها در حوزه های مفهومی و در سطوح مختلف تحصیلی، می تواند موجب ارتقای یادگیری گردد. زیرا کج فهمی ها بخشی از ساختار مفهومی ذهن دانش آموز را تشکیل می دهند که با مفهوم جدید در تعامل است.
دانش جدید زمانی به خوبی درک و یکپارچه می شود، که هم راستا با شبکه دانش موجود باشد. متاسفانه اغلب دانش آموزان توانایی برقراری ارتباط بی دانش جدید و شبکه دانش موجود خود را ندارد. این اتفاق زمانی روی می دهد که یا دانش موجود ناقص است، یا دانش موجود درست است ولی آن گونه توسعه نیافته است که با دانش جدید هم راستا شود. در این دو وضعیت، دانش آموز، تفسیر های خود از اطلاعات را ساخته و در راستای آن، با اطلاعات پیشین، پیوند های خود را برقرار می کند. این تفسیر ها و پیوند های ناقص و معیوب، به خطاهای سیستماتیک منجر می شوند، که از آن ها با عنوان کج فهمی یاد می شوند (مسترز و جیمن، ۲۰۱۱).

پست الکترونیک: h.moovahedi@yahoo.com (هانیه موحدی)، mazidimohsen62@gmail.com (محسن مزیدی)، Atefeh.ebrahimi62@yahoo.com (عاطفه ابراهیمی)

۲. روش تهیه مقاله

این پژوهش به روش توصیفی صورت گرفته است و هدف آن کشف و شناسایی کج فهمی های دانش آموزان دوره دوم ابتدایی به منظور بهره وری معلمان جهت آموزش بهتر فراگیران می باشد. مقاله حاضر از تجزیه و تحلیل کتب و مقالات مرتبط و استفاده از تجربیات معلمان پایه های چهارم، پنجم و ششم شهرستان گرگان تهیه شده است.

۳. مفهوم کج فهمی

کج فهمی از نظر آلن (۲۰۰۷) فکر، تصور یا دید اشتباه است که از درک نادرست چیزی ناشی می شود. به عبارت دیگر ممکن است آنچه در ذهن دانش آموز شکل گرفته، تصورات ناشی از یک مفهوم ریاضی مناسب نباشد و صحت علمی نداشته باشد. این برداشت ها و تصورات ذهنی درباره یک مفهوم ریاضی ممکن است از طریق تجربیاتی باشد که فرد با قرار گرفتن در موقعیت های متفاوت کسب کرده باشد. بدین جهت این تصورات نادرست را از ذهن دانش آموز بسادگی نمی توان کنار گذاشت. پس باید آموزش و یادگیری مفاهیم به گونه ای باشد که به دانش آموزان کمک کند، که تصورات مفهومی خود را همزمان با تشریح معنای مفاهیم به کار رفته در آن شکل دهد. زیرا تصورات مفهومی ناصحیح را به دشواری می توان به یک تصور صحیح تبدیل کرد، به ویژه زمانی که به شکل منسجم و یکپارچه در ذهن و اندیشه دانش آموزان ایجاد شده باشد (ویلیمامز، ۱۹۹۱).
اولیویر (۱۹۹۲)، کج فهمی را باور ها و اصولی در ساختار شناختی فرد می داند که علت بروز خطاهای مفهومی نظام مند هستند. اسمیت و همکاران (۱۹۹۳) نیز، در جمع بندی خود از تحقیقات انجام گرفته در مورد کج فهمی های ریاضی، به این نتیجه رسیده اند که می توانند کج فهمی را برای نشان دادن آن گونه از برداشت های دانش آموزان که منجر به تولید الگوی نظام مندی از اشتباهات می شود، به کار ببرند.
کج فهمی به معنای داشتن باور هایی به ظاهر علمی است که مبنای علمی ندارد. کج فهمی ها به عنوان تصورات از پیش پنداشته شده، اعتقادات غیر علمی، نظریه های ساده و بی اساس و گاهی سوء تفاهم مفهومی هستند که فرد به آن اعتقاد دارد و از ظر علمی به ظاهر درست به نظر می رسند. اکثر مردم هم کج فهمی های زیادی با خود دارند که از آن آگاهی ندارند (رایان و جتا، ۱۳۹۵).
کج فهمی برای موقعیتی به کار می رود که در آن، ایده ای که دانش آموز از یک مفهوم در ذهن می سازد، با ایده های کارشناسان آن علم در تقابل باشد. این موقعیت با جایی که در آن یک خطای سهوی اتفاق می افتد، متفاوت است. زیرا موجب بروز خطاهای مفهومی نظام مند می گردد. یعنی اشتباهاتی که در موقعیت های مشابه نیز اتفاق می افتد (عبدالله حسام، ۱۳۸۶).

۴. دسته بندی کج فهمی های رایج در ریاضی

رادتز (۱۹۷۹) خطا ها را در پنج طبقه قرار می دهد:
۱. خطا های مرتبط با مشکلات زبانی، درک نادرست ساختار های پایه ای زبان ریاضی ممکن است در مراحل اولیه حل مساله، منجر به بروز خطا شود.
۲. مشکلات مرتبط با پردازش های نمادین و بازنمایی های دیداری دانش ریاضی.
۳. نداشتن مهارت ها یا دانش پیش نیاز.
۴. برقراری ارتباط نادرست.
۵. به کارگیری قوانین یا راهبرد های نامرتبط.
همچنین گرابر و جانسون (۱۹۹۱)، کج فهمی ها را در چهار گروه قرار می دهند:
۱. بیش تعمیمی: دانش آموز مفهوم یا رویه ای را که در یک وضعیت درست است، به وضعیتی دیگر تعمیم می دهد.
۲. بیش تخصیصی: دانش آموز محدودیتی را که ویژگی یک مفهوم یا رویه نیست، به آن نسبت می دهد.
۳. ترجمه نادرست: دانش آموز در ترجمه ی واژگان، نماد ها، جداول یا نمودار ها به یکدیگر اشتباه می کند.
۴. مفهوم سازی محدود: ریشه ی کج فهمی دانش آموز، به عدم درک مفهوم یا رویه بر می گردد.

۵. عوامل ایجاد کج فهمی

از جمله عواملی که باعث کج فهمی در دانش آموزان می شود، می توان به موارد زیر اشاره کرد:
یاد دهی نامناسب؛ که دلیل آن عمدتا دانش ناکافی معلم یا تدریس رویه ای می باشد. بسیاری از معلمان در مدارس دولتی و غیر دولتی، تدریس شان با تکیه به فهم ابزاری و بدون توجه به فهم رابطه ای می باشد.
کم توانی معلم در انتقال مطالب؛ بسیاری از معلمین، مدارک بالای ریاضی را اخذ کرده اند، ولی دوره های تربیت معلم را نگذرانده اند و این امر موجب می شود که انتقال مطلب به درستی صورت نگیرد.
دخالت والدین؛ استفاده والدین از روش های قدیمی باعث ایجاد دو گانگی برای دانش آموزان می شود.

منابع آموزشی؛ استفاده از یک نسخه آموزشی برای دانش آموزان یک پایه در سراسر کشور با توجه به تمایز موجود در توان ذهنی، سطح فرهنگی، امکانات مدارس و بسیاری عوامل دیگر، بازده کار را تغییر می دهند. بدین سبب، بهتر است معلمان، متناسب با فضای کلاس خود، مطالب را طبق سر فصل خواسته شده ارائه دهند.
ضعف دانش آموزان؛ تعمیم نابجای مطالب، عدم درک انتزاعی مفاهیم، یادگیری نادرست و ناکامل مطالب گذشته، نداشتن تمرکز، نداشتن انگیزه برای یادگیری مطالب.

۶. مثال هایی از مباحث کتاب

عدد نویسی: یکی از مشکلات دانش آموزان در نوشتن و خواندن عدد هایی است که بعضی از رقم هایشان صفر است. برای مثال، عدد سی هزار و بیست را می نویسد، ۳۰۰۰۰۲۰ به جای ۳۰۰۲۰ و این مشکل از درک نادرست ارزش مکانی ارقام به وجود می آید.
جمع و تفریق اعداد مرکب: اغلب دانش آموزان برای درک مسائل زمان دچار مشکل می شوند. برای رفع این مشکل، بهتر است از ساعت عقربه ای و همچنین از مثال های واقعی استفاده شود، تا دانش آموز بتواند، شرایط مسئله را برای خود تجسم کند.
الگو ها: عمدتا دانش آموزان بین دو جمله ی متوالی یک الگو، رابطه ای کشف می کنند و بدون توجه به جملات دیگر الگو، آن رابطه را به کل الگو نسبت می دهند. جهت رفع این کج فهمی، توصیه می شود معلمان حین تدریس تاکید نمایند که رابطه ی کشف شده، باید برای تمام جملات الگو برقرار باشد و همچنین، از خود دانش آموزان بخواهند که الگویی طراحی نمایند.
کسر: هدف از آموزش کسر، ارتقاء درک دانش آموزان از مفهوم عدد و پیش زمینه ای برای معرفی اعداد گویا در دبیرستان می باشد. همچنین به درک مفهوم احتمال نیز کمک می کند. بنابراین توجه به زیر ساختار های کسر، حین تدریس، توصیه می شود. یک کج فهمی رایج در مقایسه کسر ها، عدم توجه دانش آموزان به صورت و مخرج کسر به طور همزمان می باشد. برخی از دانش آموزان، به دلیل داشتن طرحواره ی اعداد طبیعی در ذهن خود، کسر $\frac{۳}{۱۰}$ را از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر می داد، چون ۳ از ۱ بزرگتر و ۱۰ نیز از ۲ بزرگتر می باشد!

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

شناخت کج فهمی ها و ریشه های ایجاد آن ها در حوزه های مفهومی و در سطوح مختلف تحصیلی، می تواند موجب ارتقای یادگیری گردد. درک بهتر مطالب، دانش آموزان را به انسان هایی خلاق و نو آور تبدیل می کند. کج فهمی دانش آموزان در درس ریاضی، موضوعی است که عموما در مدارس مشاهده می شود. لذا ضروری است معلمان با دقت و حساسیت بیشتر، مباحث ریاضی را تدریس نماید. از آنجایی که کج فهمی های دانش آموزان در ریاضی، اشتباهات سهوی نیستند که با تکرار و تمرین قابل اصلاح باشند، می بایست کج فهمی ها شناسایی و دلایل شکل گیری آن ها نیز مشخص شود، تا بتوان با استناد به یافته های پژوهشی و استفاده از روش های نوین تدریس، برای رویارویی مناسب با کج فهمی های دانش آموزان، گامی موثر در جهت رفع و اصلاح آن ها برداشت. امید است با بررسی کلیه عوامل ایجاد کج فهمی و بررسی راهکار های ارائه شده در این مقاله، به رفع مشکلات کج فهمی دانش آموزان کمک شود.
در خاتمه پیشنهاد می شود، معلمان به موارد زیر در امر تدریس توجه داشته باشند:
- تغییر در روش آموزش، متناسب با کلاس درس.
- تغییر در فعالیت های گروهی کلاس.
- استفاده از تکنولوژی های جدید آموزشی.
- ایجاد انگیزه برای دانش آموزان با ارائه مثال هایی کاربردی در زندگی روزمره، مرتبط با موضوع درس.
- مقابله با کج فهمی دانش آموز، به محض وقوع آن.
- مطالعه ی کج فهمی های شناخته شده و راهکار های رفع آن ها.

مراجع

[۱] اسکمپ، ریچارد (۱۳۸۴). فهم رابطه ای و فهم ابزاری. ترجمه رضا حیدری قزلجه و زهرا گویا. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۸۱، ص ۴ تا ۱۵.
[۲] بخشعلی زاده، شهرناز و بروجردیان، ناصر (۱۳۹۶). شناسایی بدفهمی های رایج دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه ی محتوایی هندسه و اندازه گیری و مقایسه ی عملکرد آن ها با میانگین عملکرد در سطح بین المللی. فصلنامه ی نوآوری آموزشی. شماره ی ۶۴، ص ۱۰۱ تا ۱۲۶.
[۳] رایان، کریستوفر و جتا، کاسیلدا (۱۳۹۵). چهار بدفهمی در باب سرشت انسان. ترجمه حسینیان، آرش و همکاران. نشر تلنگر.
[۴] گویا، زهرا و حسام، عبدالله (۱۳۸۶). طرحواره های ذهنی: توجیه گر بدفهمی های ریاضی دانش آموزان. فصلنامه ی روان شناسی کاربردی. شماره ی ۲، ص ۱۷۷ تا ۲۰۰.
[۵] علم الهدیی، سید حسن (۱۳۸۱). رویکرد های نوین در آموزش ریاضی. نشر شیوه، چاپ اول.
[6] Graeber, A., and Johnson, M. (1991). *Insights into secondary school students' Understanding of mathematics.*Colleg Park, University of Maryland, MD.
[7] Li, X. (2009). *Cognitive analysis of student's erroes and misconception in variable, equation and functions*. Ph.D. Desertashon, Texas A&M University.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–279، صص. ۴۷۳–۴۷۸

بررسی تاثیر مؤلفه های مؤثر بر آموزش و یادگیری ریاضی

فاطمه سادات افضلی *،آ

آ دانشجوی کارشناسی آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
آموزش ریاضی
یادگیری ریاضی
ریاضی

چکیده

هدف از پژوهش حاضر بحث در مورد برخی عوامل تاثیرگذار بر یادگیری و آموزش ریاضی است. با توجه به موضوع پژوهش از روش تحقیق کیفی استفاده شد و سعی شد از تحقیقات دیگر پژوهشگران در حیطه هرکدام از عوامل مؤثرِ مورد بحث استفاده وسیع شود تا نتایج به‌دست‌آمده جامع، کامل و قابل تعمیم باشد. با توجه به این‌که درس ریاضی یکی از مهم‌ترین و بنیادی‌ترین دروس چه در دوره ابتدایی و چه در دوره متوسطه است، در این پژوهش به بررسی تأثیر ذهن و هوش، خلاقیت، تفکر، مهارت حل مسئله و راهبرد کمک‌خواهی بر یادگیری و آموزش ریاضی پرداخته می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از این تحقیق همسو با بررسی‌های دیگر پژوهشگران است که بیان می‌دارد خلاقیت و تفکر ریاضی از ویژگی‌های پویای ذهن بشری هستند که می‌توان با قدردانی، این پتانسیل را بهبود و توسعه داد یا با عدم توجه به آن باعث سرکوبی آن شد. همچنین با پرورش مهارت حل مساله و ایجاد راهبرد کمک‌خواهی در دانش‌آموزان فرآیند یادگیری ریاضی برای آنان تسهیل می شود. به‌کارگیری راهکارها و روش‌های ارائه‌شده در این تحقیق سبب تحقق اهداف برنامه درسی و تسهیل امر یادگیری و آموزش درس ریاضی خواهد شد.

مقدمه

هر نوع آموزشی از جمله آموزش ریاضی مستلزم شرایط و ضوابط خاصی است. ابتدا باید متعلم و توانایی هایش را شناخت و سپس آن را در مسیر درست هدایت کرد، البته این هدایت باید توسط معلمی که با آموزش صحیح آشناست، صورت گیرد و همه این ها تحقق نمی یابد مگر آنکه تعریف درستی از موضوع یادگیری که در اینجا ریاضی است وجود داشته باشد (میرصالح و همکاران، ۱۳۹۵). ریاضیات یکی از شاخه های علم است که در توانایی افراد جهت موفقیت در شغل و اداره زندگی موثر بوده و بدین جهت است که در مقاطع مختلف تحصیلی بر روی آن تمرکز می شود (بالو گلو و کوکاک، ۲۰۰۶). ماهیت ریاضیات، بحث پیرامون نظم است و موضوع آن توصیف و درک نظمی است که در وضعیت های ظاهرا پیچیده نهفته است. ابزارهای اصولی این علم، مفاهیمی هستند که ما را قادر می سازند تا این نظم را توصیف کنیم. بنابراین می توان گفت ریاضیات؛ علم حل مسئله و بررسی اعداد، اشکال، اشیاء و نسبت های مورد نیاز در همه علوم است (دیهانی و همکاران، ۱۹۹۹). یکی از مشکلات بزرگی که در دوران دبستان وجود دارد، عدم توجه کادر آموزشی بر آموزش کافی در حوزه ریاضیات است. این موضوع زمانی آشکار می شود که تعداد بسیاری از دانش آموزان وقتی به سطوح بالاتر تحصیلی راه می یابند، هنوز مشکل درک یک مسئله ساده ریاضی را دارند. دوره ابتدایی دوره حساسی است که در صورت عدم توجه کافی به مسائل آموزشی در آن، می تواند منجر به ضعف در درک و یادگیری شود (به نقل از میرصالح و همکاران، ۱۳۹۵).

در ادامه این مقاله تاثیر پنج مؤلفه ذهن و هوش، خلاقیت، تفکر، مهارت حل مساله و کمک خواهی در آموزش و یادگیری ریاضی به صورت مجزا مورد بررسی قرار می گیرد.

*فاطمه سادات افضلی
پست الکترونیک: f.afzali1379@gmail.com (فاطمه سادات افضلی)

نتایج اصلی

۱. ذهن و هوش

در ذهن محفوظات جای می گیرد که منجر به الگو می شود، این الگو تمرین می شود و تکرار حاصل می گردد و زاییده این تکرار ملال و احساس ناخوشایند است اما در هوش، تجربه نقش دارد که منجر به کشف می شود. کشف به ابداع منجر می شود و زاییده ابداع، ارضا و احساس خوشایند است. ذهن به تکرار می رسد و تکرار فکر می سازد، اما هوش به ابداع می انجامد و ابداع تفکر می سازد. پس تمامی شیوه های یادگیری فعال در آموزش ریاضی مسیر هوش را می پیمایند. در صورتی که بسیاری از آموزش های ما از طریق ذهن است و در بیشتر علوم مسیر ذهن نتیجه لازمه را به متعلم می دهد، اما ریاضیات در این مسیر به نتیجه نمی رسد لذا مردم ریاضی را علمی دشوار تصور می کنند (قاسم زاده دیبگی، ۱۳۸۶).
پژوهش هایی درباره عاطفه و ریاضیات انجام شده و حتی دختران را کمتر از پسران در یادگیری ریاضی موفق دانسته اند. اما دلیل اصلی آن به هوش عاطفی باز می گردد نه هوش شناختی که مربوط به یادگیری است. اکثر ریاضیدانان هوش اجتماعی بالایی دارند و کوشش فراوان آنان حاکی از اعتماد به نفس بالای آنان است. آنان فلسفه و مفاهیم انتزاعی را به خوبی درک می کنند و تفکر باعث می شود هوش معنوی سرشاری داشته باشند. ابداع و ابتکار آنان در حل مسائل حاکی از هوش خلاق و یادگیری دقیق و به دور از خطا و هوش شناختی بالای آنان است. بنابراین باید در جهت ارتقا انواع هوش، نه فقط هوش شناختی گام برداشت، این پیشگیری بهتر از درمان مشکلاتی نظیر عدم یادگیری، افت تحصیلی و نظایر آن است. یادگیری فعال از طریق تجربیات، آزمون، خطا و در گیر شدن مستقیم در تحقیق، بررسی و حل مساله ایجاد می شود که منجر به تولید و کشف دانش خواهد شد، معلم باید ارتباطات درونی ریاضی (ارتباط مفاهیم ریاضی با هم) را با ارتباطات بیرونی (ارتباط ریاضی با سایر علوم و کاربردهای ریاضیات) آن پیوند داده و اهمیت یادگیری شیوه های تفکر و استدلال را برای متعلم آشکار سازد (همان).

۲. خلاقیت

با مروری بر ادبیات، معلوم می شود که یک تعریف خاص و قراردادی برای خلاقیت ریاضی وجود ندارد. بعضی از تعاریف تأکید می کنند که یک عمل خلاقانه در ریاضیات می تواند شامل خلق یک مفهوم مفید یا کشف یک رابطه شناخته نشده و یا تغییر در سازماندهی ساختار یک نظریه ریاضی باشد.
طبق پژوهش انجام شده توسط نجفی خواه و همکارانش درک، شهود، بصیرت و توانایی تعمیم دادن از جمله نیرو محرکه های خلاقیت ریاضی هستند؛ همچنین خطاپذیری یکی از ویژگی های فعالیت های خلاقانه ریاضی می باشد که باید مورد تقدیر قرار گیرد؛ زیرا همین وجود خطا است که می تواند باعث پیشروی های اساسی شود.
خلاقیت، مرتبط با ساخت ایده های نافذ تحقیق در ذهن افراد است (تال،۱۹۹۱) و یکی از موضوعات پیچیده در روانشناسی به حساب می آید. پوانکاره و آدمار، دو تن از ریاضیدانان معروف فرانسوی، معتقدند که خلاقیت در ریاضیات، فرایندی است که در آن ریاضیدانان بین سؤالاتی که منجر به نتایج مفید و سودمند می شود و سؤالاتی که نتیجه ای در بر ندارد انتخاب و گزینش می کنند. لی کوک خلاقیت ریاضی را توانایی تحلیل یک مسئله داده شده به شیوه های مختلف و انتخاب یک روش مناسب برای روی آوردن به وضعیت‌های ناآشنا در ریاضیات میداند. اروینک مراحل رشد خلاقیت ریاضی را شامل سه مرحله مقدماتی تکنیکی (مرحله صفر)، فعالیت الگوریتمی (مرحله اول) و فعالیت خلاقانه (مرحله دوم) در نظر می گیرد (به نقل از نجفی خواه و همکاران، ۱۳۹۰).
در سطح حرفه ای می توان خلاقیت ریاضی را توانایی تولید کاری اصیل که به طور معناداری پیکره دانش را توسعه می دهد و یا گشودن راه هایی برای مطرح شدن سؤالات جدید برای دیگر ریاضیدانان تعریف کرد و در سطح مدرسه ای خلاقیت ریاضی به عنوان فرایندی تعریف می شود که منجر به جواب یا جواب های بدیع، غیر معمول و خردمندانه می گردد و یا این که باعث شکل گیری سؤالات جدیدی می شود که به یک مسئله قدیمی امکان بررسی از زاویه دید متفاوتی را میدهد (لیلجدال و همکاران،۲۰۰۶، به نقل از نجفی خواه و همکاران، ۱۳۹۰).
لیکین بیان می کند که خلاقیت ریاضی یک ویژگی پویا از ذهن بشری است که می توان با قدردانی از پتانسیل خلاقانه دانش آموزان آن را بهبود و توسعه داد و یا بر عکس، با عدم توجه باعث سرکوبی آن شد. از نظر روان شناسی، خلاقیت دارای سطوح مختلفی است و در نتیجه قابل رشد است. این رشد شامل یک نظریه ریاضی، چارچوبی متشکل از تعریف مفاهیم و همچنین روابط بین مفاهیم تعریف شده می باشد. اگر به مفاهیم به عنوان گره هایی از یک شبکه نگاه شود، روابط می توانند فلش هایی باشند که گره ها را به هم ارتباط می دهند. از نظر اروینگ ، خلاقیت ریاضی عبارت است از دست یابی به بصیرت برای ساخت بخش هایی از چنین چارچوبی و همچنین می تواند جهت توسعه چنین ساختارهایی نیز عمل کند.
یکی از ویژگی های فعالیت های خلاقانه ریاضی، خطاپذیر بودن آن است. خلاقیت ریاضی یک فعالیت بشری است بنابراین همراه با خطاهای انسانی است. اگرچه فعالیت های خلاقانه ریاضی می تواند همراه با خطا باشد؛ اما همین امکان وجود خطا در فعالیت های خلاقانه ریاضی است که باعث میشود پیشروی های اساسی و دست آوردهای موفق بشری به وجود آیند (نجفی خواه و همکاران، ۱۳۹۰).
خلاقیت ریاضی می تواند به طور گسترده ای در بین دانش آموزان و دانشجویان پرورش داده شود. درک و بصیرت در آموزش زمانی رخ می دهد که اتصالات و ارتباطات بین مفاهیم و حوزه های مختلف ریاضی برای یادگیرنده مشخص شده و با ساختار شناختی ذهن او هماهنگی پیدا کرده باشد؛ به عبارت دیگر، مفاهیم در شبکه ساخت شناختی فرد جا گرفته باشد. پس لازم است آموزش به گونه ای باشد که شرایط را چنان فراهم کند تا این گونه درک، یعنی درک معنادار شکل بگیرد. استاندارد ارتباطات و اتصالات ریاضی که یکی از اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه ای

است، ضمن بیان اینکه ارتباطات و اتصالات درون و برون ریاضی از اهمیت ویژه ای برخوردار است، تأکید می کند به جای این که دانش آموزان ریاضیات را مانند مجموعه ای از موضوعات، ایده ها و مهارت های جدا از هم ببینند، سعی شود فرصتی فراهم گردد که دانش آموزان به خوبی از ارتباطات و اتصالات میان مفاهیم و ایده های ریاضی آگاه شوند تا موجب درک عمیق تر آنان گردد. اتصال میان موضوعات مختلف ریاضی به دانش آموزان کمک می کند تا ریاضیات را مانند یک کل منجسم ببینند و این امر سبب میشود که مفاهیم ریاضی به طور معناداری درک شده و باعث بصیرت شود. این ارتباطات و اتصالات می توانند بین مفاهیم و موضوعات ریاضی و یا بین شاخه های مختلف ریاضی باشند (همان).
تعمیم دادن در ریاضی شکلی از فعالیت های خلاقانه ریاضی محسوب میشود. دیوید تال معتقد است اگر چه شهود برای اعتبار بخشیدن خود نیاز به دقت و منطق دارد؛ ولی نقطه مقابل دقت نیست بلکه از تعامل بین این دو، ایده های ریاضی شکل می گیرند. در حقیقت شهود گامی مؤثر در جهت رسیدن به ریاضیات صوری و رسمی است. در این خصوص، به دلیل وجود ساختارهای منطقی در ریاضیات، او منطق را یکی از ابزارهای پرورش شهود می داند. خلاقیت ریاضی در خلأ نمی تواند رخ دهد، بلکه نیازمند بافتی است که در آن شخص به کمک تجارب پیشین خود آماده برداشتن گام های مهمی به سمت یک جهت جدید می شود (نجفی خواه و همکاران، ۱۳۹۰).

۳. تفکر

پژوهش های زیادی برای پاسخ دهی به دلایل ضعف در عملکرد ریاضی در سه حوزه آموزش کلاسی، طراحی آموزشی و تحقیقات آموزشی انجام گرفته اند. هدف این سه حوزه در بهبود آموزش و یادگیری ریاضی مشترک است. در حوزه آموزش کلاسی معلمان بر توان ریاضی دانش آموزان و افزایش آن تاکید دارند. در حوزه طراحی آموزشی بر روی مواد آموزشی و غنی کردن آن کار می کنند و بالأخره در حوزه تحقیقات آموزشی برای درک و فهم بیشتر یادگیری ریاضی اهمیت ویژه قائل می شوند (مگیدسون ، ۲۰۰۵). بر اساس این پژوهش ها مشخص می شود که عوامل مختلفی از جمله اضطراب و نگرانی (نوولو و همکاران، ۲۰۰۷)، خودپنداره ریاضی، عملکرد قبلی ریاضی، انگیزش یادگیری ریاضی (کیامنش و پور اصغر، ۱۳۸۵)، خودکارآمدی ریاضیات، خودگردانی، هدف گذاری، راهبردهای یادگیری، روش تدریس، شیوه های مطالعه، سبک های شناختی و ادراک از محیط کلاس (کدیور و همکاران، ۱۳۸۹) بر عملکرد ریاضی دانش آموزان تأثیرگذار است. تفکر ریاضی را به کارگیری فرآیندهای تفکر مانند تعمیم دادن، انتزاع، نماد سازی، برقراری ارتباط ریاضی، دسته بندی، حل مسئله، خلاقیت و غیره در ریاضیات تعریف کرده اند)اسکمپ، ۱۹۸۹، ترجمه حیدری قزلچه و گویا، ۱۳۸۱). تفکر ریاضی با استفاده از فرآیندها و راهبردهای آن باعث درگیر کردن فرد با خود، محیط و موضوع آموزشی می شود (دوبینسکی، ۲۰۰۰). تفکر ریاضی همچنین بر شیوه های تدریس معلمان تأثیر می گذارد و یاد دهنده را به سمت دیدگاه اکتشافی سوق می دهد و فراگیران را به تفکر و کاوش پیرامون موضوعات مربوطه تشویق می کند (پپ" و همکاران، ۲۰۰۳). فرانک و همکارامش معتقدند یادگیری که از این طریق حاصل می شود برخلاف شیوه های دیگر یادگیری بادوام تر می باشد و زمینه کشف موضوعات جدید را در ذهن دانش آموز پدیدار می کند (به نقل از میرصالح و همکاران، ۱۳۹۵).
میرصالح و همکارانش معتقدند در تفکر ریاضی از چند نوع تفکر به خصوص استفاده می شود، یکی از آنها تفکر "اگر پس" است. تفکر اگر پس نوعی تفکر است که در آن قسمت اول و دوم گزاره باهم به صورت شرطی ارتباط دارند. در تفکر ریاضی، فرضیه سازی مهارت بسیار مهمی است که مبنای تجربی دارد، یعنی دانش آموز با توجه به اطلاعات و داده هایی که قبلا کسب کرده است دست به فرضیه سازی می زند، از دیگر اجزای تشکیل دهند تفکر ریاضی، مهارت حل مسئله است، حل مسئله فرایندی شناختی و رفتاری است که به دانش آموز کمک می کند تا از بین پاسخ های مختلف به حل مسئله، پاسخ های بالقوه مؤثر را انتخاب و به کار بندد (شونفلد"، ۱۹۹۲). تفکر خلاق نوع دیگری از تفکر در حیطه تفکر ریاضی است که در آن فرد نظرات بدیع، دیدگاه های جدید، نگاهی نوآورانه و راه های نوین را در برخورد با مسائل مختلف به کار می گیرد (سیک و میکر، ۲۰۰۶). انتزاع بخش دیگری از تفکر ریاضی است. تفکر انتزاعی توانایی استفاده بجا از اعداد، ارقام و استدلال های منطقی است که نیازمند شناسایی گزاره ها، قضایا، توابع، قوانین و چارچوب ها و دیگر امور انتزاعی است (مک مستره و همکاران، ۲۰۱۰). تفکر انتقادی به عنوان یکی دیگر از انواع تفکر که در تفکر ریاضی مطرح می شود، ویژگی است که در آن فرد یک چارچوبی را ترسیم می کند و به تمامی مسائل از آن نگاه می کند، این چارچوب جنبه تحلیلی دارد و در آن تمامی احتمالات منطقی پذیرفته می شود. در تفکر انتقادی درباره رویدادها، نگاهی تردیدآمیز مطرح است ولی این هرگز به معنی قضاوت زودهنگام نیست (سزر، ۲۰۰۸).
تفکر ریاضی شامل چندین مهارت نیز می شود که در ادامه توضیحات مربوط هر یک از آنها می آید. مهارت حدس و تخمین زدن که در تفکر ریاضی دیده می شود، نوعی توانایی در پیش بینی مقادیر بدون استفاده از ابزارهای رسمی اندازه گیری است (هال، ۱۹۸۴). شمارش نیز از مهارت های اصلی در آموزش ریاضی است. در این مهارت، دانش آموزان باید شیوه های شمارش را به طرق مختلف (لمسی، چشمی، ادامه دادن، چند تا چند تا، رو به جلو و معکوس) یاد بگیرند (مانفرا و همکاران، ۲۰۱۴). مهارت طرح سؤال یکی دیگر از اجزای تفکر ریاضی است. در این مهارت دانش آموز باید بتواند سؤالات مختلف مرتبط با مسائل را طرح نماید. بهتر است سؤالاتی مطرح شود که پاسخ های متفاوتی بتواند در خود جای دهد. (شونفلد، ۱۹۹۲). در مهارت دیگر یعنی مقایسه کردن، دانش آموز باید بتواند تفاوت بین دو چیز را بگوید. دسته بندی مهارت دیگری است که باید دانش آموزان کسب نمایند. در دسته بندی دانش آموز یاد می گیرد رویدادها، عوامل، اشیاء و غیره را با توجه به یک ملاک مشخص دسته بندی کند(به نقل از میرصالح و همکاران، ۱۳۹۵).
یادگیری ریاضی با تفکر ریاضی در ارتباط است و باعث ایجاد مفاهیم و ارتباطات ریاضی توسط افراد دارای تفکر ریاضی می شود (ایتوهینو"، ۱۹۹۵). نتایج پژوهش میرصالح و همکارانش نشان داد که احتمالا آموزش تفکر ریاضی باعث تقویت مفاهیم پایه ای یادگیری ریاضی شده و در نتیجه افزایش نمرات ریاضی دانش آموزان را در پی داشته است.

۴. مهارت حل مساله

برای تحقق امر مهم پرورش قدرت تفکر و خلاقیت، ریاضیات باید «رشد توانایی حل مسأله» را سر لوحه برنامه های آموزشی خود قرار دهد (لوری و وایتلند، ۲۰۰۰؛ لوکانگلی و کورنولدی؟، ۱۹۹۷). برای حل یک مسأله، دانش آموز باید به آن فکر کند و در خصوص استفاده از راهبردهای مناسب تصمیم گیری کند. موفقیت دانش آموزان در رسیدن به اهدافشان، باعث نگرش مثبت به ریاضیات شده و فعالیت های حل مسأله را در آنان پرورش خواهد داد (زکریا و یوسف، ۲۰۰۹). مسأله دقیقا به چه چیزی گفته می شود؟ مسأله، موقعیتی است که در آن فرد باید راه حل هایی را برای حل مسأله پیدا کند که در آن لحظه معلوم نیستند. کرولیک و روندنیک (۱۹۹۶) سه شرط را برای تعیین این که موقعیتی، یک موقعیت مسأله محسوب می شود یا نه، ارائه کرده اند:

شرط اول این است که فرد باید قادر به دستیابی به یک هدف آشکار به عنوان یک راه حل مسأله باشد.

دوم این که، مانعی برای رسیدن به هدف وجود داشته باشد.

سوم این که، دو شرط اول فرد را مجبور کند تا جهت برداشتن موانع برای رسیدن به هدف به دنبال راه حل هایی بگردد.

مطابق نظر دولاه (۲۰۰۶) مسأله ماهیتاً یک امر ذهنی است.

محمود (۲۰۰۳؛ به نقل از زکریا و یوسف، ۲۰۰۹) دریافت که مهم ترین مشکلات دانش آموزان دوره راهنمائی در مسائل ریاضی، ناتوانی آنان در درک و فهم مسأله می باشد. او بیان می کند که تقریبا ۹۸ درصد دانش آموزان تصدیق کرده اند که در درک و فهم آن چه که سوال از آنان می خواهد، مشکل دارند. دانش آموزان به راهبردهایی که برای پاسخ دادن به سوال مورد نیاز است چندان توجهی نمی کنند.

ضعف دانش آموزان در حل مسأله به ویژه حل مسأله ریاضی از جمله موضوعاتی است که در سال های اخیر همواره مورد توجه متخصصان تعلیم و تربیت و آموزش ریاضی قرار داشته است. مناچری و گودمنه (۱۹۹۸) بیان می کنند که ضعف یادگیرندگان در همه سطوح آموزش ریاضی از ابتدایی تا دانشگاه با ضعف آنها در حل مسأله ارتباط دارد.

۵. کمک خواهی

اونیل (۱۹۹۹) با ارائه الگویی از حل مسأله، آن را به سه جزء درک محتوا، راهبردهای حل مسأله و خودتنظیمی تقسیم نمود. او فهم محتوا را به صورت توانایی فرد برای درک حقایق، مفاهیم و اصول مربوط به دانش محتوای حیطه موضوعی تعریف کرده است. هاشمی و همکارانش معتقدند راهبردهای حل مسأله به راهبردهای خاص موضوع از جمله قیاس ها و راهبردهای حل مسأله مستقل از موضوع، تقسیم می شوند. کمک خواهی را می توان به عنوان راهبرد حل مسأله مستقل از موضوع محسوب کرد.

کمک خواهی یکی از راهبردهای یادگیری است که دانش آموزان با استفاده از آن می توانند مسائل و مشکلات یادگیری و تحصیلی خود را تشخیص داده و از طریق پرسش و کمک گرفتن از دیگران در جهت رفع آنها برآیند. آنها از این راهبرد می توانند برای تسلط بر مهارت ها و رسیدن به یادگیری بهتر استفاده کنند. در واقع کمک خواهی تحصیلی شامل رفتارهایی از قبیل سوال کردن از معلمان، والدین و همکلاسی ها، تقاضای توضیح بیشتر درباره مسأله، گرفتن سرنخ ها و راه حل های مسأله و سایر کمک های درسی است. این نوع کمک خواهی به عنوان راهبردی جهت جلوگیری از شکست تحصیلی عمل می کند. از طریق کمک گرفتن، نه تنها مشکلات تحصیلی دانش آموزان کاهش می یابد، بلکه آنان آگاهی و مهارت هایی را کسب می کنند که در موقعیت های دیگر به عنوان روشی از حل مسأله و یادگیری تبحری عمل می کند(هاشمی و همکاران، ۱۳۹۰).

الوون و همکاران(۲۰۰۶) چارچوب زیر را بر پایه نظریه ویگوتسکی (۱۹۷۸) طراحی کردند که در واقع بیانگر مراحل عمده رفتار کمک خواهی است:

- آگاهی از نیاز به کمک
- تصمیم به کمک خواهی
- تشخیص کمک کننده بالقوه
- استفاده از راهبردها برای فراخوانی کمک
- ارزیابی رویدادهای کمک خواهی

راهبرد کمک خواهی به عنوان یکی از مهم ترین راهبردهای خود تنظیمی می تواند نقش اساسی در کمک به حل مسأله دانش آموزان داشته باشد. با توجه به قابل آموزش بودن این راهبردها می توان عملکرد حل مسأله ریاضی دانش آموزان را با آموزش چنین راهبردهایی به آنان کنترل و بهبود بخشید. مجهز نمودن یادگیرندگان در فرایند یادگیری به راهبرد کمک خواهی می تواند نتایج سودمندی در تمامی موقعیت های درسی از جمله حل مسائل ریاضی برای آنان داشته باشد (هاشمی و همکاران، ۱۳۹۰).

نتیجه گیری

با توجه به این‌که ریاضیات یکی از شاخه‌های علم است که در توانایی افراد جهت موفقیت در شغل و اداره زندگی مؤثر است، در مقاطع مختلف تحصیلی بر آن تاکید می‌شود. به‌طورکلی ماهیت ریاضیات بحث پیرامون نظم و ابزار آن مفاهیمی هستند که انسان را قادر می‌سازد تا این نظم را توصیف کند.

ذهن و هوش یکی از مؤلفه‌های تأثیرگذار بر یادگیری ریاضیات است که بیان می‌دارد پسران در مقایسه با دختران در یادگیری ریاضیات موفق‌ترند و دلیل اصلی آن هوش عاطفی آن‌هاست نه هوش شناختی. خلاقیت نیز نیرومحرکه ای است برای آموزش و یادگیری ریاضی که به‌علت دارا بودن ویژگی‌هایی چون خطاپذیر بودن، انعطاف‌پذیر بودن، توانایی تعمیم دادن، پویا بودن و قابل رشد و پرورش بودن مورد تقدیر قرار می‌گیرد. از دیگر عوامل تاثیرگذار بر آموزش ریاضی تفکر ریاضی است. برهمین اساس پپ معتقد است این عامل بر شیوه‌های تدریس معلمان تأثیر می‌گذارد و یاددهنده را به سمت دیدگاه اکتشافی سوق می‌دهد و فراگیران را به تفکر و کاوش پیرامون موضوعات مربوطه تشویق می‌کند. پرورش مهارت حل مسئله از دیگر اموری است که باید مورد توجه مربیان قرار گیرد چراکه پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه نشان می دهند که ضعف یادگیرندگان در همه سطوح آموزش ریاضی از ابتدایی تا دانشگاه با ضعف آن‌ها در حل مسئله ارتباط دارد آخرین راهبردی که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت راهبرد کمک‌خواهی بود که بیان شد اگر یادگیرندگان با آگاهی و به‌طور صحیح از این راهبرد بهره بجویند باعث تسهیل یادگیری آنان می‌شود.

مراجع

[۱] اسکمپ، ریچارد. (۱۹۸۹). "فهم رابطه ای و فهم ابزاری". ترجمه رضا حیدری قزلجه و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجله رشاد آموزش ریاضی، ۱۵-۴.

[۲] رضا پور میر صالح، یاسر؛ دلاوری، مهدی؛ سلیمانی، مجید؛ ۱۳۹۵، اثربخشی آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه دوم ابتدایی

[۳] قاسم‌زاده بیگی، شاهرخ، ۱۳۸۶، ذهن، هوش و آموزش ریاضی

[۴] کدیور، پروین؛ فرزاد، ولی الله؛ عربزاده، مهدی؛ نگهبان سلامی، محمود. (۱۳۸۹). "فراتحلیل مطالعات مربوط به عملکرد ریاضی دانش آموزان". فصلنامه اندازه گیری تربیتی، ۱(۲)، ۹۴

[۵] کیامنش، علیرضا؛ نصیبه، پور اصغر. (۱۳۸۵). "نقش خودپنداره ریاضی، انگیزش یادگیری ریاضی، عملکرد قبلی ریاضی و جنسیت در پیشرفت ریاضی". مجله علوم تربیتی و روانشناسی، ۱۳(۲)، ۹۴- ۷۷

[۶] نجفی خواه، مهدی؛ یافتیان، نرگس؛ بخشعلی زاده، شهناز؛ ۱۳۹۰، دورنمایی از خلاقیت در فرایند آموزش ریاضی

[۷] هاشمی، تورج؛ میر نسب، میرمحمود؛ حبیبی کلیبر، رامین؛ فتحی آذر، اسکندر؛ بیرامی، منصور؛ ۱۳۹۰، اثربخشی آموزش راهبرد کمک‌خواهی بر عملکرد حل مسئله ریاضی

[8] Aleven, V., McLaren, B.M., Roll, I., & Koedinger, K.R. (2006). Toward Meta-cognitive tutoring: A Model of Help Seeking with a Cognitive Tutor, Int Journal of Artificial Intelligence in Education, 16, 101-130

[9] Baloglu, M., & Kocak, R. (2006). A multivariate investigation of the differences in mathematics anxiety. Personality and Individual Differences, 40(7), 1325-1335.

[10] Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. Science, 284(5416), 970-974.

[11] Dollah, Mohd Uzi. (2006). Mathematics Teaching and Learning through Problem Solving, Kuala Lumpur: Dewan Bahasa & Pustaka.

[12] Dubinsky, E. (2000).Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), Advanced mathematical thinking processes. (pp 95-123). Dordrecht, The Netherland: Kluwer.

[13] Ervynck G., Mathematical creativity, in :Tall D., Advanced mathematical thinking, Kluwer Academic Publishers, New York, 1991, pp.4252.

[14] Hall Jr, L. T. (1984). Estimation and Approximation–Not Synonyms. Mathematics teacher, 77(7), 516-17

[15] Ja"rvela", S. (2011). How Does help Seeking Help? New Prospects in a Variety of Contexts, Learning and Instruction, 21, 297-299.

[16] Karabenick, S.A. (2011). Classroom and Technology-supported Help Seeking: The Need for Converging Research Paradigms, Learning and Instruction, 21, 290-296.

[17] Krulik, S., & Rudnick, J.A. (1996). Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School, Boston, MA: Allyn and Bacon.

[18] Lee, K.W.L., Tang, W.; Goh, N. & Chia, L. (2001). The Predicting Role of Cognitive Variables in Problem Solving in Mole Concept, Chemistry Education: Research and Practice in Europe, 2, 3, 285-301.

[19] Leikin R., Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks, in: Leikin R., Berman A. and Koichu B., (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students, Rotterdam, the Netherlands, Sense Publisher, Vol.9, 2009, pp. 129-145.

[20] Liljedahl P. and Sriraman B., Musings on mathematical creativity, For the Learning of Mathematics, Vol.26, No.1, 2006, pp.20–23.

[21] Lowrie, T, & Whitland, J. (2000). Problem Solving as A Tool for Learning, Planning and Assessment in Primary School, In, T, Nakahara.

[22] Lucangeli, D. & Cornoldi, C. (1997). Mathematical and Metacognition: What is the Nature of the Relationship? Mathematical Cognition, 3, 121-139.

[23] Magidson, Susan. (2005). Building bridges within mathematics education: Teaching, research, and instructional design. Journal of Mathematical Behavior. 24(2), 135-169.

[24] Manfra, L., Dinehart, L. H., & Sembiante, S. F. (2014). Associations between counting ability in preschool and mathematic performance in first grade among a sample of ethnically diverse, low-income children. Journal of Research in Childhood Education, 28(1), 101-114.

[25] Manouchehri, A. & Goodman, T. (1998). Mathematical Curriculum Reform and Teachers: Understanding the Connections. Journal of Educational Research. 92(1), 27-41.

[26] McMaster, K., Rague, B., & Anderson, N. (2010, October). Integrating Mathematical Thinking, Abstract Thinking, and Computational Thinking. In 2010 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) (pp. S3G-1). IEEE

[27] National Council of Teachers of Mathematics, Principles and standards for school mathematics, Reston, VA: Author, 2000.

[28] Novello, AC. Degraw, C. & Kleinman, D. (2007). Healthy children ready to learn: An essential collaboration between health and education. Public Health Reports, 107, 3-15.

[29] O'Neil, H.F., Jr. (1999). Perspectives on Computer-based Performance Assessment of Problem Solving, Computers in Human Behavior, 15, 225-268.

[30] Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 53(3), 179-202.

[31] Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. Creativity research journal, 18(3), 279-291
[32] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem teaching and learning, New York: Mcmillan, 334-370
[33] Sezer, R. (2008). Integration of critical thinking skills into elementary school teacher education courses in mathematics. Education, 128(3), 349-369.
[34] Tall D., The psychology of advanced mathematical thinking, in: Tall D., Advanced mathematical thinking, Kluwer Academic Publishers New York, 1991, pp.3-21.
[35] Zakaria, E.; Yusoff, N. (2009). Attitudes and Problem-Solving Skills in Algebra Among Malaysian Matriculation College Students, European Journal of Social Sciences, 8, PP. 232-245.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–284، صص. ۴۷۹–۴۸۵

خلاقیت در آموزش ریاضی

لیلا خسروانی فرد

کارشناس آموزش ریاضی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
آموزش ریاضی
خلاقیت
دانش آموز

چکیده

یکی از اهداف آموزش ریاضی پرورش توانایی های ذهنی و فکری دانش آموز است که هدف پرورشی خوانده می شود. مهمترین وظیفه آموزش ریاضی، تربیت دانش آموزی است که بتواند با اتکا به نفس خود بیندیشد بنابراین منظور اصلی آموزش ریاضی عبارتست از توسعه ی قدرت درک، فهم و استدلال، پرورش تفکر علمی و ایجاد آفرینش های فکری در متعلم.

ریاضیات با آموزش فعال خویش انگیزه فرد را برای یادگیری افزایش خواهد داد و به او عادت مشورت کردن، اظهار عقیده در جمع، بحث و تبادل نظر، احترام گذاشتن به نظر دیگران و به طور کلی انجام کارهای گروهی را خواهد آموخت. کلاس ریاضی کلاسی است که به فرد فرصت اندیشیدن، زبانی برای اندیشه و گوشی برای شنیدن اندیشه میدهد. در واقع، نظام و برنامه ریزی آموزش ریاضی می تواند به عنوان زمینه و بافتی در نظر گرفته شود که پدیده خلاقیت ریاضی در آن به وقوع می پیوندد. بنابراین بایستی به مساله خلاقیت و نقش آن در آموزش بهینه ریاضی بیشتر پرداخته شود. حال به جهت اهمیت موضوع خلاقیت و نقش آن در جنبه های مختلف آموزشی، در این مقاله تا حدودی به این مقوله مهم خواهیم پرداخت. چرا که هرگونه معرفت انسانی، از تفکر و تامل آغاز می شود، از آنها به مفهوم ها می رسد و سرانجام به اندیشه ها و خلاقیت ختم می شود.

۱. مقدمه

محققین و نظریه پردازان تا مدت های طویل تصور می کردند که خلاقیت فرایندی ارثی و ذاتی است و چنین عنوان می کردند که در جهان تعداد معدودی هنرمند خلاق، دانشمند و یا افراد با استعداد وجود دارند در حالی که امروزه بر این عقیده اند که خلاقیت ذاتی و ساخته شده از پیش نیست، بلکه روندی زاینده و قابل تغییر است و می تواند پرورش داده شود. خلاقیت یکی از ابعاد مهم روان شناختی است که گانیه[1] آن را نوعی حل مسئله میداند و گیلفورد[2] آن را براساس تفکر واگرا تعریف کرده است. برخی از محققان نیز خلاقیت را بر حسب نتیجه نهایی تعریف می کنند. برای مثال خلاقیت شامل استفاده از فرایندهای شناختی مشترک برای رسیدن به تولیدات نوین و غیر معمول است [۵۲].

هربرت فوکس[3] فرایند خلاقیت را هر نوع فرایند تفکری که مسئله ها را به گونه ای مفید و بدیع حل کند، میداند [۲]. به طور کلی خلاقیت عبارت است از به کارگیری توانایی های ذهنی برای ایجاد یک فکر یا مفهومی نوین [۱]. خلاقیت فرایندی است که در برگیرنده ی تفکری نو، مبتکرانه، رویدادی ناگهانی، سودمند و دارای ارزش انطباقی روانشناسانه است [۵]. به نظر یانگ[4] خلاقیت دارای ابعاد مختلفی نظیر تلاش برای غلبه بر موانع، تحمل ابهام و پیچیدگی، مسئولیت پذیری،خودپنداری مثبت، تمرکز بر هدف به جای تمرکز بر پاداش، دیدن مشکل و فرار از مرزهای متعارف فکر کردن است. افراد باخلاقیت بالا دارای شخصیتی غیر متعارف، غیر رسمی و کامروا بوده و از کنجکاوی فراوان، انگیزه های زیاد،

[1] Ganiye
[2] Gilford
[3] Herbert fux
[4] Yang

دانش وسیع، اعتماد بنفس زیاد و میل به ریسک پذیری بالا برخوردارند [۳]. خلاقیت یک مهارت اکتسابی و قابل آموزش است و می توان با ایجاد شرایط، تجهیزات و امکانات لازم به پرورش خلاقیت در افراد پرداخت [۶].

خلاقیت و نوآوری، نقشی حیاتی در رشد و توسعه علم ایفا می کند. از این رو بررسی و تبین آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابر این از جمله اهداف هر نظام آموزشی باید پرورش انسان های خلاق باشد، تا علاوه بر توسعه حوزه های علمی، در شرایط غیر قابل پیش بینی، بتوانند انتخاب ها و تصمیمات درست و شایسته ای را داشته باشند.

در بین دروسی که در دوره های تحصیلی وجود دارد، درس ریاضی از اهمیت خاصی برخوردار است، زیرا در زندگی روش درست اندیشیدن، نظم فکری و عملی، توانایی حل مسائل روزمره، رویه پژوهش و ادامه تحصیل در مقاطع بالاتر را برای دانش آموزان امکانپذیر می کند. از آنجا که ریاضی حوزه ای است که در راس حوزه های عقلانی قرار دارد، خلاقیت باید در طراحی و برنامه ریزی فعالیت های آموزشی این حوزه در نظر گرفته شود [۹۲]. در جواب به این که خلاقیت ریاضی چیست، با مروری بر ادبیات، تعاریف مختلفی می توان یافت، خلاقیت ریاضی نقش حیاتی در چرخه کاملی از تفکر ریاضی پیشرفته دارد و باعث حدسیه سازی در جهت توسعه، پیشبرد و خلق نظریه های ریاضی میگردد، همچنین می توان توانایی تحلیل یک مسئله داده شده به شیوه های مختلف و انتخاب یک روش مناسب برای روی آوردن به وضعیت های نا آشنا در ریاضیات، در نظر گرفت. توانایی برای صورت بندی یک تعریف جدید و ارزشمند در ریاضی با استفاده از مفاهیم تعریف شده قبلی، مثالی از خلاقیت ریاضی است.

اروینک[5]، خلاقیت ریاضی را یکی از فعالیت های بشری می داند که می تواند بر دانسته های موجود در ریاضیات عمل کرده و نظریه های جدید ریاضی را تولید کند و معتقد است که خلاقیت ریاضی اغلب یک پدیده ناشناخته محسوب می شود. به نظر میرسد بیشتر دانشمندان علاقه مند نیستند فرایند های تفکر خود را که موجب خلق و ابداع می شود توصیف و تحلیل نمایند. به گفته ی اروینک تنها تعداد کمی از ریاضیدانان از جمله پوانکاره و آدامار به طور آشکار تلاش کردند که ایده های مرتبط با خلاقیت ریاضی را توصیف کنند و شاید بهترین منبع شناخته شده در ریاضیات آدمار باشد.

سریرامان[6] در سطح آموزشی، خلاقیت ریاضی را به عنوان فرایندی بیان می نماید که منجر به جواب یا جواب های جدید، غیر معمول و خردمندانه می گردد و یا اینکه باعث شکل گیری سوالات جدیدی می شود که به یک مسئله قدیمی امکان بررسی از زواید دید متفاوتی را می دهد. بسیاری از محققان بر این باورند که در سطوح آموزشی، خلاقیت ریاضی معمولا مرتبط با اعمالی مانند حل مسائل خلاقانه، حل خلاقانه ی مسائل، طرح مسئله، تعمیم دادن، حل مسائل با راه حل های چندگانه، حل مسائل باز پاسخ و یا ارتباط بین ایده های به ظاهر نامرتبط می باشند [۱۲].

اگرچه برخی از افراد خلاقیت ریاضی را به مفهوم نبوغ یا توانایی خارق العاده در ریاضی نسبت می دهند و آن را حوزه خاص ریاضی دانان می دانند، با مرور ادبیات پژوهشی در این خصوص معلوم میگردد که خلاقیت در ریاضی تنها مرتبط با کار اصیل و بکر ریاضی دانان نیست، بلکه شامل بازتولید بعضی موارد از قبل شناخته شده توسط شخصی که این کشف برای او جدید است نیز می شود.این نگاه گواهی بر لزوم پرداختن به این امر در نظام تعلیم و تربیت است. سریرامان و همکاران[7]، وسل[8] و اریکان[9] نیز بیان می کنند که پرورش خلاقیت در ریاضی باید یکی از مولفه های اصلی آموزش ریاضی در نظر گرفته شود[۳۰، ۳۲، ۳۱]. بنا بر این، نظام های آموزشی و متخصصان امور تعلیم و تربیت باید با اتکا بر یافته های علمی به تبیین دقیق تری از فعالیت های خلاقانه ریاضی دست یابند و با ایجاد محیطی پویا، یادگیرندگان را با وضعیت ها و مسائل چالش برانگیز در ریاضی مواجه کرده و در حین دست و پنجه نرم کردن و حل این مسائل، زمینه را برای پرورش خلاقیت در آنها مهیا نماید.

۲. خلاقیت ریاضی در محیط های آموزشی

یافته های پژوهشی نشان می دهند که عوامل متعددی بر پرورش خلاقیت ریاضی و همچنین بر زمینه های بروز آن به ویژه در سطوح آموزشی تاثیر گذار است. بسیاری از محققان بر اهمیت باورها و تمایلات فرد در خصوص خلاقیت ریاضی و ارائه راه حل های خلاقانه در ریاضی تاکید دارند. از دیگر موارد می توان به مواردی چون دانش موضوعی و درک و بصیرت نسبت به آن، گفتمان های ریاضی در کلاس درس، تجسم و شهود، دانش فراشناختی، سیستم باورهای فرد و تمایلات او اشاره کرد. یان و سریرامان[10] نیز در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که دانش و مهارت های اساسی در ریاضی می تواند ارتباط زیادی با خلاقیت ریاضی داشت و برای خلاق شدن در ریاضی، باید تعادلی بین این دو وجود داشته باشد. آن ها معتقدند دانش ریاضی عامل مهمی در توانایی افراد جهت طرح مسئله است و بین این دو رابطه معناداری وجود دارد. یان و برازیو[11] در مطالعه ای با عنوان خلاقیت در ریاضی، خلاقیت و ریاضی را ترکیب کردند و ضمن ترکیب مباحث ریاضی، دانش آموزان را به خلاقیت تشویق می کردند. آنها به این شکل عمل کردند که ابتدا دانش آموزان مبحث ریاضی را از معلم ریاضی اشان دریافت می کردند، در مرحله بعد برای پرورش خلاقیت ریاضی دانش آموزان، از آنها خواسته می شد که مورد استفاده بحث تدریس شده را در دنیای واقعی ذکر کنند.

[5] Ervynck
[6] Sriraman
[7] Sriraman
[8] Wessels
[9] Erican
[10] Yan and Seriraman
[11] Yan and Brazio

دانش آموزانی که بیشترین تحلیل را ارائه می کردند به عنوان برنده انتخاب می شدند و از دانش آموزان خواسته می شد استدلال خویش را برای انتخاب بیان کنند. در نهایت پژوهشگر به این نتیجه رسید که در چنین محیطی، دانش آموزان مفاهیم را سریع تر و بهتر می آموزند و انگیزش بیشتری نسبت به ریاضی در آنها ایجاد می شود. همچنین دانش آموزانی که با این روش، مباحث ریاضی به آنها تدریس می شد، مدت زمان بیشتری در کلاس ریاضی می مانند [۳۳].

در پژوهشی که توسط مان[۱۲] با عنوان خلاقیت ریاضی و ریاضیات صورت گرفت، نشانگرهای خلاقیت ریاضی در دانش آموزان مدارس راهنمایی، بر روی ۸۹ دانش آموز پایه هفتم انجام داد، این نتیجه به دست آمد که نشانگرهای خلاقیت ریاضی و پرورش خلاقیت ریاضی، دانش آموزان را به مباحث ریاضی علاقمند می کند و مدت مشغولیت آنها بیشتر میگردد. همچنین پژوهشگر رابطه مثبتی بین خلاقیت ریاضی، پیشرفت ریاضی و نگرش به ریاضی به دست آورد [۲۲].

هایلاک[۱۳] در پژوهش خود راجع به خلاقیت ریاضی در کودکان دریافت دانش آموزانی که از نظر ریاضی خلاقند درباره ریاضیات خودپنداشت بالایی دارند و از اضطراب پایینی رنج می برند. در همین راستا، نیوفیلد[۱۴] در پژوهش های خود به این نتیجه رسید که اصلاح روش های آموزش ریاضیات می تواند اکثر مشکلات تحصیلی و انگیزشی این درس را از بین ببرد. استفاده از روش های آموزشی باز و دادن آزادی به کودک و عدم نظارت دائمی بر کارها و برنامه ها به دانش آموز فرصت میدهد به جستجو و کشف مسائل بپردازد. بدین ترتیب خود را در فرایند یادگیری دخیل می بیند و این باعث افزایش انگیزش درونی در وی می گردد. در واقع شاگردی که با به کار بستن حداکثر خلاقیت خویش انگیزش در کار پیدا می کند، نیازی به پاداش و تنبیه ندارد. او دیگر برای پذیرفته شدن در امتحان کار نمی کند بلکه برای ارضای نیازی عمیق می کوشد و در حقیقت برای نفس آموختن می آموزد [۱۰]. بر طبق نظر شریبر (به نقل از نیکولادو فیلیپو) کسانی که انگیزش مثبتی نسبت به ریاضی دارند عملکرد بهتری در این درس دارند. بنابراین سودمند تر آن است که شرایط لازم برای جلوگیری از خاموشی خلاقیت و همچنین فنونی که می تواند آن را پرورش دهد، مورد بررسی قرار می گیرد. در واقع توجه و پژوهش درباره عناصر مختلف آموزش و نقش آنها در پرورش خلاقیت دانش آموزان از اهمیت خاصی برخوردار است.

۳. مهارت ها و دانش ریاضی و ویژگی های شخصیتی

صاحب نظران معتقدند که دانش موضوعی به میزان بسیاری سبب بهبود عملکرد حل مسئله می شود. اما داشتن دانش به تنهایی برای حل مسائل چالش بر انگیز کافی نیست، بلکه آگاهی از چگونگی و چرایی روابط بین این دانش نیز بسیار ضروری است. جاناسن[۱۵] بیان می کند افرادی که در حل مسائل موفق ترند، معمولا دارای دانش موضوعی مرتبط به هم در آن حوزه خاص هستند. در واقع، برای حل مسئله شخص باید بتواند دانسته های قبلی خود را به شیوه ای جدید با هم ترکیب کند. به عبارت دیگر اگر شخص دارای دانش موضوعی باشد که به خوبی در ذهن او سازمان یافته است، توانایی او در استفاده از این دانش و به کارگیری به موقع راهبردها افزایش می یابد. اگر شخص در حل مسئله دانش موضوعی داشته باشد و به خوبی آن را در ذهنش سازماندهی و منسجم نکرده باشد در موقعیت های مورد نیاز نمی تواند آن را به خوبی بکار گیرد و این امر بر اهمیت درک و بصیرت دلالت دارد. اروینک[۱۶] نیز درک و بصیرت را از نیروهای محرکه خلاقیت در ریاضی می داند.

اتصال میان موضوعات مختلف ریاضی به دانش آموزان کمک می کند تا ریاضیات را مانند یک کل منسجم ببینند و این امر سبب می شود که مفاهیم ریاضی به طور معنا داری درک شده و باعث بصیرت شود. این ارتباطات و اتصالات می توانند بین مفاهیم و موضوعات ریاضی و یا بین شاخه های مختلف ریاضی باشند. تعمیم دادن در ریاضی نمونه ای از فعالیت های خلاقانه ریاضی محسوب می شود. از طریق تعمیم می توان بین مفاهیم، ایده ها و رویه ها ارتباط برقرار کرد. برای مثال می توان جهت به دست آوردن حجم یک هرم ناقص مربع القاعده از مساحت ذوزنقه استفاده کرد[۲۳]. به این ترتیب روش به دست آوردن مساحت ذوزنقه تعمیم داده شده و حجم یک هرم ناقص مربع القاعده با استفاده از آن به دست می آید؛ بنابراین بین روش های بدست آوردن مساحت یک ذوزنقه و حجم یک هرم ناقص ارتباط و اتصال برقرار می شود.

یان و سریرامان[۱۷] نیز در تحقیق خود به این نتیجه رسیدند که دانش پایه و مهارت های اساسی می تواند ارتباط زیادی با خلاقیت ریاضی داشته و قطعا باید برای خلاق شدن در ریاضی، تعادلی بین این دو وجود داشته باشد[۴۳ و ۲۸]. کاتو و همکاران[۱۸] در مطالعه خود تلاش برای ارائه فاکتورهایی داشتند که توانایی خلاق در ریاضی را پیش بینی می کند. آنها دریافتند که می توان برای پیش بینی پتانسیل خلاقیت افراد در ریاضی از دانش موضوعی و همچنین توانایی های ریاضی اعم از توانایی های فضائی، استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی استفاده کرد[۱۷]. آنها همانند بسیاری از محققین معتقدند که خلاقیت در ریاضی توانایی دیدن روابط جدید و ارتباط دادن بین ایده های به ظاهر نامرتبط است. از آنجایی که در انجام فعالیت های خلاقانه ، شخص نیاز به دوباره ترکیب کردن ایده های ریاضی دارد بنابراین، دانش و توانایی های ریاضی از جمله عامل های مهم و تاثیر گذار در خلاقیت ریاضی هستند[۱۳ و ۱۴]. درک و بصیرت در آموزش زمانی رخ می دهد که اتصالات و ارتباطات بین مفاهیم

[12] Mann
[13] Haylock
[14] Newfield
[15] Jonassen
[16] Ervynck
[17] Yuan and Seriraman
[18] Kattou

و حوزه های مختلف ریاضی برای یادگیرنده مشخص شده و با ساختار شناختی ذهن او هماهنگی پیدا کرده باشد، به عبارت دیگر، مفاهیم در شبکه ساخت شناختی فرد جا گرفته باشد. از این شبکه همانند یک داربست برای رشد، توسعه و ساخت مفاهیم استفاده می شود. پس لازم است آموزش به گونه ای باشد که شرایط را چنان فراهم کند تا اینگونه درک، یعنی درک معنا دار شکل بگیرد.

پیشینه نظری و پژوهش در حیطه حل مسائل خلاقانه در ریاضی حاکی از آن است که تحقیق در این زمینه نیازمند توجه به مولفه های مختلفی از جمله جنبه های فراشناختی است. از آنجا که فراشناخت عامل اساسی در حل مسئله و طرح مسئله است [۹و ۲۷] و حل مسئله و طرح مسئله از جمله فعالیت های خلاقانه در ریاضی محسوب می شوند، توجه به فراشناخت و مولفه های دخیل در آن باید سهم فراوانی در فعالیت های خلاقانه ریاضی داشته باشند. ونگ[۱۹] طی تحقیقی به این نتیجه رسید که در خلال فرایند یادگیری وقتی دانش آموزان از خود سوال های ریاضی می پرسند، یادگیری و فراشناخت آنها ارتقا می یابد. این عمل باعث می شود آنان یاد بگیرند که چگونه مانند یک ریاضی دان فکر کنند، چرا که ریاضی دانان نیز ایده های جدید خود را با پرسیدن سوال های جدید و تلاش برای حل آن خلق می کنند. بیکر و نورمن[۲۰] نقش توانایی های فراشناختی را در حل مسائل ریاضی حیاتی می دانند، آنان با معرفی انواع توانایی های درگیر شده در فرایند حل مسئله معتقدند که بهبود و توسعه توانایی های فراشناختی به افراد کمک می کند در ریاضی که ذهن های خلاقی داشته باشند[۹].

۴. توسعه خلاقیت ریاضی

لیکین[۲۱] بیان می کند که خلاقیت ریاضی یک ویژگی پویا از ذهن بشری است که می توان با قدردانی از پتانسیل خلاقانه دانش آموزان آن را بهبود و توسعه داد و یا بر عکس، با عدم توجه باعث سرکوبی آن شد[۲۱]. از نظر روانشناسی، خلاقیت دارای سطوح مختلفی است و در نتیجه قابل رشد است. این رشد شامل مراحل مختلفی است. به گفته اروینک[۲۲]، خلاقیت ریاضی نمی تواند در خلا رخ دهد، بلکه نیازمند بافتی است که در آن شخص با استفاده از تجارب قبلی خود آماده برداشتن گام یا گام های مهمی به سمت یک جهت جدید می شود. چنین آمادگی از طریق محیط مناسبی برای رشد خلاقیت ایجاد می شود. او مراحل رشد خلاقیت ریاضی را شامل سه مرحله مقدماتی تکنیکی (مرحله صفر)، فعالیت الگوریتمی (مرحله اول) و فعالیت خلاقانه (مرحله دوم) در نظر می گیرد که در زیر به آن پرداخته می شود[۱۳]. قبل از انجام یک فعالیت ریاضی بکر، نیاز به مرحله ای مقدماتی ـتکنیکی است، مرحله ای که شامل نوعی کاربرد عملی یا تکنیکی از قواعد و رویه های ریاضی است، بدون این که کاربر از بنیان های نظری آن آگاهی داشته باشد. برای مثال بسیاری از ما معمارهای قدیمی را دیده ایم که برای ساختن سطح عمود از شاقول استفاده می کنند، ولی قواعد ریاضی مربوط به آن را نمی دانند. توجیه استفاده از این رویه ها این است که آنها به طور تجربی بررسی شده اند و این کاربران به طور تجربی به این نتیجه رسیده اند که اگر این قواعد به درستی به کار برده شوند، نتایج مورد قبول خواهند بود.

در مرحله فعالیت الگوریتمی، رویه ها جهت اجرای عملیات ریاضی به کار برده می شوند. فعالیت های الگوریتمی ریاضی اساسا به اجرای تکنیک های ریاضی توجه دارند[۱۳]. مثال هایی از چنین تکنیک هایی عبارتند از: حل کردن یک معادله با استفاده از روش تجزیه، محاسبه حد، مشتق و انتگرال. این تکنیک ها، فعالیت های الگوریتمی هستند که در فرایند خلق ریاضیات مورد نیازند. اگر چه بکارگیری این الگوریتم ها ممکن است به خودی خود خلاقیت خاصی نداشته باشند، اما در حین تولید ریاضیات پیشرفته، مورد استفاده قرار می گیرند. به عبارت دیگر فعالیت الگوریتمی در یادگیری ریاضی اساسی هستند، زیرا چنین فرایندهایی قبل از آنکه به عنوان اشیاء ذهنی در یک نظریه مرتبه بالا به آنان نگاه شود، باید در این مرحله درونی شده و بدون نیاز به تعمق و تامل، از آنها استفاده شوند. برای مثال اگر ریاضیدان در فعالیت خلاقانه اش نیاز داشته باشد که از قاعده مشتق حاصل ضرب استفاده کند دیگر به خود نمی گوید "حمشتق حاصل ضرب برابر است با مشتق اولی ضرب در دومی بعلاوه ..."<. بلکه در مرحله بعدی، یعنی فعالیت خلاقانه نیاز دارد که قاعده مشتق حاصل ضرب برای او درونی شده و از آن بدون تامل استفاده کند، یعنی قاعده مشتق گیری بدون در نظر گرفتن اجزا و مراحل آن به شکل مجزا، به عنوان یک شی ذهنی، کپسوله شده و در هنگام نیاز به کار آید.

در مرحله فعالیت خلاقانه، خلاقیت ریاضی رخ می دهد و تصمیم غیر الگوریتمی گرفته می شود، یعنی تصمیمی که با الگوریتم به آن نمی توان رسید. این تصمیم به شیوه ای است که به انشعاب یا جوانه ای از ساختار یک مفهوم اساسی ریاضی، که از قبل وجود داشته، معنی می بخشد. مثلا تصمیم برای اینکه یک مفهوم جدید تعریف شود و یا تصمیم برای بیان یک قضیه یا یک اثبات یا تعمیم آن[۱۳]. به نظر می رسد که یک نظریه صوری یا رسمی برای بروز فرایند خلاقیت ریاضی وجود ندارد تا از طریق آن، شخص بداند که می توان با انجام اعمال معینی خلاقیت ریاضی را در خود شکل داد، اما از نظر اروینک حالت ذهنی شخص جهت آمادگی برای فعالیت ذهنی، امری اساسی است. از طرف دیگر، برای رسیدن شخص به سطح بالای خلاقیت، به دقت در ساختارهای ذهنی نیاز دارد، تا هم راستا شده و الگوهای موجود، تقویت گردد.هم راستا به این معنی است که طوری هدایت و جهت دار شود که با الگوهایی که از قبل وجود داشته، هماهنگ بوده و با آنها ضدیت نداشته، بلکه آنها را توسعه دهد[۱۳].

---

[19] Vang
[20] Baker and Norman
[21] Leikin
[22] Ervynck

۵. خطا پذیر بودن فعالیت های خلاقانه ریاضی

یکی از ویژگی های فعالیت های خلاقانه ریاضی، خطاپذیر بودن آن است. خلاقیت ریاضی یک فعالیت بشری است بنابراین همراه با خطاهای انسانی است. از نقطه نظر لاکاتوش، ریاضیات به این صورت نیست که از قبل مسیرها کاملا مشخص شده باشد و بتوان گام به گام با اطمینان زیادی مراحل را به پیش برد. به همین دلیل ممکن است شخص وارد حیطه ای شود که در آن خطا وجود داشته و دچار عیب و نقص گردد[۱۹]. از نظر اروینک[۲۳]، هیچ ضمانتی برای درستی قضایایی که صورت بندی شده اند و یا حتی اثبات های درست قضایا وجود ندارد[۱۳]. به عبارت دیگر فعالیت های خلاقانه ریاضی ممکن است گاهی اوقات با بصیرت زیادی همراه باشد، اما ممکن است شامل ظرافت های خاصی که باید دیده می شد، نباشد. اگرچه فعالیت های خلاقانه ریاضی می تواند همراه با خطا باشد، اما همین امکان وجود خطا در فعالیت های خلاقانه ریاضی است که باعث می شود پیشروی های اساسی و دست آوردهای موفق بشری به وجود آیند. به نظر می رسد که این خطا پذیری در ریاضی دانان به علت شهود اولیه آنان قبل از دنبال کردن استدلال های منطقی است. اگر قرار بود که ریاضی دانان تنها با منطق پیشروی کرده و به شهود اجازه ظهور داده نمی شد و اگر شمشیر تیز دقت بر گردن ریاضی دانان بود، در ریاضی نه ایده ای خلق می شد، نه رابطه ای کشف می شد و نه نظریه ای شکل می گرفت. خطاپذیری یکی از ویژگی های فعالیت های خلاقانه ریاضی می باشد که باید مورد تقدیر قرار گیرد. از نظر اروینک، خطا پذیر بودن فعالیت های خلاقانه ریاضی از جمله ویژگی های آن است که بعضی از افراد به راحتی با آن کنار نمی آیند. از آنجا که فعالیت های خلاقانه ریاضی آن قطعیت لازم را برای این افراد به همراه ندارد، ترجیح می دهند که به دنبال الگوریتم هایی باشند که آن یقین را برای رسیدن و دستیابی به حل دسته ای از مسائل به آنان بدهد.

۶. خلاقیت و حل مسئله

حل مسائل خلاقانه و حل خلاقانه مسائل در ریاضی به عنوان یک فعالیت خلاقانه در ریاضی محسوب میشود. آموزش مفاهیم و موضوعات ریاضی از طریق حل مسئله، فرصتی برای درک عمیق از مفاهیم، موضوعات و ایده های مختلف ریاضی فراهم می کند و این امر سبب میگردد که افراد ضمن درگیر شدن در حل مسائل، به ارتباط و اتصال بین مفاهیم و موضوعات ریاضی پی ببرند. بنابراین با توجه به اینکه حل مسئله به فراهم کردن شرایطی مناسب برای پرورش تفکر خلاق کمک می کند، لذا اتخاذ رویکرد حل مسئله گامی در جهت پرورش خلاقیت در ریاضی است. یکی از روش هایی که می توان به وسیله آن در ارتقاء درک و بصیرت افراد و همچنین توسعه مهارت برقراری ارتباط آنها بین دانش قبلی و دانش جدید گام موثری برداشت، آن است که از افراد خواسته شود تا بر فرایند عملکرد خود تامل داشته باشند و تجربه حل مسئله خود را برای دیگران شرح دهند. زیرا این امر موجب فهم و درک عمیق آنان از مسئله و موضوع می شود و کمک شایانی به ارائه راه حل های خلاقانه می کند. بحث های گروهی در جامعه ریاضی کلاس درس، از جمله شرایطی می تواند باشد که زمینه ساز پرورش خلاقیت ریاضی می گردد. گفتمان ریاضی باید در کلاس های درسی مدرسه ای و دانشگاهی متناسب با آن سطح مطرح شود و بهترین زمان برای شروع این گفتمان می تواند در مقطع ابتدایی باشد. همچنین بحث گروهی و گفتمان ریاضی در کلاس درس موجب می گردد تا یادگیرندگان درک، احساس و قدردانی خود را از لزوم تعاریف و استدلالهای ریاضی رشد و توسعه دهند و این امر مانع شتاب زدگی در تحمیل زبان صوری و رسمی ریاضی، به ویژه درمقاطع و پایه های پایین تر می گردد. علاوه بر این بحث گروهی و تبادل اطلاعات بین افراد، به ارائه راه حل های مختلف و نظرات متنوع و جدید منجر می شود که یکی از مولفه های تفکر واگراست. نقش معلمان و اساتید در این بحث های گروهی بسیار کلیدی است. آنان باید در جامعه ریاضی کلاس خود، شرایطی را فراهم آورند تا افراد برای بیان ایده هایشان احساس آزادی و امنیت خاطر کنند.

پوسامنتایر و همکاران[۲۴] معتقدند که در زمینه حل مسئله و طرح مسئله در کلاس های درسی ریاضی برای فراگیران باید فرصت های بسیاری فراهم شود تا بتوانند در مقام یک ریاضی دان تازه کار، فکر و عمل کنند [۲۵]. با این که ریاضی دانان پیاپی با مسائلی درگیر می شوند که پر از ابهام و عدم قطعیت است، بیشتر برنامه های درسی ریاضی و رویکردهای آموزشی از این دید باز پاسخ غفلت می کنند و مسائل بد طرح شده و باز پاسخ را در کلاس های ریاضی به خدمت نمی گیرند. به عبارت دیگر از دادن فرصت هایی که افراد با این نوع مسائل به طور مستقل و برای دوره زمانی ممتد و طولانی درگیر شوند خودداری می کنند. این بدان معنی است که باید به افراد فرصت های زیادی داده شود تا مسائل ریاضی چالش برانگیز حل کنند و با تکالیفی دسته و پنجه نرم کنند که منجر می شود آنان خلاقیت ریاضی را تجربه کنند. در این خصوص هی لاک[۲۵] بیان می کند که "به نظر می آید شیوه ای که از طریق آن، موضوعات ریاضی در مدارس یاد داده می شود و ارزشیابی می شوند به گونه ای است که افراد را تشویق به فکر کردن در حوزه های محدود و معینی میکند که به فرایندها و الگوریتم های روتین وابسته هستند. این امر باعث می شود که افراد درباره مسائل ریاضی غالبا به صورت همگرا فکر کنند. در حالی که باید فرصت هایی فراهم شود تا تشویق به شکستن کلیشه ها و تصورهای قالبی خود شوند تا بتوانند به طور منعطف و واگرا نیز فکر کنند. متاسفانه، تفکر ریاضی که ممکن است بتواند توصیف خلاقانه را در کلاس های درس توجیه کند، در این کلاس ها مورد غفلت قرار گرفته است".

از جمله مواقعی که خلاقیت ریاضی آشکار می شود زمانی است که شخص جواب هوشمندانه ای را برای مسئله ای میابد که ممکن است قبلا به شیوه ای استاندارد حل شده باشد[۱۱]. اروینک[۲۶] نیز حل یک مسئله قدیمی را به شیوه ای جدید به عنوان مثالی از فعالیت های خلاقانه ریاضی

[23] Ervynck
[24] Posamentier et al
[25] Heylock
[26] Ervynck

در نظر میگیرد. عده ای از محققان (برای مثال لیکین و لو[۲۷]، سریرامان و هاوولد[۲۸]، کاوون و همکاران)[۲۹] نیز بر این باورند که استفاده از شیوه های چندگانه در حل مسائل می تواند باعث ارتباط دادن بین مفاهیم و ایده های مختلف ریاضی و عمق بخشیدن به فهم و درک افراد گردد[۱۸، ۲۰، ۳۰] و معتقدند می توان از آن برای پرورش خلاقیت ریاضی در در مقاطع مختلف آموزشی بهره برد. در واقع حل یک مسئله به شیوه های مختلف باعث انعطاف پذیری در تفکر ریاضی می شود و افراد را تشویق به داشتن ذهنی باز و رها کردن قالب های کلیشه ای می کند. دانش آموزان دارای خلاقیت بالاتر در طرح مسایل ریاضی مبتکرانه تر عمل کرده و قادر به طرح انواع بیشتری از سوالات هستند که همین موضوع آنان را علاقه مند به ریاضیات و طرح مسایل بیشتر ریاضی میکند.

۷. نتیجه گیری

انسان از ابتدای تولد تشنه کاوش و یادگیری است و اگر زمینه و محیط مناسبی فراهم شود، می تواند به سوی خلاقیت و نوآوری هدایت گردد. خلاقیت و نوآوری نقشی مهم در رشد و توسعه علم ایفا می کند و بررسی و تبیین آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابراین از جمله اهداف هر نظام آموزشی باید پرورش انسان های خلاق باشد تا قادر باشند در شرایط غیرقابل پیش بینی، تصمیم های به جا و شایسته ای را بگیرند. خلاقیت یک ویژگی پویا از ذهن بشری است که می توان آن را بهبود و توسعه داد و یا با عدم توجه به آن، باعث سرکوبی آن شد. با توجه به این که ریاضی حوزه ای است که در راس حوزه های عقلانی قرار دارد[۲۳] و بستری مناسب برای پرورش مهارت هایی چون تعمیم دادن، مدل سازی، حدسیه سازی و حل مسئله می باشد؛ لذا خلاقیت باید در فعالیتهای این حوزه وجود داشته و رشد و توسعه آن در برنامه درسی مدرسه ای و دانشگاهی قرار گیرد و فرصتی برای فراگیران فراهم گردد تا تفکر خلاق را در ریاضی هم تجربه کنند.

بنابراین، ضروری است که آموزش معلمان و اساتید به خصوص، در جهت بهبود توانایی آنان در طراحی و اجرای محیط های آموزشی مورد توجه قرار گیرد، چرا که موجب ارتقا و توسعه توانایی خلاقیت ریاضی افراد می شوند. در چنین محیط های، نگاه به یک مسئله از جنبه های مختلف که یکی از عوامل پرورش خلاقیت ریاضی است و همچنین ارائه ایده های متنوع و به نوعی ایده پردازی، مورد تشویق و تقدیر واقع میگردد. مدرسان می توانند با پرسیدن سوالاتی که افراد را تشویق به تفکر منعطف می کند، آنان را به سوی تفکر خلاق هدایت کنند. به گونه ای که تجارب کافی برای بازسازی مفاهیم و ایده های ریاضی را به دست آورند و بتوانند روی ایده ها و روابط ریاضی تامل داشته باشند. به امید آنکه خلاقیت ریاضی را به عنوان مولفه ای ضروری در نظام آموزشی مان به طور جدی در نظر بگیریم و آن را بطور گسترده در بین دانش آموزان و دانشجویان پرورش دهیم.

مراجع

[۱] ابراهیمی مقدم. حسین، زین العابدین. فاطمه. بررسی ابعاد خلاقیت (سیالی، انعطاف، ابتکار، بسط در جزئیات یا پیشرفت تحصیلی). نخستین همایش ملی علوم تربیتی و روان شناسی، شرکت اندیشه سازان مبتکر جوان، فارس –مرودشت، ۱۳۹۳.

[۲] احمدی. عباداله. رابطه خلاقیت و نوآوری با بهره وری منابع انسانی. فصلنامه رهیافتی نو در مدیریت آموزشی، ۷(۳)، ۲۰۹-۲۲۲، ۱۳۹۵.

[۳] توکورو. ماریو، موگی. کن. مغز و خلاقیت. مترجمین: مصطفی تبریزی، رامین کریمی. تهران، انتشارات دانژه، ۱۳۹۳.

[۴] سیف. علی اکبر. روان شناسی تربیتی، تهران: آگاه، ۱۳۷۹.

[۵] طیبی شیرمرد. مهدی، میرزایی. نورالدین. رابطه مولفه های خلاقیت با استقرار مدیریت دانش. فصلنامه رسالت مدیریت دولتی، ۸(۲۵)، ۸۵-۹۲، ۱۳۹۶.

[۶] عظیم پور. رضا، عیسوی. محسن، عظیم پور. احسان. اثر بخشی راهبرد یاددهی – یادگیری نقشه مفهومی در تدریس علوم بر خلاقیت دانش آموزان پایه ششم ابتدایی، فصلنامه ابتکار و خلاقیت در علوم انسانی، ۶(۴)، ۱-۲۶، ۱۳۹۶.

[۷] قاسمی نژاد. یاسر، صادقی مال امیری. منصور. هم پایانی در نقش رویکرد ضعیف تمرکز زدایی در ارتقای خلاقیت و نوآوری سازمان های صنعتی. فصلنامه رشد و فناوری، ۱۲(۴۶)، ۳۵-۴۱، ۱۳۹۵.

[8] Arikan. E. Is there a relationship between Creativity and Mathematical Creativity? Journal of Education and Learning, 6(4), 239, 2017.

[9] Bakar. M. N & Norman, I. The Role of Metacognitive Abilities in Posing Mathematical Problems Journal of Science and Mathematics Education, 5, 2012.

[10] Bouffard. B. T. Influence of Self efficacy on performance in cognitive task. Journal of social psychology, 130, 353-363, 1990.

[11] Chamberlin. S. A, Moo. S. M. Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. Journal of Secondary Gifted Education, 17(1), 37-47. 2005

[12] Ellwood. S, Pallier. G, Snyder. A, Gallate. J. The Incubation Effect: Hatching a Solution? Creativity Research Journal, 21(1), 6-14, 2009.

[13] Ervynck. G. Mathematical creativity, in: Advanced mathematical thinking, Kluwer Academic Publishers, New York, pp.42-52, 1991.

[14] Hadamard. J. The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton University Press, 1945.

[15] Haylock. D.W. Aframe work for assessing mathematical creativity in school children. – In: Educational Studies in Mathematics, 18 (1), 59–74, 1987.

[16] Jonassen. D. H. Instructional design models for well-structured and structured problem solving learning outcomes. Educational Technology Research and Development, 45(1), 65-94, 1997

[17] Kattou. M, Kontoyianni. K, Pitta-Pantazi. D, Christou. C & Cleanthous. E. Predicting Mathematical Creativity, 2009.

[27] Leikin & Lev

[28] Sriraman & Haavold

[29] Kwon an atc

[18] Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006).Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7(1), 51-61. (2007
[19] Lakatos. I.M. Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery, Cambridge University Press, 1976.
[20] Leikin. R, Lev. M. Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? ZDM, 1-15, 2013.
[21] Leikin, R. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks, in: creativity in mathematics and the education of gifted students, Rotterdam, the Netherlands, Sense Publisher, Vol.9, pp.129-145, 2009.
[22] Mann. E. L. Mathematical Creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students. Roeper Review,28.,179, 2006.
[23] National Council of Teachers of Mathematics, Principles and standards for school mathematics, Reston, VA: Author, 2000.
[24] Nicolaidou. M & Philippou. G. Attitude towards mathematics, self-efficacy and achievement in problem solving. European Ropean Research in Mathematics Education III. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/didu , 2009.
[25] Posamentier. A. S, Smith. B. S & Stepelman. J. Teaching secondary mathematics: techniques and enrichment units. (8th ed.). Columbus, Ohio: Merrill Prentice Hall, 2010.
[26] Schoenfeld. A. H. Mathematical problem solving. School of education, Department of mathematics, University of California, Brekly, 1985.
[27] Shriki. A. Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. 159-179, 2010.
[28] Silver. E.A. Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, in: ZDM, Zentralblatt fur Didactic der Mathematic, Vol. 29, no.3, pp.75-80, 1995.
[29] Sriraman. B. Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms, The Journal of Secondary Gifted Education. Vol.17, pp.20-36, 2005.
[30] Sriraman. B, Haavold. P. Creativity and giftedness in mathematics education: A pragmatic view. First compendium for research in mathematics education. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2017.
[31] Sriraman. B, Haavold, P. & Lee. K. Mathematical creativity and giftedness: a commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward, ZDM, 1-11, 2013.
[32] Wessels. H. M. Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(9), 22-40, 2014.
[33] Yan. J.S, Brazeau. M. Creativity in math? Say it is not so! Building data literacy in high schools, School Libraries in Canada, 22, 2002.
[34] Yuan. X, Sriraman. B. An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. The elements of creativity and giftedness in mathematics, 5-28, 2012.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–286، صص. ۴۸۶–۴۹۱

گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی

زهرا منصوری*[آ]، نرگس یافتیان[ب]

[آ] دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی
[ب] استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهیدرجایی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
بازی
گیمیفیکیشن
آموزش
آموزش ریاضی

2020 MSC:
۴۰D۹۷

چکیده

بازی از ابتدای زندگی انسان تا پایان آن نقش پررنگی را در گذر لحظه‌ها دارد. انسان براي رشد ذهني و اجتماعي خود نیاز به تفکر داشته و بازي‌خمیر مایه تفکر است. یکی از روش‌های بهره‌مندی از مزایای بازی‌ها در آموزش، تدریس به شیوه گیمیفیکیشن است. به کاربردن المان‌های بازی در زمینه‌های غیربازی گیمیفیکیشن نامیده می‌شود. در این شیوه با استفاده از سازوکارهای بازی‌ها روشی جدید برای ارائه موضوعات مختلف ایجاد خواهد شد و فضای متفاوت‌تری برای مخاطب فراهم آورده می‌شود. یکی از بسترهای مناسب برای به کار بردن شیوه گیمیفیکیشن، آموزش و یادگیری است تا بدین‌وسیله بتوان بازدهی تدریس و نیز انگیزه مخاطب را با ایجاد فضایی متفاوت بهبود ببخشید. هدف از این مقاله ارائه تعاریفی از گیمیفیکیشن، توصیف مثال‌هایی از اجرای این شیوه در آموزش ریاضی، بررسی مختصری از تاثیر آن در آموزش و یادگیری و همچنین چند کاربرد آن در آموزش ریاضی است.

۱. مقدمه

بازی از آغاز حیات انسان با او بوده است و به اندازه سابقه خود بشر، قدمت دارد. بازی در طول تاریخ دگرگونی‌های بسیاری را طی کرده است که بخشی از آن به مرور زمان از بین رفته و بخشی دیگر تکامل یافته و برخی نیز در این اواخر ایجاد شده است. بازی برای انسان‌های نخستین با ابزارهایی مثل چوب و سنگ و غیره همراه بوده است و آن‌ها با بازی کردن به شناخت بهتر محیط و ارتباط با همنوعانشان پرداخته و توانمندی‌های فیزیکی خود را درجهت مواجه شدن با خطرات، به حد مطلوب رسانده‌اند [۲]. بعد از رنسانس[۱] در سده ۱۵ تفریح و بازی عمومیت بیشتری پیدا کرد و به مرور زمان از تعداد ساعات کاری کم شده و زمان اوقات فراغت اشخاص بیشتر گردید و از بازی جهت پر کردن آن اوقات استفاده شد و به مرور، بازی‌ها جایگاه فعلی خود را در زندگی بشر پیدا کردند[۵]. بازی‌ها یکی از بزرگترین ابزارهای سرگرمی در دنیا هستند و رشد بسیار سریعی در آن‌ها دیده می‌شود. امروزه بازی‌های کامپیوتری سهم بزرگی از اوقات فراغت افراد را به خود اختصاص می‌دهد. بازی در زمینه‌های متنوعی به کار گرفته می‌شود. استفاده از عناصر بازی در بستر غیربازی را گیمیفیکیشن[۲] می‌نامند که یکی از روش‌های انتقال محتوا در عصر جدید است و در ادامه بیشتر درباره آن توضیح داده خواهد شد.

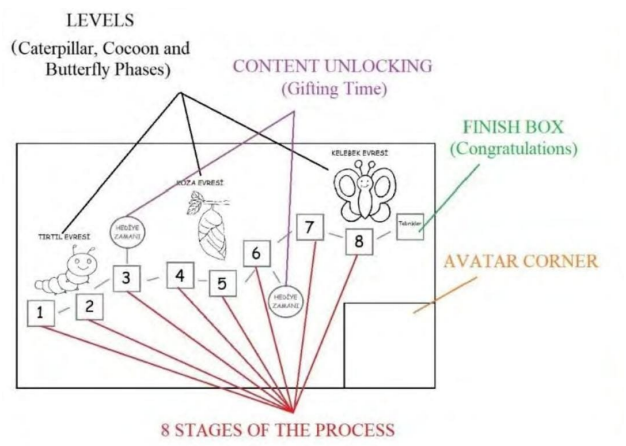
۲. گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی

گیمیفیکیشن اصطلاحی است که منشا آن در صنعت رسانه‌های دیجیتال است. بررسی‌های تاریخی نشان می‌دهد که واژه گیمیفیکیشن اولین بار در سال ۲۰۰۲ ابداع شد و تا سال ۲۰۱۰ چندان مورد استقبال قرار نگرفت [۱]. اما سال ۲۰۱۱ را می‌توان سال گیمیفیکیشن نامید. صاحب نظران

*سخنران
پست الکترونیک: zahramansouri288@gmail.com (زهرا منصوری)، yaftian@sru.ac.ir (نرگس یافتیان)

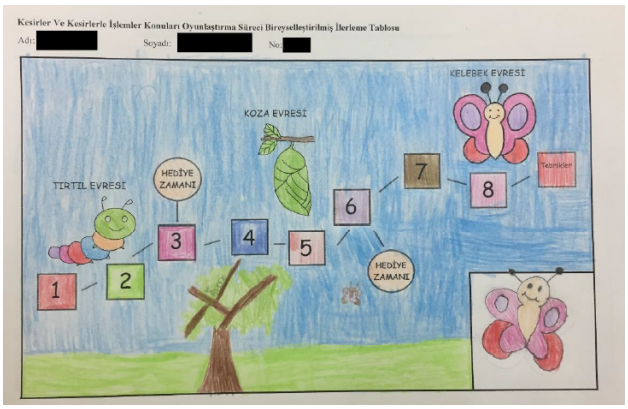
[۱] renaissance
[۲] Gamification

تعاریف متعددی از گیمیفیکیشن را ارائه داده‌اند. یکی از رایج‌ترین تعاریفی که در مقالات متعددی به آن اشاره شده استفاده از المان‌های طراحی بازی در زمینه‌هایی غیربازی است [۳].
همانطور که پیش‌تر اشاره شد، یکی از شیوه‌های به‌کارگیری اجزای بازی در آموزش، اجرای گیمیفیکیشن در شیوه‌های آموزشی است. تدریس به روش گیمیفیکیشن را می‌توان تدریس به کمک قوانین به کاررفته در بازی‌ها در نظر گرفت. در واقع، با این شیوه به دنبال آسان‌تر و شیرین‌تر ساختن آموزش مفاهیم با استفاده از کمک استراتژی‌های بازی هستیم. این روش شامل عناصر بازی در اجزای غیربازی با هدف افزایش تجربه و علاقه دانش‌آموز است [۹]. جالب توجه است که تمام مطالعات بررسی شده ([۱۲]، [۹]، [۱۱]، [۸]، [۱۰]، [۷]) تنها اثر مثبت و یا خنثی از گیمیفیکیشن را نشان داده‌اند. در هر مطالعه پیشرفت‌های قابل توجهی در یادگیری برخی از جنبه‌های گیمیفیکیشن رخ داده است و می‌توان نتیجه گرفت که این شیوه اثربخشی قابل قبولی در حوزه آموزش دارد.
در طول تاریخ، بازی‌هایی که انجام می‌شوند با قوانین دنیای ریاضی در تضاد نیستند و می‌توان گفت ساختار بیشتر بازی‌ها بر مبنای ریاضی بوده و ریاضی به طور ذاتی نوعی بازی است. برای مثال، نسبت‌ها که در ساختارهای ریاضیاتی دیده می‌شوند، در ساختار برخی از بازی‌ها نیز قابل مشاهده است. حتی تفکر خلاق، استدلال و استنتاج که مولفه‌های مهمی را در یادگیری ریاضیات تشکیل می‌دهند، بخش قابل توجهی از ساختار بازی‌ها، به ویژه بازی‌های معمایی و ماجراجویی را در برمی‌گیرند. این اشتراک‌ها، گنجاندن بازی‌ها را در فرآیند تدریس ریاضیات تسهیل می‌کند [۷]. انجام بازی در یادگیری ریاضی می‌تواند تجربه یادگیری دانش‌آموزان را به تجربه‌ای مشارکتی، پرهیجان و لذت‌بخش تبدیل کند. بنابراین اگر معلمان به نیازهای دانش‌آموزان توجه کافی داشته باشند و رویکردهای آموزشی را با هدف پرورش همه جانبه سطوح تفکر آن‌ها انتخاب کنند، می‌توانند مهارت‌های تفکر و توسعه یادگیری ریاضی را بهبود بخشند. از این رو همانطور که در قسمت قبل بیان شد، گیمیفیکیشن در آموزش و یادگیری می‌تواند نقش موثری در انگیزه و نگرش دانش‌آموزان داشته باشد. ریاضیات همراه با لذت بر نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی، انگیزه یادگیری و مشارکت فعال اثر می‌گذارد و به این ترتیب، محیط‌های یادگیری برای دانش‌آموزان جذاب می‌شود و گیمیفیکیشن نیز جزو روش‌هایی است که این هدف را تحقق بخشیده و می‌تواند مهارت‌های مدیریت، ارتباطات، مشارکت، تفکر انتقادی و خلاق را در دانش‌آموزان ارتقا دهد [۴]. اکنون برای آشنایی بیشتر با گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی به ارائه چند مثال پرداخته می‌شود:
نمونه‌ای از این گیمیفیکیشن‌ها طی شش هفته بر روی دانش‌آموزان پایه پنجم ابتدایی اجرا شده است [۷]. عناصر اصلی این گیمیفیکیشن، داستان‌گویی است به این شیوه که دانش‌آموزان پیشرفت خود را به شکل فرآیندی سرگرم‌کننده رنگ‌آمیزی می‌کنند. در ابتدا به هریک از دانش‌آموزان یک نقشه راه مانند شکل ۱ داده می‌شود. نقشه راهی که که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، به مراحل پروانه شدن یک کرم ابریشم اختصاص دارد و دانش‌آموزان با کسب امتیاز در بخش‌های مختلف کلاس درس، مانند فعالیت کلاسی، ارائه به موقع تکالیف و انجام تحقیق‌های علمی می‌توانند به صورت گام به گام نقشه راه را بپیمایند.



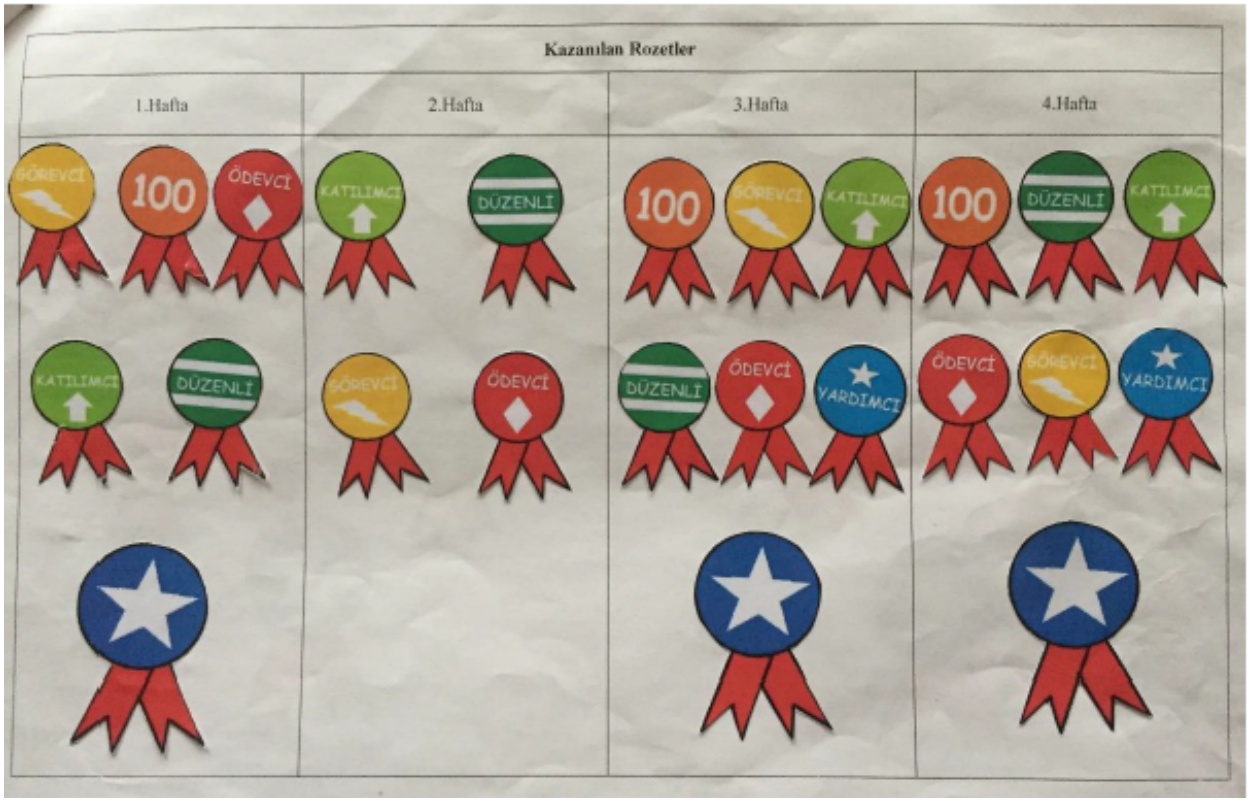
شکل ۱: فرآیند هشت‌گانه نقشه راه [۷]

این نقشه راه شامل ۸ جعبه متوالی است که هریک از این جعبه‌ها به مرحله خاصی از آموزش اختصاص دارد و فرآیند گیمیفیکیشن از طریق این جعبه‌ها هدایت می‌شود. سه مرحله اول به کرم ابریشم، سه مرحله دوم مربوط به پیله و دو مرحله پایانی به پروانه اختصاص دارد. دانش‌آموزان می‌توانستند پس از دریافت نقشه راه، آن را به دلخواه رنگ‌آمیزی کنند و برای شخصیت خود یک تصویر انتخاب کرده و آن در قسمت پایین و سمت راست برگه طراحی کنند (شکل ۲). دانش‌آموزان موظف بودند در طول این ۶ هفته، به خوبی از نقشه رنگ‌آمیزی شده خود نگهداری کنند. دانش‌آموزانی که تکالیف و تمرین‌های خود را به خوبی ارائه داده بودند، حق عبور از هریک از مراحل نقشه راه را داشتند. منظور از تکالیف و تمرین‌ها، وظایفی است مانند تحقیق‌های علمی، تکالیف درسی که معلم در کتاب ریاضی مشخص می‌کرد. هنگامی که دانش‌آموزان به مراحل ۳ و یا ۶ رسیدند می‌بایست قفل آن مرحله را باز می‌کردند تا مجوز ادامه مسیر را داشته باشند. باز کردن قفل، جایزه‌ای را در پیش داشت. هرکس



شکل ۲: نقشه راه رنگ‌آمیزی شده توسط یکی از دانش‌آموزان [۷]

می‌توانست قفل مراحل ۳ و یا ۶ را باز کند، جایزه‌ای به او تعلق می‌گرفت که این جوایز وسایلی بودند که دانش‌آموز بتواند آن را در مدرسه استفاده کند و ارزش مالی بالایی نداشته باشند. عنصر مهم دیگر این گیمیفیکیشن، وجود نشان‌هایی برای امتیازدهی به فعالیت‌های دانش‌آموزان (شکل۲) است. جدولی به نام مجموعه نشان ها که در قالب ۶ هفته طراحی شده بود به دانش‌آموزان داده شد تا مطابق فعالیت‌های خود، نشان‌ها را روی آن نصب کنند.



شکل ۳: نشان‌ها [۶]

نشان‌ها در واقع یک نمایش بصری از اهداف تحقق یافته بودند. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، نشان‌های متنوعی در این بازی به‌کار گرفته شده‌اند که هرکدام از آن‌ها نام و کاربرد خاص خود را دارد. نشان آبی کاربنی، نشان ستاره هفته است. این نشان در پایان هفته به کسانی

تعلق می‌گرفت که در طول هفته حداقل ۵ نشان دریافت کرده باشند. نشان نارنجی، نشان ۱۰۰ امتیازی است و به کسانی تعلق می‌گرفت که در طول هفته در تمام فعالیت‌ها امتیاز کامل کسب کنند. نشان قرمز، نشان هومر است و دانش‌آموزانی که تکالیف کل هفته را به طور کامل انجام دهند و به موقع تحویل دهند می‌توانستند آن را دریافت کنند. نشان زرد یا نشان مُبلغ‌ها به کسانی داده شد که در طول هفته تحقیق‌های علمی انجام داده باشند. نشان سبز روشن یا نشان مشارکت کننده، به کسانی تعلق می‌گرفت که در طول هفته در کارهای گروهی مشارکت داشته باشند. نشان سبز تیره، نشان معمولی است که در طول هفته به دانش‌آموزانی که نظم را رعایت می‌کردند داده می‌شد. آخرین نشان، نشان آبی روشن، در طول هفته به دانش‌آموزانی داده می‌شد که علاوه بر مشارکت در کارگروهی در گروه خود، به دوستان خود در گروه‌های دیگر نیز کمک کرده باشند. هر کدام از دانش‌آموزان که در پایان هفته می‌توانست نشان ستاره هفته را دریافت کند، یک مرحله در نقشه راه جلو می‌رفت. این روند تا جایی ادامه یافت که ۶ هفته آموزشی پایان یابد [۷].

گیمیفیکیشن‌ها می‌توانند به روش‌های مختلف مانند فیزیکی و دیجیتالی ارائه شوند، بازی جعبه اژدها نمونه‌ای از اپلیکیشن‌های کمک‌کننده در اجرای شیوه گیمیفیکیشن است. این بازی از جمله اپلیکیشن‌های مفید برای آموزش مبحث معادله به شیوه گیمیفیکیشن است (شکل۴).



شکل ۴: نماد بازی جعبه اژدها [۳][۲]

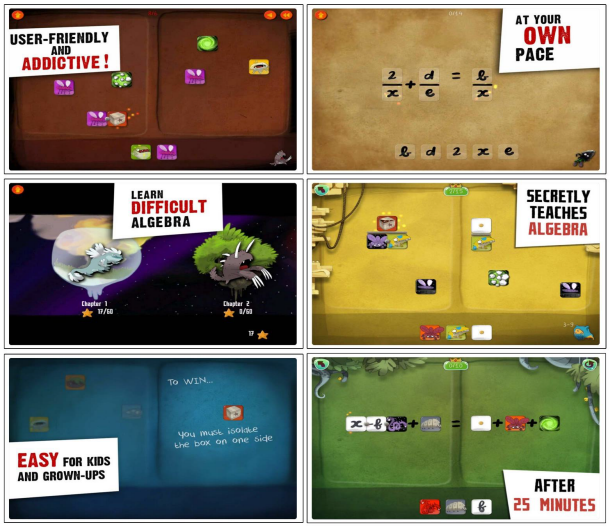
شعار اپلیکیشن جعبه اژدها این است که چرا باید مدت زمان زیادی صبر کنیم تا جبر را یاد بگیریم!؟ قطعا دانش‌آموزانی هستند که عاشقانه این درس را دوست دارند اما مشاهدات نشان داده است که برخی از دانش‌آموزان تمایل چندانی به یادگیری این درس ندارند. بسیاری از کودکان جبر را به صورت مکانیکی یاد می‌گیرند، بدون اینکه متوجه یادگیری آن و اتفاقاتی که در پشت پرده ذهنشان می‌افتد باشند. با خود فکر کنید که اگر در همین لحظه بخواهید معادله را در قالب یک بازی به دانش‌آموزان تدریس کنید چه ایده‌ای دارید؟ در بازی جعبه اژدها از المان‌های تصویری به منظور نشان دادن تعادل دو سمت یک معادله استفاده شده است. به نظر می‌رسد این بازی آمریکایی برای دانش‌آموزان هفتم در نظام آموزشی ایران مناسب می‌باشد. هدف بازی در مراحل ابتدایی حذف کردن تمامی عناصر غیرضروری برای برقراری یک معادله است. هنگامی که بازیکن به مراحل بالاتر بازی می‌رسد با معادلاتی مشابه معادلاتی که در مدرسه تدریس می‌شوند روبه‌رو خواهد شد [۲]. برخی از مراحل بازی در شکل ۵ قابل مشاهده است.

همانطور که در شکل قابل مشاهده است در این بازی تنها از اعداد برای آموزش معادله استفاده نشده ات بلکه تلاش سازنده برای نمایش معادله به کمک اشیاء قابل مشاهده است.

به عنوان نمونه‌ای دیگر از گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی می‌توان به این مثال اشاره کرد. وضعیتی را در نظر بگیرید که در یک کلاس درس ریاضی، فعالیتی حول یک داستان طراحی شده است. هدف از این فعالیت آن است که دانش‌آموزان بتوانند جعبه‌ای که با تعداد متعددی قفل بسته شده است را باز کند. دانش‌آموزان برای باز کردن هر یک از این قفل‌ها نیاز به یک کد خواهند داشت که هر کد با حل کردن یک مسئله ریاضی در مدت زمانی محدود به دست می‌آید. در صورتی که مسئله ریاضی را به درستی انجام ندهند، پاسخ درست برای آنها به طور کامل توضیح داده خواهد شد و می‌توانند مجددا بازی را ادامه دهند و از یادگیری جدید خود استفاده کنند. چنین فعالیتی یکی از نمونه‌های کوچک گیمیفیکشن در درس ریاضی است. در اصل هدف از این فعالیت تنها انجام یک بازی نیست بلکه فرآیند انجام بازی که حل مسئله‌های ریاضی است مطلوب ماست [۱۱].

یکی دیگر از نمونه بازی‌های مناسب برای تدریس ریاضی به روش گیمیفیکیشن در شکل ۶ مشاهده می‌شود.

این بازی (شکل ۶) با هدف تمرین درس مقایسه اعداد کسری، اعداد اعشاری و درصد ایجاد شده است. دانش‌آموزان برای آنکه بتوانند توپ را داخل سبد بیندازند لازم است اعداد نوشته شده بر روی توپ‌ها را به یکی از حالت‌های اعشاری،کسری و یا درصد درآوردند و سپس آن‌ها را مرتب کنند. در صورتی که به پاسخ درست برسند اجازه‌ی پرتاب توپ را خواهند داشت. شانس پرتاب توپ، دانش‌آموزان را مشتاق به انجام مسئله می‌کند و این موضوع سبب بهبود یادگیری آن‌ها خواهد شد. در نهایت دانش‌آموزی که بتواند بیشترین تعداد توپ را به داخل سبد انداخته باشد برنده این بازی است.



شکل ۵: تصاویری از برخی مراحل بازی جعبه اژدها [۲]



شکل ۶: نمونه‌ای از گیمیفیکیشن در آموزش ریاضی [۲]

۳. بحث و نتیجه‌گیری

بازی یکی از راه‌های افزایش انگیزه، مهارت‌های ذهنی، حس مشارکت و ... است. امروزه با پیشرفت بازی‌ها و تکنولوژی، بازی‌ها از ساختار قدیمی خود تغییر شکل یافته و به روزرسانی شده‌اند. با ورود بازی‌های دیجیتال، ماهیت بازی تغییری نداشته اما اثرگذاری آن قوی‌تر از گذشته شده است. گیمیفیکیشن در آموزش را می‌توان ترکیبی از اجزای بازی و آموزش دانست. در یک کلاس سنتی، شخصی‌سازی مطالب برای معلمان دشوار است. به همین دلیل دانش آموزان با عملکرد بالا ممکن است به اندازه کافی مورد چالش قرار نگیرند و دانش‌آموزان با عملکرد پایین نیز به دلیل نداشتن انگیزه، ناامید شوند. در اصل با طراحی و به کارگیری گیمیفیکیشن‌ها در آموزش و به خصوص آموزش ریاضی، معلمان دیدگاه کل نگر و همه جانبه‌ای به مهارت‌ها و توانایی‌های دانش‌آموزان خواهند داشت و کلاس ریاضی را به کلاسی پرهیجان، فعال و با بازدهی بیشتر تبدیل خواهند کرد.

متخصصان آموزش معتقدند که گیمیفیکیشن به طور خاص می‌تواند منبعی برای یادگیری ریاضی باشد (کارامرت و واردار،۲۰۲۱). هیجان و انگیزه در تدریس ریاضی به روش گیمیفیکیشن بیشتر از روش‌های سنتی است زیرا این شیوه می‌تواند توجه دانش‌آموزان را به درس جلب کند و خمودگی و کسلی احتمالی در کلاس‌های درس ریاضی را کاهش دهد. علاوه بر آن، این روش یادگیری معنادار را در درس ریاضی تضمین و فرآیند یادگیری را به طور فعالانه برقرار می‌کند (سونیا عبدکریم،۲۰۲۱). استفاده از این روش به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا یادگیری ریاضی را به صورت تعاملی تجربه کنند. استفاده از عناصر چندرسانه‌ای در این شیوه آموزشی مانند متن، عکس، تصویر، صدا، انیمیشن به عنوان یک روش تعاملی برای بهبود یادگیری ریاضی دانش‌آموزان و همچنین افزایش علاقه آن‌ها به درس ریاضی بسیار موثر واقع شده است(اودجاجا،۲۰۱۸). استفاده از گیمیفیکیشن انگیزه دانش‌آموزان را برای یادگیری محتواهای ریاضی افزایش داده و بر بهبود توانایی تجسم موثر است (نربیل، ۲۰۲۰). همچنین متخصصان آموزش معتقدند که این روش، به طور خاص، می‌تواند منبع مناسبی برای یادگیری ریاضیات باشد زیرا می‌تواند موجب توسعه تفکر ریاضی و همچنین ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی شود (مارین‌دیاز، ۲۰۲۰).

مراجع

[۱] پورروستایی اردکانی، سعید، عارفی . مقایسه ی اثربخشی آموزش مبتنی بر بازی رایانه‌ای آموزشی و آموزش مبتنی بر فیلم آموزشی بر خلاقیت و انگیزش دانش آموزان . فناوری آموزش . (۱۱)۴، ۳۴۷-۳۵۸، ۱۳۹۶ .

[۲] جعفری، آزاده . تاثیر گیمیفیکیشن (بازی‌آفرینی) بر روند تعامل با مخاطب . پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهرا، ۱۳۹۷ .

[3] Deterding, Sebastian, Dan Dixon, Rilla Khaled, and Lennart Nacke. ”From game design elements to gamefulness: defining” gamification”.” In *Proceedings of the 15th international academic MindTrek conference: Envisioning future media environments*, pp. 9-15. 2011.

[4] Gogal, Kristin, William Heuett, and Deana Jaber. ”CHEMCompete: An organic chemistry card game to differentiate between substitution and elimination reactions of alkyl halides.” *Journal of Chemical Education* 94, no. 9, 2017 : 1276-1279.

[5] Guttmann, Allen. *The Olympics: A history of the modern games*. Vol. 14. University of Illinois Press, 2002.

[6] Hunter, Dan, and Kevin Werbach. *For the win*. Vol. 2. Wharton digital press. https://vr-entertain. com/wpcontent/uploads/BattleHuntersIM_4-US-V1, 2012.

[7] Karamert, Önder, and Aslıhan Kuyumcu Vardar. ”The effect of gamification on young mathematics learners’ achievements and attitudes.” *Journal of Educational Technology and Online Learning* 4, no. 2: 96-114.

[8] Lanuza, Maryann H. ”Integrative gamification technique in teaching specialization courses in mathematics.” *International Journal of Scientific and Technology Research* 9, no. 4, 2020: 1275-1281.

[9] Lo, Chung Kwan, and Khe Foon Hew. ”A comparison of flipped learning with gamification, traditional learning, and online independent study: the effects on students’ mathematics achievement and cognitive engagement.” *Interactive Learning Environments* 28, no. 4, 2020: 464-481.

[10] Marín-Díaz, Verónica, Begoña E. Sampedro-Requena, Juan M. Muñoz-Gonzalez, and Noelia N. Jiménez-Fanjul. ”The Possibilities of Gamifying the Mathematical Curriculum in the Early Childhood Education Stage.” *Mathematics* 8, no. 12 , 2020 : 15-22.

[11] Nebril, Jessica, Angélica Benito, and Álvaro Nolla. ”Augmented Reality in Mathematics Education: a gamification proposal for Secondary School.” *CIVINEDU 2020* , 2020 : 155-158.

[12] Türkmen, Gökçe Pelin, and Danyal Soybaş. ”The effect of gamification method on students’ achievements and attitudes towards mathematics.” *Bartın University Journal of Faculty of Education* 8, no. 1 , 2019 : 258-298.

[13] Udjaja, Yogi, Vincent Sadino Guizot, and Natalia Chandra. ”Gamification for elementary mathematics learning in Indonesia.” *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)* 8, no. 6 , 2018.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–296، صص. ۴۹۲–۴۹۷

مقایسه عملکرد دانش‌آموزان پایه چهارم در مطالعات تیمز ریاضی ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹

فائزه فیروزشاهی*[آ]، نرگس یافتیان[ب]

[آ]دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
[ب]استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تغییرات برنامه درسی
مطالعه تیمز
مقطع ابتدایی
پایه چهارم

2020 MSC:
۱۰D۹۷

چکیده

در پژوهش حاضر با بررسی مسائل منتشرشده ریاضی پایه چهارم مطالعات تیمز ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹، به مقایسه نتایج به‌دست آمده توسط دانش‌آموزان ایرانی در این سه دوره پرداخته شده است. روش انجام این پژوهش توصیفی – تحلیلی – تطبیقی است و به کمک الگوی پیشنهادی جرج بردی انجام گرفته است. نتایج حاکی از آن است که در برخی حوزه‌های موضوعی، دانش‌آموزان ایرانی پیشرفت بهتری داشته‌اند ولی در برخی از حوزه‌ها دچار افت شده‌اند. همچنین میانگین درصد پاسخ درست ایران به نسبت میانگین درصد بین‌المللی، در تمام سوالات بررسی شده همواره کمتر بوده است. در نهایت، بررسی‌ها نشان داد که فاصله نمره کسب شده توسط ایران تا میانگین نمره بین‌المللی در مطالعه تیمز ۲۰۱۹ به نسبت ادوار قبلی کمتر شده و در یک روند رو به بهبود، در حال نزدیک شده به میانگین بین‌المللی است. نتایج این پژوهش می‌تواند به معلمان، برنامه‌ریزان آموزشی و سایر محققان حوزه آموزشی ریاضی جهت ارزیابی رویکردهای آموزشی رایج و تغییرات صورت گرفته در آن، در بازه زمانی ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۹ کمک کند.

۱. مقدمه

امروزه تغییر و تحول در حوزه‌های مختلف علم، صنعت و فناوری با شتاب بسیار زیادی همراه است و آماده‌سازی افراد در درجه اول به عنوان شهروند آگاه و در درجه دوم به عنوان نیروی‌کار توانمند در تمام جهان از اهمیت بالایی برخوردار شده است. از همین‌روی، تلاش جوامع مختلف جهت تحقق این امر و سرمایه‌گذاری بر روی آموزش افراد از سنین پایین، مضاعف گردیده و در برخی حوزه‌ها به صورت رقابتی درآمده است [۱].

ریاضیات یکی از حوزه‌هایی است که به جهت نقش اساسی که در پیشبرد سایر علوم و همچنین صنعت و تکنولوژی ایفا می‌کند، همواره مورد توجه بوده است. علاوه بر این نقش شاخه‌های مختلف ریاضیات در پیش‌بینی و ارائه راه‌حل برای مسائل و معضلات اجتماعی و اقتصادی نیز غیرقابل چشم‌پوشی است [۲]. فارغ از ارزش ذاتی ریاضیات و تاثیر آن در پرورش مهارت استدلال افراد، موارد ذکر شده از عواملی هستند که موجب شده تا ریاضیات از گذشته تاکنون، در برنامه درسی کشورهای مختلف حضور پررنگ داشته باشد. در بسیاری از کشورها به فراخور شرایط اجتماعی و سیاسی، برنامه درسی ریاضیات دچار اصلاح و تغییر شده است. نمونه‌های تاریخی آن را می‌توان برنامه درسی "ریاضیات جدید" در آمریکا دانست که در واکنش به شوک اسپوتنیک اتفاق افتاد [۳]. از دیگر نمونه‌های اخیر آن، ورود برنامه درسی ریاضیات به حوزه مدل‌سازی ریاضی در آلمان، در واکنش به نتایج ضعیف کسب شده در مطالعه پیزا، موسوم به شوک پیزا است [۴]. بنابراین یکی از دلایل ایجاد تغییرات اساسی در رویکردهای آموزشی و برنامه‌های درسی، هماهنگ شدن با شرایط دنیای واقعی است.

*سخنران
پست الکترونیک: firouzshahi@yahoo.com (فائزه فیروزشاهی)، yaftian@sru.ac.ir (نرگس یافتیان)

یکی از راه‌هایی که به کمک آن می‌توان از نقاط قوت و ضعف یک سیستم آموزشی یا برنامه درسی آگاه شد، شرکت در آزمون‌ها، مطالعات و مسابقات بین‌المللی در حوزه‌های مختلف است که هر کدام با اهداف متفاوتی برگزار می‌شوند و می‌توان توانمندی‌های گوناگون دانش‌آموزان را، با همتایانشان در سایر کشورها مقایسه کرد و به کمک نتایج آن، بینش بهتری در خصوص عملکرد برنامه آموزشی به‌دست آورد. همچنین برخی از این مطالعات به صورت گسترده‌تری به جوانب مختلف دخیل در امر آموزش می‌پردازند. یکی از این مطالعات، مطالعه ریاضی و علوم تیمز است که از سال ۱۹۹۵ هر چهار سال یکبار در میان جامعه دانش‌آموزان پایه‌های چهارم ابتدایی و هشتم متوسطه برگزار می‌شود. این مطالعه در کنار سنجش عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی و علوم به تفاوت‌های برنامه درسی کشورهای شرکت‌کننده، شیوه ارزشیابی، پیشینه اجتماعی دانش‌آموزان، نظم و امنیت مدارس، وضعیت شغلی معلمان و میزان رضایت آن‌ها از شغلشان و مسائل دیگری از این قبیل می‌پردازد [۵]. مسائل مطرح شده در آزمون مطالعه تیمز به صورت کامل منتشر نمی‌شوند، بلکه به صورت گزینشی برای عموم انتشار می‌یابند. البته نتایج و درصدها و رتبه‌بندی دقیق کلیه مسائل به صورت مجزا اعلام می‌شود [۶]. آخرین مطالعه تیمز در سال ۲۰۱۹ و در میان ۵۹ کشور برگزار شد و ایران نیز مانند تمام ادوار گذشته، در این مطالعه شرکت کرده است. در تمام مطالعات صورت گرفته، دانش‌آموزان ایرانی در حوزه ریاضیات، میانگین نمره‌ای کمتر از میانگین بین‌المللی کسب کرده‌اند و فارغ از پیشرفت‌ها و پسرفت‌های مختلف در طی این سال‌ها، موفق به کسب رتبه مطلوب و مورد انتظار نشده‌اند [۷، ۸، ۹].

بسیاری از کشورهای شرکت‌کننده در مطالعه تیمز، بر اساس نتایج منتشر شده آن، به پژوهش در خصوص عوامل موثر بر نتیجه کسب شده (مثبت یا منفی) می‌پردازند و از جوانب مختلف به این امر نگاه می‌کنند. برای نمونه می‌توان به پژوهش چن[۱] [۱۰] اشاره کرد که به کمک نتایج تیمز ۲۰۱۹ به بررسی پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان پایه چهارم و هشتم هنگ کنگ در سطح فردی و کلاسی پرداخته است. همچنین اوتومو[۲] [۱۱] سواد آماری دانش‌آموزان پایه هشتم اندونزی در حل مسائل تیمز ۲۰۱۹ را مورد بررسی قرار داده است. رودریگز[۳] و همکاران [۱۲] نیز به نقش تفاوت‌های جنسیتی در خودپنداره ریاضی در سراسر جهان پرداخته‌اند که برای این‌کار از داده‌های به‌دست آمده از والدین و دانش‌آموزان در مطالعه تیمز ۲۰۱۵ استفاده کرده‌اند.

در کشور ما، ایران نیز پژوهش‌هایی با محوریت مطالعه تیمز انجام گرفته است (برای مثال، [۱۳، ۱۴، ۱۵]). البته با توجه به این‌که نتایج این مطالعات نشان می‌دهد که عملکرد دانش‌آموزان ما در مطالعه تیمز همچنان قابلیت بهبودپذیری دارد، نیاز به پژوهش‌هایی جهت یافتن عوامل موثر بر عملکرد پایین دانش‌آموزان احساس می‌شود. نظر به این‌که ایران در ادوار مختلف مطالعه تیمز شرکت داشته است، یکی از راه‌هایی که به کمک آن می‌توان روند آموزشی و نقاط قوت و ضعف آن را شناسایی کرد، مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در مطالعات تیمز مختلف و یافتن علل احتمالی موفقیت یا عدم موفقیت حاصل شده است زیرا تغییرات کلی سیستم آموزشی در طی این سالیان، که می‌تواند منجر به تغییر نتایج تیمز شود، در دسترس است و به کمکَ این روش می‌توان روندهای مثبت را تقویت و خطاها یا نقاط ضعف را شناسایی کرد. با توجه به این‌که مقایسه نتایج کلی انتشار یافته اطلاعات کلی و مبهمی در اختیار مخاطبان قرار می‌دهد، بررسی جزئی‌تر و موضوعی‌تر می‌تواند راهگشا باشد. بنابراین، مقایسه سوالات تکراری و مشابه در مطالعات مختلف تیمز و ارزیابی نتایج کسب شده، راه‌کاری است که اطلاعات بیشتری در خصوص عملکرد دانش‌آموزان می‌دهد.

بر اساس نکات ذکر شده، هدف از پژوهش حاضر مقایسه مسائل ریاضی منتشر شده در سه مطالعه اخیر تیمز است که در سال‌های ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ برگزار گردیده است. با توجه به اهمیت مقطع ابتدایی در پایه‌گذاری بنیان‌های تفکر ریاضیاتی، مطالعات تیمز پایه چهارم مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش به سوال زیر پاسخ داده می‌شود:

نتایج به‌دست آمده در حل نمونه سوالات منتشرشده ریاضی پایه چهارم در مطالعه تیمز ۲۰۱۹ در مقایسه با مطالعات تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ چگونه است؟

۲. روش پژوهش

روش انجام این پژوهش توصیفی – تحلیلی – تطبیقی است و به کمک الگوی پیشنهادی جرج بردی انجام گرفته است. این الگو شامل ۴ مرحله توصیف، تفسیر، همجواری و مقایسه است که در مرحله اول، مسائل ریاضی پایه چهارم منتشرشده تیمز ۲۰۱۹ [۱۶] و مسائل منتشر شده مطالعات تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ [۶، ۱۷] بر اساس شباهت محتوا و فرآیند حل، مورد بررسی قرار گرفتند. در مرحله بعد اطلاعات به‌دست آمده تفسیر و داده‌ها در مرحله همجواری، دسته‌بندی و در قالب جدول ثبت شد. مسائل منتشر شده مطالعه تیمز ۲۰۱۹، شامل ۱۰ سوال است که در نتایج بین‌المللی تیمز [۹] ارائه شده است.

برای بررسی محتوایی مسائل از حوزه‌های موضوعی ریاضی پایه چهارم مطالعه تیمز استفاده شده است که شامل حوزه موضوعی اعداد (درک ارزش مکانی، نمایش اعداد و روابط عددی)، حوزه موضوعی اشکال هندسی و اندازه‌گیری (ویژگی اشکال هندسی، زاویه، مساحت و حجم) و حوزه موضوعی کار با داده‌ها (جمع‌آوری، تفسیر و نمایش داده‌ها به اشکال مختلف) است [۵]. همچنین حیطه‌های شناختی معرفی شده توسط

---

۱ Chen
۲ Utomo
۳ Rodríguez

مطالعات تیمز، مشخص می‌کند که برای حل یک سوال به چه فرآیندهای شناختی نیاز داریم و در سه سطح دانستن، به کار بستن و استدلال مطرح می‌شود که به ترتیب سطح درک شناختی بالاتری را نیاز دارد. بنابراین در پژوهش حاضر حوزه موضوعی و حیطه شناختی هر مسئله نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

۳. یافته‌های پژوهش

سوال پژوهش: نتایج به‌دست آمده در حل نمونه سوالات منتشرشده ریاضی پایه چهارم در مطالعه تیمز ۲۰۱۹ در مقایسه با مطالعات تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ چگونه است؟

در ابتدا برای پاسخ به سوال پژوهش، مسائل منتشر شده مطالعه تیمز ۲۰۱۹ مشخص گردید و سپس از میان مسائل منتشر شده مطالعات تیمز ۲۰۱۵ و ۲۰۱۱ نمونه‌های مشابه به آن (از نظر مفهوم مورد پرسش، حوزه موضوعی و فرآیندهای حل سوال) تعیین شد. سپس میانگین درصد پاسخ درست بین‌المللی و میانگین درصد پاسخ درست ایران و همچنین تفاضل میانگین‌ها، برای هر سوال معین شد. در جدول۱ علاوه بر موارد ذکر شده، حیطه شناختی هر سوال نیز ارائه شده است.

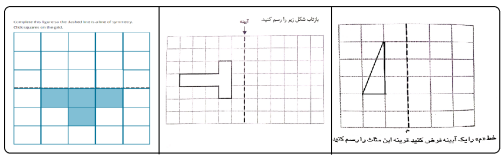
جدول ۱: مقایسه سوالات منتشر شده مطالعات تیمز ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ از لحاظ میانگین درصد پاسخ درست، حیطه شناختی و حوزه موضوعی

حوزه موضوعی	مطالعه تیمز ۲۰۱۱			مطالعه تیمز ۲۰۱۵			مطالعه تیمز ۲۰۱۹			مفهوم مورد سوال	شماره
	تفاضل میانگین	میانگین بین‌المللی	میانگین ایران	تفاضل میانگین	میانگین بین‌المللی	میانگین ایران	تفاضل میانگین	میانگین بین‌المللی	میانگین ایران		
کار با داده	۱۹	۷۳	۵۴	۲۱	۷۴	۵۳	۱۲	۸۱	۶۹	رسم نمودار ستونی	۱
	به کار بستن			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
هندسه و اندازه‌گیری	۲۴	۵۳	۲۹	۲۶	۷۷	۵۱	۲	۷۰	۶۸	رسم تقارن	۲
	به کار بستن			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
کار با داده	۹	۷۷	۶۸	۱۴	۸۵	۷۱	۱۸	۶۸	۵۰	پیدا کردن نقطه از روی نمودار	۳
	دانستن			به کار بستن			دانستن			حیطه شناختی	
اعداد	۹	۷۳	۶۴	۱۷	۵۶	۳۹	۲۰	۵۳	۳۳	انتخاب عبارت صحیح برای چهار عمل اصلی	۴
	به کار بستن			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
اعداد	۳	۲۳	۲۰	۱۴	۳۶	۲۲	۶	۴۷	۴۱	جمع و تفریق کسرها و اعداد اعشاری	۵
	دانستن			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
کار با داده	۳۵	۵۴	۱۹	–	–	–	۱۳	۶۱	۴۸	نمودار تصویری	۶
	دانستن			–			استدلال			حیطه شناختی	
هندسه و اندازه‌گیری	۵	۳۰	۲۵	۹	۴۰	۳۱	۱۱	۲۱	۱۱	مساحت اشکال با مقیاس تصویری	۷
	به کار بستن			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
هندسه و اندازه‌گیری	۱۵	۶۸	۵۳	۳۶	۵۸	۲۲	۲۳	۲۷	۴	اشکال سه بعدی	۸
	دانستن			دانستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
کار با داده	–	–	–	۲۱	۷۴	۵۳	۲۳	۳۴	۱۱	مقیاس‌بندی و نام‌گذاری نمودار	۹
	–			به کار بستن			به کار بستن			حیطه شناختی	
اعداد	۱۹	۴۴	۲۵	۲۵	۵۵	۳۰	۱۲	۲۴	۱۲	مسئله کلامی تقسیم	۱۰
	به کار بستن			به کار بستن			استدلال			حیطه شناختی	
۱۵ /۳	۵۵	۳۹ /۷	۲۰ /۴	۶۱ /۷	۴۱ /۳	۱۳ /۹	۴۸ /۶	۳۴/۷		میانگین	

همانطور که در جدول۱ قابل مشاهده است، مسائل بررسی شده، از حوزه‌های موضوعی متفاوت و مفاهیم متعددی برخوردار هستند. عملکرد دانش‌آموزان در سوال ۱ که هدف آن ترسیم نمودار ستونی به کمک داده‌های درون جدول است، در سال ۲۰۱۹ از بقیه ادوار بهتر بوده است. در سال ۲۰۱۵ تفاضل میانگین درصد پاسخ درست، ۲۱ بوده که بیشتر از سال ۲۰۱۱ است. هر سه این سوالات در حیطه شناختی به‌کار بستن قرار دارند.

در سوال ۲ که در حوزه محتوایی هندسه و اندازه‌گیری قرار دارد، رسم شکل بر اساس خط تقارن، مفهوم مورد پرسش است که پیشرفت دانش‌آموزان در حل این مسئله به نسبت سال‌های ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ به وضوح مشاهده می‌شود. هر سه این مسائل از حیطه شناختی به کار بستن هستند اما باید توجه داشت که ممکن است عملکرد بهتر در نتیجه مواجه شدن با سوالی ساده‌تر باشد. در شکل۱ به مسائل تقارن مطرح شده در این سه مطالعه اشاره شده است.

همانطور که در شکل۱ مشاهده می‌شود هر سه این مسائل رسم شکل قرینه بر اساس خط تقارن را مورد پرسش قرار می‌دهند، اما شکل ارائه شده در مطالعه تیمز ۲۰۱۵ می‌تواند برای دانش‌آموزان چالش‌برانگیزتر باشد و این موضوع در نتایج به‌دست آمده هم مشهود است. هر چند که این موضوع تنها به عنوان یکی از دلایل تفاوت در عملکردها می‌تواند مطرح شود.



شکل ۱: سوال رسم تقارن مطالعات تیمز ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ (به ترتیب از راست به چپ)

بر اساس جدول۱، در سوال سوم با مضمون یافتن یک نقطه از روی نمودار، بهترین عملکرد در تیمز ۲۰۱۱ رقم خورده است و در تیمز ۲۰۱۹ تفاضل میانگین‌ها بیشترین مقدار را داشته است. باید توجه داشت که سوال مطرح شده در تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۹ از حیطه شناختی دانستن و سوال تیمز ۲۰۱۵ از حیطه به کار بستن بوده‌اند اما با این حال در سال ۲۰۱۵ نتیجه بهتری از سال ۲۰۱۹ به دست آمده است.
سوال ۴ با طرح مسئله‌ای کلامی در حوزه چهار عمل اصلی، انتخاب عبارت صحیح که پاسخ مسئله به کمک آن به دست می‌آید را از دانش‌آموزان می‌خواهد. در هر دوره یک سوال از حیطه شناختی به کار بستن در این خصوص مطرح گردیده است که هر دوره، نتایج کسب شده نسبت به دوره قبل افت داشته است. عملکرد دانش‌آموزان در سال ۲۰۱۱ مطلوب‌تر بوده است اما همچنان پایین‌تر از میانگین بین‌المللی قرار دارد.
در سوال ۵، مسئله‌ای در خصوص جمع و تفریق اعداد اعشاری و کسری مطرح شده است که در سال ۲۰۱۱ در حیطه شناختی دانستن و در دوره دیگر در حیطه شناختی به کار بستن قرار داشته است. تفاضل میانگین در مطالعه تیمز ۲۰۱۵ در این سوال ۱۴ بوده، در حالی که در دوره بعد از آن، تفاضل کاهش یافته و به ۶ رسیده است که این امر امیدوارکننده است.
در سوال ۶، مفهوم مورد پرسش، نمودار تصویری بوده است که در حوزه موضوعی کار با داده قرار دارد. از میان مسائل منتشر شده تیمز ۲۰۱۵، نمونه‌ای از این موضوع یافت نشد اما در مطالعه‌های تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۹ دو نمونه از این مسائل وجود داشت که اولی در حیطه شناختی دانستن و دیگری در حیطه شناختی استدلال بود. پیشرفت چشمگیر دانش‌آموزان در حل این نمونه سوالات، به نسبت سال ۲۰۱۱ و با توجه به بالاتر بودن سطح شناختی سوال، جالب توجه است.
سوال۷، در خصوص مساحت اشکال و بیان کردن این مساحت بر اساس واحدهای تصویری دیگر (مانند مربع‌های واحد) است. مسائل مطرح شده در هر سه دوره از حیطه شناختی به کار بستن بوده است ولی نتایج به دست آمده در سال ۲۰۱۱ از سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ مطلوب‌تر بوده و عملکرد دانش‌آموزان در آخرین مطالعه انجام شده پایین‌تر آمده است.
سوال۸، در حوزه موضوعی هندسه و اندازه‌گیری و در مورد اشکال سه‌بعدی است. تفاضل میانگین‌ها از سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۹ به ترتیب برابر با ۱۵، ۳۶ و ۲۳ بوده است. سوالات مطرح شده در سال‌های ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ در حیطه شناختی دانستن و سوال سال ۲۰۱۹ در حیطه شناختی به کار بستن قرار دارد بنابراین به وضوح می‌توان مشاهده کرد که عملکرد دانش‌آموزان در حل این سوال به‌نسبت سال ۲۰۱۵ پیشرفت خوبی داشته است.
در سوال۹، از دانش‌آموزان خواسته شده است تا برای نمودارهای داده شده عنوان مناسب و یا مقیاس‌بندی مناسب بنویسند. از این نمونه سوال، در میان مسائل منتشرشده مطالعه تیمز ۲۰۱۱، مسئله‌ای یافت نشد. ولی در هر دو دوره دیگر، مسائلی در حیطه شناختی به کار بستن مطرح شده که نتیجه به دست آمده چندان تفاوت چشم‌گیری در عملکرد را نشان نمی‌دهد. در هر دو دوره اخیر، در این سوال میانگین دانش‌آموزان ما حدود ۲۲ واحد از میانگین بین‌المللی پایین‌تر بوده است.
آخرین سوال منتشر شده در مطالعه تیمز ۲۰۱۹، یک مسئله کلامی است که مفهوم تقسیم را مورد سوال قرار می‌دهد. نتایج به‌دست آمده نشان از عملکرد خوب و رو به رشد دانش‌آموزان، به‌خصوص در سال ۲۰۱۹ دارد زیرا مسئله طرح شده در این مطالعه، در حیطه شناختی استدلال بوده است در حالی‌که در مسئله دیگر در حیطه شناختی به کار بستن قرار داشته‌اند ولی با این‌وجود، کمترین تفاضل میانگین در سال ۲۰۱۹ رقم خورده است که تفاوت چشمگیری با نتایج تیمز ۲۰۱۵ دارد. هرچند عملکرد دانش‌آموزان در سال ۲۰۱۱ نیز از سال ۲۰۱۵ بالاتر بوده است.
در نهایت با بررسی کلی، می‌توان دریافت که در خصوص مسائل بررسی شده، عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در مطالعه تیمز ۲۰۱۹ از ادوار گذشته بهتر بوده است و تفاضل میانگین درصد پاسخ‌های درست آن‌ها از میانگین بین‌المللی، برابر با ۱۳/۹ بوده است و این عدد در سال ۲۰۱۵ برابر با ۲۰/۴ و در سال ۲۰۱۱، عدد ۱۵/۳ بوده است. البته باید توجه داشت که این میانگین صرفا بر اساس مسائل بررسی شده به دست‌آمده است و ممکن است با بررسی تمام مسائل، نتایج تغییر کند.

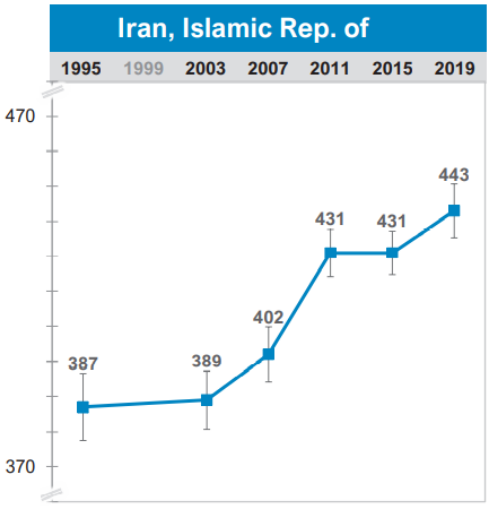
۴. بحث و نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش مقایسه عملکرد دانش‌آموزان پایه چهارم در مطالعات تیمز ۲۰۱۱، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ با محوریت مسائل منتشر شده مطالعه تیمز ۲۰۱۹ است. این مسائل منتشر شده در حوزه‌های موضوعی اعداد، هندسه و اندازه‌گیری و اعداد و در حیطه‌های شناختی دانستن، به کار بستن و استدلال مطرح شده‌اند. با بررسی این مسائل، مشخص شد که به‌طور کلی عملکرد دانش‌آموزان در حل این نوع از مسائل در سال ۲۰۱۹ به نسبت ادوار گذشته بهبود یافته است و فاصله کمتری از میانگین بین‌المللی داشته است. البته این موضوع در مورد تمام مسائل صدق نمی‌کند و در بعضی حوزه‌ها مانند مساحت اشکال یا پیدا کردن عبارت مناسب برای مسائل کلامی، در مطالعات گذشته نتایج بهتری به ثبت رسیده است.

در خصوص مطالعه تیمز ۲۰۱۵ باید به این نکته توجه داشت که کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی ایران، از چند سال قبل از آن دچار تغییر شده بودند و در این مطالعه برای اولین بار، دانش‌آموزانی مورد سنجش قرار می‌گرفتند که با کتب درسی جدید آموزش دیده بودند. با این‌حال، نظر به این‌که معلمان و دست‌اندرکاران آموزشی نیز اولین تجربه‌های تدریس خود با کتب جدیدالتالیف را سپری می‌کردند، می‌توان علت افزایش تفاضل میانگین‌ها در این دوره را در چنین موضوعی جست‌وجو کرد. بنابراین مقایسه نتایج تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۹ جهت ارزیابی کتب درسی جدید و مقایسه آن با رویکرد سابق، منطقی‌تر به نظر می‌رسد، چرا که برای ارزیابی تغییرات، نیاز به گذشت زمان وجود دارد. با توجه به این موضوع، تفاضل میانگین درصد پاسخ‌های درست در سال ۲۰۱۱ برابر با ۱۵/۳ و در سال ۲۰۱۹ برابر با ۱۳/۹ بوده است که حاکی از پیشرفتی، هر چند اندک، در پاسخ‌گویی به مسائل مورد بررسی بوده است.

یک از نکاتی که باید به آن توجه داشت این است که در هیچ یک از این مسائل و در هیچ‌کدام از مطالعات، میانگین درصد پاسخ‌های درست ایران، بالاتر از میانگین بین‌المللی نبوده است و این موضوع نشان از این دارد که صحبت در خصوص پیشرفت یا پسرفت در میان این سه مطالعه، فقط در خصوص نزدیک شدن به میانگین بین‌المللی است که قطعا این موضوع مطلوب نهایی سیستم آموزشی کشور ما نیست.

نمرات نهایی کسب شده در مطالعات تیمز و رتبه ایران در میان سایر کشورها نیز بدین صورت است که در مطالعه تیمز ۲۰۱۹ میانگین نمرات ایران در ریاضی پایه چهارم ۴۴۳ بوده است که از میانگین بین‌المللی (۵۰۰)، ۵۷ واحد فاصله دارد. در این مطالعه ایران در میان ۵۹ کشور، رتبه ۵۰ را کسب کرده است. در مطالعه تیمز ۲۰۱۵، میانگین نمرات ایران ۴۳۱ بوده که از میانگین بین‌المللی (۵۰۰)، ۶۹ واحد فاصله دارد. در این مطالعه از میان ۴۹ کشور شرکت‌کننده، ایران رتبه ۴۲ را در ریاضی پایه چهارم به‌دست آورده است. در مطالعه تیمز ۲۰۱۱ نیز میانگین نمرات ایران ۴۳۱ بوده است که از میانگین بین‌المللی (۵۰۰)، ۶۹ واحد فاصله دارد و از میان ۵۰ کشور در جایگاه ۴۳ قرار گرفته است. بنابراین نتایج کلی به‌دست آمده نیز این موضوع را تایید می‌کنند که در آخرین مطالعه تیمز انجام شده، نتایج بهتری برای ایران به دست آمده است. در شکل ۲ نمودار روند میانگین پیشرفت ریاضی ایران در سال‌های برگزاری مطالعه تیمز ارائه شده است.



شکل ۲: نمودار روند میانگین پیشرفت ریاضی ایران در سال‌های برگزاری مطالعه تیمز [۵]

شاید بتوان مهم‌ترین تغییری که در سیستم آموزشی کشورمان در بازه میان سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۹ اتفاق افتاده است را تغییر کتب درسی و رویکرد ارائه مباحث آموزشی در این کتب دانست. بنابراین می‌توان یکی از عوامل پیشرفت را این موضوع در نظر گرفت اما نباید از این نکته غافل شد که نتایج به‌دست آمده به‌طور کلی نتایج مطلوبی نیستند و با اهداف نهایی برنامه آموزشی و سند تحول بنیادین فاصله زیادی دارد. لذا برای یافتن علل این عملکرد نامطلوب و سرعت پایین پیشرفت در حوزه ریاضیات، نیاز به پژوهش‌های بیشتری احساس می‌شود. رویکردهای مرسوم آموزشی، عملکرد معلمان، نقش والدین و مسئولان مدارس، کتاب‌های درسی، نقش آزمون‌های ارزشیابی و آزمون‌های سراسری و شناسایی مشکلات مفهومی دانش‌آموزان در مباحث مختلف ریاضیات، موضوعاتی هستند که می‌توانند با محوریت مطالعات تیمز مورد بررسی قرار بگیرند تا یک گام به برطرف کردن موانع کسب نتیجه مطلوب در این مطالعات نزدیک‌تر شویم.

مراجع

[1] Gowers, T. (2000). *The importance of mathematics*. Springer-Verlag.
[2] Herranen, J., Kousa, P., Fooladi, E., & Aksela, M. (2019). Inquiry as a context-based practice–a case study of pre-service teachers' beliefs and implementation of inquiry in context-based science teaching. International Journal of Science Education, 41(14), 1977-1998.

[3] Phillips, C. J. (2014). *The new math*. University of Chicago Press.
[4] Schürmann, U. (2018). The separation of mathematics from reality in scientific and educational discourse. In *The philosophy of mathematics education today* (pp. 241-251). Springer, Cham.
[5] *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/
[۶] بخشعلی‌زاده، شهرناز و کاشفی، معصومه (۱۳۹۶). *سوالات قابل انتشار تیمز ۲۰۱۵ ریاضی و علوم چهارم ابتدایی*، چاپ اول، تهران: موسسه فرهنگی مدرسه برهان.
[7] TIMSS 2011 International Results in Mathematics and Science. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website :https://timssandpirls.bc.edu/
[8] TIMSS 2015 International Results in Mathematics and Science. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timssandpirls.bc.edu/
[9] TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timssandpirls.bc.edu/
[10] Chen, X. (2022). The effects of individual-and class-level achievement on attitudes towards mathematics: An analysis of Hong Kong students using TIMSS 2019. *Studies in Educational Evaluation*, *72*, 101-113.
[11] Utomo, D. P. (2021). An analysis of the statistical literacy of middle school students in solving TIMSS problems. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, *9*(2).
[12] Mejía-Rodríguez, A. M., Luyten, H., & Meelissen, M. R. (2021). Gender differences in mathematics self-concept across the world: An exploration of student and parent data of TIMSS 2015. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(6), 1229-1250.
[۱۳] افراسیابی، زینب خاتون ، موسی پور، نعمت الله ، صفرنواده، مریم (۱۳۹۹). تبیین اهمیت عملکرد دبیران ریاضی به منظور پیشرفت دانش‌آموزان پایه هشتم در آزمون‌های بین‌المللی تیمز، *مجله سبک زندگی اسلامی با محوریت سلامت*، ۴(۲)، ۲۵۳-۲۶۴.
[۱۴] کسیانی، نازیلا و زارعی، حیدرعلی (۱۳۹۸). رابطه سواد خواندن با عملکرد ریاضی و علوم در دانش آموزان دختر در آزمون تیمز، *مجله علوم روانشناختی*، ۱۸(۷۴)، ۲۵۷-۲۶۴.
[۱۵] پژمان، حمیدرضا و گویا، زهرا (۱۳۹۷). تیمز؛ آینه‌ای برای دیدن خود. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۲۹، ۱۴-۴.
[16] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/
[۱۷] بخشعلی‌زاده، شهرناز (۱۳۹۳). مجموعه سوال‌های علوم و ریاضیات تیمز پایه چهارم ابتدایی: به همراه کلید و راهنمای تصحیح و نمره‌گذاری سوال‌ها، چاپ اول، تهران: موسسه فرهنگی مدرسه برهان.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–253، صص. ۴۹۸–۵۰۲

چگونه توانستم با استفاده از فضای مجازی و روش های نوین دانش اموزان پایه هفتم به سمت درستی هدایت کنم

سید صادق غلامی *[آ]، بلال امینی [ب]

[آ] . استاد یار،گروه غلوم پایه ، پردیس شهید رجایی ارومیه ، دانشگاه فرهنگیان ، ایران
[ب] . مهارت اموز (دبیر ریاضی میاندواب) ، پردیس شهید رجایی ارومیه ، دانشگاه فرهنگیان ، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
آموزش مجازي ۱
رسانه هاي الکترونیکی ۲
آموزش ریاضی ۳

2020 MSC:
97B50
97U30
97D80

چکیده

بررسی ها و پزوهش ها نشان می دهد که آموزش از طریق رسانه هاي الکترونیکی یک نیاز در جهت گسترش افزایش بهره وري در یادگیري است با ظهور فناوري هاي جدیدي همچون رایانه، اینترنت، شبکه هاي اجتماعی و...، جوامع بشري با چالش هاي جدید و جدي در همه عرصه هاي آموزشی ، فرهنگی ،اجتماعی ، سیاسی، رو به رو شده اند.که باتوجه به پیشرفت هاي چشمگیر در عرصه هاي علمی و فناوري و دسترسی میلیون ها کاربر در تمام جهان به رسانه هاي الکترونیکی مجازي باعث شده است که این رسانه ها به دلیل کارکردها و تعاملات گسترده خود مورد توجه افراد زیادي قرار بگیرند و با گسترش مرزهاي دانش و فناوري و همچنین افزایش تقاضاي آموزشی، شیوه هاي سنتی، پاسخگوي نیازهاي روزافزون بشر نمی باشد و به طور حتم آموزش هاي مجازي و یادگیري هاي الکترونیکی با تمام مزایا و معایبشان، می توانند پاسخگوي این نیازها باشند.لذا با توجه به اهمیت موضوع ما در کلاس درس روی ۷۲ نفر از دانش اموزان ۱۳ ابان شهرستان میاندواب این موضوع را مورد بررسی قرا ر دادیم تا با گسترش دید نسبت به آموزش مجازي و یادگیري هاي الکترونیکی، مزایا و محدودیت ها و همچنین فرصت ها و چالش هاي این نوع آموزش ها در ایام شیوع ویروس کرونا پرداخته شود.

۱. مقدمه

گام های بلند ما در پی معلمانی که بهره ای از علم داشتند، قدم زدن در راهروهای باریک کتابخانه ها و حس کردن بوی کهنگی کتابها و سؤالات مکرر از هرکسی که میدانستیم حرفی برای گفتن دارد، در خاطرات دور ما نقش بسته اند. آن سالها گذشته اند و ما هنوز خاطرات فیلمهای کوتاه اما پر از جذابیت را که گاهگاهی معلم مدرسه برای ما به تصویر میکشید؛ به خاطر داریم. در آن روزها آموختنیهای ما پر بود از نگاههای مستقیم و حسهای ملموس که در جریان یادگیری داشتیم. اینها همه گذشته اند اما آموزش و یاد دادن، با تفاوت چشمگیری با گذشته، هنوز پابرجاست. رشد سریع تکنولوژی و به ویژه پیشرفت روزافزون در حوزههای ارتباطی و اینترنت باعث تحولات پرشتاب در جوامع بشری گردیده و با تمام جنبه های زندگی از مدرسه تا محل کار، تلفیق شده است. این فناوری، نقش مهمی را در زندگی کودکان و نوجوانان ایفا میکند و این نقش، به سرعت در زندگی آنان پررنگتر میشود. علیرغم جنبه های مثبت از قبیل جنبه های آموزشی و خدمات ارتباطی، جنبه های منفی زیادی نیز از قبیل استفاده ی غیرمعقول که باعث مضراتی مانند مشکلات بینایی، صدمات سیستم اسکلتی، چاقی و مشکلاتی در ارتباط با خانواده و اعتیاد الکترونیکی میشود؛ وجود دارد. از اوایل دهه ی ۹۰ میلادی پژوهش ها و بررسی های بسیاری در زمینه ی روانشناسی فضای مجازی و تأثیرآن بر سلامت و رفتار نوجوانان انجام پذیرفته است. امروزه فضای مجازی به ویژه در کشورهای درحال توسعه و از جمله کشورهای اسلامی، یک

*بلال امینی
پست الکترونیک: rgolamie@yahoo.com (سید صادق غلامی)، rgolamie@yahoo.com (بلال امینی)

دغدغه ی بسیار مهم است. آگاهی از پیامدهای آن و در کنار آن در نظر گرفتن راهبردهای مناسب برای استفاده ی درست و پیشگیری از پیامدهای منفی آن اهمیت اساسی دارد. مدارس وجمعیت دانش آموزی یکی از وسیعترین طیف های مراجعین فضای مجازی هستند و به طبع در معرض آثار مثبت و منفی آن قرار دارند. لذا بررسی و تحلیل های علمی توسط صاحب نظران در این مقوله بسیار انجام گرفته است که به برخی از آنها اشاره میکنیم. کشور ما از نظر بهره مندی از فضای مجازی، بر اساس طبقه بندی اتحادیه ی جهانی، جزء کشورهای متوسط به شمار میآید و سی و پنج درصد از استفاده کنندگان فضای مجازی را قشر جوان و نوجوان تشکیل میدهند و از آنجا که این فناوری در همه ی عرصه های زندگی دانش آموزان ما پا گذاشته؛ مهم است که بدانیم چگونه این تکنولوژی به خصوص با روند روبه افزایش استفاده از آن در شرایط کنونی، میتواند رشد و تکامل نوجوانان را بهبود ببخشد؟ در این پژوهش، سعی بر آن است که مزایا و معایب ،مشکلات تدریس فضای مجازی و اگاه سازی از استفاده از فضای مجازی را توسط دانش آموزان، بررسی کنیم و به روشهای صحیح برخورد والدین و معلمان در رابطه با مشکلات موجود در این مقوله بپردازیم و راهکارهای اصولی مواجهه با این موضوع را ارائه دهیم.

۲. اهمیت ضرورت مساله و اهداف

هدف آموزش مجازي، تبدیل آموزش سنتی به مجازي نیست، بلکه آموزش هاي تخصصی با شیوه هاي مدرن است. شعار آموزش مجازي آموزش براي همه کس و براي همه ي سنین است. باید دید امکان ارائه ي چه چیزهایی از طریق آموزش سنتی وجود ندارد که آنها را می توان از طریق آموزش مجازي ارائه کرد. باید از امکانات در جهت بهبود، نه جایگزین کردن آنها استفاده کنیم. بعضی از کشورها که مشکل کمبود فراگیردارند. آموزش مجازي را جایگزین آموزش سنتی کرده اند؛ چون مقرون به صرفه نخواهد بود براي درسی با دو نفر در یک منطقه کلاس دایر کنند و معلم بفرستند. اما در ایران ما مشکل تراکم فراگیرداریم و با اعزام یک معلم پروازي به دورترین نقطه، امکان تشکیل کلاس با ظرفیت کامل هست. پس ما نباید آموزش مجازي در ایران را از روي آموزش مجازي کشورهاي غربی کپی برداري کنیم، چون هدف ما متفاوت از هدف آنهاست. هدف آموزش مجازي در ایران باید روي دروس و رشته هایی متمرکز شود که امکاناتمان کمتر است و با سیستم آموزش سنتی ما جوابگو نیست. برنامه هاي توسعه ي منابع انسانی یکی از مهم ترین چالش هاي دولت ها در استقرار نظام هاي جامع مبتنی بر فناوري ارتباطات و اطلاعات است. همان گونه که فناوري ارتباطات و اطلاعات مکمل بازآفرینی سازمانها در بسیاري از فرآیندهاي کاري روزمره ي خود بوده است که نمونه هاي آن شامل بانکداري الکترونیک، تجارت الکترونیک، پست الکترونیک، دولت الکترونیک و... می شود . حوزه ي یادگیري الکترونیک یا آموزش الکترونیک. نوید بخش اجرایی شدن آرمان هاي به ظاهر دور از دسترس تا دو دهه قبل است. حذف محدودیت زمان، مکان و سن آموزش گیرنده که به عنوان آرمان هاي دور دست مطرح بوده است. امروزه دیگر محدودیت هاي بزرگی به نظر نمی رسند. از سوي دیگر نیازهاي گسترده ي مهارتی جوامع دانش محور و مبتنی بر فناوري اطلاعات با ادامه ي استفاده از روش هاي سنتی نظام آموزشی قابل پاسخگویی نیست. اگرچه نظام آموزش سنتی نیز داراي ویژگی هایی است که نادیده انگاشتن آن ویژگی هاي اثربخشی یادگیري را می کاهد و عامل بروز ناهنجاري هاي بسیاري می شود (کیا)

یادگیري الکترونیکی، یادگیري مبتنی بر وب، یادگیري مبتنی بر کامپیوتر و یادگیري مجازي است و شامل دریافت اطلاعات از اینترنت و انواع چند رسانه اي ها مانند رسانه هاي دیداري شنیداري، ماهواره ،ضبط صوت، تلویزیون و دیسک هاي فشرده می شود.عبارات بیان شده براي توصیف یادگیري در محیط هایی است که فراگیران و معلمان از لحاظ فیزیکی در یک مکان نیستند (سراجی و عطاران)، در محیط یادگیري الکترونیکی از سه نوع تعامل یاد می شود که عبارتند از تعامل فراگیر – مربی، فراگیر – فراگیر و فراگیر – محتوا، در کنار آن سه نوع دیگر نیز مطرح می شود؛ مربی –مربی، مربی –محتوا و محتوا– محتوا در یادگیري الکترونیکی نقش معلم از یک انتقال دهنده اطلاعات به یک تسهیل کننده یادگیري تغییر یافته است. معلم در یادگیري از دور باید در رشته تخصصی خود متخصص شود ودر زمینه راهبردهاي اثربخش آموزش از دور آموزش ببیند. آموزش از دور ناهمزمان است. زیرا شامل خدمات ارائه شده در زمان و مکان متفاوت از کسانی است که آن را ساخته اند. مربی در آموزش از دور یک تسهیل کننده است، که شرایط مناسب براي یادگیري فعال را براي فراگیر تضمین می کند. براي فراگیران در برنامه هاي آموزش از دور در نظر گرفتن تعامل با معلمان خیلی مهم است صرف نظر از استقلال، خودانگیختگی و تعامل با مواد یادگیري، فراگیران در برنامه هاي آموزش از دور در مورد کاربرد دانش کسب شده آسیب پذیر هستند. در این مورد سهم معلم ارزشمند است زیرا مانع تبدیل استقلال به انزوا می شود. نقش معلم در آموزش از دور دو بعدي است: آموزش و مشاوره، که بطور برابر براي فردي کردن مواد یادگیري مهم است و به فراگیران کمک خواهد کرد آن را درك کنند. درنتیجه، حمایت باید براي همه فراگیران فراهم شود و نه فقط براي آنهایی که با مشکل مواجهند. دروس مجازي نیز معمولا آفلاین اجرا می شوند؛ بنابراین لازم است تا حد ممکن بتوانند بدون نیاز به معلم محتواي آموزشی مورد نظر را به فراگیران منتقل کنند. براي رسیدن به این مطلوبه رسانه هاي مختلف از جمله متن، صدا، تصویر، پویا نمائی و فیلم در خدمت تولید کنندگان دروس مجازي است. در تهیه دروس مجازي با در نظر گرفتن پهناي باند و سخت افزار مناسب در طرف سرور، طراحی دروس مجازي به نوعی صورت پذیرد که قابلیت هاي زیر بدست آید: ۱- ارسال دروس از طرف سرور و دریافت آن در طرف فراگیر به سرعت و در طی زمانی قابل تحمل صورت پذیرد. ۲- استفاده از رسانه ها به گونه اي باشد که در انتقال مفاهیم، مکمل یکدیگر باشند و از ارائه مطالب به طور موازي از طریق دو رسته متفاوت پرهیز شود. ۳- در ساختار دروس مجازي به عناصر کامل کننده محتوا از جمله تمرین، مثال، خودآزمایی، کوئیز،تحقیق و پژوهش و کار گروهی بین فراگیران توجه شود. ۴- از گرافیک و رسانه هاي مختلف در جهت افزایش تعامل بین فراگیر و محتواي دروس استفاده شود. ۵- با استفاده از عناصر مناسب گرافیکی بر جذابیت صفحات افزوده شود. در مجموع می توان گفت که محتواي دوره هاي الکترونیکی باید داراي چهار خصوصیت باشد علمی بودن محتوا، معمار محتوا،استفاده مناسب از چندرسانه اي ها، توجه به جنبه هاي فنی (سراجی)

بهره گيري از فضاي مجازي در آموزش به منظور كاهش شكاف هاي آموزشي و خاتمه دادن به نابرابري هاي كمي و كيفي آموزش در شهر و روستا،ميان زنان و مردان ، ثروتمندان و فقرا، بزرگسالان و نوجوانان و... نيازمند مدل هماهنگ كننده اي است كه بتواند همه ي كوشش ها را به نحوي موثر مديريت كنند. مدلي كه گسترش آموزش هاي عمومي، تنوع آموزش عالي توسعه آموزش رسمي، پرورش حرفه اي معلمان و ... را در ارتباط با يكديگر سازماندهي مي كند. آشنايي و سازگاري معلمان با فناوري آموزشي در فضاي مجازي و بهره برداري از آن نيازمند آموزش است. مهمتر از آموزش، نحوه استفاده از اين فناوري هاي آموزش و روش سازگاري اين ابزارها با هدف، برنامه ها و محتواي آموزشي است كه بسيار ضروري است. چنان چه معلمان از به كارگيري فناوري هاي آموزشي در فضاي مجازي احساس رضايت كنند و از راه هاي گوناگون حمايت شوند كه آموزش خود را به كمک فناوري هاي نو اثر بخش سازند، به مهم . ترين عامل اشاعه ي فناوري در آموزش و پرورش تبديل خواهند شد (طورانی و رستمی، ۱۳۹۷:۷) قابليت هاي بستر فضاي مجازي براي تعليم و تربيت كمک مي كنند تا ساختارهاي خود را همگام با تحولات زمان توسعه دهيم؛ و به گسترش آموزش، تاكيد بر آموزش مداوم، يادگيري مادالعمر و تاثير گذار بپردازيم. كيفيت آموزش ها را ارتقا بخشيم و بر نشاط و خودانگيزي خودآموزان بيفزاييم، آموزش را به هنگام، ارزان، اثر بخش، انعطاف پذير، سريع و كاربردي و محيطي مناسب براي . سازماندهي و توليد فناوري فكري جديد فراهم كنيم (طورانی و رستمی)،

جدول ۱: پرسش نامه۱

میزان سطح تحصیلات	۱. کمتر از دیپلم	۲. دیپلم تا لیسانس	۳. بالاتر از لیسانس
میزان آشنایی با مهارتهای پایه ی فناوری اطلاعات و ارتباطات	۱. ضعیف .	۲ متوسط	۳ . خوب
ترجیح میدهید کلاسهای فرزندتان به صورت حضوری باشد یا مجازی؟	۱ . حضوری	۲. مجازی	
میزان رضایت از حضور فرزندتان در فضای مجازی	۱. مخالفم	۲ . موفقم	
میزان رضایت از وضعیت تحصیلی فرزندتان	۱. راضی	۲ . اراضی	
میزان آگاهی از نوع استفادهی فرزندتان از فضای مجازی	۱. آ ندارم	۲ . تا حدودی .	۳ کاملاً
آیا زمان حضور فرزندتان را در فضای مجازی محدود میکنید؟	۱. بله	۲. خیر	

۳. تجزیه و تحلیل داده های اطلاعاتی به دست آمده پرسش نامه

بر طبق نتایج گردآوری شده مشخص شد تقریباً ۶۰ درصد والدین، در مورد استفادهی فرزندشان از فضای مجازی، آگاهی کافی ندارند و به هیچ وجه نمیتوانند ارتباطات فضای مجازی فرزندانشان را کنترل کنند. بیشتر از ۴۰درصد والدین با مهارت های پایهی فناوری اطلاعات و ارتباطات آشنایی ندارند. بیشتر از ۵۵درصد والدین از اینکه کلاسها بهصورت مجازی برگزار میشوند؛ رضایت ندارند و درمورد پیشرفت تحصیلی و انجام تکالیف فرزندشان نگرانند. ۶۵درصد والدین از نوع استفادهی فرزندشان از فضای مجازی کاملاً بیاطلاعند و روی مدت زمان استفادهی آنها نظارت و کنترلی ندارند. نکتهی بعدی این است که دانشآموزان، درباره فضای مجازی و چگونگی استفاده از این دریای بیکران دانستنیها تجربه کافی نداشته و بدون هیچ پیشزمینهای، فضای مجازی را به خاطر سهولت دسترسی و تنوع مطالب برمیگزینند و از اینکه امکان دارد در معرض چه خطرات و آسیبهایی قرار بگیرند بی اطلاع هستند. پس از مربیان و معلمان دومین فیلتر برای کنترل دانشآموزان، والدین هستند که سطح سواد و آگاهی آنها نسبت به تکنولوژی جدید تاثیر به سزایی در نحوه نظارتشان دارد بنابراین در صورت کافی نبودن آگاهی و سواد رسانهای، ناخواسته فرزندشان را به سمت کسب تجربههای پرخطر و خارج از کنترل میفرستند. موضوع قابل توجه دیگر، نوع دسترسی دانشآموزان به رایانه و شبکههای فضای مجازی میباشد. برای گردآوری دادههای بیشتر در زمینهی شاخصهای کیفی وضع موجود، پرسشنامهای تدوین و در اختیار دانشآموزان قرار داده شد.

جدول ۲: پرسش نامه ۲

پرسشها	یله	خیر
به نظر شما کتاب، بهترین منبع به دست آوردن مطالب جدید است؟		
آیا از ورود به فضای مجازی و استفاده از آن لذت میبرید؟		
آیا کسانی که محدودیتی برای استفاده از فضای مجازی ندارند؛ موفقتر از دیگرانند؟		
آیا دسترسی به فضای مجازی در پیشرفت تحصیلی شما مؤثر است؟		
به نظر شما فضای مجازی بهترین منبع برای پاسخگویی نیازهای علمی شماست؟		
آیا تمایل دارید هنگام کار با رایانه والدین در کنار شما باشند؟		
آیا برای سرگرمی و تفریح، وارد سایتهای مهیج فضای مجازی میشوید؟		
از اینکه کلاسهای شما به صورت غیرحضوری و از طریق فضای مجازی است؛ راضی هستید؟		

تجزیه و تحلیل داده های اطلاعاتی به دست آمده پرسش نامه۲ طبق نظرسنجی بر اساس پرسشنامهی فوق که در اختیار نمونه ی ۷۳ نفرهی دانشآموزان پایه ی سوم مدرسهی ۱۳ آبان آقا قرار گرفت، ۲۱درصد کتاب را منبع کافی و مناسبی برای به دست آوردن مطالب جدید میدانستند.ـ ۵۸درصد موافق برداشتن محدودیت برای استفاده از فضای مجازی و تأثیر آن در بهبود پیشرفت تحصیلی بودند.ـ ۷۴درصد پس از ورود به فضای مجازی به دنبال بازیها، سرگرمی و سایتهای متفرقه میرفتند.ـ ۷۲درصد موافق بودند که بهترین منبع برای پاسخگویی سؤالات درسی و علمی، فضای مجازی است.ـ ۳۹درصد موافق بودند که کلاسها به صورت غیرحضوری و مجازی برگزار شوند.ـ ۸۳درصد مایل بودند که هنگام استفاده از فضای مجازی تنها باشند. از آنجا که نوجوانان و جوانان بخش مهمی از سرمایهی انسانی جامعه را تشکیل میدهند؛ تغییرات اجتماعی ـ فرهنگی این نسل، باعث دگرگونیهای عظیمی در سطوح دیگر جامعه میشود. امروزه فضای مجازی به عنوان یکی از کارآمدترین رسانههای جهانی پا به فضای خانوادهها گذاشته و مدرسه نیز یکی از شاهراههایی است که میتوان این تغییرات را به طور ملموسی در آن مشاهده کرد و نسبت به آن حساس شد. نوجوانان به شدت، شیفتهی ابراز لیاقت و ابراز وجود و شایستگی هستند به همین دلیل، به راههای مختلفی رو میآورند تا اطلاعات و دانستنیهای خود را افزایش دهند و در دنیای مدرن امروزی حرفی برای گفتن داشته باشند و همین عوامل، باعث تضعیف کنترل والدین، اولیا و مربیان دانشآموزان شده است. مطالعات انجام شده نشان میدهد با ورود یک تکنولوژی جدید به جامعه در صورتیکه آمادگی لازم برای پذیرفتن و نحوهی صحیح استفاده از آن وجود نداشته باشد؛ به دلیل عدم آگاهی، حجم بالای تقاضا و سرعت انتشار آن جامعه دچار شوک شده و مضراتی زیادی به دنبال خواهد داشت

۴. نتیجه‌گیری

– امروزه در عصر اطلاعات وارتباطات، ناگزیر به ورود در دهکدهی جهانی هستیم و برای بقا و ماندن در بازار رقابت جهانی، توسعهی آموزش، پیشرفت سطح رفاه و بهداشت و به طور کلی در همهی امور باید به روز و آماده باشیم و تن به سیل هجوم تکنولوژی و اینترنت و فضای مجازی بسپاریم. یکی از حساسترین عرصهها که درگیر علم و دانش تکنولوژی جدید است؛ آموزش و پرورش میباشد که عنصر اساسی و حیاتی آن فرزندانمان هستند. در سال ۲۰۰۲ میلادی در حدود ۵۸۰ میلیون کاربر فضای مجازی شناسایی شده است و این تعداد در سال ۲۰۰۴ میلادی به یک میلیارد نفر افزایش یافته است و سیر صعودی کاربران همچنان در حال افزایش است بنابراین ضروری است که هر فردی خیلی زود بر عملیات فضای مجازی مسلط و توانا گردد و خود را در این زمینه به روز نگه دارد. فضای مجازی مانند هر نوآوری دیگری دگرگونیهای عظیمی را در جنبههای مختلف زندگی به وجود آورده است و ویژگیهای منحصر به فرد آن مانند سهولت دسترسی و هزینهی پایین، باعث استفادهی فراوان از آن شده است اما همین ویژگیها امکان استفادهی نابجا را برای کاربران مخصوصاً کودکان و نوجوانان فراهم میکند. قطعاً دانشآموزان ما در معرض ناهنجاریهای استفادهی نادرست از فضای مجازی هستند و لازم است که والدین، اولیا و مربیان و مسئولین، همه در قبال دانشآموزان این مرز و بوم حس تعهد داشته باشند و با کنترل و نظارت و هدایت درست نوجوانان در این دنیای پرهیاهو آنان را به سمت استفادهی درست از این دریای بیکران و درعین حال، خطرناک ارتباطات سوق دهند و افق روشنی را در برابر دیدگان فرزندانمان که سرمایههای انسانی این مرز و برم هستند بگشایند. ۴-۲ـپیشنهاداتی به نوجوانان فضای مجازی دریای عظیمی از اطلاعات است و با توجه به جاذبهها و تنوعهایی که به همراه دارد؛ بسیاری از شما نوجوانان و جوانان، بخش زیادی از اوقات خود را صرف چرخیدن و گشت و گذار در این دنیا میکنید اما مسلماً تمام این اطلاعات برای شما با ارزش و مفید نیستند و تنها اطلاعات ویژهای از آن به کار یا زندگی شما مرتبط است. بنابراین این پرسش مطرح میشود که آیا متناسب با زمانی که برای استفاده از فضای مجازی صرف میکنید؛ چه مهارت یا دانش مفیدی برای زندگیتان به دست میآورید؟ به زبان سادهتر آیا چیزی که از فضای مجازی میگیرید؛ ارزش زمان و عمری را که از دست میدهید دارد؟ در ادامهی این یادداشت سعی داریم راههایی برای استفادهی سودمندتر از زمان حضور در فضای مجازی را ارائه دهیم.

۱. منظم باشیم. افراد منظم و کسانی که برای زندگی و زمان خود برنامهریزی حساب شده و دقیق دارند؛ اهمیت زمان را بهتر درک میکنند بنابراین بهتر است همواره یک تقویم یا فهرست برای انجام کارهایتان داشته باشید و هر شب قبل از خوابیدن نگاهی به آن بیندازید تا بدانید چقدر از کارهای امروزتان ناتمام مانده است و فردا باید چه کارهایی انجام دهید.

۲.کارهایتان را اولویتبندی کنید. از جمله کارهایی که میتواند زمان حضور شما را در فضای مجازی به زمان مفید تبدیل کند؛ اولویتبندی است وگرنه به محض ورود به فضای مجازی ممکن است به سراغ آن دسته از اطلاعات و سایتهایی بروید که در حال حاضر هیچ ارتباطی به کار اصلی شما ندارد.

۳.فعالیتهایتان را یادداشت کنید. برای اینکه بهتر متوجه شوید چگونه زمان خود را تلف میکنید؛ هر چند وقت یکبار از آنچه هنگام اتصال به شبکه انجام میدهید یادداشتبرداری کنید. این موضوع به شما کمک میکند که در پایان هفته یا ماه متوجه شوید رفتن به کدام سایتهای غیرضروری و یا غیرمرتبط با کارتان برای شما به صورت عادت درآمده است و باعث اتلاف وقت مفید شما میگردد.

۴.علیرغم اینکه فضای مجازی میتواند یک وسیلهی آموزشی و حتی کار مفید باشد؛ اما استفاده از آن امکان دارد با برخی مشکلات نیز همراه باشد. یکی از این مشکلات این است که افراد هنگام استفاده از آن درک درستی از گذر زمان ندارند و به قول خودشان ناگهان متوجه میشوند که ۵ یا ۶ ساعت از وقتشان را از دست دادهاند. گاهی حتی شرایط از این هم بدتر میشود و برخی از افراد از فضای مجازی به عنوان یک وسیلهی سرگرمی یا اتلاف وقت آزاد از آن استفاده میکنند. این موضوع گذشته از داشتن عوارض روحی و جسمی درازمدت برای این اشخاص، سبب بروز مشکلات اجتماعی، اقتصادی و فرهنگی مختلفی میگردد. از این رو آگاهی از روشها یا فنونی که میتواند زمان استفاده و حضور در فضای مجازی را کاهش دهد از اهمیت بسزایی برخوردار است. برخی از این روشها عبارتند از: ـاز خوردن غذا یا تنقلات هنگام استفاده از فضای

مجازی خودداری کنید. وعدههای غذایی خود را همراه با دیگر اعضای خانواده و به صورت رودررو میل کنید. ـبه طور مداوم و پیوسته از فضای مجازی استفاده نکنید. سعی کنید هر یک ساعت به مدت ۱۰-۱۵ دقیقه از پشت سیستم بلند شده و نرمشهای کششی انجام دهید تا دچار چشمدرد و یا درد ناحیهی کتف، کمر، مچ دست و ... نشوید. انجام این کار ممکن است استفادهی مجدد شما را تا ساعتها به تأخیر بیندازد.
- سراغ کتابهایتان بروید. گاهی اوقات اگر در کتابخانهی خانه یا محل تحصیلتان چرخی بزنید؛ متوجه خواهید شد که کتاب یا کتابهایی هست که دوست داریدآنها را بردارید و چند صفحه از آنها را مطالعه کنید و یا چند بیت شعر از یک کتاب شعر بخوانید و به این ترتیب میتوانید یک جانشین موقت برای استفادهی روزانه از فضای مجازی بیابید.
ـتلویزیون تماشا کنید یا فیلم ببینید. هر چند استفادهی بیش از حد از تلویزیون نیز مشکلاتی را به بار آورد اما برای کسانی که بیش از حد از فضای مجازی استفاده میکنند؛ سرگرم شدن به تلویزیون و یا تماشای فیلم میتواند اثرات مخرب کمتری داشته باشد. به عنوان مثال یکی از فواید فیلم و تلویزیون درمقایسه با فضای مجازی این است که امکان استفادهی گروهی از آنها وجود دارد. مثلاً میتوانید یک مسابقه را با هم ببینید و در مورد آن اظهار نظر کنید و به بحث با یکدیگر بپردازید.
ـساعت خود را تنظیم کنید. خود را مقید کنید که هر روز مدت زمان معینی را در فضای مجازی بگذرانید و با شنیدن صدای زنگ ساعت خود، از فضای مجازی خارج شوید.
ـبه دنبال یافتن دوست در فضای حقیقی باشید. بعضی از افراد از فضای مجازی برای یافتن دوستان جدید استفاده میکنند. همواره به یاد داشته باشید که این موضوع در دنیای حقیقی به راحتی امکانپذیر است و با شرکت در فعالیتهای گروهی میتوانید تعداد قابل ملاحظهای از این دوستان پیدا کنید. حسن این کار در این است که شخص مورد نظر را از نزدیک میبینید و رفتار و کردارش را ارزیابی میکنید و در صورت تمایل با او دوست میشوید. به این ترتیب از خطرات دوستیهای فضای مجازی نیز در امان خواهید بود.
ـاستفاده از فضای مجازی را برای خودتان ممنوع کنید. اگر هیچیک از روشها کارساز نشد و دوباره به سمت استفادهی بیرویه از فضای مجازی رفتید، برای مدت یک هفته یا چند روز آن را ترک کنید.

مراجع

[۱] مریم. اسدی، *مطالعه تاثیر استفاده از اینترنت بر رفتار اطلاع یابی - پژوهشی اعضای هیئت علمی رشته های مختلف دانشگاه تهران*، همایش آموزش استفاده کنندگان و توسعه سواد اطلاعاتی در کتابخانه ها، مراکز اطلاع رسانی، ۱۳۸۳.

[۲] حبیب، صبوری خسروشاه، *آموزش و پرورش در عصر جهانی شدن؛ چالش ها و راهبردهای مواجهه با آن* ، ،فصلنامه مطالعات راهبردی سیاست‌گذاری عمومی، ۱۳۸۹.

[۳] علیرضا مرآتی، م، اسلام پناه و م، خمیس آبادی، *ضرورت توجه به تکنولوژی های نوین در آموزش و پرورش*، نخستین کنگره ملی فضای مجازی و آسیب های اجتماعی نوپدید، ۱۳۹۱.

[۴] ف، سراجی و م،عطاران، *یادگیري‌الکترونیکی* ، چاپ سوم. همدان:مرکز نشر دانشگاه بوعلی سینا، ۱۳۹۷.

[۵] ف، سراجی ، *محیط یادگیري‌مجازي‌امکانی براي‌بهبود فرهنگ یادگیري*،راهبرد فرهنگ،سال پنجم، بهار و تابستان ،۱۳۹۱ شماره ۱۷ و ۱۸ .

[۶] ز،طورانی و ز، رستمی، *قابلیت هاي‌بستر فضاي‌مجازي‌براي‌تعلیم و تربیت در آموزش و پرورش*،نهمین همایش انجمن فلسفه تعلیم و تربیت ایران ،فضاي مجازي و فلسفه تربیت.،۱۳۹۷. ۱۸

[۷] ش. رستمی، *قابلیت هاي‌بستر فضاي‌مجازي‌بر تعلیم و تربیت در آموزش و پرورش*، نهمین همایش انجمن فلسفه تعلیم و تربیت ایران،زاهدان،دانشگاه سیتان و بلوچستان. ۱۳۹۷ .

[۸] ع.کیا، *نگاهی به آموزش مجازي*،مطالعات فضای مجازی ،۱۳۸۸،شماره ۲۴ ،صص۸۸-۸۲.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–254، صص. ۵۰۳–۵۰۹

چگونه اضطراب دانش آموزان پایه هشتم را در کلاس درس ریاضی پای تخته و موارد دیگر کاهش دادیم.

سید صادق غلامی *[آ]، فرهاد طاهر[ب]

آ. استاد یار،گروه علوم پایه ، پردیس شهید رجایی ارومیه ، دانشگاه فرهنگیان ، ایران

ب. مهارت اموز (دبیر ریاضی خوی) ، پردیس شهید رجایی ارومیه ، دانشگاه فرهنگیان ، ایران

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
استرس ۱
اضطراب ۲
آموزش ریاضی ۳

2020 MSC:
97B50
97U30
97D80

چکیده

پژوهش ها نشان داده است که عامل بسیاري از موارد اضطراب در دانش آموزان در جو عمومي مدرسه و کلاس درس است که با اصلاح روش تدریس، در ارزیابي و ارزشیابي قابل تضعیف مي باشد. پژوهش حاضر در مورد استرس و اضطراب دانش آموزان مانند استرس پای تخته و... می باشد. در کلاس درس ریاضی هشتم آموزشگاه شهید صدیق آلمالو از روستاهای شهرستان خوی، در سال تحصیلی ۹۶-۹۵ اکثر دانش آموزان این کلاس از اینکه آنها را به پای تابلو صدا میکنم تا تکالیف خواسته شده را حل کنند به خاطر استرس به بهانه های گوناگون از انجام این کار تفره می رفتند که پس از برخورد با این مسئله به جمع آوري اطلاعات از منابع گوناگون و استفاده از تجربیات افراد متخصص پرداخته و بعد آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و سپس با ارائه راه حل هایي به بهبود و کاهش اضطراب آنها پرداختم.

۱. مقدمه

پیشرفت ریاضیات در هر جامعه می تواند زمینه ساز توسعه سایر رشته های علمی و صنعتی آن جامعه گردد. مهارتهای ریاضی پایه برای موفقیت در مدرسه و زندگی روزمره بسیار مهم بوده و درواقع ریاضی یکی از مهمترین مهارتهای فردی اساسی در تداوم زندگی روزمره جوامع مدرن است. (حسن زاده و معتمدی ۱۳۹۱). ریاضیات یک شیوه تفکر است که انسان را مجهز به راهبردی در سازماندهی، تجزیه و ترکیب داده ها میکند. ریاضیات در قرن بیست و یکم از رویارویی با مسائل جهان واقعی، پرورش مهارت تفکر خلاق و ترویج روشهای مولد یادگیری تشکیل میشود)لائوو هوآ (۲۰۰۷)). یکی از عوامل مهم و تأثیرگذار در روند آموزش و یادگیری، اضطراب است. اهمیت تأثیر اضطراب در آموزش موجب شد تا موردتوجه پژوهشگران قرار گیرد.(رکابدار و سلیمانی، ۱۳۸۷) اختلالات رفتاري و عاطفي دانش آموزان از مواردي است که در سال هاي اخیر، مورد توجه خاص دبیران و اولیاء تعلیم و تربیت قرار گرفته است، توجه ویژه به این مشکلات رفتاري و عاطفي از این جهت مهم است که توجه نکردن به آن و گسترش یافتن این مشکلات در کلاس هاي درسي مانعي در جهت رسیدن به اهداف آموزشي و تربیتي در مدرسه و کلاس است. ضمن این که موجب مي شود دبیران در کلاس درسي دچار مشکل شوند و باعث افت در عملکرد تحصیلي دانش آموزان نیز شود. اضطراب به عنوان یك مسأله شایع، حداقل به طور خفیف در اغلب دانش آموزان و نوجوانان به چشم مي خورد. بروز آن در مرحله حاد و شدید همراه با علایم و نشانه هایي چون دلهره، بي قراري، بي خوابي، عصبانیت، تشویش و نگراني و گوش به زنگ بودن، اشکال در تمرکز حواس، احساس خستگي، تپش قلب و تنگي نفس، تغییر رنگ چهره و اندام ها، استرس، اختلال در فشار خون، تعریق سرد و گرم اندام، خیال پردازي، کابوس در

*سید صادق غلامی
پست الکترونیک: rgolamie@yahoo.com (سید صادق غلامی)، rgolamie@yahoo.com (فرهاد طاهر)

خواب و بيداري و ... است. علل بروز آن نيز معمولاً كاهش مناسبات و ارتباطات عاطفي و عدم احساس امنيت، شرايط ناگوار زندگي ماشيني و عدم ايجاد ارتباط همگن با آن ، بروز مسائل ، اختلافات و مشكلات خانوادگي ، نگراني از آينده شغلي و تحصيلي ، فقدان اعضاي خانواده ، كم توجهي به مسائل ديني و معنوي. عدم آمادگي در مواجه با خطر احتمالي از قبيل بيماري، فوت ، حادثه ناگوار جنگ و سيل و زلزله ، براي خويش و نزديكان ، نحوة كسب آموزش هاي تربيتي غلط در چگونگي برخورد با اضطراب است.

۲. اهمیت ضرورت مساله و اهداف

ریاضی بدون شک یکی از مهم ترین درس هایی است که دانش آموزان در تمام مقاطع تحصیلی به داشتن و درک آن احتیاج دارند. بسیاری از دانش آموزان به دلایل گوناگون از جمله شیوه تدریس معلم، تجربه ناموفق ، فشارهای والدین و دشواری در یادگیری مفاهیم ریاضی چنان از این درس دچار ترس و اضطراب می شوند و از خود مقاومت نشان می دهند که گاهی ساده ترین اعمال ریاضی را هم نمی توانند انجام دهند. در هفته های اولیهی تدریسم در کلاس متوجه شدم اکثر بچه ها از اینکه آنها را به پای تابلو صدا میکنم تا تکالیف خواسته شده را حل کنند با بهانه های گوناگون از انجام این کار تفره می روند. در حالی که تعدادی از دانش آموزان در کلاس با بلند کردن دست و اجازه خواستن دوست داشتن به جای آنها به پای تخته آمده و تکالیف را حل کنند. کم کم این وضعیت مرا خسته کرد که فقط دو یا سه دانش آموز در کلاس جواب درس را می دادند یا برای حل تمرین اعلام آمادگی می کردند که این امر موجب بی علاقهگی و خستگی سایر دانش آموزان می شد. با مشاهده ی رفتار آنها و با توجه به تاثیر رفتارشان در کلاس و اهمیت درس ریاضی در جامعه ی کنونی بر آن شدم تا علل بروز این رفتارها را بیابم و برای بهتر شدن وضعیت راه کارهایی طراحی کنم. تعریف کلید واژه ها: اضطراب چیست؟ اضطراب يعني احساس ناخوشايند و مبهم دلواپسي بدون علت مشخص كه اغلب با نشانه هايي از سيستم عصبي خودكار همراه است. اضطراب علامت هشدار دهنده است و نشانههاي مشابه ترس در انسان ایجاد میکند با این تفاوت که ترس، واکنش انسان به تهدید شناخته شده مشخص و خارجي است. بطور طبيعي هم اضطراب و هم ترس ميتوانند مفيد باشند و به ما در دوري از خطر كمك كنند و انگيزه روبرو شدن با مشكلات را در ما ايجاد كنند. ولي چنانچه ترس و اضطراب، شديد و طولاني شوند ما را از آنچه كه ميخواهيم انجام دهيم باز ميدارند و در نهايت زندگي را به كاممان تلخ ميكنند. نگرانی چیست؟ نگرانی، احساس دغدغه شدید است. نگرانی بیم از ناشناخته هاست.نگران از اینکه بدترین چیز رخ خواهد داد. چه بسا مکرراً با خودمان حرف های منفی بزنیم و بدترین احتمال های موجود را در نظر می گیریم. ممکن است بیش از اندازه، نگران رخدادهای آینده شویم.

۳. جمع آوری اطلاعات

جمع آوری اطلاعات برای اینکه مساله ای که فکرم را مشغول کرده بود برایم روشن شود و علت اضطراب آنها را بدانم در صدد جمع آوری اطلاعات از روش ها و منابع مختلف بر آمدم از جمله: مشاهده و مصاحبه . مشاهده ی رفتار دانش آموزان در کلاس درس: در اولین قدم به مشاهده ی رفتار دانش آموزان در کلاس درس پرداختم تا ببینم چه عواملی میتواند باعث بروز اضطراب آنها شود.متوجه شدم که آنها در کلاس زود به پیش داوری میپردازند، چه در مورد درس جدید و چه درمورد تمرینات درس گذشته. بلافاصله بعد از ورود من به کلاس آنها به اظهار نظر می پرداختند و بیان میداشتند که درس گذشته سخت بود و ما هیچ نفهمیدیم و حتی در مورد درس جدید سوال میکرند که آیا این درس سخت است؟ به غیر از دو سه نفرحاضر نبود برای حل تمرین و یا کار در کلاس داوطلب شوند و گاهی حتی وقتی خودم از آنها میخواستم که برای حل تمرین به پای تخته بیاید در حالی که به تمرین در کتابشان زل زده بوند میگفتند شاید نتوانند حل کنند یا میخواستند که شخص دیگری به جای آنها تمرین را حل کنند وآنها برای تمرین بعدی بیایند تا امادگی بیشتری داشته باشند. گاهی هم که تمرین پای تخته حل میکردند حاضر به توضیح راه حلش نبوند و از حرف زدن طفره میرفتند. مصاحبه با دانش آموزان در مصاحبه ای که با دانش آموزان داشتم، آنها بر این باور بودند که علاقه ای به درس ریاضی ندارند. آنها گفتند که وقتی به صورت گروهی کنار هم می نشینند که با هم ریاضی بخوانند و تمرینات را حل کنند مرتب شکایت می کنند که تمرینات زیاد است و درس سخت بوده و ابراز نا خوشنودی نسبت به درس دارند. آنها میگفتند که در کلاس مرتب دعا میکنند که برای تمرین ریاضی آنها را صدا نکنم همچنین می گفتند که ریاضی را دوست ندارند و به دلایلی نسبت به درس ریاضی اضطراب دارند. مصاحبه با دیگر دبیران هنگامی که موضوع را با همکارهایم در میان گذاشتم، بعضی ها ابراز داشتند که زیاد به رفتارهای آنها توجهی نکردند اما بعضی از همکارانم موضوعاتی در مورد آنها بیان کردند. دبیر زبان بیان داشت که اکثر دانش آموزان این کلاس مضطرب هستند. او اظهار داشت که در جلسه ای که صحبت از شغل آینده آنها بوده تاکید داشته اند که حاضر نیست در آینده رشته ی ریاضی و دبیری ریاضی را به عنوان شغلشان انتخاب کنند و گفته اند که از ریاضی خوششان نمی آید و فکر نمیکنند که در این زمینه آدم موفقی باشند. مصاحبه با تعدادی از والدین در مرحله ی بعد به مصاحبه با والدین دانش آموزان پرداختم که در این میان فقط موفق به صحبت حضوری در مدرسه با تعداد محدودی از آنها شدم.یکی از اولیا بیان داشت که فرزند او شخصیتی نا آرام و خونگرم دارد اما در باطن در هنگامی که وظیفه ای به او محول میشود مرتب نگران است. و دوست ندارد که مسئولیتی قبول کند. یکی دیگر از اولیا بیان داشت که فرزند او در هنگام انجام تمرینهایش در هر درسی، به خصوص درس ریاضی مرتب نق میزند و پیام های منفی به خود تلقین می کند. یکی دیگر هم گفت که خانواده اش هم معتقدند که فرزند او استعداد کمی در یادگیری ریاضی دارد مثل بقیه اعضای خانواده خودش هم به این باور رسیده است. او گفت که فرزندش با بی علاقگی و بی

حوصلگی به یادگیری ریاضی میپردازد و معتقد است که یاد نمیگیرد و هنگامی هم که میخواهد برای امتحان آماده شود، نگران است که نکند نمره ی خوبی نگیرد و موفق نشود. شب شاید تا دیر وقت نتواند بخوابد و کتابش را همیشه همراه داشته باشد بدون اینکه بتواند به خوبی تمرکز کند تا یاد بگیرد. مطالعات تحقیقات گذشته : براي تکمیل اطلاعات بدست آمده به متون و کتاب ها و مقالاتي که در ارتباط با اضطراب بود مراجعه کردم و به خلاصه اي از موارد مطرح شده مرتبط با مشکل دانش آموزان اشاره مي کنم. اضطراب ریاضی چیست ؟ اضطراب ریاضی موجب ضعف فرایندهاي ذهني براي انجام عملیات ریاضی، منفي نگري و سر درگمي دانش آموزان مي شود این گروه با اجتناب از کلاس ریاضی، ناتواني در انجام آزمون هاي ریاضی و اضطراب و تشویش فراوان از یادگیري این درس طفره مي روند. این تصور که استعداد ریاضی مادرزادي است یا پسرها نسبت به دخترها عملکرد بهتري در درس ریاضی دارند، یا درس ریاضی درس منطق است، نه درس خلاقیت، موجب عقب نشیني و مقابله برخي از دانش آموزان از یادگیري علم ریاضی مي شود. اضطراب ریاضی واکنش احساس آگاهانه به یك یا چند مورد زیر است : شرکت در کلاس ریاضی، گوش کردن به سخنراني دربارة ریاضی، کار کردن بر روي یك مسئله ریاضی یا مبحث در مورد ریاضی. علاوه بر این چنین اضطرابي ممکن است در بین دانش آموزان مدارس راهنمایی و دبیرستان ها و دانشکده ها به وجود آید. اضطراب ریاضی سبب مي شود بچه ها از درس ریاضی بترسند این اضطراب مانع از توانایي دانش آموز در ارتباط دادن ریاضی به زندگي روزمره اش مي شود. به گفته خ شیلا توبیاس (۱۹۹۳) میلیون ها نفر از بزرگسالان به دلیل ضعف در ریاضیات و ترس از آن از فرصتهاي شغلي و شخصي محروم مي شوند و این تجارب منفي در طول زندگي با بسیاري از آنها همراه است. (بارودي) و (کاستیلم) (۱۹۹۸) یك مدل اضطراب ریاضی را توصیف کرد که نشان مي داد چگونه عقاید غیرمنطقي مي تواند منجر به اضطراب شود و نتیجه این اضطراب، رفتاری است که مضرات طولاني مدت آن سبب تقویت عقاید غیر منطقي مي گردد. در این چرخه به دور از هر گونه تکنیك جدید، اضطراب و عقاید غیر منطقي دانش آموزان به طور پیوسته تشدید مي گردد. چگونه اضطراب ریاضی دانش آموزان افزایش مي یابد ؟ اضطراب ریاضی اغلب به علت تجربه منفي پیشین دانش آموز به هنگام یادگیري ریاضی در کلاس یا خانه تشدید مي گردد. دبیران و والدین سطح اضطراب دانش آموز را با تحمیل دیدگاه هاي شخصي شان درباره ریاضی افزایش میدهند. هرگونه تجربه منفي به ذهنیات آینده منتقل میشود و نهایتاً سبب عدم درك ریاضی میگردد. در روشهاي سنتي به دانش آموز یاد داده شده است که بدون فهم و درك مهارتهاي ریاضی و کار بر روي مسائل، تنها به حفظ آنها بپردازند. این موضوع تا حدود زیادي موجب افزایش سطح اضطراب ریاضی در دانش آموز میگردد. ماریلین کارتین فیلیپس (۱۹۹۹) چنین اظهار داشت که سه شیوة کار در کلاسهای سنتي ریاضی وجود دارد که سبب اضطراب زیاد در بسیاري از دانش آموزان مي شود: قدرت تحمیلي ارائه عمومي و محدودیت زماني او نشان میدهد که روش هاي تدریس باید دوباره ارزیابي شوند و تأکید بیشتري بر روي شیوههاي خاصي باشد که در آنها کلاس درس، دانش آموز محور بوده و بحث و گفتگو بیشتر و سخنراني کمتر باشد.

۴. تجزیه تحلیل و تفسیر داده ها :

با جمع بندي اطلاعات به دست آمده و گفتگو با افراد متخصص توانستم عوامل مؤثر در ایجاد اضطراب دانش آ موز را به شرح زیر دسته بندي کنم که به توضیح آنها مي پردازم : الف) عوامل محیطي ۱- فشارهاي والدین : بدیهي است که نقش والدین در اضطراب آنها از درس و مدرسه بسیار مؤثر و غیر قابل انکار است.گروهي از پدر و مادرهایي که خود در درس ریاضی ضعیف و کند بودهاند این احساس و نگرشي خود را به فرزندانشان نیز منتقل میکنند یا گروهي دیگر نیز با فشارها و توقعات خارج از توان فرزندانشان آنها را دچار ترس و اضطراب میکنند. ۲- شیوه آموزش دبیر : گروهي از آموزگاران و دبیران مقطع متوسطه اول بدون در نظر گرفتن موقعیت ذهني – رواني دانش آموزان و میزان استعداد و تواناییهاي آنان مسائلي براي حل کردن طرح میکنند که از عهده بیشتر شاگردان کلاس خارج است. در این گونه موارد چون دانش آموز موفق به حل مسائل نمیشود، احساس بیکفایتي و ناتواني میکند و نسبت به عملکرد و استعداد خود بدبین میشود. ۳- محتوي کتابهاي ریاضی : در مواردي نیز محتوي کتاب و ترتیب درسهاي ریاضی به گونهاي است که یادگیري مفاهیم ریاضی سخت جلوه مي کند و موجب گیجي و سردرگمي دانش آموز مي شود. ۴- تجارب منفي : نمره هاي پایین از درس ریاضی پیش زمینههاي ذهني آموزگاران جدي و سختگیر قبلي همگي موجب بدبیني دانش آموزان نسبت به درس ریاضی شده بود. ب) شیوه هاي اشتباه آموزش ریاضی ۱) تأکید بر سرعت در پاسخ گویي : مسأله حل کردن و پاسخ دادن به سؤالات درس ریاضی نیاز به درك مسأله و پرسش دبیر دارد. پس فشار وارد کردن بر دانش آموزان براي حل کردن سریع باعث مي شود تا احساس ناکامي و سردرگمي در دانش آموزی که نسبت به دیگر دانش آموزان کندتر است، وارد شود. ۲) نداشتن درك درست از کاربرد ریاضی در زندگي : دانش آموز موارد استفاده از ریاضی را در زندگي روزمره به خوبي نمي شناسد بنابراین باعث عدم علاقه او نسبت به این درس شده است. پ) عوامل فردي ۱) کاهش اعتماد به نفس : شاید دانش آموز به علت نحوه تربیت والدین ویا همکلاسی ها از اعتماد به نفس پایینی برخوردار است که درنتیجه این فرد تصویر ضعیفی از خود دارد و منجر به ایجاد افکار منفی می شود که در ادامه این افکار منفی سبب خواهد شد که به راحتی دست از تلاش در زندگی بردارد. ۲) احساس ضعف و کمبود : دانش آموزان از اشتباه کردن پاي تخته سیاه مي هراسند زیرا فکر مي کنند که موجب تمسخر دوستانشان قرار مي گیرند هرگاه سؤالي را اشتباه حل کنند. یافته های علمی اضطراب به عنوان شایع ترین اختلا ل روانی موجود و عامل مهمی در بروز ناسازگاری های اجتماعی و اختلا ل در یادگیری و سلا مت روانی مورد مطالعه قرار گرفت و شیوع اضطراب آشکار و پنهان و عوامل موثر بر تاثیر اضطراب بر وضعیت تحصیلی را نشان می دهد. در این مطالعه اثر عوامل مختلف فردی، تحصیلی و خانوادگی در ایجاد اضطراب بررسی گردیده که عبارت بودند از: سن، پایه تحصیلی، بیماری و ناتوانی، اشتغال، نوع شغل پدر، اشتغال مادر در خارج از

منزل، میزان تحصیلات پدر یا مادر، فقدان پدر یا مادر، مرگ برادر یا خواهر در یک سال گذشته، بیماری یا ناتوانی در خانواده، انجام فرائض دینی، وضعیت تحصیلی. پیچیدگی جاری تمدن امروزی، سرعت تغییرات و بی توجهی نسبت به مذهب و ارزش های خانوادگی سبب گردیده تا قرن بیستم را، قرن اضطراب نام نهادند. اضطراب شایع ترین اختلا ل روانی موجود در تمامی گروه های سنی است. به طوری که در یک مطالعه انجام شده شیوع اضطراب آشکار و پنهان در جوانان مراجعه کننده به کلینیک ۴۱ درصد بوده است. در پیدایش اضطراب عوامل متعدد اجتماعی، فرهنگی و خانوادگی به عنوان زمینه سازهای محیطی با استعداد زمینه ای ژنتیک همراه شده و علا یم خود را در سنین نوجوانی (با اوج سنی ۱۶ سال) به تدریج آشکار می سازد.

الف) اضطراب آشکار: بیانگر احساس افراد مورد مطالعه درخصوص احساس تنش، بیم از آینده، ناآرامی، خودخوری، برانگیختگی و فعال سازی سیستم خودمختار (سمپاتیک و پاراسمپاتیک) است.

ب)اضطراب پنهان: به تفاوت های فردی نسبتا ثابتی در مستعد بودن به ابتلا به اضطراب اشاره می کند که از آن طریق بین افراد در آمادگی داشتن ادراک موقعیت های پراضطرابی مثل تجربه خطر یا موقعیت های تهدیدکننده تمایز گذاشته می شود و پاسخ به چنین موقعیت هایی با شدت بالا ی عکس العمل های اضطراب آشکار همراه است.

۱- نشانه های استرس

استرس می تواند بعضی از نشانه های زیر را به وجود آورد و نوع علا یم آن در افراد متفاوت است. (گرفتگی یا اضطراب، احساس درد، تپش قلب، تعرق بدن، مشکلا ت خواب و...)

نشانه های روحی و روانی: (بی حوصلگی، خلق ناپایدار، بی قراری و...)

نشانه های رفتاری: (پرخاشگری، بازی با موی سر یا کندن پوست سر، نداشتن تمرکز و...)

نشانه های فکری: (گیجی یا شلوغی ذهن، بهانه جویی، اشتباهات مکرر و...)

۲- نظریه های روانشناختی

الف)نظریه های روانکاوی: تکامل تدریجی نظریه های زیگموند فروید را در مورد اضطراب از مقاله وسواس ها وفوبی ها می توان این گونه دریافت که فروید اضطراب را هشداری برای ایگو معرفی می کند که از فشار سائق نامقبول برای تظاهر آ گاهانه و تخلیه خبر می دهد. اگر سطح اضطراب بالا تر از آنچه به عنوان هشدار لا زم است برود، ممکن است با شدت حمله هراس خودنمایی کند.

ب) نظریه های رفتاری: با یادگیری اضطراب بعضی از موثرترین درمان های اختلالات اضطرابی را به وجود آورده است. طبق نظریه های رفتاری، اضطراب یک واکنش شرطی در مقابل محیطی خاص است و درمان معمولا با نوعی حساسیت زدایی از طریق رویارویی مکرر با محرک اضطراب انگیز، همراه با روش های روان درمانی شناختی به عمل میآید.

ج) نظریه وجودی: نظریه های وجودی اضطراب مدل هایی برای اختلا ل اضطراب منتشر به وجود آورده است که در آنها محرک قابل شناسایی خاصی برای احساس اضطراب مزمن وجود ندارد و شخص از پوچی عمیق در زندگی خود آ گاه می گردد که ممکن است حتی از پذیرش مرگ غیرقابل اجتناب خود نیز برای او دردناکتر باشد. آنچه از مطالعات برمی آید سنین نوجوانی و جوانی از نظر انواع اختلالات اضطرابی و در یک شیوع قرار دارند. بر این اساس تصمیم گرفته شد که جهت انجام مطالعه از دانش آموزان دبیرستانی استفاده شود . این سنین به واسطه ویژگی های خاص زیستی و روانی دوران بلوغ و طی مراحل مختلف تکامل اجتماعی و ورود به عرصه مسوولیت پذیری حساس ترین دوران زندگی محسوب می شود. این مطالعه که در دوره سنی ۱۸-۱۴ سال انجام شد تفاوت قابل توجهی در شیوع اضطراب آشکار و پنهان مشاهده شود. از نظر شیوع اختلالات اضطرابی بین دانش آموزان با معدل بالا و پایین تفاوتهایی مشاهده شد بدین ترتیب که با افزایش معدل میزان اضطراب کاهش می یابد که این می تواند تاثیر دو سویه ای را نشان دهد یعنی دانش آموزان مضطرب توانایی درسی پایین تری نسبت به سایر دانش آموزان دارند یا اینکه دانش آموزانی که معدل پایین تری دارند به خاطر عدم کارآیی درسی مضطرب می شوند. لازم به ذکر است که دانش آموزان با معدل متوسط (۱۴تا۱۷) در سال های ابتدایی دبیرستان درصد بالاتری از ابتلا به اضطراب را نشان داده اند در حالی که در همین محدوده سنی در پایه تحصیلی بالا تر از اضطرابشان کاسته شده است. این مساله نیز می تواند بیانگر تاثیر ورود به شرایط جدیدی در دبیرستان را نشان دهد. تغییر در محیط آموزشی و فشارهای ناشی از نظام های آموزشی به غیر یافته را می توان از عوامل استرس زا در ایجاد اضطراب به حساب آورد که با بالا رفتن پایه تحصیلی و ایجاد عادت از اثر آن کاسته می شود. مساله دیگری که به آن توجه شده است این که انجام فرائض دینی با اضطراب در رابطه است در این رابطه تردیدی وجود ندارد که زمینه های قوی اعتقاد مذهبی به عنوان پشتیبان فرد در برابر ناملایمات و شرایط نامناسب زندگی می تواند فرد را در گرداب کشاکش های تنش زای زندگی حمایت کند. اضطراب در دانش آموزانی که گاهی نماز می خوانند و گاهی نمی خوانند حتی بیشتر از کسانی بود که اصلا نماز نمی خوانند که این مساله می تواند تاثیر عدم ثبات عقیدتی در ایجاد اضطراب را نشان دهد و عکس این مساله نیز صادق است. سیاست گذاران آموزش و پرورش در برنامهریزی های خود باید سلا مت روحی و روانی دانشآموزان را نیز مدنظر قرار داده و برای اصلا ح سیستم آموزشی از یک سو و تحمل تغییرات ناگهانی و مکرر نظام آموزشی اجتناب کرده و از سوی دیگر زمینه را برای تامین آینده شغلی با تحصیلا ت دانشگاهی دانش آموزان فراهم سازند. می توان با ایجاد و تقویت سیستم های حمایتی روانی دانش آموزان در مدارس با اضطراب به مقابله پرداخت.

انتخاب راه جدید موقتي :

با توجه به رفتارهاي مشاهده شده و مصاحبه براي حل مشكل راه حل هاي زير به نظرم موفقيت آميز آمد :
۱- شناخت پديده هاي هيجاني و فشارهاي رواني به ويژه مقوله اضطراب، در عرصه فعاليت هاي رياضي و تلاش براي مسلط شدن بر اين حالت ها به كمك راهكارهاي عملي.
۲- توجه و برخورد عملي با تفاوت هاي فردي در ابعاد گوناگون به ويژه از سوي دبير و والدين.
۳- تلاش براي ايجاد اعتماد متقابل بين دبير و دانش آموز.
۴- تلاش براي ايجاد نگرش مثبت نسبت به رياضي.
۵- شناخت دانش قبلي دانش آموز و رفع و ترميم كمبودها و مشكلات عملي فرد به ويژه هنگام وارد شدن در عناوين جديد رياضي.
۶- اصلاح شيوه هاي سنتي و متعارف سنجش رفتار رياضي (امتحان)
۷- انتخاب شيوه آموزشي مناسب.
۸- انتخاب آزاد دسته اي از مسائل و تكاليف رياضي.
براي درگير شدن فراگيران و هدايت آنان براي انتخاب مسائلي كه هم جذاب باشد و هم چالش برانگيز. ۹- تحسين و قدرشناسي از تلاش و كار دانش آموز.

اجراي راه حل و نظارت بر آن : در اين مرحله جهت كاهش اضطراب دانش آموزان سعي كردم تا راه حل هايي كه مد نظرم بود را اجرا كنم كه به توضيح آن ها مي پردازم : راسل در كتاب اميدهاي نو مي نويسد : برخورد علمي با بلا و مصيبت دو حسن دارد، يكي اين كه باعث ميشود شخص با ميل و اراده خودش آن را بپذيرد، ديگر اين كه سبب خواهد شد عقل انسان در جستجوي وسايل تسكين آن برآيد. در مرحله اول با خود دانش آموزان صحبت كردم و از آنها خواستم تا باور كنند كه مي توانند اضطرابشان را از بين ببرند، زيرا امكان به حل آن نيمي از موفقيت است. در مرحله بعد سعي كردم تا به تفاوت هاي فردي آنها توجه كنم كه اين تفاوت ها مي تواند شامل ظرفيت حافظه فعال، فرآيندهاي ذهني و پردازش اطلاعات، دانش قبلي، مؤلفه هاي فرهنگي، اقتصادي و ... باشد و با توجه به اين تفاوت ها از آنها انتظار داشته باشم و با آنها برخورد مناسب داشته باشم. براي از بين بردن افسردگي و نگراني آنها سعي كردم تا اعتماد متقابل بين آنها و خودم ايجاد كنم سعي كردم تا تك تك آنها را با همديگر مقايسه نكنم و پيشرفت هريک را با خودش بسنجم و از آنها هم خواستم تا هركس خودش را با خودش مدنظر قرار دهد. سعي كردم تا در آنها نگرش مثبتي نسبت به درس رياضي ايجاد كنم. متأسفانه تلقين هاي اجتماعي در همه جا از جمله جامعه خودمان به گونه اي است كه افراد حتي از نخستين روزهاي آغاز رياضيات مدرسه با نوعي هراس مواجه هستند كه اين هراس طبعاً اضطراب آور است. بنابراين سعي كردم وحشت زدايي و مبارزه با پيش داوريهاي منفي را مورد توجه قرار دهم و سعي كردم تا قابليت ها و ظرفيت هاي آنها را به خودشان بشناسانم تا نگرش مثبتي در تک تک شان ايجاد شود. براي ايجاد نگرش مثبت سعي كردم تا قبل از ورود به درس جديد ميزان يادگيريشان را در درس قبلي مورد سنجش قرار دهم تا بتوانم درس جديد را از سطح مناسب شروع كنم. آزوبل معتقد است كه براي آموزش بايد از محتواي دانش قبلي فرد آغاز كنيم با اين باور كه واقعاً همه دانش آموزان ما يكسان نيستند. سعي كردم تا در طول ترم امتحانات متعددي برگزار كنم و سنجش از دانش آموزانم را براي آخر ترم نگذارم. اتخاد شيوه آموزشي مناسب به مشابه عامل بيروني مي تواند به گونه اي مؤثر در شكل دهي رفتار رياضي دانش آموزان عمل نمايد. در اين ميان سعي كردم تا با توجه به حالات هيجاني و روحي دانش آموزم با انتخاب روش مناسب سني، زمينه مشاركت بيشتر و مطلوبتر او را فراهم كنم. در اين ميان با توجه به عدم اعتماد به نفس آنها در حل تمرينات، سعي كردم تا تكليف جذاب و در حدشان هم در ميان تمرينات داده شده باشد تا از آنها براي حلشان استفاده كنم تا خودباوري و اعتماد به نفس در آنها تقويت شود. در نهايت هم سعي كردم تا از فعاليت ها و موفقيت هايشان تحسين به عمل آورم تا ديدگاه و خاطرات خوبي در ذهنش نسبت به رياضي و يادگيري آن ايجاد شود.

۵. گردآوري اطلاعات (شواهد۲)

اگر چه عملكرد و رفتار دانش آموزان در كلاس .و مدرسه مبين تأثير مثبت روش هاي به كار گرفته شده بود، اما براي اين كه نتايج بهتر و ملموس تري پيدا كنم از منابع زير به گردآوري اطلاعات پرداختم : ۱- مشاهده رفتار دانش آموزآن ۲- مصاحبه با دبيران ۳- مصاحبه با دانش آموزان بعد از گذشت چند ماه كه من همچنان دبيرشان هستم وقتي رفتارهاي آنها را با رفتارهاي اوليه شان در كلاس درسم مقايسه مي كنم متوجه بهبود اضطراب آنها مي شوم زيرا آنها بر خلاف گذشته كه به قضاوت زود هنگام در زمان تدريس مي پرداختند. ديگر حاضر نيستند هيچ پيش داوري كنند و به خودشان فرصت يادگيري مي دهند. به توانايي خودشان ايمان دارند و باور كردهاند كه استعداد رياضيشان نه تنها كمتر از دوستانشان نيست شايد از عده اي بيشتر هم باشد. براي حل تمرينات داوطلب مي شوند و اگر قرار باشد امتحاني بگيريم با دوستانشان به مطالعه مي پردازد و نسبت به قبل نتايج بهتري مي گيرند. دوستان و دبيرانشان معتقدند كه در كلاس آرامش بيشتري دارند و ذوق بيشتري براي يادگيري به خصوص در درس رياضي از خود نشان مي دهند و خودشان هم بيان مي كنند كه مسائل رياضي برايشان قابل يادگيري است اما نياز به تلاش و كوشش دارد.
ارزشيابي تأثير اقدام جديد و تعيين اعتبار آن : بعد از آن كه اطلاعات لازم را مجدداً جمع آوري كردم و با مشاهده رفتار آنها با يادآوري رفتار آنها در ابتداي سال كه من دبير رياضي آنها شده بودم تغيير رفتار آنها را به وضوح مشاهده كردم .با صحبت با دبيران آنها كه متوجه تغيير رفتار مثبتشان شده بودند نيز مطمئن شدم كه آنها بر اضطراب خود تقريبا فائق آمده است. و با والدين آنها در اين مورد صحبت كرده و مادرش اظهار كرد كه

آنها نسبت به درس ریاضی انگیزه بیشتری پیدا کرده و خودش را در مواجهه با امتحان این درس تاحدودی موفق می داند. اکنون خودشان هم در کلاس من با روحیه بهتري مي نشینند و قبول دارند که توانايي هايشان را تازه يافته اند. بنابراين چه خوب است که قبل از اين که به تدريس موضوعات درسي بپردازيم سعي کنيم تا دانش آموزانمان را به اين باور برسانيم که آن ها مي توانند.

۶. روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع مطالعات روانسنجی است. جامعه آماری پژوهش عبارت از کلیه ۳۰ دانش آموز پایه دهم دبیرستان نمونه دولتی شهرستان خوی بود. پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی توماس و داکر (۲۰۰۰) و همچنین پرسشنامه اضطراب زانک (۱۹۷۱) بین همه دانش آموزان کلاس توزیع شد. ابزار پژوهش حاضر از قرار ذیل است: پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی MAAQ) :) این پرسشنامه ۳۰ سؤالی برای دانش آموزان طراحی و تدوین شد. در این پرسشنامه قضاوت شخصی دانش آموزان در مورد عملکرد و همچنین نگرش آنها به ریاضی اندازه گیری می شود. این آزمون در قالب ۹ مجموعه چهارتایی شامل ۱ـمقیاس عملی ۲- تکالیف نوشتاری ۳- درس ریاضی ۴- محاسبات کتبی ریاضی ۵- محاسبات شفاهی ریاضی ۶- ریاضیات آسان ۷- ریاضیات سخت ۸- عملکرد در امتحانات ۹- فهم تدریس ریاضی اجرا می شود. روش آماده سازی پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی. این پرسشنامه به زبان انگلیسی طراحی شده بود بنابراین توسط یک مترجم مسلط به مباحث روانشناسی، به زبان فارسی ترجمه و ویرایش شد.

جدول ۱: پرسش نامه نمره گذاری

خیلی کم	کم	متوسط	زیاد	خیلی زیاد
۱	۲	۳	۴	۵

جدول ۲: نمونه سوالات پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی

ردیف	سوال	خیلی کم	کم	متوسط	زیاد	خیلی زیاد
۱	چقدر از خودت در انجام تکالیف مدرسه راضی هستی؟					
۲	در انجام تکالیف نوشتنی چقدر از خودت راضی هستی؟					
۳	به طورکلی چقدر از خودت در ریاضی راضی هستی؟					
۴	در محاسبات کتبی)نوشتنی(چقدر از خودت راضی هستی؟					
۵	در ریاضیات آسان چقدر از خودت راضی هستی؟					

سؤالات اول در مورد خرده مقیاس " خود ارزیابی" سوالات بعدی در مورد خرده مقیاس "علاقه"،و همچنین تعدادی از سؤالات در مورد خرده مقیاس "میزان ناراحتی" و همچنین "میزان اضطراب و نگرانی" را مورد سنجش قرار می دهند.
میزان مشارکت فرگیران در پرسش نامه دانش آموزان پایه دهم،دبیرستان نمونه دولتی شهید مدرس

جدول ۳: میزان مشارکت فراگیران

تعداد کل دانش آموزان(نفر)	تعداد فرگیران شرکت کننده(نفر)	در صد مشارکت	درصد عدم مشارکت
۳۰	۳۰	۱۰۰	۰

۷. نتیجه گیری و پیشنهادات

از اهداف مهم سیستم آموزشی افزایش دانش، شناسایی و رفع موانع یادگیری با هدف جلوگیری از افت تحصیلی در دانش آموزان است. نتایج به دست آمده ازتحقیقات نشان می دهند که ارزیابی منفی فرد از خود، عدم علاقه به موضوع آموزشی و نگرش و اضطراب از عوامل بازدارنده هستند. از طرف دیگر افراد نمیتوانند برای بیان هیجانات و احساسات خود به راحتی از کلمات استفاده کنند بنابراین برای دستیابی بهتر و دقیقتر به درون افراد به ابزاری ساده، جذاب و دقیق نیاز است. با این رویکرد پژوهش حاضر با هدف هنجاریابی پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی توماس وداکر (۲۰۰۰) دردانش آموزان پایه دهم مدرسه نمونه دولتی شهرستان خوی انجام شد. این پرسشنامه شامل ۳۰ ماده معتبر است. پرسشنامه نگرش و اضطراب ریاضی توسط توماس وداکر (۲۰۰۰) با بررسی پیشینه های نگرش و اضطراب ریاضی تدوین و رواسازی گردید. همچنین

پیشنهاد می شود: ۱- والدین باید انتظارات و توقعات خود را با علایق و استعدادهای کودکان خود هماهنگ کنند. ۲- تنبیه کودک به خاطر نمره کم نه تنها باعث پایین آوردن اعتماد به نفس و عزت نفس تحصیلی وی خواهد شد بلکه زمینه ذهنی منفی نسبت به تحصیل در او ایجاد کرده موجب مضطرب شدن دانش آموزخواهد شد لذا از تنبیه کودک بویژه تنبیه بدنی وی به خاطر مسایل تحصیلی اجتناب ورزید. ۳- والدین باید نقاط قوت و استعدادهای فرزندان خود را بشناسند وآنها را تأیید و تقویت کنند. ۴- دبیران نیز باید سطح توقعات خود را با توانائیها و استعدادهای دانش آموزان هماهنگ کنند . ۵- دبیران باید محیط مساعد و آرامی برای دانش آموزان در جلسه امتحان فراهم کنند تا حالت تنش دانش آموزان از بین برود و اضطراب وی کاهش یابد. ۶- دبیران و والدین باید از مقایسه دانش آموزان با سایر همسالان و همکلاسان خود جداً خود داری کنند تا از ایجاد احساس حقارت و اضطراب جلوگیری شود. ۷- دبیران باید انتظارات خود از دانش آموزان ، اهداف ، نحوه نمره گذاری ، نوع (تستی ، تشریحی) و تأثیر امتحانات مختلف در امتحان پایانی (اگر نیم ترم باشد اصطلاحاً امتحان قوه نی باشد) را مشخص کنند تا دانش آموز با توجه به آن برنامه ریزی مطالعاتی مناسبی تدارک ببیند. ۸- مشاوران مدارس و دبیران حتی الامکان روش های صحیح مطالعه و برنامه ریزی درسی را به دانش آموزان بیاموزند.دانش آموز باید بداند که آمادگی کافی برای امتحان باعث کاهش اضطراب شده بازده تحصیلی را بالا می برد. ۹- فرزندگفته می شود : تو دختر یاپسر خوبی هستی چون بیست گرفته ای و یا بر عکس) باعث رفتن اضطراب و کاهش احساس ارزشمندی وی خواهد شد. ۱۰- اگر دانش آموزی بیاموزد که تمام موقعیت های حساس زندگی به خداوند تکیه کند آرامش بیشتری خواهد داشت .آموختن دعا یا سوره ای کوتاه از قرآن و خواندن آن می تواند به کاهش اضطراب دانش آموز کمک کند. نهایتاً باید افراد داری اضطراب های شدید و ناتوان کننده به متخصصان و مشاوران با تجربه ارجاع داده شوند.

مراجع

[۱] سید حمید.آتش پور، *مضطراب*، مجله بهداشت جهان ، سال دهم ، شماره اول . ۱۳۷۵.
[۲] احمد. احمدي، *مقدمه اي‌بر مشاوره و روان درماني* انتشارات دانشگاه اصفهان، ۱۳۹۶.
[۳] ملك سیما. احمدیه، *بازیابي‌ارزشها در دانش آموزان و نوجوانان* ، انتشارات نشرني ۱۳۷۵.
[۴] پروین،بیرجندي، *روانشناسي‌رفتار غیرعادي*،نشر دهخدا، ۱۳۷۵.
[۵] رمضان، حسن زاده، و معتمدی تلاوکی، محمدتقیtextit۱ تأثیر مهارت معلمان در به کارگیری الگوهای تدریس بر بهبود راهبردهای یادگیری و مطالعه دانش آموزان. رهبری و مدیریت آموزشی، بهار ۱۳۹۱ ، شماره ۳۰۱۹ ، ص ۴۱-۷۰.
[۶] آلن راس، *کتاب روان‌شناسی شخصیت (نظریه‌ها و فرایندها)*،ترجمه س جمالفر. ۱۳۷۳، انتشارات بعثت، تهران.
[۷] دوروتی، راجرز، *روان‌شناسی کودک* ، نرجمه غلامعلی سرمد، ،،۱۳۷۳انتشارات آوای نور.
[۸] شاملو ، سعید، *آسیب شناسي‌رواني* ،۱۳۶۸، انتشارات رشد .

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–227، صص. ۵۱۰–۵۲۶

پایداری فازی معادله تابعی مربوط به فضاهای حاصل‌ضرب داخلی

مینا خدابنده*[آ]، بیاض دارابی[ب]

[آ] ایران، مراغه، دانشگاه مراغه
[ب] ایران، مراغه، دانشگاه مراغه، استاد

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
فضای باناخ فازی
فضای ضرب داخلی
تعمیم پایداری هایرز–اولام

چکیده

مصلحیان و همکارانش مسائل پایداری فازی را برای معادله تابعی جمعی کوشی و معادله تابعی جمعی ینسن در فضاهای باناخ فازی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مقاله، پایداری هایرز–اولام یک معادله تابعی ساخته شده با فضاهای ضرب داخلی در فضاهای باناخ ثابت می‌شود.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۸۴، کاتراساس [۹]، یک نرم فازی روی یک فضای برداری برای ساختن فضای توپولوژیک برداری فازی تعریف کرد. بعضی از ریاضیدانان، نرم‌های فازی را روی یک فضای برداری به زعم‌های مختلفی تعریف کرده‌اند [۷، ۱۰، ۱۵]. به طور خاص بک سامانتا [۲]، به دنبال چنگ و مردسون [۴] ایده‌ای از نرم فازی از چنین شیوه‌ای که متریک فازی مربوط از نوع کراموسیل و میچالک باشد را ارائه دادند. آن‌ها همچنین یک قضیه تجزیه از یک نرم فازی به یک خانواده از نرم‌های کریسپ را اثبات کردند و همچنین برخی خواص فضاهای نرمدار را بررسی کردند [۳].

مسئله پایداری معادلات تابعی از سوال اولام [۱۴] درباره پایداری گروه هومئومورفیسم‌ها نشات گرفته است. هایرز اولین پاسخ نسبی مثبت به سوال اولام برای فضاهای باناخ را ارائه داد. قضیه هایرز توسط اوکی [۱] برای نگاشت‌های جمعی و توسط راسیاس [۱۲] برای نگاشت‌های خطی با توجه به تفاضل کوشی بی‌کران تعمیم داده شد، بدین ترتیب:

قضیه ۱.۱ (هایرز). *فرض کنید $f : E_1 \to E_2$ یک تابع میان فضاهای باناخ باشد به طوریکه:*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

برای بعضی $\delta > 0$ و برای همه $x, y \in E_1$. آنگاه $A(x) = \lim_{x\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ برای هر $x \in E_1$ وجود دارد $A : E_1 \to E_2$ یی که تابع جمعی منحصر به فرد است به طوری‌که $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta$ برای هر $x \in E_1$. به علاوه اگر $f(tx)$ در t برای هر $x \in E_1$ پیوسته باشد آنگاه تابع A خطی است.

با توجه به قضیه معادله $f(x+y) = f(x) + f(y)$ در (E_1, E_2) پایداری هایرز–اولام دارد. هرگاه برای هر $f : E_1 \to E_2$ که در نامساوی $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$ صدق کند، نگاشت جمعی $a : E_1 \to E_2$ چندان موجود باشد که $f - a$ روی E_1 کراندار باشد.
یک تعمیم از قضیه هایرز توسط راسیاس ارائه شده درسال ۱۹۷۸ بدین صورت است که اگر تفاضل کوشی بی‌کران باشد، آنگاه پایداری حاصل را پایداری هایرز–اولام–راسیاس خواهیم گفت که این نوع پایداری را برای معادله کوشی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

*مینا خدابنده
پست الکترونیک: khodabandehm33@yahoo.com (مینا خدابنده)، bdaraby@maragheh.ac.ir (بیاض دارابی)

قضیه ۲.۱ (راسیاس). *فرض کنیم $f : E_1 \to E_2$ یک تابع بین فضاهای باناخ باشد. اگر f در نامساوی تابعی زیر برای بعضی $\theta > 0$, p که $0 \leq p < 1$ و برای هر $x, y \in E_1$، صدق کند:*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$$

آنگاه تابع جمعی $A : E_1 \to E_2$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in E_1$.

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p}\|x\|^p$$

علاوه بر این، اگر $f(x)$ برای هر $x \in E_1$ در t پیوسته باشد، آنگاه تابع A خطی است.

مقاله راسیاس [۱۲] از نفوذ زیادی در توسعه از آنچه ما تعمیم پایداری هایرز–اولام معادلات تابعی می‌نامیم، ارائه شده است. یک کمیت از قضیه راسیاس توسط گاورتا [۸] با جایگزینی تفاضل کوشی بی‌کران توسط یک تابع کنترل عمومی در روش راسیاس به دست آمد.
معادله تابعی $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)$ را معادله تابعی درجه دوم می‌نامیم. به طور خاص، هر جواب از معادله تابع درجه دوم را یک نگاشته درجه دوم می‌نامیم. یک تعمیم هایرز–اولام مسئله پایداری برای معادله درجه دوم، توسط اسکوف [۱۳] برای نگاشت‌های $f : X \to Y$ ارائه شد که X یک فضای نرمدار و Y یک فضای باناخ است. در [۵] چولوا نشان داده است که قضیه اسکوف در حالتی که دامنه X توسط یک گروه آبکی جایگزین شود، برقرار است در [۶] سزرویک تعمیم پایداری هایرز–اولام معادله تابعی درجه دوم را ارائه کرد.
در [۱۱] راسیاس اثبات کرد که نرم تعریف شده روی یک فضای برداری حقیقی V به وسیله یک ضرب داخلی ناشی شده است اگر و فقط اگر برای nهای ثابت و صحیح بزرگتر مساوی ۲،

$$n\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\|x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

برای همه $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ برقرار است.
در این مقاله، معادله تابعی

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right) + f\left(\frac{y-x}{2}\right) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

را در فضاهای باناخ فازی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا، تعمیم پایداری هایرز–اولام معادله تابعی (۱) را در فضاهای باناخ فازی برای حالتی که تابع f زوج است، مورد بررسی قرار می‌دهیم و در نهایت تعمیم پایداری هایرز–اولام معادله تابعی (۱) را در فضاهای باناخ فازی برای حالتی که تابع f فرد است، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

۲. مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد یک تابع $N : X \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ یک فرم فازی روی X نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ و هر $s, t \in \mathbb{R}$،
۱) برای هر

$$N(x,t) = 0 \quad , \quad t \leq 0. \qquad (2)$$

۲) $x = 0$ اگر و فقط اگر برای هر

$$N(x,t) = 1 \quad , \quad t > 0. \qquad (3)$$

۳) اگر $C \neq 0$،

$$N(Cx,t) = N\left(x, \frac{t}{|C|}\right). \qquad (4)$$

(۴

$$N(x+y,s+t) \geq \min\{N(x,s), N(y,t)\} \quad (۵)$$

۵) به ازای هر $x \in X$, $N(x,۰)$ یک تابع صعودی از $\mathbb{R}$ است و

$$\lim_{x\to\infty} N(x,t) = ۱. \quad (۶)$$

۶) برای $x \neq ۰$, $N(x,۰)$ روی $\mathbb{R}$ پیوست است.
زوج (X,N) را یک فضای برداری نرمدار فازی می‌نامیم.
از روابط (۳) و (۵) نتیجه می‌شود که اگر $s < t$، باشد آنگاه $N(x,t) \geq N(۰,s)$ است، زیرا:

$$N(x,t) = \mathrm{N}(x,t+s-s) \geq \min\{N(x,s), N(۰,t-s)\} = \min\{N(x,s), ۱\} = N(x,s)$$

مثال ۲.۲. فرض کنید $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای نرمدار خطی باشد آنگاه:

$$N(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{t+\|x\|} & t > ۰\ ,\ x \in X \\ ۰ & t \leq ۰\ ,\ x \in X \end{cases}$$

یک نرم فازی روی X است.

مثال ۳.۲. فرض کنید $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای نرمدار خطی باشد، آنگاه:

$$N(x,t) = \begin{cases} ۰ & t \leq ۰ \\ \frac{t}{\|x\|} & ۰ < t \leq \|x\| \\ ۱ & t > \|x\| \end{cases}$$

یک نرم فازی روی X است.

تعریف ۴.۲. فرض کنیم (X,N) یک فضای نرمدار فازی باشد یک دنباله $\{x_n\}$ در X را همگرا گوییم اگر $x \in X$ موجود باشد به طوریکه برای هر $t > ۰$, $\lim_{x\to\infty} N(x_n - x, t) = ۱$ در این صورت X را حد دنباله می‌گویند و آن را با نماد $N - \lim_{x\to\infty} x_n = x$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۲. فرض کنید (X,N) یک فضای نرمدار فازی باشد. یک دنباله $\{x_n\}$ در X کوشی است اگر برای هر $t > ۰$, $\varepsilon > ۰$ یک $n_۰ \in N$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $n \geq n_۰$ و هر $p > ۰$ داشته باشیم $N(x_{n+p} - x_n, t) > ۱ - \varepsilon$.

گزاره ۶.۲. *اگر هر دنباله کوشی همگرا باشد، آنگاه نرم فازی را کامل می‌گوییم و فضای برداری نرمدار فازی، فضای باناخ فازی نامیده می‌شود.*

تعریف ۷.۲. نگاشت $f : X \to Y$ بین فضاهای برداری نرمدار فازی X و Y در نقطه $x_۰ \in X$ پیوسته است اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به $x_۰$ در X، آنگاه دنباله $\{f(x_n)\}$ به $f(x_۰)$ همگرا باشد. اگر $f : X \to Y$ در هر $x \in X$ پیوسته باشد، گوییم $f : X \to Y$ روی X پیوسته است. (به مرجع [۳] رجوع شود.)

تعریف ۸.۲. در ریاضیات، یک معادله تابعی هر معادله‌ای است که یک تابع را به فرم ضمنی مشخص می‌کند. اغلب، یک معادله مقداری از یک تابع را در بعضی نقاط با مقادیرش در نقاط دیگر مرتبط می‌کند. خواص تابع می‌تواند با در نظر گرفتن انواع مقالات تابعی مشخص شود. معادلات تابعی انواع مختلفی دارند، در اینجا به تعریف چند مورد می‌پردازیم که در این مقاله کاربرد دارند:

مثال ۹.۲. ۱) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (معادله تابعی کوشی یا جمعی)
۲) $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$ (معادله درجه دوم یا قانون متوازی الاضلاع)
۳) $f\left(\frac{x+y}{۲}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$ (معادله تابعی ینسن)
۴) $۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + ۲f\left(\frac{x-y}{۲}\right) = f(x) + f(y)$ (معادله تابعی درجه دوم ینسن)

قضیه ۱۰.۲ (سنررویک). *فرض کنید E_1, E_2 به ترتیب، به فضای نرمدار و فضای باناخ باشند. اگر یک تابع $f : E_1 \to E_2$ در نامساوی*

$$\|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)\| \leq \theta\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$$

برای بعضی $\theta \geq 0$, $p > 2$, $x, y \in E_1$ صدق کند، آنگاه یک تابع درجه دوم منحصر به فرد $Q : E_1 \to E_2$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E_1$ داریم:

$$\|f(x)-Q(x)\| \leq \frac{2}{2^p-4}\theta\|x\|^p$$

نکته: در سرتاسر این مقاله، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری و (X, Y) یک فضای باناخ فازی است.

۳. تعمیم پایداری هایرز ـاولام معادله تابعی (۱): در حالت زوج

در این بخش از یک لم کمک گرفته و قضایای مربوط به پایداری هایرز ـاولام معادله تابعی (۱) را در حالت زوج بودن تابع در فضاهای باناخ فازی اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳. *فرض کنید V , W فضاهای برداری حقیقی باشند نگاشت زوج $f : V \to W$ در رابطه (۱) صدق می‌کند، اگر و تنها اگر نگاشت $f : V \to W$ درجه دوم پنسن باشد، به عبارت دیگر برای هر $x, y \in V$ رابطه*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{x-y}{2}\right)=f(x)+f(y)$$

برقرار باشد.

برهان: فرض کنید $f : V \to W$ در رابطه (۱) صدق کند چون $f : V \to W$ زوج است، برای هر $x \in V$, $f(-x) = f(x)$. بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{x-y}{2}\right)=f(x)+f(y)$$

برای هر $x, y \in V$ برقرار است.
حال برای اثبات عکس، فرض کنیم که $f : V \to W$ درجه دوم پنسن باشد. چون $f : V \to W$ زوج است. برای هر $x \in V$, $f(-x) = f(x)$ بنابراین برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)+f\left(\frac{y-x}{2}\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{x-y}{2}\right)=f(x)+f(y)$$

و اثبات تمام است.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $\varphi : X^2 \to [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوری‌که در رابطه*

$$\tilde{\varphi}(x,0) := \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\varphi(2^n x, 0) < \infty$$

برای هر $x \in X$ صدق کند. همچنین فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشته زوج باشد که $f(0) = 0$ به طوری‌که به طور یکنواخت روی $X \times X$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\varphi(x,y)\right)=1 \qquad (7)$$

آنگاه برای هر $x \in X$, $Q(x) := N - \lim_{x+n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{4^n}$ وجود دارد. نگاشت درجه دوم $Q : X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر برای بعضی $\delta > 0$, $\alpha > 0$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$N\left(2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ \delta\varphi(x,y)\right)\geq\alpha, \qquad (8)$$

آنگاه برای هر $x \in X$، داریم:

$$N\left(f\left(x\right)-Q\left(x\right)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}\left(x,\circ\right)\right)\geq\alpha. \tag{۹}$$

علاوه بر این، نگاشت درجه دوم $Q:X\to Y$ نگاشت منحصر به فردی است به طوری‌که به طور یکنواخت روی X داریم:

$$\lim_{x\to\infty}N\left(f\left(x\right)-Q\left(x\right)\ ,\ t\tilde{\varphi}\left(x,\circ\right)\right)=۱$$

اثبات: برای یک $\varepsilon>\circ$ مفروض، با استفاده از رابطه (۷) می‌توان $t_\circ\in\mathbb{R}>\circ$هایی پیدا کرد به طوری که برای هر $t\geq t_\circ\ ,\ t\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)-f\left(x\right)-f\left(y\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(x,y\right)\right)\geq۱-\varepsilon \tag{۱۰}$$

به استقرار روی n برای هر $t\geq t_\circ$ و هر $x\in X\ ,\ n\in\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم:

$$N\left(۴^nf\left(x\right)-f\left(۲^nx\right)\ \ ,\ \ t\sum_{k=۱}^{n}۴^{n-k}\varphi\left(۲^kx,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon. \tag{۱۱}$$

در رابطه (۱۰)، $y=\circ$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow N\left(۲f\left(\frac{x}{۲}\right)+f\left(\frac{x}{۲}\right)+f\left(-\frac{x}{۲}\right)-f\left(x\right)-f\left(\circ\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(x,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon.$$

بنا به زوج بودن تابع f داریم $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$، در نتیجه $f\left(\frac{x}{۲}\right)=f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ و از اینکه $f\left(\circ\right)=\circ$ خواهیم داشت:

$$N\left(۲f\left(\frac{x}{۲}\right)+f\left(\frac{x}{۲}\right)+f\left(-\frac{x}{۲}\right)-f\left(x\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(x,\circ\right)\right)=N\left(۴f\left(\frac{x}{۲}\right)-f\left(x\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(x,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon.$$

با جایگذاری $x=۲x_۱$ برای هر $x\in X$ و هر $t\geq t_\circ$ داریم:

$$N\left(۴f\left(\frac{۲x_۱}{۲}\right)-f\left(۲x_۱\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(۲x_۱,\circ\right)\right)=N\left(۴f\left(x_۱\right)-f\left(۲x_۱\right)\ \ ,\ \ t\varphi\left(۲x_۱,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon.$$

بنابراین رابطه (۱۱) برای $n=۱$ برقرار است.
فرض کنیم که رابطه (۱۱) برای $n\in\mathbb{N}$ برقرار باشد آنگاه برای ثابت می‌کنیم:

$$N\left(۴^{n+۱}f\left(x\right)-f\left(۲^{n+۱}x\right)\ \ ,\ \ t\sum_{k=۱}^{n+۱}۴^{n-k+۱}\varphi\left(۲^kx,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon. \tag{۱۲}$$

حال با اضافه و کم کردن $۴f\left(۲^nx\right)$ در سمت چپ نامساوی (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned}&N\left(۴^{n+۱}f\left(x\right)-f\left(۲^{n+۱}x\right)+۴f\left(۲^nx\right)\ \ ,\ \ t\sum_{k=۱}^{n+۱}۴^{n+۱-k}\varphi\left(۲^kx,\circ\right)\right)\\&\geq\min\left\{N\left(۴^{n+۱}f\left(x\right)-۴f\left(۲^nx\right)\ \ ,\ \ t_\circ\sum_{k=۱}^{n}۴^{n-k}\varphi\left(۲^kx,\circ\right)\right),N\left(۴f\left(۲^nx\right)-f\left(۲^{n+۱}x\right)\ \ ,\ \ t_\circ\sum_{k=۱}^{n}۴^{n-k}\varphi\left(۲^kx,\circ\right)\right)\right\}\\&\geq\min\left\{۱-۴\ ,\ ۱-۴\right\}=۱-\varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین، مساوی (۱۱) برقرار شد. در نامساوی (۱۱)، $t=t_\circ$ قرار می‌دهیم و به ترتیب x,n را در رابطه (۱۱) با $۲^nx\ ,\ p$ جایگزین می‌کنیم.
در نتیجه برای هر n صحیح بزرگتر مساوی صفر و $p>\circ$ خواهیم داشت:

$$N\left(\frac{f\left(۲^nx\right)}{۴^n}-\frac{f\left(۲^{n+p}x\right)}{۴^{n+p}}\ \ ,\ \ \frac{t_\circ}{۴^{n+p}}\sum_{k=۱}^{p}۴^{p-k}\varphi\left(۲^{n+k}x,\circ\right)\right)\geq۱-\varepsilon. \tag{۱۳}$$

از رابطه

$$\tilde{\varphi}(x,\circ) := \sum_{k=1}^{\infty} ۴^{-n}\varphi(۲^n x,\circ) < \infty \qquad (۱۴)$$

و تساوی زیر:

$$\sum_{k=1}^{n} ۴^{-n-k}\varphi\left(۲^{n+k}x,\circ\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x,\circ\right)$$

نتیجه می‌شود که سری فوق همگرا است. با فرض $\varepsilon = \frac{\delta}{t_\circ}$، برای $\delta > \circ$ مفروض، یک $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری‌که برای هر $n \geq n_\circ$, $p > \circ$ داریم:

$$\frac{t_\circ}{۴^{n+p}} \sum_{k=1}^{p} ۴^{p-k}\varphi\left(۲^{n+k}x,\circ\right) < \delta. \qquad (۱۵)$$

حال با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) و با توجه به صعودی بودن نرم فازی N، برای هر $n \geq n_\circ$, $p > \circ$ نتیجه می‌گیریم:

$$N\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n} - \frac{f(۲^{n+p}x)}{۴^{n+p}} \ , \ \delta\right) \geq N\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n} - \frac{f(۲^{n+p}x)}{۴^{n+p}} \ , \ \frac{t_\circ}{۴^{n+p}} \sum_{k=1}^{p} ۴^{p-k}\varphi\left(۲^{n+k}x,\circ\right)\right) \geq ۱ - \varepsilon$$
$$\Rightarrow N\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n} - \frac{f(۲^{n+p}x)}{۴^{n+p}} \ , \ \delta\right) \geq ۱ - \varepsilon$$

بنابراین دنباله $\left\{\frac{f(۲^n x)}{۴^n}\right\}$ در Y کوشی است. چون Y یک فضای باناخ فازی است، دنباله $\left\{\frac{f(۲^n x)}{۴^n}\right\}$ به $Q(x) \in Y$ همگراست، بنابراین می‌توانیم یک نگاشت $Q : X \to Y$ را به صورت

$$Q(x) := N - \lim_{n\to\infty} \frac{f(۲^n x)}{۴^n}$$

تعریف کرد، به عبارت دیگر برای هر $x \in X$, $t > \circ$:
واضح است که $Q : X \to Y$ زوج است.
فرض کنید $x, y \in X$، ثابت $t > \circ$, $\circ < \varepsilon < ۱$. چون $\lim_{n\to\infty} ۴^{-n}\varphi(۲^n x,\circ) = \circ$ یک $n_۱ > n_\circ$ وجود دارد به طوریکه $۴^{-n}\varphi(۲^n x,\circ) < \varepsilon$. (چون $\varphi : X^۲ \to [\circ,\infty)$ تابعی مثبت است، قدرمطلق برداشته می‌شود). با فرض $\varepsilon = \frac{t}{۵t_\circ}$ داریم:

$$۴^{-n}\varphi(۲^n x,\circ) < \frac{t}{۵t_\circ} \Rightarrow t_\circ\varphi(۲^n x,\circ) < ۴^n\frac{t}{۵} \qquad (۱۶)$$

لذا برای هر $n \geq n_۱$ داریم:

$$N\left(۲Q\left(\tfrac{x+y}{۲}\right) + ۲Q\left(\tfrac{x-y}{۲}\right) - Q(x) - Q(y) \ , \ t\right) \geq \min\{N\left(۲Q\left(\tfrac{x+y}{۲}\right) - \frac{۲f\left(۲^n\left(\frac{x+y}{۲}\right)\right)}{۴^n} \ , \ \tfrac{t}{۵}\right)$$
$$, N\left(۲Q\left(\tfrac{x-y}{۲}\right) - \frac{۲f\left(۲^n\left(\frac{x-y}{۲}\right)\right)}{۴^n} \ , \ \tfrac{t}{۵}\right), N\left(Q(x) - \frac{f(۲^n x)}{۴^n} \ , \ \tfrac{t}{۵}\right), N\left(Q(y) - \frac{f(۲^n y)}{۴^n} \ , \ \tfrac{t}{۵}\right)$$
$$, N\left(\frac{۲f\left(۲^n\left(\frac{x+y}{۲}\right)\right)}{۴^n} + \frac{۲f\left(۲^n\left(\frac{x-y}{۲}\right)\right)}{۴^n} - \frac{f(۲^n x)}{۴^n} - \frac{f(۲^n y)}{۴^n} \ , \ \tfrac{t}{۵}\right)\},$$

چهار جمله طرف راست بالا به یک میل می‌کند وقتی که $n \to \infty$، و در مورد جمله بعدی با توجه به $t_\circ\varphi(۲^n x,\circ) < ۴^n\frac{t}{۵}$، صعودی بودن نرم فازی و لم ۱.۳ داریم:

$$N\left(۲f\left(۲^n\left(\frac{x+y}{۲}\right)\right) + ۲f\left(۲^n\left(\frac{x-y}{۲}\right)\right) - f(۲^n x) - f(۲^n y) \ , \ ۴^n\frac{t}{۵}\right) \geq ۱ - \varepsilon$$

در نتیجه برای هر $t > ۰$، خواهیم داشت:

$$N\left(۲Q\left(\frac{x+y}{۲}\right)+۲Q\left(\frac{x-y}{۲}\right)-Q(x)-Q(y)\ ,\ t\right)\geq \min\{۱,۱,۱,۱,۱-\varepsilon\}=۱-\varepsilon$$

چون برای هر $t > ۰$, $N\left(۲Q\left(\frac{x+y}{۲}\right)+۲Q\left(\frac{x-y}{۲}\right)-Q(x)-Q(y)\ ,\ t\right)=۱$، با استفاده از خاصیت دوم تعریف ۱.۲ برای هر $x \in X$ داریم:

$$۲Q\left(\frac{x+y}{۲}\right)+۲Q\left(\frac{x-y}{۲}\right)-Q(x)-Q(y)=۰$$

لذا نگاشت $Q : X \to Y$ درجه دوم ینسن است.
حال فرض کنید برای بعضی δ مثبت و α رابطه (۸) برقرار باشد برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_n(x,۰) := \sum_{k=۱}^{n} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x,۰\right) \tag{۱۷}$$

فرض کنیم $x \in X$ می‌توان برای هر n صحیح و مثبت نتیجه گرفت که:

$$N\left(۴^n f(x)-f(۲^n x)\ ,\ \delta\sum_{k=۱}^{n} ۴^{n-k}\varphi\left(۲^k x,۰\right)\right)\geq \alpha \tag{۱۸}$$

در رابطه با فرض $t > ۰$، به ازای هر $۰ < \alpha < ۱$ و این حقیقت که $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n}-Q(x)\ ,\ t\right)=۱$ داریم:

$$\begin{aligned}&N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\varphi_n(x,۰)+t)\\ &\geq \min\left\{N\left(f(x)-\frac{f(۲^n x)}{۴^n}\ ,\ \delta\varphi_n(x,۰)\right)\ ,\ N\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n}-Q(x)\ ,\ t\right)\right\}\\ &=\min\left\{N\left(۴^n f(x)-f(۲^n x)\ ,\ \delta\sum_{k=۱}^{n} ۴^{n-k}\varphi\left(۲^k x,۰\right)\right)\ ,\ N\left(\frac{f(۲^n x)}{۴^n}-Q(x)\ ,\ t\right)\right\}\geq \min\{\alpha\ ,\ ۱\}=\alpha.\end{aligned}$$

برای $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ مشاهده می‌کنیم که:

$$N(f(x)-A(x)\ ,\ \delta\varphi_n(x,۰)+t)\geq \alpha.$$

با توجه به پیوستگی تابع $N(f(x)-A(x)\ ,\ ۰)$ می‌بینیم که:

$$N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰)+t)\geq \alpha.$$

با فرض $t \to ۰$ نتیجه می‌گیریم که:

$$N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰))\geq \alpha.$$

برای پایان اثبات، تنها چیزی که برای اثبات باقی می‌ماند ادعای منحصر به فردی است که فرض کنیم A یک نگاشت جمعی دیگری باشد که در روابط (۱) و (۹) صدق می‌کند. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$, $\beta > ۰$ مفروض باشند. با استفاده از رابطه (۹) برای Q , A می‌توان $t_۰ > ۰$هایی پیدا کرد به طوری‌که برای هر $x \in X$, $t \geq t_۰$ داشته باشیم:

$$N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰))\geq ۱-\varepsilon \quad , \quad N(f(x)-A(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰))\geq ۱-\varepsilon$$

ثابت $x \in X$ای و $n_۰$ صحیحی را پیدا می‌کنیم طوریکه برای هر $n \geq n_۰$ داشته باشیم:

$$t_۰\sum_{k=n}^{\infty} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x,۰\right) < \frac{\beta}{۲}$$

چون

$$\sum_{k=n}^{\infty} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x, ۰\right) = \frac{۱}{۴^n}\sum_{k=n}^{\infty} ۴^{-(k-n)}\varphi\left(۲^{k-n}\left(۲^n x\right), ۰\right) = \frac{۱}{۴^n}\sum_{m=۰}^{\infty} ۴^{-m}\varphi\left(۲^{km}\left(۲^n x\right), ۰\right) = \frac{۱}{۴^n}\tilde{\varphi}\left(۲^n x, ۰\right)$$

با توجه به این نکته که $Q\left(rx\right) = r^۲Q\left(x\right)$ و $A\left(rx\right) = r^۲A\left(x\right)$ داریم:

$$N\left(Q\left(x\right) - A\left(x\right)\ ,\ \beta\right) = N\left(Q\left(x\right) - A\left(x\right) - \frac{f\left(۲^n x\right)}{۴^n} + \frac{f\left(۲^n x\right)}{۴^n}\ ,\ \frac{\beta}{۲} + \frac{\beta}{۲}\right)$$
$$\geq \min\left\{N\left(f\left(۲^n x\right) - Q\left(۲^n x\right)\ ,\ ۴t_{۰}\sum_{k=n}^{\infty} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x, ۰\right)\right),\ N\left(A\left(۲^n x\right) - f\left(۲^n x\right)\ ,\ ۴t_{۰}\sum_{k=n}^{\infty} ۴^{-k}\varphi\left(۲^k x, ۰\right)\right)\right\}$$
$$= \min\left\{N\left(f\left(۲^n x\right) - Q\left(۲^n x\right)\ ,\ t_{۰}\tilde{\varphi}\left(۲^n x, ۰\right)\right),\ N\left(A\left(۲^n x\right) - f\left(۲^n x\right)\ ,\ t_{۰}\tilde{\varphi}\left(۲^n x, ۰\right)\right)\right\} \geq ۱ - \varepsilon.$$

و این نتیجه می‌دهد که برای هر $\beta > ۰$ ، $N\left(Q\left(x\right) - A\left(x\right)\ ,\ \beta\right) = ۱$. بنابراین برای هر $x \in X$ داریم: $Q\left(x\right) = A\left(x\right)$.

نتیجه ۳.۳. *فرض کنید $\theta \geq ۰$ ، p یک عدد حقیقی با $p < ۲$ باشد. همچنین فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشت زوج با $f\left(۰\right) = ۰$ باشد طوریکه به طور یکنواخت روی $X \times X$ داشته باشیم:*

$$\lim_{n\to\infty} N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f\left(x\right) - f\left(y\right)\ ,\ t\theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)\right) = ۱ \qquad (۱۹)$$

آنگاه برای هر $x \in X$ ، $Q\left(x\right) := N - \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(۲^n x\right)}{۴^n}$ وجود دارد و نگاشت درجه دوم $Q : X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر برای بعضی $\delta > ۰$ ، $\alpha > ۰$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f\left(x\right) - f\left(y\right)\ ,\ \delta\theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)\right) \geq \alpha \qquad (۲۰)$$

آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$N\left(f\left(x\right) - Q\left(x\right)\ ,\ \frac{۲^p}{۴ - ۲^p}\delta\theta\|x\|^p\right) \geq ۰$$

علاوه بر این، نگاشت درجه دوم $Q : X \to Y$ نگاشت منحصر به فردی است به طوری‌که به طور یکنواخت روی X داریم:

$$\lim_{t\to\infty} N\left(f\left(x\right) - Q\left(x\right)\ ,\ \frac{۲^p}{۴ - ۲^p}t\theta\|x\|^p\right) = ۱ \qquad (۲۱)$$

برهان تعریف کنید $\varphi\left(x, y\right) := \theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$ و قضیه ۲.۳ را به کار ببرید.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $f : X^۲ \to [۰, \infty)$ یک تابع باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:*

$$\tilde{\varphi}\left(x, ۰\right) := \sum_{n=۰}^{\infty} ۴^n\varphi\left(\frac{x}{۲^n}, ۰\right) < \infty \qquad (۲۲)$$

همچنین فرض کنید $Q : X \to Y$ نگاشت زوج باشد که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{t\to\infty} N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f\left(x\right) - f\left(y\right)\ ,\ t\varphi\left(x, y\right)\right) = ۱$$

و $f\left(۰\right) = ۰$ آنگاه برای هر $x \in X$ ، $Q\left(x\right) := N - \lim_{n\to\infty} ۴^n f\left(\frac{x}{۲^n}\right)$ وجود دارد و نگاشت درجه دوم $Q : X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای بعضی $\delta > ۰$ ، $\alpha > ۰$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f\left(x\right) - f\left(y\right)\ ,\ \delta\varphi\left(x, y\right)\right) \geq \alpha \qquad (۲۳)$$

آنگاه برای هر $x \in X$، خواهیم داشت:

$$N\left(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,\circ)\right)\geq\alpha$$

علاوه بر این، نگاشت درجه دوم $Q:X\to Y$ نگاشت منحصر به فردی است به طوری‌که به طور یکنواخت روی X، داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(f(x)-Q(x)\ ,\ t\tilde{\varphi}(x,\circ)\right)=1 \qquad (۲۴)$$

برهان برای $\varepsilon>\circ$ مفروض، با استفاده از رابطه (۷) می‌توان $t_\circ\in\mathbb{R}>\circ$ پیدا کرد به طوری که برای هر $t\geq t_\circ\ ,\ t\in\mathbb{R}$، داشته باشیم:

$$N\left(2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)+f\left(\frac{y-x}{2}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\varphi(x,y)\right)\geq 1-\varepsilon. \qquad (۲۵)$$

با استقرار روی n برای هر $x\in X\ ,\ t\geq t_\circ$ داریم $n\in$:

$$N\left(f(2^{-n}x)+4^{-n}f(x)\ ,\ t\sum_{k=\circ}^{n-1}4^{-n}/4^{k}\varphi\left(\frac{x}{2^k},\circ\right)\right)\geq 1-\varepsilon. \qquad (۲۶)$$

در نامساوی بالا، $t=t_\circ$ قرار می‌دهیم و به ترتیب با جایگذاری n و x در رابطه بالا با p و $2^{-n}x$ داریم:

$$N\left(4^{n+p}f\left(2^{-(n+p)}x\right)+4^{n}f(2^{-n}x)\ ,\ 4^{n+p}t_\circ\sum_{k=\circ}^{p-1}4^{k-p}\varphi\left(\frac{x}{2^{k+n}},\circ\right)\right)\geq 1-\varepsilon. \qquad (۲۷)$$

از رابطه (۲۲) و تساوی زیر:

$$\sum_{k=\circ}^{p-1}4^{n+k}\varphi\left(\frac{x}{2^{n+k}},\circ\right)=\sum_{k=n}^{n+p-1}4^{k}\varphi\left(\frac{x}{2^k},\circ\right)$$

نتیجه می‌گیریم که برای یک $\delta>\circ$ مفروض یک $n_\circ\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\geq n_\circ$ و $p>\circ$ داریم:

$$4^{n+p}t_\circ\sum_{k=\circ}^{p-1}4^{k-p}\varphi\left(\frac{x}{2^{n+k}},\circ\right)<\delta. \qquad (۲۸)$$

حال با استفاده از روابط (۹) و (۲۸) با توجه به صعودی بودن نرم فازی N برای هر $n\geq n_\circ$ و هر $p>\circ$ نتیجه می‌گیریم:

$$N\left(4^{n+p}f\left(2^{-(n+p)}x\right)-4^{n}f(2^{-n}x)\ ,\ \delta\right)\geq 1-\varepsilon$$

بنابراین دنباله $\{4^nf(2^{-n}x)\}$ در Y کوشی است و چون Y یک فضای باناخ فازی است و دنباله $\{4^nf(2^{-n}x)\}$ به بعضی $Q(x)\in Y$ همگراست. بنابراین می‌توان یک نگاشت $Q:X\to Y$ را به صورت $Q(x):=N-\lim_{n\to\infty}4^nf\left(\frac{x}{2^n}\right)$ تعریف کرد، به عبارت دیگر برای هر $x\in X\ ,\ t>\circ$،

$$\lim_{n\to\infty}N\left(4^nf\left(\frac{x}{2^n}\right)-Q(x)\ ,\ t\right)=1$$

واضح است که $Q:X\to Y$ زوج است. چون $f:X\to Y$ زوج است.

فرض کنیم $x,y\in X$. ثابت $t>\circ\ ,\ \circ<\varepsilon<1$ را در نظر می‌گیریم. چون $\lim_{n\to\infty}4^n\varphi\left(\frac{x}{2^n},\circ\right)=\circ$ وجود دارد به طوریکه $n_1>n_\circ$ $4^n\varphi\left(\frac{x}{2^n},\circ\right)<\varepsilon$، با فرض $\varepsilon=\frac{t}{5t_\circ}$ برای هر $n\geq n_1$ داریم:

$$4^n\varphi\left(\frac{x}{2^n},\circ\right)<\frac{t}{5t_\circ}\Rightarrow t_\circ\varphi\left(\frac{x}{2^n},\circ\right)<4^{-n}\frac{t}{5} \qquad (۲۹)$$

لذا برای هر $n \geq n_1$ داریم:

$$N\left(2Q\left(\frac{x+y}{2}\right)+2Q\left(\frac{x-y}{2}\right)-Q(x)-Q(y)\ ,\ t\right) \geq \min\{N\left(2Q\left(\frac{x+y}{2}\right)-2/4^n f\left(2^{-n}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\ ,\ \frac{t}{5}\right)$$
$$,\ N\left(2Q\left(\frac{x-y}{2}\right)-2/4^n f\left(2^{-n}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\ ,\ \frac{t}{5}\right),\ N\left(Q(x)-4^n f(2^{-n}x)\ ,\ \frac{t}{5}\right),\ N\left(Q(y)-4^n f(2^{-n}y)\ ,\ \frac{t}{5}\right)$$
$$,\ N\left(2/4^n f\left(2^{-n}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)+2/4^n f\left(4^{-n}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)-4^n f(2^{-n}x)-4^n f(2^{-n}y)\ ,\ \frac{t}{5}\right)\}.$$

چهار عبارت اول سمت راست نامساوی بالا وقتی که n به سمت بی‌نهایت می‌رود، به سمت ۱ میل می‌کند، و عبارت پنجم بنا به صعودی بودن و نامساوی (۲۹) خواهیم داشت:

$$N\left(2Q\left(\frac{x+y}{2}\right)+2Q\left(\frac{x-y}{2}\right)-Q(x)-Q(y)\ ,\ t\right) \geq \min\{1,1,1,1,1-\varepsilon\} = 1-\varepsilon$$

چون برای هر $t > 0$ ، $N\left(2Q\left(\frac{x+y}{2}\right)+2Q\left(\frac{x-y}{2}\right)-Q(x)-Q(y)\ ,\ t\right) = 1$. با استفاده از قسمت دوم تعریف (۱.۲) برای هر $x \in X$ ، $2Q\left(\frac{x+y}{2}\right)+2Q\left(\frac{x-y}{2}\right)-Q(x)-Q(y) = 0$ لذا نگاشت $Q : X \to Y$ درجه دوم پنسن است.
حال فرض کنیم برای δهای مثبت و α، نامساوی (۲۳) برقرار باشد. برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_{n-1}(x,0) := \sum_{k=0}^{n-1} 4^k \varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right).$$

با دلایل مشابه در ابتدای اثبات، از نامساوی (۲۳) برای هر n صحیح مثبت می‌توان نتیجه گرفت که:

$$N\left(f(2^{-n}x)-4^{-n}f(x)\ ,\ \delta\sum_{k=0}^{n-1}4^{k-n}\varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right)\right) \geq \alpha \qquad (30)$$

فرض کنیم $t > 0$، و این حقیقت که $\lim_{n\to\infty} N(4^n f(2^n x)-Q(x)\ ,\ t) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
&N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\varphi_{n-1}(x,0)+t)\\
&\geq \min\{N(f(x)-4^n f(2^{-n}x)\ ,\ \delta\varphi_{n-1}(x,0))\ ,\ N(4^n f(2^{-n}x)-Q(x)\ ,\ t)\}\\
&= \min\left\{N\left(4^{-n}f(x)-f(2^{-n}x)\ ,\ \delta\sum_{k=0}^{n-1}4^{k-n}\varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right)\right)\ ,\ N(4^n f(2^{-n}x)-Q(x)\ ,\ t)\right\}\\
&\geq \min\{\alpha,1\} = \alpha.
\end{aligned}$$

برای $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ و با توجه به پیوستگی تابع $N(f(x)-A(x)\ ,\ 0)$ و با فرض $t \to 0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$N(f(x)-Q(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,0)) \geq \alpha.$$

برای پایان اثبات، تنها چیزی که باقی می‌ماند اثبات ادعای منحصر به فردی است. فرض کنیم T نگاشت جمعی دیگری باشد که در روابط (۱) و (۲۴) صدق می‌کند. ثابت $\beta > 0$ ، $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه (۲۴) برای نگاشت‌های A و T می‌توان $t_0 > 0$یی پیدا کرد طوریکه برای هر $x \in X$ ، $t \geq t_0$ داشته باشیم:

$$N(f(x)-Q(x)\ ,\ t\tilde{\varphi}(x,0)) \geq 1-\varepsilon\ ,\ N(f(x)-T(x)\ ,\ t\tilde{\varphi}(x,0)) \geq 1-\varepsilon.$$

n_0 ، $x \in X$ صحیحی را پیدا می‌کنیم طوریکه برای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم:

$$t_0\sum_{k=n}^{\infty}4^k\varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right) < \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta > 2t_0\sum_{k=n}^{\infty}4^k\varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right).$$

چون

$$\sum_{k=n}^{\infty}4^k\varphi\left(\frac{x}{2^k},0\right) = \sum_{k=n}^{\infty}4^k/4^n/4^n\varphi\left(2^{-n}/2^n/2^{-k}x,0\right).$$

در نتیجه داریم:

$$۴^n \sum_{k=n}^{\infty} ۴^{k-n} \varphi\left(\frac{۲^{-n}x}{۲^{k-n}}, ۰\right) = ۴^n \sum_{m=۰}^{\infty} ۴^m \varphi\left(\frac{x}{۲^m\,(۲^n)}, ۰\right) = ۴^n \tilde{\varphi}\left(\frac{x}{۲^n}, ۰\right).$$

با توجه به این نکته که $T(rx) = r^۲ T(x)\ ,\ Q(rx) = r^۲ Q(x)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&N(Q(x) - T(x)\ ,\ \beta) = N\left(T(x) - Q(x) - ۴^n f(۲^{-n}x) + ۴^n f(۲^{-n}x)\ ,\ \frac{\beta}{۲} + \frac{\beta}{۲}\right)\\
&\geq \min\left\{N\left(۴^n (f(۲^{-n}x) - ۴^{-n} Q(x))\ ,\ \frac{\beta}{۲}\right)\ ,\ N\left(۴^n (۴^{-n} T(x) - f(۲^{-n}x))\ ,\ \frac{\beta}{۲}\right)\right\}\\
&\geq \min\left\{N\left(f(۲^{-n}x) - Q(۲^{-n}x)\ ,\ t_۰\tilde{\varphi}\left(\frac{x}{۲^n}, ۰\right)\right)\ ,\ N\left(T(۲^{-n}x) - f(۲^{-n}x)\ ,\ t_۰\tilde{\varphi}\left(\frac{x}{۲^n}, ۰\right)\right)\right\}\\
&= \min\{N(f(x_۱) - Q(x_۱)\ ,\ t_۰\tilde{\varphi}(x_۱, ۰))\ ,\ N(T(x_۱) - f(x_۱)\ ,\ t_۰\tilde{\varphi}(x_۱, ۰))\} \geq \min\{۱ - \varepsilon\ ,\ ۱ - \varepsilon\} = ۱ - \varepsilon.
\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد برای هر $\beta > ۰$ ، $N(Q(x) - T(x)\ ,\ \beta) = ۱$ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم: $Q(x) = T(x)$

نتیجه ۵.۳. *فرض کنید $\theta \geq ۰$ و p یک عدد حقیقی با $p > ۲$ باشد. همچنین فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشت زوج باشد به طوری که در رابطه زیر صدق کند:*

$$\lim_{n\to\infty} N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f(x) - f(y)\ ,\ t\theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)\right) = ۱$$

و $f(۰) = ۰$ آنگاه برای هر $x \in X$ ، $Q(x) := N - \lim_{n\to\infty} ۴^n f\left(\frac{x}{۲^n}\right)$ وجود دارد و نگاشته درجه دوم $Q : X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر برای بعضی $\delta > ۰$ ، $\alpha > ۰$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) - f(x) - f(y)\ ,\ \delta\theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)\right) \geq \alpha \qquad (۳۱)$$

آنگاه برای هر $x \in X$، داریم:

$$N\left(f(x) - Q(x)\ ,\ \frac{۲^p}{۲^p - ۴}\delta\theta\|x\|^p\right) \geq \alpha$$

علاوه بر این، نگاشت درجه دوم $Q : X \to Y$ نگاشت منحصر به فردی است به طوری‌که به طور یکنواخت روی X، داریم:

$$\lim_{t\to\infty} N\left(f(x) - Q(x)\ ,\ \frac{۲^p}{۲^p - ۴}t\theta\|x\|^p\right) = ۱ \qquad (۳۲)$$

برهان تعریف کنید $\varphi(x, y) := \theta\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$ و قضیه ۴.۳ را به کار ببرید تا نتیجه حاصل شود.

۴. تعمیم پایداری هایرز ـ اولام معادله تابعی (۱): در حالت فرد

در این بخش، تعمیم پایداری هایرز ـ اولام از معادله تابعی (۱) در فضاهای باناخ فازی برای حالت فرد را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۴. *فرض کنید V ، W فضاهای برداری حقیقی باشند، نگاشت فرد $f : V \to W$ برای هر $x, y \in V$ در شرط زیر صدق می‌کند:*

$$۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) + f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) = f(x) + f(y)$$

اگر و فقط اگر نگاشت $f : V \to W$ جمعی ینسن باشد، به عبارت دیگر برای هر $x, y \in V$، $۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right) = f(x) + f(y)$ برقرار باشد.

برهان فرض کنیم که $f : V \to W$ در رابطه (۱) صدق کند. چون $f : V \to W$ فرد است، برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$f\left(\frac{x-y}{۲}\right) + f\left(\frac{y-x}{۲}\right) = ۰$$

بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که $۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)=f(x)+f(y)$ برای هر $x,y\in V$ برقرار است.
حال برای اثبات عکس، فرض کنیم که $f:V\to W$ جمعی ینسن باشد چون $f:V\to W$ فرد است برای هر $x\in X$ داریم: $f(-x)=f(x)$.
بنابراین برای هر $x,y\in V$، یک‌بار X را به $-x$ و یک بار y را به $-y$ تبدیل می‌کنیم.

$$۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)=f(x)+f(y) \quad (۱)$$
$$\xrightarrow{x\to -x} ۲f\left(\frac{-x+y}{۲}\right)=f(-x)+f(y)\Rightarrow ۲f\left(\frac{y-x}{۲}\right)=-f(x)+f(y) \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{y\to -y} ۲f\left(\frac{x-y}{۲}\right)=f(x)+f(-y)\Rightarrow ۲f\left(\frac{x-y}{۲}\right)=f(x)-f(y) \quad (۳)$$
$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)=f(y) \quad (۴)$$
$$\xrightarrow{(۱)+(۳)} f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)=f(x) \quad (۵)$$
$$\xrightarrow{(۴)+(۵)} f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)=f(x)+f(y).$$

و اثبات تمام است.

قضیه ۲.۴. *فرض کنید $\varphi=x^{۲}\to[۰,\infty)$ یک تابع باشد به طوری‌که برای هر $x\in X$ داشته باشیم:*

$$\tilde{\varphi}(x,۰):=\sum_{n=۰}^{\infty}۲^{-n}\varphi(۲^{n}x,۰)<\infty \quad (۳۳)$$

همچنین فرض کنید $f:X\to Y$ نگاشت فرد باشد به طوری‌که به طور یکنواخت روی $X\times X$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\varphi(x,y)\right)=۱ \quad (۳۴)$$

آنگاه به ازای هر $x\in X$ ، $A(x):=N-\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{۲^{n}}\right)$ وجود دارد و نگاشت جمعی $A:X\to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای بعضی $\alpha>۰$ ، $\delta>۰$ و برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ \delta\varphi(x,y)\right)\geq\alpha \quad (۳۵)$$

آنگاه برای هر $x\in X$ داریم:

$$N(f(x)-A(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰))\geq\alpha \quad (۳۶)$$

علاوه بر این، نگاشت جمعی $A:X\to Y$ نگاشت منحصر به فردی است که به طوری‌که روی X داریم:

$$\lim_{t\to\infty}N(f(x)-A(x)\ ,\ t\tilde{\varphi}(x,۰))=۱ \quad (۳۷)$$

اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیه ۲.۳ است.

نتیجه ۳.۴. *فرض کنید $\theta\geq۰$ ، p یک عدد حقیقی با $۰<p<۱$ باشد، همچنین فرض کنید $f:X\to Y$ نگاشت فرد باشد به طوری‌که به طور یکنواخت روی $X\times X$ داشته باشیم:*

$$\lim_{n\to\infty}N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\theta\left(\|x\|^{p}+\|y\|^{p}\right)\right)=۱ \quad (۳۸)$$

آنگاه برای هر $x\in X$ ، $A(x):=N-\lim_{n\to\infty}\frac{f(۲^{n}x)}{۲^{n}}$یی وجود دارد و نگاشت جمعی $A:X\to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که برای بعضی $\alpha>۰$ ، $\delta>۰$ و برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ \delta\theta\left(\|x\|^{p}+\|y\|^{p}\right)\right)\geq\alpha.$$

آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$N\left(f(x)-A(x)\ ,\ \frac{۲^p}{۲-۲^p}\delta\theta\|x\|^p\right)\geq\alpha$$

علاوه بر این، نگاشت جمعی $A:X\to Y$ نگاشت منحصر به فردی است به طوری‌که به طور یکنواخت روی X، داریم:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(f(x)-A(x)\ ,\ \frac{۲^p}{۲-۲^p}t\theta\|x\|^p\right)=۱$$

برهان: تعریف کنید $\varphi(x,y):=\theta\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$ و قضیه ۲.۴ را به کار ببرید.

قضیه ۴.۴. *فرض کنید $\varphi=x^۲\to[۰,\infty)$ نگاشت فرد باشد به طوری‌که برای هر $x\in X$، داشته باشیم:*

$$\tilde{\varphi}(x,۰):=\sum_{n=۰}^{\infty}۲^{-n}\varphi(۲^nx,۰)<\infty \qquad (۳۹)$$

همچنین فرض کنید $f:X\to Y$ نگاشت فرد باشد به طوری‌که به طور یکنواخت روی $X\times X$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\varphi(x,y)\right)=۱$$

آنگاه برای هر $x\in X$, $A(x):=N-\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{۲^n}\right)$ یی وجود دارد و نگاشت جمعی $A:X\to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر برای بعضی $\delta>۰$, $\alpha>۰$ و برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ \delta\varphi(x,y)\right)\geq\alpha$$

آنگاه برای هر $x\in X$ داریم:

$$N\left(f(x)-A(x)\ ,\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰)\right)\geq\alpha$$

علاوه بر این نگاشت جمعی $A:X\to Y$ نگاشت منحصر به فردی است که به طور یکنواخت روی X داریم:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(f(x)-A(x)\ ,\ t\tilde{\varphi}(x,۰)\right)=۱$$

برهان: برای $\varepsilon>۰$ مفروض، با استفاده از (۳۴) می‌توان $t_۰\in\mathbb{R}>۰$هایی را پیدا کرد به طوری که برای هر $t\geq t_۰$, $t\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y)\ ,\ t\varphi(x,y)\right)\geq۱-\varepsilon. \qquad (۴۰)$$

با استفاده از استقرار روی n، برای هر $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, $t\geq t_۰$ داریم:

$$N\left(۲^{-n}f(x)-f(۲^{-n}x)\ ,\ t\sum_{k=۰}^{n-۱}۲^{k-n}\varphi\left(\frac{x}{۲^k},۰\right)\right)\geq۱-\varepsilon. \qquad (۴۱)$$

در نامساوی (۴۱)، $t=t_۰$ قرار می‌دهیم و به ترتیب x , n را با p , $\frac{x}{۲^n}$ جایگزین می‌کنیم و برای همه nهای بزرگتر مساوی صفر و $p>۰$، را تأثیر می‌دهیم و داریم:

$$N\left(۲^nf(۲^{-n}x)-۲^{n+p}f\left(۲^{-(n+p)}x\right)\ ,\ ۲^{n+p}t_۰\sum_{k=۰}^{p-۱}\varphi\left(۲^{-(n+k)},۰\right)\right)\geq۱-\varepsilon. \qquad (۴۲)$$

از رابطه (۳۹) و تساوی زیر

$$\sum_{k=۰}^{p-۱} ۲^{n+k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n+k}},۰\right)=\sum_{k=n}^{n+p-۱} ۲^{k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{k}},۰\right)$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر $\delta>۰$ مفروض یک $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $n\geq n_{۰}$, $p>۰$ داریم:

$$t_{۰}\sum_{k=n}^{n+p-۱} ۲^{k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{k}},۰\right)<\delta$$

چون

$$t_{۰}\sum_{k=n}^{n+p-۱} ۲^{k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{k}},۰\right)<\delta\Rightarrow t_{۰}\sum_{k=۰}^{p-۱} ۲^{k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n+k}},۰\right)<\delta$$

داریم:

$$۲^{p}\frac{t_{۰}}{۲^{p}}\sum_{k=۰}^{p-۱} ۲^{n+k}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n+k}},۰\right)<\delta$$

در نتیجه:

$$۲^{n+p}t_{۰}\sum_{k=۰}^{p-۱} ۲^{k-p}\varphi\left(۲^{-(n+k)}x,۰\right)<\delta. \qquad (۴۳)$$

حال با استفاده از روابط (۴۲) و (۴۳) و با توجه به صعودی بودن نرم فازی N نتیجه می‌گیریم:

$$N\left(۲^{n}f\left(۲^{-n}x\right)-۲^{n+p}f\left(۲^{-(n+p)}x\right)\ ,\ \delta\right)\geq ۱-\varepsilon\ \ ,\ \ (\forall n\geq n_{۰}\ ,\ p>۰)$$

بنابراین دنباله $\left\{۲^{n}f\left(\frac{x}{۲^{n}}\right)\right\}$ در Y کوشی است و چون Y یک فضای باناخ فازی است، دنباله $\left\{۲^{n}f\left(\frac{x}{۲^{n}}\right)\right\}$ به $A(x)\in Y$ همگراست. بنابراین می‌توان یک نگاشت $A:X\to Y$ را به صورت $A(x):=N-\lim_{n\to\infty} ۲^{n}f\left(\frac{x}{۲^{n}}\right)$ تعریف کرد، به عبارت دیگر برای هر $x\in X\ ,\ t>۰$،

$$\lim_{n\to\infty} N\left(۲^{n}f\left(\frac{x}{۲^{n}}\right)-A(x)\ ,\ t\right)=۱$$

واضح است که $A:X\to Y$ فرد است چون $f:X\to Y$ فرد است.
فرض کنیم $x,y\in X$، ثابت $t>۰$, $۰<\varepsilon<۱$ را در نظر می‌گیریم. چون

$$\lim_{n\to\infty} ۲^{n}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n}},۰\right)=۰$$

یک $n_{۱}>n_{۰}$ وجود دارد به طوری‌که $۲^{n}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n}},۰\right)<\varepsilon$. فرض کنیم $\varepsilon=\frac{t}{۴t_{۰}}$ باشد برای هر $n\geq n_{۱}$، داریم:

$$۲^{n}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n}},۰\right)<\frac{t}{۴t_{۰}}\Rightarrow t_{۰}\varphi\left(\frac{x}{۲^{n}},۰\right)<۲^{-n}\frac{t}{۴}. \qquad (۴۴)$$

لذا برای هر $n\geq n_{۱}$ داریم:

$$\begin{aligned}&N\left(۲A\left(\tfrac{x+y}{۲}\right)-A(x)-A(y)\ ,\ t\right)\geq\\&\min\{N\left(۲A\left(\tfrac{x+y}{۲}\right)-۲^{n}/۲f\left(۲^{-n}\left(\tfrac{x+y}{۲}\right)\right)\ ,\ \tfrac{t}{۴}\right)\ ,\ N\left(A(x)-۲^{n}f\left(\tfrac{x}{۲^{n}}\right)\ ,\ \tfrac{t}{۴}\right)\\&\ ,\ N\left(A(y)-۲^{n}f\left(\tfrac{y}{۲^{n}}\right)\ ,\ \tfrac{t}{۴}\right)\ ,\ N\left(۲f\left(۲^{-n}\left(\tfrac{x+y}{۲}\right)\right)-f\left(\tfrac{x}{۲^{n}}\right)-f\left(\tfrac{y}{۲^{n}}\right)\ ,\ ۲^{-n}\tfrac{t}{۴}\right)\}.\end{aligned}$$

سه عبارت اول سمت راست نامساوی بالا وقتی که n به سمت بی‌نهایت می‌رود به سمت ۱ میل می‌کند. در عبارت چهارم بنا به صعودی بودن، رابطه (۴۱) و لم ۱.۴ داریم:

$$N\left(۲f\left(۲^{-n}\left(\frac{x+y}{۲}\right)\right)-f\left(\frac{x}{۲^n}\right)-f\left(\frac{y}{۲^n}\right),\ ۲^{-n}\frac{t}{۴}\right)\geq ۱-\varepsilon.$$

در نتیجه برای هر $t>۰$، خواهیم داشت:

$$N\left(۲S\left(\frac{x+y}{۲}\right)-A(x)-A(y),\ t\right)\geq \min\{۱,۱,۱,۱-\varepsilon\}=۱-\varepsilon \quad , \quad ۰<\varepsilon<۱$$

چون برای هر $t>۰$, $N\left(۲A\left(\frac{x+y}{۲}\right)-A(x)-A(y),\ t\right)=۱$ با استفاده از قسمت دوم تعریف ۱.۲ برای هر $x\in X$، داریم: $۲A\left(\frac{x+y}{۲}\right)-A(x)-A(y)=۰$ لذا نگاشت $A:X\to Y$ جمعی ینسن است.
حال فرض کنیم برای δ مثبتی و α رابطه زیر برقرار باشد:

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f(x)-f(y),\ \delta\varphi(x,y)\right)\geq\alpha. \tag{۴۵}$$

برای هر $x\in X$، فرض کنیم:

$$\varphi_{n-۱}(x,۰):=\sum_{k=۰}^{n-۱}۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲^k},۰\right)$$

فرض کنیم $x\in X$ با دلایل مشابه در ابتدای اثبات، می‌توان از رابطه (۴۴) برای هر n صحیح مثبت نتیجه گرفت که:

$$N\left(۲^{-n}f(x)-f(۲^{-n}x)-,\ \delta\sum_{k=۰}^{n-۱}۲^{k-n}\varphi\left(\frac{x}{۲^k},۰\right)\right)\geq\alpha \tag{۴۶}$$

فرض کنیم $t>۰$، به ازای هر $۰<\alpha<۱$ و این حقیقت که $\lim_{n\to\infty}N(۲^nf(۲^{-n}x)-A(x),\ t)=۱$ داریم:

$$\begin{aligned}&N(f(x)-A(x),\ \delta\varphi_{n-۱}(x,۰)+t)\\&\geq\min\left\{N\left(f(x)-۲^nf\left(\frac{x}{۲^n}\right),\ \delta\varphi_{n-۱}(x,۰)\right),\ N\left(۲^nf\left(\frac{x}{۲^n}\right)-A(x),\ t\right)\right\}\\&=\min\left\{N\left(۲^{-n}f(x)-f(۲^{-n}x),\ \delta\sum_{k=۰}^{n-۱}۲^{k-n}\varphi\left(\frac{x}{۲^k},۰\right)\right),\ N(۲^nf(۲^{-n}x)-A(x),\ t)\right\}\\&\geq\min\{\alpha,۱\}=\alpha.\end{aligned}$$

برای $n\in\mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ مشاهده می‌شود:

$$N(f(x)-A(x),\ \delta\varphi_{n-۱}(x,۰)+t)\geq\alpha$$

با توجه به پیوستگی تابع $N(f(x)-A(x),\ ۰)$ می‌بینیم که

$$N(f(x)-A(x),\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰)+t)\geq\alpha$$

با فرض $t\to۰$ نتیجه می‌گیریم که

$$N(f(x)-A(x),\ \delta\tilde{\varphi}(x,۰))\geq\alpha.$$

برای پایان دادن به اثبات، تنها چیزی که باقی می‌ماند، ادعای منحصر به فردی است. فرض کنیم T نگاشت جمعی دیگری باشد که در روابط (۱) و (۴۵) صدق می‌کند. فرض کنیم $C>۰$, $\varepsilon>۰$ مفروض باشند، با استفاده از رابطه (۴۵) برای نگاشت‌های A , T می‌توان بعضی $t_۰>۰$ برای هر $x\in X$, $t\geq t_۰$ پیدا کرد به طوریکه:

$$N(f(x)-A(x),\ t\tilde{\varphi}(x,۰))\geq۱-\varepsilon\ ,\ N(f(x)-A(x),\ t\tilde{\varphi}(x,۰))\geq۱-\varepsilon.$$

برای ثابتی مانند $x \in X$, $n_{\circ}$ صحیح می‌توان $n \geq n_{\circ}$ را پیدا کرد به طوریکه:

$$t_{\circ}\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right) < \frac{C}{۲} \Rightarrow C > ۲t_{\circ}\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right).$$

در نتیجه:

$$۲^{-n-۱}C > ۲^{-n}{}_{/}{}۲^{-۱}{}_{/}{}۲t_{\circ}\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right) \Rightarrow ۲^{-n-۱}C > ۲^{-n}t_{\circ}\sum_{k=\circ}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right)$$

چون

$$\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right) = \sum_{k=n}^{\infty} ۲^n{}_{/}{}۲^{-n}{}_{/}{}۲^k\varphi\left(۲^{-k}{}_{/}{}۲^n{}_{/}{}۲^{-n}x,\circ\right),$$

در نتیجه داریم:

$$۲^n\sum_{k=n}^{\infty} ۲^{k-n}\varphi\left(۲^{-(k-n)}.\left(۲^{-n}x\right),\circ\right) = ۲^n\sum_{k=n}^{\infty} ۲^m\varphi\left(۲^{-m}\left(۲^{-n}x\right),\circ\right) = ۲^n\tilde{\varphi}\left(۲^{-n}x,\circ\right).$$

داریم:

$$\begin{aligned}
&N\left(T\left(x\right)-A\left(x\right)\ ,\ C\right) = N\left(T\left(x\right)-A\left(x\right)\ ,\ C\right) = N\left(T\left(x\right)-A\left(x\right)-۲^nf\left(۲^{-n}x\right)+۲^nf\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ \frac{C}{۲}+\frac{C}{۲}\right)\\
&\geq \min\left\{N\left(f\left(۲^{-n}x\right)-۲^{-n}A\left(x\right)\ ,\ ۲^{-n}{}_{/}{}۲^{-۱}C\right)\ ,\ N\left(۲^{-n}T\left(x\right)-f\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ ۲^{-n}{}_{/}{}۲^{-۱}C\right)\right\}\\
&\geq \min\left\{N\left(f\left(۲^{-n}x\right)-A\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ ۲^{-n}t_{\circ}\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right)\right)\right.\\
&\left.\ ,\ N\left(T\left(۲^{-n}x\right)-f\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ ۲^{-n}t_{\circ}\sum_{k=n}^{\infty} ۲^k\varphi\left(\frac{x}{۲k},\circ\right)\right)\right\}\\
&= \min\left\{N\left(f\left(۲^{-n}x\right)-A\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ t_{\circ}\tilde{\varphi}\left(۲^{-n}x,\circ\right)\right)\ ,\ N\left(T\left(۲^{-n}x\right)-f\left(۲^{-n}x\right)\ ,\ t_{\circ}\tilde{\varphi}\left(۲^{-n}x,\circ\right)\right)\right\}\\
&= \min\left\{N\left(f\left(x_{۱}\right)-A\left(x_{۱}\right)\ ,\ t\tilde{\varphi}\left(x_{۱},\circ\right)\right)\ ,\ N\left(T\left(x_{۱}\right)-f\left(x_{۱}\right)\ ,\ t\tilde{\varphi}\left(x_{۱},\circ\right)\right)\right\}\\
&\geq \min\left\{۱-\varepsilon\ ,\ ۱-\varepsilon\right\} = ۱-\varepsilon
\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد برای هر $C > \circ$, $N\left(A\left(x\right)-T\left(x\right)\ ,\ C\right) = ۱$ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم: $A\left(x\right) = T\left(x\right)$.

نتیجه ۵.۴. *فرض کنید $\theta \geq \circ$, P یک عدد حقیقی با $p > ۱$ باشد. همچنین فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشت فرد باشد که در رابطه (۳۸) صدق می‌کند. آنگاه برای هر $x \in X$, $A\left(x\right) := N - \lim_{n\to\infty} ۲^nf\left(\frac{x}{۲^n}\right)$ وجود دارد و نگاشت جمعی $A : X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر برای بعضی $\delta > \circ$, $\alpha > \circ$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:*

$$N\left(۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)-f\left(x\right)-f\left(y\right)\ ,\ \delta\theta\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)\right) \geq \alpha$$

آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$N\left(f\left(x\right)-A\left(x\right)\ ,\ \frac{۲^p}{۲^p-۲}\delta\theta\|x\|^p\right) \geq \alpha$$

علاوه بر این، نگاشت جمعی $A : X \to Y$ نگاشت منحصر به فردی است که به طور یکنواخت روی X، داریم:

$$\lim_{t\to\infty} N\left(f\left(x\right)-A\left(x\right)\ ,\ \frac{۲^p}{۲^p-۲}t\theta\|x\|^p\right) = ۱ \qquad (۴۷)$$

برهان: تعریف کنید $\varphi\left(x,y\right) := \theta\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$ و قضیه ۴.۴ را به کار ببرید تا نتیجه حاصل شود.

۵. جمع‌بندی

ما معادله تابعی زیر را در فضاهای باناخ فازی بررسی کردیم

$$۲f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{x-y}{۲}\right)+f\left(\frac{y-x}{۲}\right)=f(x)+f(y) \qquad (۴۸)$$

تعمیم پایداری هایرز–اولام معادله تابعی (۴۸) را در فضاهای باناخ قازی برای حالتی که تابع f زوج و فرد باشد اثبات کردیم.

تشکر و قدردانی

در این بخش از اقای گرجی به واسطه راهنمایی‌هایی که به منظور نگارش این مقاله فرمودند تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع

[1] Tosio Aoki. On the stability of the linear transformation in banach spaces. *Journal of the mathematical society of Japan*, 2(1-2):64–66, 1950.
[2] T Bag and SK Samanta. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 11(3):687–706, 2003.
[3] Tarapada Bag and Syamal Kumar Samanta. Fuzzy bounded linear operators. *Fuzzy sets and Systems*, 151(3):513–547, 2005.
[4] Shih-chuan Cheng and John N Mordeson. Fuzzy linear operators and fuzzy normed linear spaces. in *First International Conference on Fuzzy Theory and Technology Proceedings, Abstracts and Summaries*, pages 193–197, 1992.
[5] Piotr W Cholewa. Remarks on the stability of functional equations. *Aequationes mathematicae*, 27(1):76–86, 1984.
[6] St Czerwik. On the stability of the quadratic mapping in normed spaces. in *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 62, pages 59–64. Springer, 1992.
[7] Clementina Felbin. Finite dimensional fuzzy normed linear space. *Fuzzy sets and Systems*, 48(2):239–248, 1992.
[8] Pascu Gavruta. A generalization of the hyers-ulam-rassias stability of approximately additive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 184(3):431–436, 1994.
[9] AK Katsaras. Fuzzy topological vector spaces ii. *Fuzzy sets and systems*, 12(2):143–154, 1984.
[10] SV Krishna and KKM Sarma. Separation of fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy sets and systems*, 63(2):207–217, 1994.
[11] Th M Rassias. New characterizations of inner product-spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 108(1):95–99, 1984.
[12] Themistocles M Rassias. On the stability of the linear mapping in banach spaces. *Proceedings of the American mathematical society*, 72(2): 297–300, 1978.
[13] Fulvia Skof. Proprieta'locali e approssimazione di operatori. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 53(1):113–129, 1983.
[14] Stanislaw M Ulam. *A collection of the mathematical problems*. number 8. Interscience Publishers. New York, 1960.
[15] Jian-zhong Xiao and Xing-hua Zhu. Fuzzy normed space of operators and its completeness. *Fuzzy sets and Systems*, 133(3):389–399, 2003.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–136، صص. ۵۲۷–۵۳۱

رویکردی هندسی جهت مطالعه‌ی گروه‌های اتومورفیسم

احمدعلی قربان‌پور[آ]

[آ] مربی ریاضی دانشگاه افسری و تربیت پاسداری حسین (ع)

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:

گروه اتومورفیسم
نقطه‌ی انباشتگی مدار مرزی
متریک برگمن [۱]
نقطه شبه‌محدب لِوی [۲]

چکیده

در این مقاله به بررسی مسائلی راجع به گروه‌های خودریختی از دامنه‌های C^n می‌پردازیم. تدوین ایده‌ها کاملاً بر اساس هندسه‌ی متریک است. هم‌چنین برخی از کاربردهای آن را ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

در این مقاله، دامنه‌ها باز و همبند فرض شده‌اند. ما روی C^n کار را انجام می‌دهیم. اگر $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه باشد، آنگاه هر خودریختی از ω، یک یکریختی تحلیلی [۱] از خودش می‌باشد.
مجموعه خودریختی‌های ω، به‌شکل $\mathrm{Aut}(\omega)$ با عملگر ترکیب نگاشت‌ها یک گروه می‌باشد. توپولوژی روی این گروه در مجموعه‌های فشرده، همگرای یکنواخت است. (همچنین به عنوان توپولوژی فشرده–باز شناخته می‌شود). درحقیقت برای دامنه‌ی کراندار، این گروه همیشه یک گروه حقیقی و غیرمختلط است.[۸]
ـ کلاسیک‌ترین نسخه از قضیه بان وانگ [۲] (مراجعه به [۱۶]) این را اذعان می‌کند:
قضیه ۱–۱) گیریم $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه‌ی شبه‌محدب قوی و هموارمرزی باشد. فرض کنید گروه خودریختی ω غیر فشرده باشد. در این صورت ω یک یکریختی تحلیلی به گوی واحد [۳] در C^n می باشد.
بعدها ژان–پیر رُزی [۴] (مراجعه به [۱۳]) نتیجه را به شرح زیر تعمیم داد:
قضیه ۱–۲) $\omega \subseteq C^n$را یک دامنه کراندار در نظر بگیرید. فرض کنید $P \in \delta\omega$ دارای یک همسایگی کراندار U است، که شبه‌محدب قوی است. علاوه‌بر این فرض کنید، فقط $X \in \omega$ وجود دارد، به‌طوری‌که خودریختی‌های φ_j از ωبه‌ازای $j \to \infty$، به $\varphi_j(x) \to P$ همگرا باشند. در این صورت ω یک یکریختی تحلیلی به گوی واحد B در C^n است.
آنچه در مورد فرمول رُزی قابل‌تأمل است، این است‌که بر ویژگی‌های هندسی موضعی $\delta\omega$ در P نتایجی را در مورد هندسه کلی از ω نتیجه می‌دهد.
کار جدیدتر در مقالات ([۷] و [۱۴] و [۱۵])، یک نسخه‌ی متریک از قضیه وانگ/رُزی ارائه کرده است.
این آثار به جای این‌که در مورد خودریختی‌ها باشند، در مورد یکریختی‌های متریک کوبایاشی هستند. یکی از اهداف ما درکارحاضر، ارائه و اثبات نسخه‌ای از این نتیجه کلاسیک است، که هیچ اشاره‌ای به خودریختی یا به شبه‌محدب قوی ندارد.

پست الکترونیک: ahmadali_ghorbanpoor1400@yahoo.com (احمدعلی قربان‌پور)

[1] Biholomorphic
[2] Bun wong
[3] Unit ball
[4] Jean-pierre Rosay

۲. گوی‌های متریک برگمن

در این بخش به دامنه‌های شبه‌محدب قوی، هموارمرزی، توجه خواهیم کرد. ابتدا تعریفی از متریک برگمن ارائه خواهیم داد:

تعریف ۲-۱) متریک برگمن: در هندسه دیفرانسیل متریک برگمن یک متریک خودالحاقی (ارمیتی)[۵] است که می‌تواند روی انواع خاصی از منیفلدهای پیچیده تعریف شود. چون از هسته برگمن[۶] گرفته شده؛ به این نام نامگذاری شده است. فرض کنید $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه باشد و $k(z.w)$ هسته برگمن روی ω باشد. متریک ارمیتی را روی کلاف مماس‌ها[۷] T_zC^n به ازای $z \in \omega$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$g_{ij}(z) := \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \log k(z.z)$$

و طول بردار مماس $\xi \in T_zC^n$ برابر است با $|\xi|_{B.z} := \sqrt{\sum_{i.j=1}^{n} g_{ij}(z)\,\xi_i \overline{\xi}_j}$

در این صورت این متر را، متریک برگمن می نامیم.

ما دامنه ω را با متر برگمن مجهز می‌کنیم (مراجعه به [۱۰]) و این متر را با $(\omega \text{ و } 0)$ F_B^{ω} نمایش می‌دهیم.

تعریف۲-۲) با نماد بالا، ما می‌گوییم دامنه‌ی ω در خواص "یکنواخت سازی متریک"[۸] صدق می‌کند، اگر؛

یک نقطه $P \in \omega$ و یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت $r_j \to \infty$ و یک مجموعه از یکریختی‌های r_j روی گوی متریک $\beta(P.r_j)$ وجود دارند؛ به‌طوری‌که

*تصویر هر φ_j، یک گوی متریک $\beta(P'.r_j)$ است، که فاصله اقلیدسی کمتر از $0 < \delta_j$ از مرز دارد وبه ازای $j \to \infty$، $\delta_j \to \infty$.

حال ما این قضیه‌ی اصلی را خواهیم داشت:

قضیه ۲-۳) گیریم $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه‌ی شبه‌محدب قوی هموار مرزی باشد. اگر فرض کنید ω دارای خواص یکنواخت سازی متریک باشد، آنگاه ω یکریختی تحلیلی به گوی واحد B در C^n است.

تبصره ۲-۴) در این‌جا باید فهمید که در صورت اینکه ω مرزی و دارای گروه خودریختی غیرفشرده باشد، آنگاه یک نتیجه‌ی قدیمی از کارتَن[۹] (مراجعه به[۱۰]) تضمین می‌کند که یک نقطه $Q \in \partial\omega$ ویک دنباله ψ_j از خودریختی‌های تحلیلی از ω وجود دارند؛ به‌طوری‌که به ازای هر نقطه $P \in \omega$ داشته باشیم؛ $\psi_j(P) \to Q$. و البته Q شبه‌محدب قوی است. پرواضح است با (مراجعه به [۱۰]) و همچنین،(مراجعه به [۲]) به این نتیجه می‌رسیم که یک نقطه شبه‌محدب قوی به خوبی توسط یکریختی‌های تحلیلی از گوی واحد B تصویر می شود.

اثبات قضیه قبل این نکات را روشن خواهد کرد.

اثبات قضیه ۲-۳) پر واضح است که مرز هر گوی متریک هموار است؛ (زیرا متر هموار است). هنگامی که R خیلی بزرگ است در واقع $\beta(P.R)$ شبه‌محدب قوی مرزی خواهد بود و این به دلیل قوانین تئوری فِفرمن[۱۰] برای ژئودزیک‌های[۱۱] متریک برگمن است (مراجعه به [۲]).به ازای $R \to \infty$ ؛ $\partial\beta(P.R)$ ، با دامنه $\delta\omega$ هموار نزدیک خواهد شد. بنابَراین $\varphi_j(\delta\beta(P.r_j))$ هم‌چنین شبه‌محدب قوی خواهد بود.

از یک نتیجه قدیمی کوباياشی و نومیزو[۱۲] (مراجعه به [۹]) نتیجه می‌شود، که هر یکریختی از دامنه‌های شبه‌محدب قوی در متریک برگمن، در واقع یا یکریختی تحلیلی هستند یا مزدوج با یکریختی تحلیلی هستند.

بنابراین نگاشت‌های φ_j در تعریف خواص یکنواخت‌سازی متریک ممکن است، به صورت یکریختی تحلیلی در نظر گرفته شوند. با رفتن به دنباله، ما می توانیم فرض کنیم که گوی‌های $\beta(P'_j.r_j)$ به معنای اقلیدسی به یک نقطه‌ی مرزی، همگرا به Q شوند. اکنون به‌خوبی واضح است که (مراجعه به [۲]) تنها با یک مورب پیچیده از شکل لِوی[۱۳]، که یک همسایگی از نقطه مرزی شبه‌محدب قوی Q می‌تواند به صورت یکریختی تحلیلی به گوی با نگاشت ψ_j که مرز تصویر دارای مرتبه چهارم می‌باشد، ترسیم کرد. یک گوی متریک نزدیک یک نقطه شبه محدب قوی مرزی شناخته شده است (مراجعه به[۱۰]) اندازه‌ی $C_{\sqrt{\delta}}$ در جهات عادی (مختلط) و در جهات مماس (مختلط)، اندازه است. که در اینجا δ اندازه‌ی گوی از مرز است. پس وضعیت این‌گونه است که ما یک نگاشت φ_j یکریختی تحلیلی از گوی متریک شبه‌محدب قوی $\beta(P.r_j)$ به گوی متریک شبه‌محدب قوی $\beta(P'.r_j)$ است و یک نگاشت یکریختی تحلیلی نرمال‌کننده هندسی ψ_jبه شکل همسایگی از $\overline{\beta}\left(P'.r_j\right)$ به گوی واحد B است.

حال محاسبه ساده است که ببینیم تبدیل موبیوس [۱۳]، گوی $\psi_j(\varphi_j(\beta\left(P.r_j\right)))$را به یک زیرمجموعه از یک گوی بزرگ در داخل B می‌برد.

در واقع ما می‌توانیم هر مجموعه فشرده بزرگ $K \subseteq B$ را ثابت فرض کنیم و با انتخاب jبه اندازه کافی بزرگ، K را $\lambda_j\psi_j\left(\varphi(\beta\left(P.r_j\right))\right)$

---

[5] Hermitian metric
[6] Bergman kernel
[7] Tangent bundle
[8] Metric Uniformization Property
[9] Cartan
[10] Fefferma's regularity theory
[11] Geodesics
[12] Nomizu
[13] Levi form

می‌پوشاند. اما از آنجایی که $\beta\left(P.r_j\right)$ به پایان رسیده به ω و مجموعه‌های فشرده K به B به پایان رسیده‌اند ما خواهیم دید که حد نگاشت‌های $\lambda_j o\psi_j o\varphi_j$ همگرا به یک یکریختی تحلیلی از ω به B است. که این همان نتیجه مطلوب است.

۳. توصیف هندسی نقاط انباشتگی مدار مرزی

یک قضیه قابل توجه از گرین[14] و کرانتز[15] (مراجعه به [۳]) این را می‌گوید:

قضیه ۳-۱) گیریم $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه هموار مرزی باشد و $P \in \delta\omega$ یک نقطه‌ی انباشتگی مدار مرزی باشد به این معنا که $\varphi_j \in Aut(\omega)$ و یک نقطه $X \in \omega$ به طوری که به ازای $j \to \infty$، $\varphi_j(X) \to P$ همگرا می‌باشد. آنگاه P باید یک نقطه شبه‌محدب لوی است.

اثبات اصلی این قضیه فقط از طریق نظریه تابع کلاسیک است، کاری که ما در اینجا می‌خواهیم انجام دهیم، ارائه یک نمای هندسی از موضوع است.

گزاره ۳-۲) گیریم $\omega \subseteq C^n$ یک دامنه هموار مرزی و $P \in \partial\omega$ یک نقطه انباشتگی مدار مرزی باشد. آنگاه P یک نقطه کامل برای متر کاراتئودوری[16] از ω است.

تبصره ۳-۳) در حقیقت ما می‌توانیم از هر متری در بیان این مورد استفاده کنیم. به ویژه برای مترهای برگمن و گوبایاشی معتبر است. برهان زیر این ادعا را تایید می‌کند.

اثبات گزاره ی ۳-۲) گیریم $X \in \omega$ و $\varphi_j \in Aut(\omega)$ به طوری که $\varphi_j(X) \to P$. حال فرض $r > 0$ ثابت باشد. فرض کنید گوی‌های متریک $\beta\left(\varphi_j(X), r\right)$ را داریم. در صورت لزوم با رفتن به زیر دنباله بعدی ممکن است فرض کنیم که این گوی‌ها دوبه دو مجزا هستند. منحنی را در نظر بگیرید که از نقاط $\{\varphi_j(x)\}$ می‌گذرد به P ختم می‌شود. سپس نتیجه می‌شود که این منحنی با طول بی‌نهایت در متر کاراتئودوری است. از این نظر است که P یک نقطه‌ی کامل برای متریک است.

گزاره ۳-۴) گیریم $\omega \in C^n$ یک دامنه مرزی هموار و $P \in \partial\omega$ یک نقطه کامل از متریک کارتئودوری است. آنگاه P یک نقطه شبه‌محدب لوی است.

اثبات: فرض کنید P یک نقطه شبه‌محدب لوی نباشد. آنگاه شکل لوی در P دارای یک مقدار ویژه منفی است، به توجه به قضیه بسط هارتگز[17] اصل نتیجه می‌گیریم، که یک همسایگی باز از P وجود دارد؛ به‌طوری‌که هر تابع یکریخت تحلیلی از $U \cap \omega$ به U به طور تحلیلی پیوسته است. ولی این نشان می‌دهد که فاصله کاراتئودوری از یک نقطه داخلی $q \in \omega$ تا P متناهی است. بنابراین P نقطه کامل نیست؛ و لذا تناقض با فرض قضیه دارد.

با کنار هم قرار دادن گزاره‌های ۳-۲ و ۳-۴ و قضیه ۳-۱ بدست می‌آید.

۴. نیم پیوستگی از گروه‌های خودریختی

یک قضیه ذکر شده از گرین و کرانتز (ارجاع به [۴]) در زیر توضیح داده شده است. ما ابتدا نیاز داریم یک ایده را تعریف کنیم:

یک دامنه هموار مرزی به راحتی توسط یک تابع تعریف شده $\rho \equiv \rho\omega$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\omega = \{Z \in C^n; \rho\omega(Z) < 0\}$$

که روی $\delta\omega$، $\nabla\rho\omega \neq 0$. می‌توان یک زیرپایه برای توپولوژی روی مجموعه‌ای از دامنه‌های شبه‌محدب قوی هموار مرزی به روی $\forall\varepsilon > 0$

$$u_{\omega_{(0,\varepsilon)}} = \{\omega \subseteq C^n \text{ شبه محدب قوی} \omega; ||\rho\omega - \rho\omega.||_{C^\infty} < \varepsilon\}$$

ما این توپولوژی را توپولوژی C^∞ روی دامنه‌های شبه محدب قوی هموار مرزی می‌نامیم. حال خواهیم داشت:

قضیه ۴-۱) گیریم ω_0 یک دامنه هموار مرزی شبه محدب قوی باشد. در این صورت یک همسایگی O از ω_0 در توپولوژی C^∞ روی گردایه‌ای از دامنه‌های شبه محدب قوی هموار مرزی وجود دارد به طوری که اگر $\omega \in O$ آنگاه؛

* $Aut(\omega)$ یک زیرگروه از $Aut(\omega_0)$ است.

* یک نگاشت غیر تحلیلی $\alpha : \omega \to \omega_0$ در C^∞ وجود دارد به طوری که نگاشت

$$Aut(\omega) \ni \varphi \to \alpha o\varphi o\alpha^{-1} \in Aut(\omega_0)$$

[14] Greene
[15] Krantz
[16] Caratheodory metric
[17] Hartogs's extension phenomenon

یک گروه همریختی تک‌ارزی باشد.
البته اثبات این نتیجه برای بازتولید در اینجا بسیار پیچیده است. ولی ما قصد داریم در مورد ماهیت اثبات، نکاتی را بیان کنیم. الهام گرفتن از قضیه فوق یک کار اساسی (مراجعه به [۱]) از دیوید ایبین[۱۸]، می‌آید نتیجه ابین که برای این منظور در اینجا دوباره فرموله شده است، ممکن است به صور زیر بیان شود:

قضیه ۴-۲) گیریم M یک منیفلد ریمانی[۱۹] فشرده مجهز به متریک g باشد و G گروه یکریختی‌ها از M نسبت به G باشد. $\varepsilon > 0$ وجود دارد؛ اگر $\bar{g}$ یک متریک دیگر روی M باشد به طوریکه $||g - \bar{g}|| < \varepsilon$ به در این صورت گروه یکریختی G از M در متریک $\bar{g}$ یک زیرگروه از گروه یکریختی G از M در متریک g است. همچنین یک α دیفئومورفیسم[۲۰] در C^{∞} از M یک گروه همریختی تک‌ارز باشد.

اثبات قضیه ابین یک کاربرد پیچیده از قضیه تابع ضمنی است. به ویژه، او نیم‌پیوستگی[۲۱] را با ساختن یک برش ثابت می‌کند.
استراتژی گرین و کرانتز این بود که مسئله برای گروه‌های خودریختی ازدامنه‌های شبه‌محدب قوی به گروه‌های یکریخت برای منیفلدهای ریمانی کاهش پیدا کند. که به صورت زیر پیش رفت:

۱) آنها روی $\overline{\omega}$ به عنوان یک یکریختی تحلیلی با متریک ثابت که ساختار نزدیک به مرزی دارد، ساختند.
۲) آنها متریک دوگانه فرض شده $\hat{M}$ را از دامنه از (۱) مجهز شده با متر مخصوص در نظر گرفتند.
۳) آنها تایید کردند که یکریخت‌های $\hat{M}$ فقط نگاشت‌های یکریختی تحلیلی یا با نگاشت‌های یکریختی تحلیلی مزدوج هستند.
۴) آنها قضیه ابین را برای گروه تکریختی $\hat{M}$ را اعمال کردند.
۵)آنها نتیجه [۴] را تجزیه و تحلیل کردند و از قضیه نیم‌پیوستگی برای گروه‌های یکریختی که در بالا ذکر شد استخراج کردند.

بنابراین می‌بینیم که قضیه نیم‌پیوستگی گرین–کرانتز برای گروه‌های یکریختی است، طبیعتاً یک قضیه هندسه ریمانی اینطور است. بنابراین این مقوله با روح مقاله حاضر بسیار همخوانی دارد.

۵. باز بودن مجموعه دامنه‌های صلب

یک دامنه صلب[۲۲] از یک گروه یکریختی عبارتست از همانی تنها. این نتیجه فوری قضیه (۴-۲) است؛ که مجموعه‌ای از دامنه‌های شبه‌محدب قوی، هموار مرزی و صلب، باز هستند. ما در بخش حاضر راه دیگری برای مشاهده موضوع ارائه می‌دهیم.
گیریم $\omega_{\circ}$ یک دامنه صلب باشد. اگر ϕ نگاشت غیرهمانی یکریختی تحلیلی دلخواه از ω به خودش باشد و در این صورت نقاط P و Q در $\omega_{\circ}$ وجود دارند به طوری که $d_{\omega_{\circ}}(P.Q) \neq d_{\omega_{\circ}}(\phi(P).\phi(Q))$. که در اینجا $d_{\omega_{\circ}}$ فاصله متریک برگمن در $\omega_{\circ}$ است. اگر ω دامنه‌ای باشد که در توپولوژی C^{∞}، نزدیک به $\omega_{\circ}$ باشد، آنگاه متریک برگمن روی ω به متریک برگمن روی $\omega_{\circ}$ نزدیک است. (مراجعه به [۵]). به ویژه ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر ϕ یک نگاشت یکریخت تحلیلی دلخواه از ω به خودش باشد؛ در این صورت نقاط Q و P در $\omega_{\circ}$ وجود دارند به طوری که

$$d_{\Omega}(P.Q) \neq d_{\Omega}(\Phi(P).\Phi(Q))$$

که در اینجا d_{Ω} فاصله در متریک برگمن روی ω است. لذا نتیجه می‌گیریم ω صلب است.

۶. بسته بودن کلاس‌های هم ارزی یکریختی‌های تحلیلی

گیریم $\omega_{\circ}$ دامنه شبه محدب قوی، هموارمرزی باشد و $B\omega_{\circ}$ گردایه‌ای از دامنه‌های شبه‌محدب قوی، هموارمرزی است که هم‌ارز یکریخت‌های تحلیلی روی $\omega_{\circ}$ است. $B\omega_{\circ}$ را با توپولوژی معمولی C^{∞} روی دامنه‌ها مجهز می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که $B\omega_{\circ}$ بسته است.
برای دیدن این، گیریم $\{\Omega_j\} \subseteq B_{\Omega_{\circ}}$ دنباله‌های همگرا به حد دنباله Ω^* باشند. ادعای ما این است که $\varphi_j.\Omega_j \to \Omega_{\circ}$ یک یکریختی تحلیلی باشد. هر دامنه را با متریک کوبایاشی تجهیز کنید. در این صورت هر φ_j یک نگاشت لیپ شیتس[۲۳] با نُرم لیپ شیتس حداکثر ۱. پس می‌توانیم قضیه آسکولی - آزرلا[۲۴] را اعمال کنیم به همراه با موربندی معمول در یک دنباله طاقت‌فرسا از زیرمجموعه‌های فشرده، برای تعیین اینکه یک دنباله φ_{jk} وجود دارد که به طور یکنواخت در مجموعه‌های فشرده به یک نگاشت حدی همگرا می‌شود به φ^* اما این نیز واضح است. $\varphi^* : \Omega^* \to \Omega_{\circ}$ و قضیه‌ها رو نیز تضمین می‌کند که این نگاشت در واقع یک یکریختی تحلیلی است. در نتیجه $\Omega^* \in B_{\Omega_{\circ}}$.

[18] David Ebin
[19] Riemanian manifold
[20] Diffeomorphism
[21] Semicontinuity
[22] Rigid domain
[23] Lipschitz
[24] Ascoli-Arzela

۷. نتیجه

مدتی است که در نظریه توابع، یک حقیقت غیرقابل انکار است که موقعیت چندین متغیر مختلط از آنالیز مختلط را می‌توان با استفاده از زبان هندسه متریک روشن کرد. هدف از این مقاله این بوده است که از طریق چندین نتیجه در نظریه دامنه‌ها از گروه‌های خودریختی این ایده را نشان دهیم.

مراجع

[1] S. G. Krantz, *A Geometric Approach To The Study Of Automorphism Groups*. Bull. Korean Math. Soc. 53 (2016), No. 4, pp.1043-1049
[2] D. G. Ebin, *On The Space Of Riemanian Metrics*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968),1001-1003
[3] C. Fefferman, *The Bergman Kernel And Biholomorphic Mapping Of Pseudoconvex Domain*, Invent. Math. 26 (1974), 1-65
[4] R. E. Greene, K.-T. Kim, and S. G. Krantz, *The Geometry of Complex Domains*, Birkh¨auser, Boston, 2011
[5] R. E. Greene and S. G. Krantz, *The automorphism groups of strongly pseudoconvex domains, Math*. Ann. 261 (1982), no. 4, 425–446.
[6] ——, *Deformations of complex structure*, estimates for the @-equation, and stability of the Bergman kernel, Adv. in Math. 43 (1982), no. 1, 1–86.
[7] ——, *Characterizations of certain weakly pseudo-convex domains with non-compact automorphism groups*, in Complex Analysis Seminar, 121–157, Springer Lecture Notes 1268, 1987.
[8] K.-T. Kim and S. G. Krantz, *A Kobayashi metric version of Bun Wong's theorem*, Complex Var. Elliptic Equ. 54 (2009), no. 3-4, 355–369.
[9] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Dekker, New York, 1970.
[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, *On automorphisms of a K¨ahlerian structure*, Nagoya Math. J. 11 (1957), 115–124.
[11] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[12] ——-, *Convergence of automorphisms and semicontinuity of automorphism groups*, Real Anal. Exchange 36 (2010/11), no. 2, 421–433.
[13] L. Lempert, *La metrique Kobayashi et las representation des domains sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), no. 4, 427–474.
[14] J.-P. Rosay, *Sur une characterization de la boule parmi les domains de Cn par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), no. 4, 91–97.
[15] H. Seshadri and K. Verma, *On isometries of the Carath´eodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 5 (2006), no. 3, 393–417.
[16] K. Verma, Lecture at BIRS, May, 2006.
[17] B. Wong, *Characterizations of the unit ball in Cn by its automorphism group*, Invent. Math. 41 (1977), no. 3, 253–257.

دانشگاه گنبدکاووس

سومین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1400

سومین همایش ملی ریاضی و آمار، GT–310، صص. ۵۳۲–۵۳۶

ایزومتری‌های لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در برخی از جهان‌های FRW

اکرم محمدپوری[آ]، سه‌رکار سالار انور*[آ]

[آ]دانشگاه تبریز، دانشکده علوم ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

اطلاعات مقاله

واژه‌های کلیدی:
تقارن‌های نوتر ۱
لاگرانژین ۲
متر REW ۳

2020 MSC:
35B06
70H33

چکیده

در این مقاله میدانهای برداری کیلینگ برای لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در یک رده خاص از جهان‌های فریدمن–روبرتسون–والکر (FRW) بدست می‌آوریم.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۹۲، الکساندر فریدمن جوابی از معادله میدانی انیشتین یافت که نظریه توسیع جهان را پیشنهاد می‌دهد. جورج لموترا حادثه خلقت را به عنوان شروع توسیع پیشنهاد داد. ترکیب این نظریه با متر هوارد رابرتسون و آرتور والکر به جواب کیهان شناسی فریدمن–لموترا–روبرتسون–والکر یا فقط فریدمن–روبرتسون–والکر (FRW) از معادلات گرانشی مشهور است و بر این باور است که مناسب‌ترین روش برای توصیف تکامل هستی مان است. فضا–زمان FRW در انطباق با نسبیت عام، جهان در مقیاس بزرگ، است که همگن و ایزوتوپی فرض شده است.
در تعدای از مقالات [۱، ۵، ۱۲] نشان داده شده است که تقارنهای لی معادلات ژئودزیک عناصر جبری تصویری فضا هستند. علاوه بر این چون معادلات ژئودزیک از لاگرانژین ژئودزیک نتیجه می‌شود، ریاضیدانان تقارنهای نوتر این لاگرانژین را مطالعه کرده‌اند و نشان داده‌اند که تقارنهای نوتر عناصر جبر تجانسی فضا هستند [۱۳]. مطالعه تقارنهای نوتر به خاطر کاهش دو برابری تعداد معادلات حرکت بسیار مهم هستند. اگر تعداد کافی از تقارنهای نوتر موجود باشد می‌توان معادلات ODE را به انتگرال گیری تبدیل کرد.
این مطالعات به تقارنهای لی و نوتر کلاسهای خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) [۴، ۶، ۹، ۱۰] تعمیم داده شده‌است و نشان داده شده که مولدها تشکیل گروه همدیس فضای زمینه را می‌دهند.
تقارنهای نقطه‌ای نوتر، تقارنهای عمل انتگرال هستند، بنابراین این اصل به همه مسائل مربوط به عمل انتگرال مربوط می‌شود، حتی اگر مساله مربوط به معادلات حرکت نباشد. مساله دیگر تعیین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در یک فضا–زمان است. در این مورد عمل انتگرال به مینیمم سازی رویه می‌پردازد و مانند حالت حل معادلات حرکت دارای طول قوس نیست [۲، ۳، ۱۱، ۱۴]. در [۲، ۱۴] نویسندگان بین تقارنهای نوتر، لاگرانژین مینیمال و ایزومتری‌های فضای زمینه برای برخی فضاهای خاص رابطه‌ای یافته‌اند.
مشابه مقالات ذکر شده هدف از این مقاله نیز تعیین تقارنهای نقطه‌ای نوتر ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در فضا–زمان FRW است. نشان می‌دهیم مولدهای تقارنهای نوتر عناصر جبر کیلینگ هستند.

*سخنران
پست الکترونیک: akram.pouri@gmail.com (اکرم محمدپوری)، pouri@tabrizu.ac.ir (سه‌رکار سالار انور)

یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به فرم $\Delta\left(x,u^{(n)}\right)=0$ که شامل p متغیر مستقل $x=\left(x^1,\cdots,x^p\right)$ و q متغیر وابسته $u=\left(u^1,\cdots,u^q\right)$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی، تابعی به فرم $u=f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^\alpha=f^\alpha\left(x^1,\cdots,x^p\right),\qquad \alpha=1,\cdots,q, \tag{۱}$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x=\left(x^1,\cdots,x^p\right)$ است.
فرض کنید که x معرف یک دستگاه مختصات روی $X\simeq\mathbb{R}^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U\simeq\mathbb{R}^q$ باشد. در این صورت فضای اقلیدسی $E=X\times U\simeq\mathbb{R}^{p+q}$ که متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته x و u می‌باشد، فضای کل متناظر دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$ گفته می‌شود.
یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G می‌باشد که روی یک مجموعه بازی از E مانند $\mathcal{O}$ عمل نموده به طوریکه هر جواب از دستگاه $\Delta=0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌نماید.
فرض کنید

$$U^{(n)}:=U\times U_1\times\cdots\times U_n, \tag{۲}$$

بطوریکه U_i ها به‌ازای $i=1,\cdots,n$ نماینده فضای مشتقات جزیی از مرتبه iام می‌باشند. با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$، فضای

$$\mathbf{J}^n=X\times U^{(n)} \tag{۳}$$

بدست می‌آوریم که به آن فضای جت مرتبه nام تابع $u=f(x)$ گفته و آن را با نماد $\mathbf{J}^n f$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم که $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه بازی از $E=X\times U$ و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه تک‌پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه nام $\mathbf{v}$ را که با $\mathbf{v}^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $\mathbf{J}^n(\mathcal{O})$ بوده که به آن مولد بینهایت کوچک گروه تک‌پارامتری $\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(n)}$ می‌گویند. این بدان معنا می‌باشد که

$$\mathbf{v}^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})}=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(n)}\left(x,u^{(n)}\right),\quad \left(x,u^{(n)}\right)\in\mathbf{J}^{(n)}(\mathcal{O}). \tag{۴}$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $\mathcal{O}\in E$ مجموعه‌های باز و $F\left(x,u^{(n)}\right)$ یک تابع هموار روی $\mathbf{J}^n(\mathcal{O})$ باشد. مشتق کامل F نسبت به x^i که آن را با $D_iF\left(x,u^{(n)}\right)$ نمایش می‌دهیم، تابع هموار است که روی $\mathbf{J}^{n+1}(\mathcal{O})$ تعریف شده و دارای این ویژگی می‌باشد که هرگاه $u=f(x)$ تابع هموار باشد، آنگاه

$$D_iF\left(x,f^{n+1}(x)\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left[F\left(x,u^{(n)}\right)\right]$$

لم زیر که به طور مستقیم از قاعده زنجیره‌ای مشتق حاصل می‌گردد، فرمولی صریح برای محاسبه مشتق کامل در غالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید.

لم ۳.۱. *تابع $F\left(x,u^{(n)}\right)$ را روی فضای جت $\mathbf{J}^n(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J=(j_1,\cdots,j_k)$ یک اندیس چندگانه و $u^\alpha_{J,i}=\partial u^\alpha_J/\partial x^i$ باشد، آنگاه*

$$D_iF=\frac{\partial F}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u^\alpha_{J,i}\frac{\partial F}{\partial u^\alpha_J}. \tag{۵}$$

به همین شکل، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J=(j_1,\cdots,j_k)$ به صورت

$$D_J=D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_k}$$

بیان نمود.

اکنون می توان قضیه زیر را که نحوه محاسبه امتداد میدان‌های برداری را بدست می‌دهد بیان کرد.

قضیه ۴.۱. *فرض کنیم*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ *باشد. امتداد مرتبه* n*ـام میدان برداری* $\mathbf{v}$ *یک میدان برداری به شکل*

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J\left(x,u^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \qquad (۶)$$

روی $\mathbf{J}^n(\mathcal{O})$*می‌باشد که ضرایب* ϕ_α^J *در* (۶) *با فرمول*

$$\phi_\alpha^J\left(x,u^{(n)}\right) = D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha \qquad (۷)$$

ساخته می‌شوند.

تقارن‌های تغییراتی به خاطر قضیه معروف نوتر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در سال ۱۹۱۸ نوتر [۸] الگوریتم مشهور خود (قضیه نوتر) را برای یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که تقارن‌های تغییراتی را می‌پذیرند، ارائه نمود.
تابعک $J[\Phi]$ با n متغیر مستقل $x = (x^1,\dots,x^n)$ و تابع هموار $\Phi = \Phi(x) = (\Phi^1,\Phi^2,\dots,\Phi^m)$ و مشتقات آن تا مرتبه k، که روی دامنه Ω تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید

$$J[\Phi] = \int_\Omega L[\Phi]dx = \int_\Omega L(x,\Phi,\partial\Phi,\dots,\partial^k\Phi)dx,$$

تابع $L[\Phi] = L[x,\Phi,\partial\Phi,\dots,\partial^k\Phi]$ را لاگرانژین و تابعک $J[\Phi]$ را انتگرال تغییراتی می‌نامند.

قضیه ۵.۱. *اگر تابع هموار* $\Phi(x) = \phi(x)$ *اکسترمم انتگرال تغییراتی*

$$J[\Phi] = \int_\Omega L[\Phi]\,dx$$

با $L[\Phi] = L(x,\Phi,\partial\Phi,\cdots,\partial^k\Phi)$ *باشد، آنگاه* $\phi(x)$*، در معادلات زیر که به معادلات اویلر ـ لاگرانژ معروف است، صدق می‌کند*

$$E(L[\Phi]) = \frac{\partial L[\Phi]}{\partial\Phi} + \cdots + (-1)^k D_{j_1}\cdots D_{j_k}\frac{\partial L[\Phi]}{\partial\Phi_{j_1\cdots j_k}} = 0. \qquad (۸)$$

گزاره ۶.۱. [۲] *دریک فضای* n*ـبعدی مینیمم سازی سطح* $A(S)$ *از یک ابررویه* S، $(n-1)$*ـبعدی به فرم* $\alpha = x^n = x^n(x^\alpha)$، $\alpha = 1,2,\dots,n-1$ *با ثابت نگه داشتن حجم* $V(S)$ *اکسترمم‌های انتگرال تغییراتی زیراست*

$$J[x^n] = \int L\left(x^\alpha,x^n,x^n_{x_\alpha}\right)dx^\alpha = \int_S n^p\, d^{n-1}S_p + \lambda\int_V d^nV. \qquad (۹)$$

حال فرض کنید M^n یک فضا زمان با متر زیر باشد

$$ds^2 = -du^2 + h_{ij}(u,x_k)dx^i dx^j, \qquad i,j = 1,\dots,n-1.$$

از اینرو بنابر گزاره ۶.۱ مشاهده می‌شود لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمال و با در نظر گرفتن حجم ثابت در رابطه

$$L = \sqrt{|h| + |h|h^{ij}u_{,i}u_{,j}} + \lambda\int\sqrt{|h|}du. \qquad (۱۰)$$

صدق می‌کند.

۲. نتایج اصلی

با در نظر گرفتن جهان FRW، متر همدیس تخت ۴ـبعدی FRW در مختصات استوگرافیک با ضرایب تجانس $a(t)$، پارامتر انحناء $k = ۰, \pm ۱$ و $r^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ds^۲ = -dt^۲ + \frac{a^۲(t)}{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۲}(dx^۲ + dy^۲ + dz^۲). \quad (۱۱)$$

حال در جهان FRW (۱۱) داریم

$$\sqrt{(|h|)} = \frac{a^۳(t)}{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۳}, \quad h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = \frac{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۲}{a^۲(t)},$$

از اینرو لاگرانژین ابررویه $t = t(x, y, z)$ با سطح مینیمم تحت حجم ثابت با جایگذاری در فرمول (۱۰) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$L = \frac{a^۳(t)}{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۳}\sqrt{۱ + \frac{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۲}{a^۲(t)}(t_{,x}^۲ + t_{,y}^۲ + t_{,z}^۲)} + \int \frac{a^۳(t)}{(۱ + \frac{k}{۴}r^۲)^۳}dt. \quad (۱۲)$$

تعریف ۱.۲. تقارن‌های تغییراتی $J[\Phi] = \int_V L\left(x, \Phi, \Phi_{(۱)}, \dots, \Phi_{(k)}\right) dx$ تحت گروه لی تک پارامتری از تبدیلات $x^* = x^*(x, \Phi; \varepsilon)$ $\Phi^*(x, \Phi; \varepsilon)$ با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{X} = \tilde{\zeta}(x, \Phi)\frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{\vartheta}^\nu(x, \Phi)\frac{\partial}{\partial \Phi^\nu}$$

پایا تحت توابع $A^۱(x), \dots, A^n(x)$ (توابع پیمانه اي) نامیده می‌شود، هرگاه به ازاي هر i، $i = ۱, \dots, n$ داشته باشیم

$$\int_{V^*} L(x^*, \Phi^*, \Phi^*_{(۱)}, \dots, \Phi^*_{(k)})dx^{i^*} = \int_V \left[L(x, \Phi, \Phi_{(۱)}, \dots, \Phi_{(k)}) + \varepsilon\frac{dA^i}{dx^i}\right]dx^i.$$

تقارن را اکید مي‌نامند هرگاه $A^i = ۰,\ i = ۱, \dots, n$. منظور از V^* تصویر حجم V تحت تبدیلات نقطه‌ای فوق است.
در این صورت مولد بینهایت کوچک $\mathbf{X}$ را تقارن نقطه‌ای نوتر برای لاگرانژین $L\left(x, y, v, u, \Phi, \Phi_{(۱)}, \dots, \Phi_{(k)}\right)$ می‌نامند.

در حالت کلي تقارن نقطه‌ای نوتر $\mathbf{X} = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ با توابع پیمانه اي $A^۱, \dots, A^n$ برای لاگرانژین $L\left(x, \Phi, \Phi_{(۱)}, \dots, \Phi_{(k)}\right)$ از رابطه زیر بدست مي آید [۸].

$$X^{[k]}(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(A^i). \quad (۱۳)$$

از مطالبی که تاکنون در این فصل بیان کردیم قضیه اساسی زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۲. *جبر لی ۹ شش بعدی از تقارنهای نقطه‌ای نوتر برای لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در جهان FRW با مختصات (۱۱) و با فرض $k \neq ۰$ و $a(t) = (\alpha t + \beta)^n$ به فرم زیر است، بعلاوه همه مولدها میدانهای برداری کیلینگ‌اند .*

$$X_۱ = x\partial_y - y\partial_x, \quad X_۲ = x\partial_z - z\partial_x, \quad X_۳ = y\partial_z - z\partial_y,$$
$$X_۴ = \left[x^۲ - y^۲ - z^۲ + \frac{۴}{k}\right]\partial_x + ۲x(y\partial_y + z\partial_z),$$
$$X_۵ = \left[-x^۲ + y^۲ - z^۲ + \frac{۴}{k}\right]\partial_y + ۲y(x\partial_x + z\partial_z),$$
$$X_۶ = \left[-x^۲ - y^۲ + z^۲ + \frac{۴}{k}\right]\partial_z + ۲z(x\partial_x + y\partial_y).$$

مراجع

[1] A. V. Aminova and N. Aminov. Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions. *Tensor*, 62:65–74, 2000.

[2] A. Aslam and A. Qadir. Noether symmetries of the area-minimizing Lagrangian. *Journal of Applied Mathematics*, 532690, 2012.

[3] N. Bila. *Lie groups applications to minimal surfaces PDE*. Universitatea Aristotle, Thessaloniki, Greece, 1998. Presented at the second conference of Balkan society of geometer.

[4] Y. Bozhkov and I. L. Freire. Special conformal groups of a Riemannian manifold and Lie point symmetries of the nonlinear Poisson equation. *Journal of Differential Equations*, 249(4):872–913, 2010.

[5] T. Feroze, F. M. Mahomed and A. Qadir. The connection between isometries and symmetries of geodesic equations of the underlying spaces. *Nonlinear Dynamics*, 45(1):65–74, 2006.

[6] I. L. Freire. On the paper 'Symmetry analysis of wave equation on sphere' by H. Azad and M.T. Mustafa. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 367:716–720, 2010.

[7] N. H. Ibragimov. *Transformation groups applied to mathematical physics*. D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, 1985.

[8] E. Noether. Invariante variations probleme. *Nachr. Akad. Wiss. Gott. Math. Phys. Kl*, 2: 235–257, 1918 . (English translation in Transp. Theory Stat. Phys., 1(3), 186–207, 1971).

[9] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis. Lie point symmetries of a general class of PDEs: The heat equation. *Journal of Geometry and Physics*, 62(12):2443–2456 , 2012.

[10] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis. The geometric origin of Lie point symmetries of the Schrodinger and the Klein Gordon equations. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11(4):1450037, 2014.

[11] A. Peterson and S. Taylor. Locally isometric families of minimal surfaces. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 13(2):80–86, 2008.

[12] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis. Lie symmetries of geodesic equations and projective collineations. *Nonlinear Dynamics*, 62(1):203–214, 2010.

[13] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis. Lie and Noether symmetries of geodesic equations and collineations *General Relativity and Gravitation*, 42:2957–2980 , 2010.

[14] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis and A. Qadir. Noether symmetries and isometries of the minimal surface Lagrangian under constant volume in a Riemannian space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(1):1550003, 2015.