

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

دانشگاه گنبدکاووس، ۹ اسفند ۱۴۰۳

مجموعه مقالات همایش (فارسی)

دبیر علمی

دکتر مهدی شاهینی

دبیر اجرایی

دکتر نعمت‌اله تقی نژاد

دکتر مجتبی کاشانی

تهیه و تنظیم

دکتر مهدی شاهینی

سخن دبیر همایش

با عرض سلام و احترام
پنجمین همایش آمار و ریاضی دانشگاه گنبدکاووس، فرصتی ارزشمند برای تبادل دانش، ارائه آخرین دستاوردهای علمی و ایجاد شبکه‌های همکاری میان پژوهشگران، اساتید و دانشجویان است.
علوم آمار و ریاضیات، به عنوان ستون‌های بنیادین دانش، پیشران اصلی پیشرفت در فناوری، اقتصاد، پزشکی، مهندسی و علوم اجتماعی هستند. در عصر حاضر که داده‌ها به مهم‌ترین سرمایه راهبردی تبدیل شده‌اند، آمار با ارائه ابزارهای تحلیلی پیشرفته، چراغ راه تصمیم‌سازی‌های کلان شده است. هم‌زمان، ریاضیات به عنوان زبان مشترک علوم، چارچوبی دقیق برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی و اجتماعی و ارائه راهکارهای نوآورانه در مواجهه با چالش‌های پیچیده فراهم می‌کند.
با یمن و برکت الهی، پنجمین همایش ملی آمار و ریاضی دانشگاه گنبدکاووس بستر مناسبی برای ارائه آخرین دستاوردهای پژوهشی جامعه علمی کشور بود. از کاوش در روش‌های پیشرفته آمار کاربردی تا گسترش مرزهای نظریه‌های ریاضی، این رویداد فرصتی استثنایی برای هم‌اندیشی، انتقال تجربیات و خلق ایده‌های نو ایجاد کرد.
امیدواریم این همایش آغازی مؤثر برای تعمیق همکاری‌های میان‌رشته‌ای، پیوند نهادهای علمی با صنعت و جامعه، ترویج پژوهش‌های کاربردی در راستای نیازهای ملی باشد.
دانشگاه گنبدکاووس با ایجاد فضای پویای علمی و تأکید بر آموزش‌های کاربردی، همواره در پی سهم‌آفرینی در پیشرفت علمی کشور بوده و برگزاری این همایش نمونه‌ای از این تعهد است.
در خاتمه، سپاسگزاری خود را از کمیته‌های علمی و اجرایی، اساتید و پژوهشگران، دانشجویان پرتلاش و تمام حامیان این رویداد تقدیم می‌کنیم و امیدواریم نتایج این همایش سرآغاز تحولات مثبت در عرصه علم و فناوری باشد.

دبیر علمی همایش
دکتر مهدی شاهینی

فهرست مطالب

تحول در آموزش آمار مدرسه ای: بررسی شیوه‌های نوین، چالش‌ها و راهکارهای ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان ۱
نقش خودارزیابی در بهبود یادگیری ریاضیات: چالش‌ها، فرصت‌ها و مسیرهای آینده ۵
روش‌های نیوتن–کاتس دو تا چهار نقطه‌ای برای حل معادلات قدرمطلقی ۱۲
مجموعه جولیا و نقاط ثابت روش‌های نیوتن و هالی برای توابع مختلط نمایی ۱۹
T نرم ها و اثرپذیری انها روی زیرحلقه های فازی ۲۷
مدول‌های شبه وفادار و مدول‌های شبه وفادار ضعیف ۳۲
بررسی برخی مدول‌ها نسبت به مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های چپ ۳۹
ارتباط T نرم ها و فازی کردن حاصلضرب مستقیم گروهها ۴۵
برخی خواص مشتق در جبرهای هوپ ۵۲
تحلیل انرژی گراف ها و کاربردهای آن در شبکه های اجتماعی ۵۹
بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی ۶۸
نمایش انتگرالی تابع میتگ–لفلر ۷۸
بررسی همریختی ها و ویژگی های پایدار ضعیف در رسته S- مجموعه های جزیی مرتب ۸۵
اثبات قضیه مورلی با استفاده از خاصیت نیمسازها ۹۱
درباره ابر K–زیرجبر فازی از یک ابر K–جبر ۹۴
همریختی ابر جبرهای k–فازی ۹۹
کاربرد چندجمله‌ای چبیشف در حل معادله‌ی لیزخوردن بدون اصطکاک مهره از روی سیم ۱۰۴
زیرحلقه‌ها و ایدال‌های فازی شهودی متناسب با نرم‌ها ۱۰۸
مقسوم علیه صفر و حوزه صحیح در جبرهای هوپ ۱۱۴
تجزیه و تحلیل پویایی یک مدل ریاضی با ظرفیت مراقبت‌های بهداشتی برای همه‌گیری کووید-۱۹ . . . . . ۱۱۹
شناسایی برخی از بدفهمی‌های رایج متوسطه دوم تجربی در درس ریاضیات و طرح آموزش مناسب برای آن‌ها ۱۲۴
نرخ انتروپی متقابل رنی بین دو زنجیر مارکف و مارکف پنهان با تقریب بسط تیلور ۱۳۱
روش پیش‌بینی هوش مصنوعی یکپارچه¬ سازی داده کاوی و تحلیل آماری ۱۳۵
بررسی جامع فرصت‌ها و چالش‌های بهبود یادگیری ریاضی با استفاده از هوش مصنوعی ۱۴۰
ارائه مدل برای تدریس و یادگیری ریاضی ۱۴۹
کاربردهای سیستم غیرخطی واندرپل و حل آن با استفاده از انتگرال‌گیری کلن‌شا ۱۵۶
طرح تسهیم راز نهان نگاری شده مبتنی بر توابع درهم ساز ۱۶۳
تحلیلی بر روش های حل عددی یک معادله دیفرانسیل جزیی مالی ۱۶۹
فرایند یاددهی و یادگیری در آموزش ریاضی ۱۷۵
برآورد پارامتر توزیع لیندلیX در حضور داده های سانسور هیبرید ۱۷۸
قوانین بقای معادله غیرخطی باکستین–هاویسون ۱۸۲
نامساوی لاونر–هاینز و عکس آن از نقطه نظر چشم‌انداز آنتروپی عملگری نسبی ۱۸۶
ساختن ابرگروه های چندمتقارن مرتبه کوچک ۱۹۲
وجود جواب‌های تناوبی دسته ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم و کاربرد آن در مدل ریاضی سیستم‌های ترمزگیری خودروهای سنگین ۱۹۸
پمحاسبه پارامترهای انتروپی تعمیم یافته در گرافهای جهت دار وزن دار ۲۰۴
تأثیر همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان پایه دهم رشته تجربی در درس ریاضی ۲۰۶
مسائل بهینه سازی چند هدفه با رابطه فازی محدودیت های معادله ۲۱۴
مدل‌بندی زمان حوادث ترافیکی با استفاده از شبکه عصبی عمیق بقا ۲۱۸
کران‌های آنتروپی عملگری نسبی تسالیس تعمیم‌یافته ۲۲۱
فرمول بندی برنامه ریزی هدف چند بخشی ۲۲۶
شمارش نیم ابرگروه های (ابرمونوئیدهای) کامل ساخته شده از نیم گروه (مونوئید) مرتبه کمتر از ۶ . . . . . ۲۲۹
مدل‌سازی بهینه‌سازی کارایی در محیط عدم قطعیت خاکستری: رویکرد ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها و الگوریتم‌های فراابتکاری . . ۲۳۵

مقایسه براوردگرهای گشتاوری و ماکزیمم درستنمایی در توزیع گاما–گاریما ۲۳۹
بررسی میزان درستی تشخیص در گفتار خوانی بر اساس زنجیرهای مارکف پنهان ۲۴۳
مواجهه با یک مشکل در طرح آزمایش ها: نیاز به مقایسه دو تیمار مستقل بدون داشتن تیمار دوم ۲۴۵
بررسی روش تدریس فعال معلم در میزان و تثبیت درک دانش آموزان از مبحث مثلثات ۲۴۹
برخی از روابط عددی بین درآیه های مثلث خیام پاسکال ۲۵۳
بررسی روش دنباله ای تسریع یافته پیرامون میانگین در مدل خطی سری زمانی ۲۶۲
شاخص نابرابری جینی چند متغیره و تابع مفصل ۲۶۷
شرایط لازم و کافی برای تولید همزمان شبه گروه یکانی و گروه انقباضی توسط یک عملگر مشترک ۲۷۱
بررسی روابط سببی با دو روش محاسبات مخزن و نگاشت متقابل همگرا روی داده‌های سری زمانی ۲۷۲
آشنایی‌با مجموعه فازی مردد تصویری ۲۸۰
R–نت و SR–نت ها در فضای توپولوژی ۲۸۳
مسئله حمل و نقل دوقطبی مختلط فازی ۲۸۵
تبدیل فوریه دوقطبی مختلط فازی برای حل معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی ۲۸۶
مکان یابی برای ساخت و ساز به کمک شاخص رندیک از گراف فازی مبهم ۲۸۷
ارائه یک تابع جریمه فازی و کاربرد آن در مساله مکانیابی تک وسیله‌ای ۲۹۶
بهینه سازی کشت محصولات کشاورزی ۳۰۱
مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای برنامه‌ریزی یکپارچه زنجیره تأمین ماهی ۳۰۲
فرایندهای خودبازگشتی هذلولی تعمیم یافته ۳۰۳
کلاس نیرومند مدل خود بازگشتی مبتنی بر خانواده آمیخته مقیاسی نرمال دوپارچه ۳۱۰

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–103، صص. ۱–۴

تحول در آموزش آمار مدرسه ای: بررسی شیوه‌های نوین، چالش‌ها و راهکارهای ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان

آسیه ابراهیم زاده*[آ]، فهیمه کلاهدوز[ب]

[آ]گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران
[ب]وه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
آمار مدرسه ای
شیوه های نوین آموزش
چالش های آموزش آمار

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97B10
97U10

چکیده

آمار نقش اساسی در آموزش ریاضی داشته و به توسعه تفکر تحلیلی و انتقادی دانش‌آموزان کمک می‌کند. با این حال، روش‌های سنتی آموزش در بسیاری از مدارس برای پاسخگویی به نیازهای آموزشی در عصر داده‌محور ناکارآمد هستند. این مقاله به بررسی رویکردهای نوین در آموزش آمار می‌پردازد، از جمله بهره‌گیری از فناوری‌های پیشرفته، تحلیل داده‌های واقعی و یادگیری مبتنی بر پروژه. یافته‌ها نشان می‌دهند که این روش‌ها درک مفاهیم آماری را برای دانش‌آموزان جذاب‌تر و مؤثرتر می‌سازند. همچنین، چالش‌های اجرایی و راهکارهای عملی برای پیاده‌سازی این رویکردها بررسی شده است. این مطالعه بر اهمیت همکاری میان پژوهشگران، معلمان و سیاست‌گذاران برای به‌روزرسانی و تحول در آموزش آمار تأکید کرده و پیشنهاداتی برای پژوهش‌های آینده در راستای ارتقای کیفیت تدریس ارائه می‌دهد.

۱. مقدمه

آمار به عنوان بخشی اساسی از آموزش ریاضی، نقش مهمی در تقویت مهارت‌های تحلیلی و تفکر انتقادی دانش‌آموزان ایفا می‌کند. با وجود جایگاه آمار و احتمال در برنامه‌های درسی، آموزش آن در بسیاری از نقاط جهان همچنان با کمبود منابع و توجه مواجه است. مطالعات نشان می‌دهند که تدریس آمار عمدتاً بر رویکردهای نظری متمرکز است و کاربردهای عملی آن کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد [۴، ۸]. این در حالی است که در دنیای داده‌محور امروز، تسلط بر مفاهیم آماری برای تحلیل اطلاعات و تصمیم‌گیری آگاهانه ضروری است. پیشرفت‌های اخیر در علم داده و دسترسی گسترده به منابع اطلاعاتی، ضرورت بازنگری در شیوه‌های آموزش آمار را دوچندان کرده است. بهره‌گیری از نرم‌افزارهای آماری، داده‌های واقعی و تحلیل‌های کاربردی می‌تواند آمار را از یک مفهوم انتزاعی به مهارتی کاربردی در زندگی روزمره تبدیل کند و در تقویت تفکر انتقادی و توانایی حل مسئله دانش‌آموزان نقش مؤثری داشته باشد [۱۱]. در راستای تحولات آموزشی جهانی، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که استفاده از روش‌های یادگیری فعال مانند یادگیری مبتنی بر پروژه، تدریس با داده‌های واقعی، و تشویق به تفکر انتقادی و همکارانه می‌تواند درک مفاهیم آماری را در دانش‌آموزان تسهیل کند [۵، ۱۲]. این شیوه‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا نه تنها مهارت‌های محاسباتی بلکه مهارت‌های کاربردی در تجزیه و تحلیل داده‌ها را نیز کسب کنند، که در دنیای امروز امری ضروری است. از سوی دیگر، توجه به تفاوت‌های فردی و نیازهای آموزشی مختلف دانش‌آموزان در هر سطح تحصیلی می‌تواند به افزایش انگیزه و علاقه‌مندی آنان به موضوع آمار منجر شود. به‌عنوان مثال، استفاده از روش‌های تدریس مبتنی بر فناوری اطلاعات و ابزارهای دیجیتال می‌تواند فرصتی برای تعامل بیشتر دانش‌آموزان با مفاهیم آماری ایجاد کند. این رویکردهای نوین، با فراهم آوردن محیطی پویا و جذاب، می‌توانند تجربه یادگیری را برای دانش‌آموزان به‌طور چشمگیری بهبود بخشند [۶]. با توجه به تحولات سریع در دنیای اطلاعات و نیاز فزاینده به مهارت‌های تحلیلی، به‌روزرسانی روش‌های آموزش آمار در مدارس ایران امری

*سخنران
پست *الکترونیک :* a.ebrahimzadeh@cfu.ac.ir (آسیه ابراهیم زاده)، f.kolahdouz@cfu.ac.ir (فهیمه کلاهدوز)

ضروری است. در این راستا، تلاش‌هایی برای بهره‌گیری از فناوری‌های آموزشی، از جمله نرم‌افزارهای آماری، شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای و تحلیل داده‌های واقعی در فرایند یاددهی ـ یادگیری صورت گرفته است. این مقاله به بررسی روش‌های نوین آموزش آمار، با تأکید بر استفاده از داده‌های واقعی و فناوری‌های پیشرفته، می‌پردازد. در حال حاضر، آموزش آمار در مدارس ایران عمدتاً به‌صورت نظری ارائه می‌شود که می‌تواند منجر به کاهش انگیزه یادگیری در دانش‌آموزان شود. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که کمبود رویکردهای عملی و فناوری‌محور در تدریس آمار، توانایی دانش‌آموزان را در به‌کارگیری این دانش در مسائل روزمره و تصمیم‌گیری‌های علمی محدود می‌کند [۲]. دبرای ارتقای آموزش آمار، ضروری است که شیوه‌های تدریس به‌گونه‌ای طراحی شوند که علاوه بر تقویت مهارت‌های محاسباتی، دانش‌آموزان را در تحلیل داده‌ها و به‌کارگیری نتایج آماری در زندگی روزمره توانمند سازند. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که روش‌هایی مانند تدریس مبتنی بر پروژه، شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای و تحلیل داده‌های واقعی تأثیر مثبتی بر درک مفاهیم آماری دارند [۱]. این رویکردها، به‌ویژه در مدارس ایران، می‌توانند آمار را به‌عنوان ابزاری تحلیلی و کاربردی معرفی کرده و تفکر انتقادی و مهارت‌های حل مسئله را در دانش‌آموزان تقویت کنند. این مقاله به بررسی روش‌های نوین تدریس آمار در مدارس ایران، چالش‌ها و فرصت‌های موجود و تأثیر این شیوه‌ها بر کیفیت آموزش می‌پردازد. همچنین، رویکردهای مبتنی بر حل مسئله و یادگیری فعال مورد ارزیابی قرار گرفته و چالش‌های معلمان و دانش‌آموزان در پذیرش این روش‌ها تحلیل می‌شود. در نهایت، پیشنهاداتی برای بهبود تدریس آمار در مدارس ایران، با توجه به تجربیات جهانی، ارائه خواهد شد.

۲. تعریف آمار مدرسه‌ای و ضرورت آن

آمار مدرسه‌ای به آموزش مفاهیم آماری در مقاطع ابتدایی و متوسطه اشاره دارد و هدف آن، تقویت مهارت‌های تحلیلی دانش‌آموزان از طریق درک داده‌ها، تحلیل اطلاعات و تصمیم‌گیری مبتنی بر داده است. این آموزش‌ها دانش‌آموزان را با مهارت‌های اساسی جمع‌آوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها آشنا می‌سازد و آن‌ها را قادر می‌کند تا داده‌ها را به‌طور مؤثر پردازش کرده و در حل مسائل واقعی به‌کار گیرند.
در عصر داده‌محور کنونی، تسلط بر تحلیل آماری برای تصمیم‌گیری‌های علمی و اجتماعی ضروری است. یادگیری آمار، تفکر تحلیلی و انتقادی دانش‌آموزان را تقویت کرده و آن‌ها را به استفاده از رویکردهای منطقی برای حل مسائل پیچیده ترغیب می‌کند. همچنین، درک مدل‌های آماری و استنتاج از داده‌ها، توانایی آن‌ها را در ارزیابی اطلاعات و نتایج پژوهشی بهبود می‌بخشد.
با توجه به نقش کلیدی آمار در علوم مختلف، آموزش مفاهیم آماری در مدارس، پایه‌ای برای فهم و کار با داده‌ها در تحصیلات دانشگاهی و حرفه‌ای فراهم می‌کند. آمار در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی، پیش‌بینی‌های آب‌وهوا، تحلیل نظرسنجی‌ها و ارزیابی مسائل اجتماعی و بهداشتی کاربرد دارد. آموزش مفاهیم آماری مانند میانگین، واریانس، انحراف معیار و احتمال در موقعیت‌های واقعی، به دانش‌آموزان نشان می‌دهد که آمار نه‌تنها یک ابزار تحلیلی، بلکه مهارتی ضروری برای حل مسائل دنیای واقعی است.

۳. چالش‌های آموزش آمار در مدارس

در آموزش آمار در مدارس، چالش‌های متعددی مانع از بهبود کیفیت تدریس و یادگیری می‌شود. یکی از مهم‌ترین چالش‌ها، عدم تطابق محتوای آموزشی با نیازهای واقعی دنیای امروز است. برنامه‌های درسی غالباً بر مفاهیم تئوریک و محاسباتی سنتی تأکید دارند و کمتر به کاربردهای عملی آمار پرداخته می‌شود، که این امر ارتباط دانش‌آموزان با مسائل واقعی را دشوار می‌سازد [۵، ۹]. همچنین، کمبود معلمان متخصص و منابع آموزشی به‌روز یکی دیگر از موانع اساسی است. بسیاری از معلمان به دلیل آشنایی محدود با نرم‌افزارهای آماری و روش‌های نوین تدریس، ناگزیر از روش‌های سنتی استفاده می‌کنند [۷]، که این امر یادگیری را غیرکاربردی و غیرجذاب می‌کند.
پیچیدگی‌های ذاتی مفاهیم آماری مانند احتمال و آزمون‌های فرض آماری، همراه با ارائه انتزاعی آن‌ها، یادگیری را برای دانش‌آموزان دشوار می‌سازد [۴]. روش‌های سنتی، مانند تدریس یک‌طرفه و تمرین‌های محاسباتی، برای پاسخگویی به نیازهای یادگیری قرن بیست و یکم ناکافی هستند [۱۲]. به‌منظور ارتقای کیفیت آموزش آمار، روش‌های نوین از جمله یادگیری مبتنی بر فناوری، استفاده از داده‌های واقعی و یادگیری فعال پیشنهاد شده است. به‌کارگیری نرم‌افزارهای آماری نظیر R ،Python و SPSS و همچنین شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای، درک مفاهیم پیچیده را تسهیل می‌کند [۸].
علاوه بر این، استفاده از داده‌های واقعی در موضوعاتی مانند تغییرات آب‌وهوا یا داده‌های اقتصادی، انگیزه یادگیری را افزایش داده و ارتباط مفاهیم آماری با زندگی روزمره را تقویت می‌کند [۸]. روش‌هایی نظیر یادگیری مبتنی بر پروژه (PBL) و آموزش گروهی نیز با افزایش تعامل و تحلیل داده‌ها، توانایی تفکر انتقادی و حل مسئله را در دانش‌آموزان تقویت می‌کنند [۴]. به‌کارگیری ابزارهای تحلیلی آنلاین، مانند Sheets Google و Public، Tableau فرصت‌های جدیدی را برای آموزش کاربردی آمار فراهم می‌آورد.

۴. شیوه‌های نوین آموزش آمار: راهکاری برای یادگیری مؤثرتر

روش‌های نوین آموزش آمار نقشی کلیدی در تقویت مهارت‌های تحلیلی و تفکر انتقادی دانش‌آموزان دارند. بهره‌گیری از تحلیل داده‌های واقعی و پروژه‌های تحقیقاتی، درک عمیق‌تری از مفاهیم آماری ایجاد کرده و توانایی شناسایی الگوها و روابط را افزایش می‌دهد [۸]. پژوهش‌های

گارفیلد و بنزوی نشان می‌دهد که این رویکردها علاوه بر ارتقای سواد آماری، مهارت‌های منطقی و انتقادی را نیز توسعه می‌دهند که برای حل مسائل پیچیده ضروری است.
استفاده از داده‌های واقعی، یادگیری را معنادارتر و جذاب‌تر می‌سازد. منابع معتبر مانند گزارش‌های دولتی و داده‌های بین‌المللی، پیوندی مستقیم میان تئوری و کاربردهای عملی ایجاد می‌کنند. تحقیقات زیفلر و همکاران [۱۳] نشان داده است که کار با این داده‌ها مشارکت دانش‌آموزان را افزایش داده و به یادگیری عمیق‌تر می‌انجامد.
رویکردهای تعاملی مانند یادگیری مبتنی بر مسئله (PBL) نیز باعث افزایش مشارکت دانش‌آموزان در فرایند یادگیری می‌شود. در این روش‌ها، دانش‌آموزان به‌جای دریافت منفعلانه اطلاعات، در حل مسائل واقعی مشارکت می‌کنند و تجربه‌ای عملی از چالش‌های تحلیل داده‌ها کسب می‌نمایند [۴]. این فرایند، علاوه بر افزایش درک آماری، توانایی کار گروهی و تصمیم‌گیری را نیز تقویت می‌کند.
نقش فناوری در تسهیل یادگیری آمار غیرقابل‌انکار است. شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای و نرم‌افزارهای تعاملی، مفاهیمی پیچیده همچون توزیع‌های احتمالی و تحلیل رگرسیون را به‌شکلی بصری و قابل درک ارائه می‌دهند. پژوهش رضایی (۱۴۰۰) [۳] نشان داده است که بهره‌گیری از فناوری‌های نوین در آموزش آمار نه‌تنها اضطراب یادگیری را کاهش می‌دهد، بلکه اعتمادبه‌نفس دانش‌آموزان را در تحلیل داده‌ها افزایش می‌دهد.

۵. چالش‌ها و محدودیت‌های پیاده‌سازی شیوه‌های نوین آموزش آمار

اجرای روش‌های نوین آموزش آمار با چالش‌های متعددی همراه است. یکی از مهم‌ترین موانع، محدودیت‌های فناوری و عدم دسترسی به زیرساخت‌های آموزشی مناسب است. در بسیاری از مناطق، به‌ویژه مناطق محروم، نبود اینترنت پرسرعت، کامپیوترهای مناسب و نرم‌افزارهای آماری، بهره‌گیری از این روش‌ها را دشوار می‌سازد [۳]. چالش دیگر، کمبود دانش و مهارت معلمان در استفاده از فناوری‌های آموزشی نوین است. بسیاری از معلمان با ابزارهایی همچون نرم‌افزارهای آماری و شبیه‌سازی‌های آموزشی آشنایی کافی ندارند، که این امر اجرای موفقیت‌آمیز روش‌های نوین را محدود می‌کند [۹]. آموزش و توانمندسازی معلمان، پیش‌نیاز اساسی در این زمینه محسوب می‌شود.
علاوه بر موانع فناوری و مهارتی، ساختار سنتی سیستم آموزشی نیز مانعی جدی است. برنامه‌های درسی مبتنی بر حفظیات و ارزیابی‌های سنتی به‌سختی با روش‌هایی که بر تعامل، تحلیل داده و یادگیری مبتنی بر مسئله تأکید دارند، سازگار می‌شوند. تغییر این ساختارها مستلزم اصلاح سیاست‌های آموزشی، سرمایه‌گذاری در زیرساخت‌ها و اختصاص زمان کافی برای آموزش معلمان است [۱۲]. اگرچه روش‌های نوین آموزش آمار می‌توانند به یادگیری عمیق‌تر و مؤثرتر منجر شوند، اما تحقق آن‌ها نیازمند منابع مالی، زمانی و حمایت نهادی است که در بسیاری از موارد، اجرای گسترده این روش‌ها را با محدودیت مواجه می‌سازد.

۶. نتایج و پیشنهادات: راهی به‌سوی ارتقای آموزش آمار در مدارس

تحلیل یافته‌های این مقاله مروری نشان می‌دهد که روش‌های نوین آموزش آمار، در صورت اجرای مناسب، می‌توانند تأثیر بسزایی در افزایش یادگیری و درک مفاهیم آماری در دانش‌آموزان داشته باشند. مطالعات مختلف، از جمله پژوهش‌های گارفیلد و بتانرو [۴، ۸]، نشان داده‌اند که استفاده از داده‌های واقعی، فناوری‌های پیشرفته و شیوه‌های فعال یادگیری می‌تواند تفکر تحلیلی و مهارت‌های انتقادی دانش‌آموزان را تقویت کند. همچنین، ترکیب روش‌های سنتی با ابزارهای نوین آموزشی می‌تواند شکاف موجود بین محتوای آموزشی و نیازهای دنیای واقعی را کاهش دهد.
برای بهبود تدریس آمار در مدارس، پیشنهاد می‌شود که برنامه‌های درسی به‌صورت تدریجی اصلاح شده و شامل محتوای مرتبط با کاربردهای روزمره آمار و داده‌کاوی شوند. برگزاری دوره‌های آموزشی برای معلمان، به‌ویژه در زمینه استفاده از نرم‌افزارهای آماری و روش‌های تدریس مبتنی بر فناوری، ضروری است. همچنین، توسعه منابع آموزشی بومی و استاندارد، شامل فیلم‌های آموزشی، شبیه‌سازی‌ها و پروژه‌های عملی، می‌تواند تدریس آمار را جذاب‌تر و اثربخش‌تر سازد.
یکی دیگر از پیشنهادات، ارائه فعالیت‌های عملی مانند پروژه‌های کوچک تحقیقاتی است که در آن دانش‌آموزان با جمع‌آوری، تحلیل و تفسیر داده‌های واقعی آشنا شوند. بر اساس تحقیقات موجود در [۱۲]، این رویکردها باعث افزایش علاقه‌مندی دانش‌آموزان به آمار و درک عمیق‌تر آن‌ها از مفاهیم می‌شوند. علاوه بر این، برگزاری مسابقات آماری و کارگاه‌های آموزشی در مدارس می‌تواند انگیزه و خلاقیت دانش‌آموزان را در این حوزه تقویت کند. در پایان، پیشنهاد می‌شود که پژوهش‌های آینده بر بررسی تأثیر روش‌های نوین آموزشی در دوره‌های تحصیلی مختلف و همچنین نقش فرهنگ و شرایط اجتماعی در پذیرش این روش‌ها متمرکز شوند. همچنین، بررسی تأثیرات روان‌شناختی و اجتماعی شیوه‌های جدید آموزشی بر دانش‌آموزان می‌تواند راهکارهای جدیدی برای توسعه آموزش آمار ارائه دهد. استفاده از متدولوژی‌های ترکیبی، شامل پژوهش‌های کیفی و کمی، در این زمینه پیشنهاد می‌شود تا نتایج جامع‌تری حاصل شود. جمع‌بندی مطالب این مقاله نشان می‌دهد که آموزش آمار در مدارس نیازمند بازبینی و به‌روزرسانی جدی است. شیوه‌های سنتی تدریس، علی‌رغم تلاش‌های انجام‌شده، نتوانسته‌اند به طور کامل پاسخگوی نیازهای دنیای داده‌محور امروزی باشند. استفاده از روش‌های نوین آموزشی که بر فناوری‌های پیشرفته، داده‌های واقعی و رویکردهای فعال یادگیری تأکید دارند، می‌تواند به توانمندسازی دانش‌آموزان در تحلیل داده‌ها و تفکر انتقادی کمک کند. اهمیت بهره‌گیری از این شیوه‌ها نه تنها در افزایش جذابیت درس آمار برای دانش‌آموزان، بلکه در آماده‌سازی آنان برای مواجهه با چالش‌های علمی، حرفه‌ای و اجتماعی آینده نهفته است.
تحقیقات نشان داده‌اند که این رویکردها می‌توانند درک عمیق‌تری از مفاهیم آماری ایجاد کرده و دانش‌آموزان را به یادگیری مستقل و خلاقیت تشویق کنند. بنابراین، ادغام این روش‌ها در برنامه‌های درسی و توسعه منابع آموزشی با کیفیت، یکی از ضروریات پیش‌روی نظام آموزشی

است. معلمان نقش کلیدی در اجرای موفقیت‌آمیز این تغییرات دارند. آموزش آنان در زمینه استفاده از فناوری‌های نوین و توسعه مهارت‌های تدریس خلاق، از جمله اقداماتی است که باید در دستور کار قرار گیرد. همچنین، سیاست‌گذاران آموزشی می‌توانند با حمایت‌های مادی و معنوی، تسهیل‌کننده این فرآیند باشند. سرمایه‌گذاری در زیرساخت‌های فناوری و ارائه منابع مناسب، از جمله اولویت‌های اساسی در این زمینه است. در نهایت، برای پیشبرد آموزش آمار، لازم است که پژوهشگران نیز در زمینه ارزیابی روش‌های نوین تدریس و تأثیر آن‌ها بر یادگیری دانش‌آموزان تحقیق کنند. ارائه رویکردهای بومی‌سازی‌شده و متناسب با فرهنگ و نیازهای جامعه، می‌تواند به کارآمدی بیشتر این شیوه‌ها کمک کند. از این رو، تعامل میان پژوهشگران، معلمان و سیاست‌گذاران به‌عنوان یک زنجیره هماهنگ، کلید موفقیت در تحول آموزش آمار به‌شمار می‌آید.

مراجع

[۱] حسن‌زاده، ن.، و رحیمی، م. (۱۳۹۷). "کاربرد فناوری در آموزش آمار." مجله آموزش و توسعه، ۲۳(۲)، ۱۱۲-۱۳۱.

[۲] .رفیع پور. (۲۰۲۱). استفاده از مه‌داده‌ها و مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی در آموزش آمار و احتمال. مجله اندیشه آماری، ۲۶(۱)، ۲۵-۳۵.

[۳] رضایی، س. (۱۴۰۰). "بررسی تأثیر استفاده از داده‌های واقعی در آموزش آمار." پژوهش‌های آموزشی ایران، ۲۹(۴)، ۱۵۶-۱۷۰.

[4] Batanero, C., et al. (2016). Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23214-4

[5] Chance, B. (2002). Models and Simulation in Statistics Education. International Statistical Review, 70(2), 105-125.

[6] Cobb, G. W. (2007). The Challenge of Teaching Statistics: A Cross-National Perspective. Journal of Statistics Education, 15(2), 105-122.

[7] Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research Methods in Education (6th ed.). Routledge.

[8] Garfield, J., & Ben-Zur, H. (2009). Teaching Statistics Using Technology: The Challenges and Opportunities. Mathematics Education Research Journal, 21(3), 21-36.

[9] Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9

[10] Garfield, J. (2009). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking. International Statistical Review, 77(2), 1-10.

[11] Watson, J., & Kelly, B. (2014). Teaching Statistics: An Integrated Approach. Australian & New Zealand Journal of Statistics, 56(1), 111-126.

[12] Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

[13] Zieffler, A., et al. (2012). A Framework to Support Research on Informal Inferential Reasoning. Statistics Education Research Journal, 11(2), 40–58.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–104، صص. ۵–۱۱

نقش خودارزیابی در بهبود یادگیری ریاضیات: چالش‌ها، فرصت‌ها و مسیرهای آینده

آسیه ابراهیم زاده*[آ]، فهیمه کلاهدوز[ب]

[آ] گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران
[ب] وه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها:
خودارزیابی
آموزش ریاضیات
تفکر انتقادی
یادگیری مستقل
ابزارهای دیجیتال
سیاست‌گذاری آموزشی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97B10
97U10

چکیده

خودارزیابی به‌عنوان یکی از ابزارهای مؤثر در فرآیند یادگیری، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا توانایی شناسایی نقاط قوت و ضعف خود را تقویت کرده و با مدیریت بهتر فرآیند یادگیری، عملکرد خود را بهبود بخشند. این مقاله مروری به بررسی نقش خودارزیابی در آموزش ریاضیات پرداخته و تأثیرات آن بر توسعه مهارت‌های شناختی، خودتنظیمی و تفکر انتقادی دانش‌آموزان را تحلیل می‌کند. در این مطالعه، علاوه بر مرور پژوهش‌های کلیدی، چالش‌ها و محدودیت‌های اجرایی مانند کمبود مهارت‌های ارزیابی دانش‌آموزان، مقاومت معلمان در برابر تغییرات آموزشی و نیاز به ابزارهای مناسب بررسی شده است. همچنین، فرصت‌های نوینی مانند استفاده از فناوری‌های دیجیتال، پلتفرم‌های یادگیری آنلاین و ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی که می‌توانند فرآیند خودارزیابی را تسهیل کنند، مورد توجه قرار گرفته است. یافته‌های این مقاله نشان می‌دهد که ادغام خودارزیابی در برنامه‌های درسی ریاضیات می‌تواند باعث بهبود نتایج یادگیری، افزایش اعتمادبه‌نفس و انگیزه دانش‌آموزان شود. در پایان، پیشنهادهایی برای سیاست‌گذاری‌های آموزشی، از جمله آموزش معلمان در استفاده از خودارزیابی و توسعه فرهنگ یادگیری مستقل در مدارس، ارائه شده است. این مقاله، مسیرهای پژوهشی آینده را به سمت بهره‌گیری از ابزارهای دیجیتال و مطالعه تأثیر تفاوت‌های فرهنگی در اجرای خودارزیابی هدایت می‌کند.

۱. مقدمه

خودارزیابی به‌عنوان یکی از مفاهیم کلیدی در حوزه ارزیابی آموزشی، توجه بسیاری از پژوهشگران و متخصصان آموزش را در دهه‌های اخیر به خود جلب کرده است. این روش، که شامل ارزیابی عملکرد توسط خود فرد است، به‌عنوان ابزاری مؤثر برای تقویت یادگیری مادام‌العمر و توسعه مهارت‌های فراشناختی شناخته می‌شود [۱۱]. در محیط‌های آموزشی مدرن، خودارزیابی از یک ابزار ساده برای سنجش پیشرفت یادگیری فراتر رفته و به یک روش مهم برای توانمندسازی فراگیران در مدیریت و بهبود فرآیند یادگیری‌شان تبدیل شده است [۱۰].

در آموزش ریاضی، که بر مفاهیمی پیچیده و مهارت‌های حل مسئله تأکید دارد، خودارزیابی می‌تواند تأثیر بسزایی در پیشبرد اهداف آموزشی داشته باشد. بر اساس پژوهش‌ها، دانش‌آموزانی که از روش‌های خودارزیابی بهره می‌گیرند، درک عمیق‌تری از نقاط قوت و ضعف خود به دست می‌آورند و از طریق بازبینی مداوم عملکرد، می‌توانند به بهبود کارایی و دقت خود بپردازند [۲]. علاوه بر این، این رویکرد به معلمان کمک می‌کند تا از دیدگاه دانش‌آموزان به فرآیند یادگیری نگاه کرده و روش‌های تدریس خود را با نیازهای آن‌ها تطبیق دهند [۱۸]. خودارزیابی در آموزش ریاضی از دو جنبه مورد توجه قرار می‌گیرد: جنبه شناختی و جنبه عاطفی. از جنبه شناختی، خودارزیابی می‌تواند در بهبود درک مفاهیم ریاضی، تنظیم استراتژی‌های حل مسئله، و تقویت تفکر انتقادی نقش‌آفرین باشد. از جنبه عاطفی، این روش به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا نگرش مثبت‌تری نسبت به یادگیری ریاضیات پیدا کنند، اعتمادبه‌نفس بیشتری کسب کنند و احساس کنترل بیشتری بر فرآیند یادگیری خود داشته باشند [۲۲].

*سخنران
پست الکترونیک: a.ebrahimzadeh@cfu.ac.ir (آسیه ابراهیم زاده)، f.kolahdouz@cfu.ac.ir (فهیمه کلاهدوز)

این مقاله مروری با هدف ارائه تصویری جامع از نقش و کاربردهای خودارزیابی در آموزش ریاضی تدوین شده است. در این راستا، از مطالعات پیشین و منابع معتبر علمی استفاده شده تا جنبه‌های مختلف این مفهوم بررسی شود. تمرکز مقاله بر تحلیل نظریات و یافته‌های پژوهشی مرتبط با خودارزیابی، شناسایی فرصت‌ها و چالش‌های اجرایی آن در آموزش ریاضیات، و ارائه راهکارهایی برای بهبود استفاده از این رویکرد در محیط‌های آموزشی است. دامنه این مقاله شامل موارد زیر می باشد:

۱. بررسی مبانی نظری و تعاریف مرتبط با خودارزیابی و ارتباط آن با نظریه‌های یادگیری.

۲. تحلیل روش‌ها و ابزارهای کاربردی خودارزیابی در آموزش ریاضی.

۳. شناسایی موانع و چالش‌های اجرایی این رویکرد در محیط‌های آموزشی مختلف.

۴. ارائه پیشنهادهایی برای بهینه‌سازی فرآیند خودارزیابی در یادگیری ریاضیات.

این مقاله می‌کوشد تا به پرسش‌هایی همچون "چگونه می‌توان خودارزیابی را در آموزش ریاضی به کار گرفت؟" و "تأثیر این روش بر توانمندی‌های شناختی و عاطفی دانش‌آموزان چیست؟" پاسخ دهد. مخاطبان این مقاله شامل معلمان، محققان و سیاست‌گذاران آموزشی هستند که به دنبال ارتقای کیفیت یادگیری در حوزه ریاضیات هستند.

چارچوب نظری: تعریف و مفاهیم خودارزیابی

خودارزیابی به فرآیندی گفته می‌شود که در آن یادگیرنده به‌طور مستقل و آگاهانه عملکرد، پیشرفت، یا دستاوردهای خود را در زمینه‌های مختلف یادگیری بررسی و تحلیل می‌کند. این روش، برخلاف ارزیابی‌های سنتی که توسط معلمان انجام می‌شود، بر خودمختاری یادگیرنده و تقویت مهارت‌های خودتنظیمی تأکید دارد [۱]. خودارزیابی را می‌توان در سه سطح بررسی کرد: ۱. شناختی: بررسی توانایی یادگیرنده در درک مفاهیم و مهارت‌های آموخته‌شده. ۲. عاطفی: تحلیل نگرش، انگیزه، و احساسات مرتبط با یادگیری. ۳. رفتاری: ارزیابی اقدامات و تصمیم‌هایی که یادگیرنده برای بهبود عملکرد خود انجام می‌دهد. این مفاهیم در آموزش ریاضی از اهمیت بالایی برخوردارند، زیرا یادگیری این درس به مهارت‌هایی مانند حل مسئله، تحلیل داده‌ها، و تفکر منطقی وابسته است. خودارزیابی در این زمینه، یادگیرنده را قادر می‌سازد تا بر مبنای شناخت نقاط ضعف و قوت خود، برنامه‌ریزی دقیق‌تری برای یادگیری انجام دهد [۱۲].

تاریخچه و روندهای جهانی

خودارزیابی به‌عنوان یک ابزار آموزشی، نخستین بار در دهه ۱۹۷۰ مطرح شد و به‌مرور جایگاه خود را در نظام‌های آموزشی مدرن تثبیت کرد. در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰، پژوهش‌هایی در کشورهای پیشرو مانند ایالات متحده، بریتانیا، و سنگاپور نشان داد که این روش تأثیر قابل‌توجهی بر تقویت مهارت‌های یادگیری و افزایش مسئولیت‌پذیری دانش‌آموزان دارد [۹] در قرن بیست‌ویکم، روندهای جدیدی در استفاده از خودارزیابی به وجود آمده است، به‌ویژه در محیط‌های یادگیری دیجیتال و مجازی. فناوری‌های نوینی مانند سامانه‌های مدیریت یادگیری (LMS) و ابزارهای ارزیابی الکترونیکی، امکان اجرای خودارزیابی را برای یادگیرندگان در مقیاس بزرگ و با دقت بیشتر فراهم کرده‌اند[۱۷].
امروزه، کشورهای موفق در آموزش مانند فنلاند و ژاپن از خودارزیابی به‌عنوان یکی از ارکان اصلی نظام آموزشی خود استفاده می‌کنند. این کشورها با تمرکز بر توسعه مهارت‌های تفکر انتقادی و خلاقیت، خودارزیابی را به بخشی جدایی‌ناپذیر از فرآیند یادگیری تبدیل کرده‌اند [۱۹].
ارتباط خودارزیابی با نظریه‌های یادگیری خودارزیابی ارتباط نزدیکی با نظریه‌های یادگیری دارد و می‌توان آن را در چارچوب نظریه‌های متعددی بررسی کرد: ۱. ساختن‌گرایی: این نظریه تأکید دارد که یادگیری زمانی مؤثر است که یادگیرنده به‌طور فعال در فرآیند یادگیری شرکت کند. خودارزیابی در این چارچوب، ابزاری برای ارتقای درگیری فعال یادگیرنده در یادگیری است و به او کمک می‌کند تا از تجربیات خود برای ساخت دانش استفاده کند [۲۰]. ۲. یادگیری خودتنظیمی: این نظریه بر نقش خودکنترلی، خودبازبینی، و خودتنظیمی در یادگیری تأکید دارد. خودارزیابی یکی از ابزارهای کلیدی در این مدل است، زیرا به یادگیرنده کمک می‌کند تا عملکرد خود را پایش کرده و راهبردهای مناسبی برای بهبود انتخاب کند [۲۲]. ۳. نظریه اجتماعی–شناختی: این نظریه که توسط بندورا مطرح شد، به اهمیت بازخورد و تعامل اجتماعی در یادگیری اشاره دارد. خودارزیابی با ارائه بازخورد مستقیم به یادگیرنده، نقش مهمی در تقویت حس خودکارآمدی و انگیزه دارد [۵]. ۴. نظریه‌های عاطفی یادگیری: این نظریه‌ها تأکید دارند که احساسات و نگرش‌ها نقش مهمی در فرآیند یادگیری ایفا می‌کنند. خودارزیابی با ایجاد فرصتی برای تأمل در نگرش‌ها و احساسات نسبت به یادگیری، می‌تواند تأثیر مثبتی بر انگیزه و نگرش یادگیرنده داشته باشد [۷]. این ارتباطات نشان می‌دهند که خودارزیابی تنها یک ابزار ارزیابی نیست، بلکه روشی است که می‌تواند در چارچوب‌های نظری متنوعی به ارتقای کیفیت یادگیری کمک کند. این روش با تلفیق جنبه‌های شناختی، عاطفی، و اجتماعی یادگیری، فرصتی برای دستیابی به یادگیری عمیق‌تر و مؤثرتر فراهم می‌آورد.

ابزارها و تکنیک‌های خودارزیابی

ابزارها و تکنیک‌های خودارزیابی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که به یادگیرندگان امکان دهند به شیوه‌ای ساختارمند و نظام‌مند عملکرد خود را تحلیل و ارزیابی کنند. یکی از این ابزارها، چک‌لیست‌های خودارزیابی است که شامل فهرستی از معیارهای مشخص است و به یادگیرندگان کمک می‌کند تا پیشرفت خود را بر اساس آن معیارها بسنجند [۱]. این چک‌لیست‌ها در آموزش ریاضیات می‌توانند شامل معیارهایی برای ارزیابی دقت محاسبات، کیفیت تحلیل داده‌ها و اثربخشی استدلال‌های ریاضی باشند.
از دیگر ابزارها می‌توان به دفترچه‌های انعکاسی اشاره کرد. در این تکنیک، یادگیرندگان تجربیات خود را از یادگیری ثبت می‌کنند و به بررسی نقاط قوت و ضعف خود می‌پردازند. این روش به ویژه برای تحلیل فرآیندهای حل مسئله در ریاضیات بسیار مؤثر است، زیرا به دانش‌آموزان امکان می‌دهد تا درباره راهبردهای مورد استفاده و تصمیم‌گیری‌های خود تأمل کنند[۸].
همچنین پروژه‌های خودارزیابی گروهی یکی از روش‌های نوآورانه‌ای است که از طریق مشارکت جمعی، دیدگاه‌های مختلف در ارزیابی عملکرد یکدیگر را به کار می‌گیرد. این تکنیک به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا با استفاده از بازخوردهای همتایان، درک عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی پیدا کنند و توانایی‌های خود را در محیط‌های یادگیری مشارکتی تقویت کنند [۱۳].
ادغام خودارزیابی در روش‌های تدریس ادغام خودارزیابی در فرآیند تدریس نیازمند رویکردی چندبعدی است که یادگیری را به صورت پویا و تعاملی طراحی کند. یکی از روش‌های مؤثر در این زمینه، استفاده از بازخوردهای مستمر معلم است. در این روش، معلمان با ارائه بازخوردهای سازنده، دانش‌آموزان را تشویق می‌کنند تا عملکرد خود را بررسی کنند و نقاط ضعفشان را بهبود بخشند [۱۸]. علاوه بر این، طراحی تکالیف خودارزیابی محور می‌تواند نقش مهمی در یادگیری مفاهیم ریاضی ایفا کند. به عنوان مثال، معلمان می‌توانند از دانش‌آموزان بخواهند که پس از حل مسائل ریاضی، دلایل انتخاب روش‌ها و راه‌حل‌های خود را توضیح دهند. این فعالیت به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا به جای تمرکز بر نتیجه، بر فرآیند یادگیری خود تأمل کنند و مهارت‌های تحلیلی خود را تقویت کنند [۳]. همچنین، استفاده از جلسات انعکاسی کلاسی که در آن دانش‌آموزان درباره عملکرد و پیشرفت خود بحث می‌کنند، می‌تواند فضایی برای تبادل ایده‌ها و یادگیری جمعی فراهم کند. این رویکرد به ویژه در آموزش ریاضی که به مهارت‌های همکاری و تفکر انتقادی نیاز دارد، مؤثر است [۱۱].

نقش فناوری در ارتقای خودارزیابی

فناوری نقش برجسته‌ای در گسترش و بهبود روش‌های خودارزیابی ایفا می‌کند. ابزارهای دیجیتال مانند سامانه‌های مدیریت یادگیری (LMS) و برنامه‌های موبایلی خودارزیابی به دانش‌آموزان امکان می‌دهند که عملکرد خود را به‌صورت آنی ارزیابی کرده و بازخورد دریافت کنند [۱۷]. این ابزارها با ارائه گراف‌ها و نمودارهای پیشرفت، فرآیند خودارزیابی را برای یادگیرندگان جذاب‌تر و تعاملی‌تر می‌کنند. یکی از پیشرفته‌ترین کاربردهای فناوری در این زمینه، استفاده از هوش مصنوعی در طراحی سیستم‌های خودارزیابی تطبیقی است. این سیستم‌ها با تحلیل داده‌های عملکرد یادگیرنده، توصیه‌هایی شخصی‌سازی‌شده برای بهبود ارائه می‌دهند و به طور خودکار راهبردهای یادگیری مناسب را پیشنهاد می‌کنند [۱۶].
همچنین بازی‌های آموزشی مبتنی بر خودارزیابی، که به طراحی چالش‌های ریاضی در قالب بازی‌های دیجیتال می‌پردازند، تأثیر مثبتی بر انگیزه و یادگیری دانش‌آموزان دارند. این بازی‌ها به دانش‌آموزان امکان می‌دهند که به صورت همزمان پیشرفت خود را بسنجند و مهارت‌های خود را در محیطی سرگرم‌کننده تقویت کنند [۱۴]. در نهایت، پلتفرم‌های ارزیابی آنلاین مانند Forms Google و Kahoot نیز به معلمان اجازه می‌دهند که فعالیت‌های خودارزیابی گروهی یا فردی طراحی کنند و نتایج را به سرعت تحلیل و گزارش کنند. این ابزارها به دلیل قابلیت‌های تعاملی و دسترسی آسان، به طور گسترده در آموزش ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند[۲۱].

اهمیت خودارزیابی در آموزش ریاضیات

آموزش ریاضیات به دلیل ماهیت انتزاعی و ساختاریافته خود، نیازمند استراتژی‌های آموزشی است که تفکر انتقادی و تحلیلی را در دانش‌آموزان تقویت کند. در این راستا، خودارزیابی به‌عنوان ابزاری ارزشمند برای تسهیل یادگیری مفاهیم ریاضی و توسعه مهارت‌های حل مسئله، نقش بسزایی ایفا می‌کند[۱۱] . خودارزیابی به دانش‌آموزان امکان می‌دهد تا به‌صورت عمیق‌تر درک کنند که چگونه روش‌های ریاضی را یاد گرفته‌اند و در چه زمینه‌هایی نیاز به پیشرفت دارند. این فرآیند باعث می‌شود دانش‌آموزان مسئولیت بیشتری برای یادگیری خود بپذیرند و توانایی‌هایی همچون خودتنظیمی، مدیریت زمان و بازبینی عملکرد را تقویت کنند[۲۲]. علاوه بر این، خودارزیابی می‌تواند در کاهش اضطراب ریاضی نقش مؤثری داشته باشد. دانش‌آموزانی که فرصت خودارزیابی دارند، معمولاً نگرش مثبت‌تری نسبت به ریاضیات پیدا می‌کنند و احساس توانمندی بیشتری برای مواجهه با چالش‌های یادگیری این درس خواهند داشت [۴].

۲. راهبردهای اجرای خودارزیابی در کلاس درس

برای اجرای مؤثر خودارزیابی در کلاس درس ریاضی، باید از راهبردهایی استفاده شود که متناسب با نیازهای یادگیرندگان باشد. یکی از این راهبردها، استفاده از معیارهای مشخص و شفاف است. معلمان می‌توانند معیارهایی را تدوین کنند که به دانش‌آموزان کمک کند تا نقاط قوت و ضعف خود را بر اساس آن بسنجند. به‌عنوان مثال، در درس جبر، معیارها می‌توانند شامل بررسی دقت در حل معادلات و تحلیل صحت

استدلال‌های ریاضی باشند [۱۵]. راهکار دیگر، تلفیق فعالیت‌های خودارزیابی با تکالیف کلاسی است. معلمان می‌توانند از دانش‌آموزان بخواهند تا پس از حل مسائل، دلایل انتخاب روش‌ها و راه‌حل‌های خود را ثبت کرده و در کلاس درباره آن بحث کنند. این روش نه تنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا دیدگاه‌های متفاوتی را بررسی کنند، بلکه تعامل و مشارکت فعال آن‌ها را نیز افزایش می‌دهد [۲۱]. بازخوردهای همتایان نیز می‌توانند بخشی از فرآیند خودارزیابی باشند. در این روش، دانش‌آموزان با همکاری هم عملکرد یکدیگر را ارزیابی می‌کنند و با دریافت بازخوردهای سازنده، مهارت‌های اجتماعی و انتقادی خود را بهبود می‌بخشند. این تکنیک به‌ویژه در مسائل گروهی یا پروژه‌های ریاضی کاربرد دارد [۱۳].

مطالعات موردی و مثال‌های عملی

پژوهش‌های متعدد تأثیر مثبت خودارزیابی در آموزش ریاضیات را نشان داده‌اند. برای مثال، در مطالعه‌ای که توسط نیکول و مکفارلن [۱۸] انجام شد، دانش‌آموزانی که از ابزارهای خودارزیابی برای یادگیری مفاهیم هندسی استفاده کردند، به‌طور معناداری عملکرد بهتری در آزمون‌های استاندارد داشتند. یکی دیگر از مطالعات توسط [۱۱] بر روی دانش‌آموزان مقطع ابتدایی انجام شد و نشان داد که استفاده از چک‌لیست‌های خودارزیابی در حل مسائل ریاضی باعث افزایش دقت و کاهش خطاهای محاسباتی می‌شود. این پژوهش همچنین تأکید کرد که دانش‌آموزانی که از خودارزیابی استفاده می‌کنند، اعتماد به نفس بیشتری در حل مسائل پیچیده‌تر دارند. در یک مثال عملی دیگر، معلمی در سنگاپور از دفترچه‌های انعکاسی برای تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کرد. دانش‌آموزان هر هفته عملکرد خود را در قالب نوشته‌هایی منعکس می‌کردند و این فرآیند به آن‌ها کمک کرد تا مهارت‌های تحلیلی و انعطافی خود را تقویت کنند [۱]. همچنین در یکی از مدارس فنلاند، از بازی‌های آموزشی دیجیتال مبتنی بر خودارزیابی برای تدریس جبر استفاده شد. نتایج نشان داد که این روش باعث افزایش انگیزه دانش‌آموزان و بهبود نتایج یادگیری آن‌ها شد [۱۴].

۳. چالش‌ها و محدودیت‌ها موانع پیش روی خودارزیابی مؤثر

خودارزیابی، علی‌رغم مزایای قابل توجه در یادگیری و توسعه مهارت‌های دانش‌آموزان، با چالش‌هایی در اجرا و اثربخشی مواجه است. یکی از اصلی‌ترین موانع، عدم توانایی دانش‌آموزان در ارزیابی دقیق عملکرد خود است. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان به دلیل نبود دانش و مهارت‌های لازم برای خودانعکاسی و تحلیل عملکرد، تمایل به برآورد نادرست از توانایی‌های خود دارند [۱۲]. همچنین، فقدان آموزش مناسب برای دانش‌آموزان در مورد نحوه اجرای خودارزیابی، مانعی دیگر است که می‌تواند باعث کاهش اعتماد به نفس آن‌ها در استفاده از این روش شود. چالش دیگر، مقاومت در برابر تغییر در محیط‌های آموزشی سنتی است. سیستم‌هایی که بر ارزیابی معلم‌محور تأکید دارند، اغلب فضا و زمان کافی برای خودارزیابی دانش‌آموزان فراهم نمی‌کنند [۱۷]. علاوه بر این، نبود ابزارها و منابع کافی، از جمله چک‌لیست‌های استاندارد، نرم‌افزارهای مناسب و زیرساخت‌های دیجیتال، می‌تواند فرآیند خودارزیابی را مختل کند [۱]. همچنین، تفاوت‌های فردی میان دانش‌آموزان، از جمله سطوح مختلف خودآگاهی و مهارت‌های خودتنظیمی، می‌تواند منجر به نتایج غیرقابل پیش‌بینی در خودارزیابی شود. توجه به بافت‌های فرهنگی و آموزشی خودارزیابی نمی‌تواند به‌صورت یکسان در تمامی فرهنگ‌ها و نظام‌های آموزشی اجرا شود. تفاوت‌های فرهنگی نقش مهمی در پذیرش و اثربخشی این روش دارند. برای مثال، در جوامعی که تأکید بیشتری بر نتایج گروهی یا اطاعت از ساختارهای آموزشی سنتی دارند، ممکن است خودارزیابی با مقاومت بیشتری مواجه شود [۱۹]. در این جوامع، احتمال دارد دانش‌آموزان به دلیل ترس از قضاوت یا تنبیه، نتایج واقعی خود را پنهان کنند. علاوه بر این، سطح دسترسی به منابع آموزشی و فناوری‌های دیجیتال، مانند سامانه‌های مدیریت یادگیری (LMS)، می‌تواند تأثیر مستقیمی بر امکان‌پذیری و کیفیت اجرای خودارزیابی داشته باشد. برای موفقیت در ادغام خودارزیابی، ضروری است که بافت آموزشی محلی مد نظر قرار گیرد. برای مثال، در کشورهایی که استفاده از فناوری‌های آموزشی محدود است، طراحی ابزارهای سنتی خودارزیابی مانند دفترچه‌های انعکاسی ممکن است کاربرد بیشتری داشته باشد [۱۰]. همچنین، توجه به سبک‌های یادگیری متنوع، از جمله یادگیری بصری، شنیداری و تجربی، در طراحی ابزارهای خودارزیابی ضروری است.

ملاحظات اخلاقی

استفاده از خودارزیابی در فرآیندهای یادگیری باید با رعایت ملاحظات اخلاقی همراه باشد. یکی از مسائل مهم، حفظ حریم خصوصی دانش‌آموزان است. اطلاعات حاصل از خودارزیابی باید به‌گونه‌ای مدیریت شود که امنیت روانی دانش‌آموزان حفظ شده و از سوءاستفاده از داده‌ها جلوگیری شود [۵]. علاوه بر این، لازم است اطمینان حاصل شود که نتایج خودارزیابی تنها برای بهبود فرآیند یادگیری استفاده می‌شود و نه برای مقاصد تنبیهی یا رقابتی. موضوع دیگر، ایجاد محیطی امن برای بیان نقاط ضعف است. اگر معلمان یا هم‌کلاسی‌ها به خودارزیابی دانش‌آموزان پاسخ‌های انتقادی یا تحقیرآمیز دهند، این فرآیند می‌تواند تأثیر منفی بر اعتماد به نفس و انگیزه آن‌ها بگذارد [۱۱] . بنابراین، آموزش معلمان در خصوص نحوه برخورد با نتایج خودارزیابی و ارائه بازخوردهای سازنده ضروری است. در نهایت، تعادل بین صداقت و تشویق نیز یکی از چالش‌های اخلاقی است. دانش‌آموزان باید تشویق شوند که به‌صورت صادقانه عملکرد خود را ارزیابی کنند، اما این صداقت نباید منجر به احساس ناکامی یا کاهش انگیزه آن‌ها شود [۲۲]. تشویق به خودارزیابی مثبت و آینده‌نگر می‌تواند به آن‌ها کمک کند تا نقاط ضعف خود را به‌عنوان فرصت‌هایی برای رشد و پیشرفت ببینند.

۴. یافته‌های تجربی

پژوهش‌های کلیدی درباره خودارزیابی

پژوهش‌های متعددی تأثیر خودارزیابی را بر یادگیری و توسعه مهارت‌های دانش‌آموزان مورد بررسی قرار داده‌اند. برای مثال، مطالعه‌ای توسط نیکول و مکفارلان در [۱۸] نشان داد که استفاده از ابزارهای خودارزیابی در یادگیری مفاهیم هندسی، باعث افزایش درک و یادگیری عمیق دانش‌آموزان می‌شود. این پژوهش تأکید داشت که فرآیند خودارزیابی نه تنها موجب شناخت بهتر نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان می‌شود، بلکه مهارت‌های خودتنظیمی آن‌ها را نیز تقویت می‌کند. مطالعه‌ای دیگر توسط [۱۲] نشان داد که ادغام فعالیت‌های خودارزیابی در تکالیف روزانه باعث بهبود عملکرد دانش‌آموزان در درک مسائل پیچیده ریاضی شده است. در این تحقیق، دانش‌آموزانی که به‌صورت مداوم از خودارزیابی استفاده می‌کردند، توانستند استراتژی‌های حل مسئله خود را بهبود بخشند و اشتباهات متداول خود را کاهش دهند. همچنین، مطالعه‌ای توسط [۱] بر روی دانش‌آموزان مقطع متوسطه نشان داد که استفاده از چک‌لیست‌های خودارزیابی در دروس ریاضی موجب کاهش خطاهای محاسباتی و افزایش دقت در حل مسائل شده است. این پژوهش همچنین تأکید کرد که خودارزیابی به‌عنوان یک ابزار بازخورد داخلی می‌تواند در بهبود فرآیند یادگیری نقش کلیدی ایفا کند.

تأثیر بر نتایج یادگیری دانش‌آموزان

خودارزیابی تأثیر چشمگیری بر نتایج یادگیری دانش‌آموزان دارد. بر اساس پژوهش‌ها، دانش‌آموزانی که از روش‌های خودارزیابی استفاده می‌کنند، توانایی بیشتری در تنظیم راهبردهای یادگیری خود دارند و عملکرد بهتری در آزمون‌های استاندارد نشان می‌دهند [۲۲] . در یک مطالعه موردی در سنگاپور، دانش‌آموزانی که از دفترچه‌های انعکاسی برای ثبت تجربیات یادگیری استفاده کردند، نتایج بهتری در امتحانات پایانی خود داشتند [۱۱]. این دفترچه‌ها به دانش‌آموزان کمک کرد تا فرآیندهای فکری خود را بازنگری کنند و نقاط ضعف خود را بهبود بخشند.
علاوه بر این، خودارزیابی می‌تواند نگرش‌های مثبت‌تری نسبت به یادگیری ریاضیات ایجاد کند. دانش‌آموزانی که فرصت ارزیابی عملکرد خود را دارند، معمولاً احساس کنترل بیشتری بر فرآیند یادگیری خود پیدا می‌کنند و اعتماد به نفس بالاتری در حل مسائل پیچیده نشان می‌دهند [۲]. به‌عنوان مثال، در تحقیقاتی که در فنلاند انجام شد، دانش‌آموزانی که از ابزارهای دیجیتال خودارزیابی استفاده کردند، توانستند مهارت‌های ریاضی خود را در بازه‌های زمانی کوتاه‌تری تقویت کنند.

دیدگاه‌های معلمان و دانش‌آموزان

دیدگاه‌های معلمان و دانش‌آموزان نسبت به خودارزیابی نشان‌دهنده تأثیرات گسترده این روش است. بسیاری از معلمان بر این باورند که خودارزیابی، فرصت‌هایی برای درک عمیق‌تر از فرآیند یادگیری فراهم می‌کند و به آن‌ها کمک می‌کند تا نیازهای یادگیری فردی دانش‌آموزان را بهتر درک کنند [۶]. در نظرسنجی‌ای که در انگلستان انجام شد، بیش از ۷۰ درصد معلمان اعلام کردند که استفاده از خودارزیابی باعث افزایش تعامل دانش‌آموزان در کلاس‌های ریاضی شده است. با این حال، برخی معلمان نیز نگرانی‌هایی درباره دقت و صداقت دانش‌آموزان در انجام خودارزیابی دارند. آن‌ها معتقدند که برای حل این مشکل، باید آموزش‌های بیشتری درباره روش‌های انجام خودارزیابی به دانش‌آموزان ارائه شود.
از سوی دیگر، دانش‌آموزان اغلب از خودارزیابی به‌عنوان روشی برای ارتقای مهارت‌های یادگیری و افزایش اعتماد به نفس یاد می‌کنند. در مطالعه‌ای توسط فلچیکف در [۱۳] بسیاری از دانش‌آموزان اشاره کردند که فرآیند خودارزیابی به آن‌ها کمک کرده است تا دیدگاه‌های انتقادی‌تری نسبت به عملکرد خود داشته باشند و استراتژی‌های مؤثرتری برای یادگیری انتخاب کنند. در نهایت، شواهد نشان می‌دهند که خودارزیابی می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی کیفیت یادگیری را بهبود بخشد. با این حال، برای بهره‌گیری بهینه از این روش، نیاز است که معلمان و سیاست‌گذاران آموزشی برنامه‌هایی جامع و متناسب با نیازهای محلی طراحی و اجرا کنند.

۵. پیشنهادها و بهترین شیوه‌ها

راهنمایی برای معلمان و مربیان

برای اجرای موفقیت‌آمیز خودارزیابی در کلاس‌های ریاضی، معلمان و مربیان باید نقش فعالی در راهنمایی دانش‌آموزان ایفا کنند. یکی از اقدامات مهم، آموزش مهارت‌های خودارزیابی به دانش‌آموزان است. معلمان باید از طریق کارگاه‌ها و فعالیت‌های تعاملی، به دانش‌آموزان بیاموزند که چگونه عملکرد خود را به‌طور دقیق تحلیل کنند و نقاط قوت و ضعف خود را شناسایی نمایند [۱]. علاوه بر این، ارائه بازخورد سازنده از سوی معلمان می‌تواند تأثیر بسزایی در بهبود خودارزیابی داشته باشد. بازخوردهایی که بر نقاط قوت تأکید دارند و به‌صورت هدفمند به دانش‌آموزان نشان می‌دهند که چگونه می‌توانند پیشرفت کنند، انگیزه‌بخش و مؤثر خواهند بود[۱۱]. همچنین، استفاده از الگوهای ارزیابی شفاف می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا درک بهتری از انتظارات داشته باشند و فرآیند خودارزیابی را با دقت بیشتری انجام دهند. معلمان می‌توانند از رویکردهای متنوع تدریس مانند مطالعات موردی، بحث‌های کلاسی، و تحلیل‌های گروهی استفاده کنند تا دانش‌آموزان به اهمیت خودارزیابی

در یادگیری پی ببرند. آموزش نحوه استفاده از ابزارهای دیجیتال و فناوری‌های مرتبط نیز از دیگر وظایف معلمان است که می‌تواند کارایی این روش را افزایش دهد.

طراحی برنامه‌های مؤثر خودارزیابی

برنامه‌های خودارزیابی باید به گونه‌ای طراحی شوند که نیازهای متنوع دانش‌آموزان را پوشش دهند. یکی از بهترین شیوه‌ها، استفاده از ابزارهای دیجیتال مانند برنامه‌های موبایلی یا سامانه‌های مدیریت یادگیری (LMS) است که امکان اجرای خودارزیابی به‌صورت تعاملی و شخصی‌سازی‌شده را فراهم می‌کنند [۱۷]. این ابزارها می‌توانند بازخورد فوری ارائه دهند و از طریق نمودارها و گزارش‌های پیشرفت، به دانش‌آموزان در درک بهتر عملکردشان کمک کنند. طراحی فعالیت‌های گروهی مبتنی بر خودارزیابی نیز می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مشارکتی کمک کند. در این روش، دانش‌آموزان با همکاری هم‌کلاسی‌ها، عملکرد یکدیگر را ارزیابی کرده و از بازخوردهای همتایان برای بهبود مهارت‌های خود استفاده می‌کنند [۱۳]. این رویکرد نه تنها تعامل اجتماعی را تقویت می‌کند، بلکه به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا دیدگاه‌های متنوعی نسبت به عملکرد خود پیدا کنند. همچنین، ادغام خودارزیابی در برنامه‌های درسی از طریق طراحی تکالیف انعکاسی و پروژه‌های عملی می‌تواند باعث توسعه مهارت‌های تحلیلی و تفکر انتقادی دانش‌آموزان شود. این تکالیف باید شامل فعالیت‌هایی باشند که دانش‌آموزان را تشویق به توضیح فرآیندهای فکری خود و ارائه دلایل برای تصمیماتشان کنند. معلمان می‌توانند از جلسات بازبینی گروهی استفاده کنند تا دانش‌آموزان نظرات خود را درباره پیشرفت‌هایشان به اشتراک بگذارند.

افزایش انگیزه دانش‌آموزان از طریق خودارزیابی

خودارزیابی می‌تواند نقش مهمی در افزایش انگیزه دانش‌آموزان ایفا کند، به‌شرطی که به درستی طراحی و اجرا شود. یکی از راهکارها، ایجاد محیط یادگیری مثبت و امن است. معلمان باید فضایی فراهم کنند که در آن دانش‌آموزان بدون ترس از قضاوت یا انتقاد، بتوانند به ارزیابی خود بپردازند [۲۲]. تشویق به دستیابی به اهداف قابل تحقق نیز می‌تواند انگیزه دانش‌آموزان را تقویت کند. برای مثال، معلمان می‌توانند با تعیین اهداف کوچک و قابل اندازه‌گیری، به دانش‌آموزان کمک کنند تا پیشرفت خود را به‌صورت تدریجی تجربه کنند و احساس موفقیت بیشتری داشته باشند [۲]. همچنین، استفاده از سیستم‌های پاداش‌دهی مانند تقدیرنامه‌ها یا امتیازهای تشویقی می‌تواند تأثیر مثبتی بر انگیزه آن‌ها داشته باشد. یکی دیگر از راهکارها، استفاده از بازی‌های آموزشی مبتنی بر خودارزیابی است. این بازی‌ها، که اغلب شامل چالش‌های تعاملی و جذاب هستند، می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند که مهارت‌های خود را در یک محیط سرگرم‌کننده و انگیزه‌بخش تقویت کنند [۱۴]. در نهایت، ارائه بازخورد فوری و تقویت‌کننده از سوی معلمان و ابزارهای دیجیتال می‌تواند انگیزه دانش‌آموزان را در فرآیند خودارزیابی افزایش دهد. بازخوردهایی که به‌صورت واضح نشان می‌دهند چگونه پیشرفت‌های کوچک می‌توانند به دستاوردهای بزرگتر منجر شوند، می‌توانند تأثیر مثبت و پایداری بر یادگیری دانش‌آموزان داشته باشند. ترویج فرهنگ یادگیری مستقل از طریق خودارزیابی نیز می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند که به طور مستمر برای پیشرفت تلاش کنند.

۶. نتیجه‌گیری

این مقاله مروری به بررسی نقش و اهمیت خودارزیابی در آموزش ریاضی پرداخته و تأکید کرده است که این روش می‌تواند تأثیرات قابل‌توجهی بر یادگیری دانش‌آموزان بگذارد. خودارزیابی به عنوان یک ابزار آموزشی، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا نقاط قوت و ضعف خود را شناسایی کرده و در نتیجه از طریق اصلاحات مستمر، مهارت‌های شناختی و عاطفی خود را بهبود بخشند [۱۱]. این روش نه تنها موجب افزایش خودآگاهی و خودتنظیمی در دانش‌آموزان می‌شود، بلکه در تقویت تفکر انتقادی و حل مسئله نیز نقش مهمی دارد [۲۲]. تحقیقات نشان داده‌اند که ابزارهای دیجیتال و فناوری‌های نوین می‌توانند فرآیند خودارزیابی را به‌طور چشمگیری تسهیل کنند. این ابزارها با ارائه بازخورد فوری و شخصی‌سازی‌شده، دانش‌آموزان را قادر می‌سازند تا به‌طور مؤثری بر فرآیند یادگیری خود نظارت کنند و در نتیجه اعتماد به نفس و انگیزه آن‌ها در حل مسائل ریاضی افزایش می‌یابد [۲]. با این حال، چالش‌هایی نیز در مسیر اجرای خودارزیابی وجود دارد، از جمله مقاومت در برابر تغییرات در سیستم‌های آموزشی سنتی و نیاز به فراهم کردن آموزش‌های مناسب برای معلمان و دانش‌آموزان [۱۳]. همچنین، لازم است که منابع و ابزارهای لازم برای پشتیبانی از این روش در مدارس فراهم شود تا اثرگذاری آن به حداکثر برسد.

اگرچه پژوهش‌های زیادی در خصوص خودارزیابی انجام شده‌اند، اما همچنان بسیاری از ابعاد این رویکرد نیازمند بررسی بیشتر است. یکی از مسیرهای مهم پژوهشی، تحقیق در مورد اثرات خودارزیابی در بسترهای دیجیتال و استفاده از پلتفرم‌های آنلاین برای ارزیابی خود است. با توجه به رشد چشمگیر آموزش آنلاین و یادگیری از راه دور، بررسی تأثیر این پلتفرم‌ها بر فرآیند خودارزیابی و ارتباط آن با بهبود یادگیری در کلاس‌های آنلاین امری ضروری به نظر می‌رسد [۱۷]. همچنین، مطالعه تفاوت‌های فردی و فرهنگی در استفاده از خودارزیابی می‌تواند به توسعه استراتژی‌های شخصی‌سازی‌شده برای دانش‌آموزان با نیازهای مختلف کمک کند. شناخت چالش‌ها و فرصت‌ها در زمینه‌های فرهنگی و اجتماعی مختلف می‌تواند به تحقیقات در زمینه طراحی ابزارهای خودارزیابی متناسب با نیازهای خاص جوامع مختلف کمک کند. علاوه بر این، تحقیقات در خصوص ارزیابی تأثیر خودارزیابی بر سطوح مختلف تحصیلی، به‌ویژه در مقاطع ابتدایی و متوسطه، می‌تواند به درک بهتر نحوه

تأثیر این روش بر دانش‌آموزان در مراحل مختلف تحصیل کمک کند. به‌ویژه مطالعه‌ای که آثار بلندمدت خودارزیابی در یادگیری‌های مداوم و یادگیری مادام‌العمر را تحلیل کند، می‌تواند به سیاست‌گذاران آموزشی راهکارهای جدیدی ارائه دهد.

یافته‌های این مقاله پیامدهای مهمی برای سیاست‌گذاران آموزشی و اجرای خودارزیابی در مدارس دارند. اولاً، گنجاندن خودارزیابی در برنامه‌های درسی باید در اولویت قرار گیرد، به‌ویژه در رشته‌های چالش‌برانگیزی مانند ریاضیات که نیاز به خودتنظیمی و تفکر انتقادی بیشتری دارند. این تغییر باید از سطح سیاست‌گذاری آغاز شود و سپس به طراحی و پیاده‌سازی روش‌های مؤثر در کلاس‌های درسی معلمان منتقل شود [۱۹]. همچنین، آموزش معلمان برای استفاده مؤثر از خودارزیابی یکی از گام‌های اساسی در اجرای موفق این روش است. معلمان باید از مهارت‌های لازم برای طراحی و استفاده از ابزارهای خودارزیابی برخوردار باشند و از طریق کارگاه‌های آموزشی و منابع آنلاین، پشتیبانی لازم برای استفاده از این روش در کلاس‌های خود را دریافت کنند. ارائه آموزش‌های مستمر برای معلمان در استفاده از فناوری‌های آموزشی و سیستم‌های پشتیبانی دیجیتال نیز می‌تواند به بهبود کیفیت خودارزیابی کمک کند. در نهایت، برای بهبود عملکرد خودارزیابی در مدارس، توسعه ابزارهای دیجیتال و پلتفرم‌های ارزیابی آنلاین باید در دستور کار قرار گیرد. این ابزارها باید به‌گونه‌ای طراحی شوند که دسترسی به اطلاعات بازخورد فوری و شخصی‌سازی‌شده برای تمام دانش‌آموزان ممکن باشد. به‌ویژه، استفاده از هوش مصنوعی و الگوریتم‌های تحلیل داده‌ها می‌تواند به ارائه پیشنهادات بهبود دقیق‌تر و شخصی‌تر برای دانش‌آموزان کمک کند [۱۱]. در نهایت، ترویج فرهنگ خودارزیابی و یادگیری مستقل در مدارس باید به عنوان یکی از اصول اساسی نظام‌های آموزشی مطرح شود. این تغییر می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا به مسئولیت‌پذیری بیشتری نسبت به یادگیری خود دست یابند و مهارت‌های فراشناختی و خودتنظیمی آن‌ها تقویت شود. این رویکرد به‌ویژه در دنیای امروز که به مهارت‌های حل مسئله و تفکر انتقادی نیاز داریم، از اهمیت بالایی برخوردار است.

مراجع

[1] Andrade, H. (2010). Students as the definitive source of formative assessment: Academic self-assessment and the self-regulation of learning. Handbook of formative assessment, 90–105.
[2] Andrade, H. (2019). A critical review of research on student self-assessment. Frontiers in Education, 4, 87.
[3] Andrade, H., & Brown, G. T. L. (2016). Student self-assessment: The key to stronger student motivation and higher achievement. Routledge.
[4] Andrade, H., & Valtcheva, A. (2009). Promoting learning and achievement through self-assessment. Theory into Practice, 48(1), 12-19.
[5] Bandura, A. (1997). Self-efficacy: The exercise of control. New York: Freeman.
[6] Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.
[7] Boekaerts, M. (1997). Self-regulated learning: A new concept embraced by researchers, policy makers, educators, teachers, and students. Learning and Instruction, 7(2), 161–186.
[8] Boud, D. (1995). Enhancing learning through self-assessment. Routledge.
[9] Boud, D. (2001). Using journal writing to enhance reflective practice. New Directions for Adult and Continuing Education, 90, 9–18.
[10] Boud, D., & Falchikov, N. (2007). Rethinking assessment in higher education: Learning for the longer term. Routledge.
[11] Brookhart, S. M. (2016). How to use grading to improve learning. ASCD.
[12] Brown, G. T. L., & Harris, L. R. (2014). The future of self-assessment in classroom practice: Reframing self-assessment as a core competency. Frontline Learning Research, 3(1), 22–30.
[13] Falchikov, N. (2007). Rethinking assessment in higher education: Learning for the longer term. Routledge.
[14] Gee, J. P. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy. Palgrave Macmillan.
[15] Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. Review of Educational Research, 77(1), 81-112.
[16] Luckin, R. (2018). Enhancing learning and teaching with technology: What the research says. UCL Institute of Education Press.
[17] Nicol, D. J. (2020). The power of internal feedback: Exploiting natural comparison processes. Assessment & Evaluation in Higher Education, 45(5), 719–735.
[18] Nicol, D., & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. Studies in Higher Education, 31(2), 199–218.
[19] OECD (2019). PISA 2018 results: What students know and can do. OECD Publishing.
[20] Piaget, J. (1970). Science of education and the psychology of the child. Viking Press.
[21] Wiliam, D. (2011). Embedded formative assessment. Solution Tree Press.
[22] Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. Theory into Practice, 41(2), 64-70.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–109، صص. ۱۲–۱۸

روش‌های نیوتن–کاتس دو تا چهار نقطه‌ای برای حل معادلات قدرمطلقی

فرزاد راه‌پیمایی *،آ

آ گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران .

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
معادلات قدرمطلقی
روش‌های نیوتن–کاتس
روش‌های تکراری
نتایج عددی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
65K10
90C30
65F10

چکیده

در این مقاله سه روش تکراری برای حل معادلات قدرمطلقی معرفی می‌کنیم. این روش‌ها دو گام دارند و مبتنی بر روش‌های نیوتن–کاتس باز دو، سه و چهار نقطه‌ای هستند. گام اول روش تکراری نیوتن می‌باشد (پیشگو) اما در گام دوم تکرار جدید براساس روش نیوتن–کاتس محاسبه می‌شود (اصلاحگر). تحت برخی فرض‌های استاندارد همگرایی الگوریتم نیوتن–کاتس چهار نقطه‌ای را بررسی کرده‌ایم. نتایج عددی نشان می‌دهند که روش‌های نیوتن–کاتس سه و چهار نقطه‌ای تقریباً رفتار مشابهی دارند و از روش دو نقطه‌ای بهتر هستند.

۱. مقدمه

معادله قدرمطلقی در حالت کلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$Ax - |x| = b, \qquad (۱)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $b \in \mathbb{R}^n$ و $x \in \mathbb{R}^n$ بردار مجهول می‌باشد. همچنین $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ است. معادله قدرمطلقی کاربردهای مختلفی در بهینه‌سازی، مسأله‌های برنامه‌ریزی خطی و درجه دوم، زنجیره مارکوف، ساختارهای مکانیکی و شبکه قیمت‌گذاری دارد [۱–۳، ۹، ۱۰، ۱۴]. حل تقریبی معادله قدرمطلقی (۱) اولین بار توسط روهن [1] انجام شد [۱۳] و سپس منگسرین [2] تحقیقات بیشتری در این زمینه انجام داد [۶، ۷].

ماتریس قطری زیر را در نظر بگیرید

$$D(x) = \partial|x| = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}(x)).$$

چون $|x| = D(x)x$، لذا معادله قدرمطلقی (۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$Ax - D(x)x = b \Longrightarrow (A - D(x))x = b.$$

*سخنران
پست الکترونیک : rahpeyma_83@yahoo.com (فرزاد راه‌پیمایی)

[1] Rohn
[2] Mangasarian

با شروع از تقریب اولیه $x^{\circ} \in \mathbb{R}^n$ منگسرین روش تکراری زیر را برای حل معادله قدرمطلقی پیشنهاد کرد [۶]

$$x^{k+1} = \big(A - D(x^k)\big)^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

در سال ۲۰۱۹ نیز فنگ[3] و لیو[4] از روش دوگامی زیر برای حل تقریبی معادله قدرمطلقی استفاده کردند [۴]

$$\begin{cases} t^k = x^k - \big(A - D(x^k)\big)^{-1} K(x^k), \\ x^{k+1} = x^k - \big(A - D(x^k)\big)^{-1} \big(K(t^k) - K(x^k)\big), \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن

$$K(x) = Ax - |x| - b.$$

شرایط وجودی و منحصربه‌فرد بودن معادله قدرمطلقی (۱) در پژوهش‌های مختلفی بررسی شده است.

گزاره ۱.۱. [۸] *اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معکوس‌پذیر و $\|A^{-1}\| < 1$ باشد آنگاه به‌ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ معادله قدرمطلقی (۱) جواب منحصربه‌فرد دارد.*

گزاره ۲.۱. [۸] *اگر همه مقادیر تکین ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ بزرگ‌تر از یک باشند آنگاه به‌ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ معادله قدرمطلقی (۱) به‌طور منحصربه‌فرد حل‌پذیر است.*

گزاره ۳.۱. [۸] *اگر $\|A\| < 1$ و $b \geq 0 \neq b$ باشد آنگاه معادله قدرمطلقی (۱) جواب ندارد.*

گزاره ۴.۱. *روش‌های نیوتن–کاتس باز دو، سه و چهار نقطه‌ای به‌صورت زیر هستند* [۱۲]

الف) روش نیوتن–کاتس دو نقطه‌ای

$$\int_{t_0}^{t_2} f(t)dt = \frac{3h}{2}\Big[f(t_1) + f(t_2)\Big], \qquad (۲)$$

که در آن

$$h = \frac{t_2 - t_0}{3}, \qquad t_i = t_0 + ih, \qquad i = 1, 2, 3.$$

ب) روش نیوتن–کاتس سه نقطه‌ای

$$\int_{t_0}^{t_4} f(t)dt = \frac{4h}{3}\Big[2f(t_1) - f(t_2) + 2f(t_3)\Big], \qquad (۳)$$

که در آن

$$h = \frac{t_4 - t_0}{4}, \qquad t_i = t_0 + ih, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

پ) روش نیوتن–کاتس چهار نقطه‌ای

$$\int_{t_0}^{t_5} f(t)dt = \frac{5h}{24}\Big[11f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + 11f(t_4)\Big], \qquad (۴)$$

که در آن

$$h = \frac{t_5 - t_0}{5}, \qquad t_i = t_0 + ih, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

[3] Feng
[4] Liu

۲. روش نیوتن ـ کاتس دو نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی

در این بخش یک الگوریتم دوگامی مبتنی بر روش نیوتن ـ کاتس باز دو نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی (۱) بیان می‌کنیم. فرض کنید

$$F(x) = Ax - |x| - b = Ax - D(x)x - b. \tag{۵}$$

ژاکوبین تعمیم‌یافته $F(x)$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$F'(x) = A - D(x). \tag{۶}$$

گام اول الگوریتم را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y^k = \big(A - D(x^k)\big)^{-1} b. \tag{۷}$$

فرض کنید w جواب معادله قدرمطلقی (۱) باشد، لذا $F(w) = 0$ است . از طرفی

$$\int_s^w F'(t)dt = F(w) - F(s) = -F(s). \tag{۸}$$

اکنون از (۲) داریم

$$h = \frac{w-s}{3}, \qquad t_1 = \frac{2s+w}{3}, \qquad t_1 = \frac{s+2w}{3}.$$

در نتیجه

$$\int_s^w F'(t)dt = \frac{1}{2}\left[F'\Big(\frac{2s+w}{3}\Big) + F'\Big(\frac{s+2w}{3}\Big)\right](w-s) = -F(s).$$

بنابراین

$$w = s - 2\left[F'\Big(\frac{2s+w}{3}\Big) + F'\Big(\frac{s+2w}{3}\Big)\right]^{-1} F(s).$$

اکنون گام‌های الگوریتم نیوتن ـ کاتس دو نقطه‌ای را بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۱: روش نیوتن ـ کاتس دو نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی (2NC)

گام اول: تقریب اولیه $x^0 \in \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon > 0$ را انتخاب کن.

گام دوم: y^k را با (۷) محاسبه کن.

گام سوم: تکرار جدید را به‌صورت زیر پیدا کن

$$x^{k+1} = x^k - 2\left[2A - D\Big(\frac{2x^k + y^k}{3}\Big) - D\Big(\frac{x^k + 2y^k}{3}\Big)\right]^{-1} F(x^k).$$

گام چهارم: اگر $\|Ax^k - |x^k| - b\| \le \varepsilon$ توقف کن. در غیراین‌صورت به گام پنجم برو.

گام پنجم: به‌جای k قرار بده $k+1$ و به گام دوم برو.

۳. روش نیوتن ـ کاتس سه نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی

گام پیشگو برای روش نیوتن ـ کاتس سه نقطه‌ای مشابه الگوریتم 2NC می‌باشد. اکنون برای به‌دست آوردن گام اصلاحگر از (۳) استفاده می‌کنیم. لذا خواهیم داشت

$$h = \frac{w-s}{4}, \qquad t_1 = \frac{3s+w}{4}, \qquad t_2 = \frac{2s+2w}{4}, \qquad t_3 = \frac{s+3w}{4}.$$

در نتیجه

$$\int_s^w F'(t)dt = \frac{1}{3}\left[2F'\Big(\frac{3s+w}{4}\Big) - F'\Big(\frac{2s+2w}{3}\Big) + 2F'\Big(\frac{s+3w}{4}\Big)\right](w-s) = -F(s).$$

به‌طور معادل

$$w = s - ۳\left[۲F'\left(\frac{۳s+w}{۴}\right) - F'\left(\frac{۲s+۲w}{۳}\right) + ۲F'\left(\frac{s+۳w}{۴}\right)\right]^{-۱} F(s).$$

اکنون گام‌های الگوریتم نیوتن ـ کاتس سه نقطه‌ای را بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۲: روش نیوتن ـ کاتس سه نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی (۳NC)

گام اول: تقریب اولیه $x^{۰} \in \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon > ۰$ را انتخاب کن.

گام دوم: y^k را با (۷) محاسبه کن.

گام سوم: تکرار جدید را به‌صورت زیر پیدا کن

$$x^{k+۱} = x^k - ۳\left[۳A - ۲D\left(\frac{۳x^k+y^k}{۴}\right) + D\left(\frac{۲x^k+۲y^k}{۴}\right) - ۲D\left(\frac{x^k+۳y^k}{۴}\right)\right]^{-۱} F(x^k).$$

گام چهارم: اگر $\|Ax^k - |x^k| - b\| \le \varepsilon$ توقف کن. در غیراین‌صورت به گام پنجم برو.

گام پنجم: به‌جای k قرار بده $k+۱$ و به گام دوم برو.

۴. روش نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی

گام پیشگو در روش نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای مشابه الگوریتم‌های قبلی می‌باشد. اکنون گام اصلاحگر را به‌دست می‌آوریم. از (۴) داریم

$$h = \frac{w-s}{۵}, \qquad t_۱ = \frac{۴s+w}{۵}, \qquad t_۲ = \frac{۳s+۲w}{۵}, \qquad t_۳ = \frac{۲s+۳w}{۵}, \qquad t_۴ = \frac{s+۴w}{۵}.$$

انتگرال (۸) را با فرمول نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای محاسبه می‌کنیم

$$\int_s^w F'(t)dt = \frac{۱}{۲۴}\left[۱۱F'\left(\frac{۴s+w}{۵}\right) + F'\left(\frac{۳s+۲w}{۵}\right) + F'\left(\frac{۲s+۳w}{۵}\right) + ۱۱F'\left(\frac{s+۴w}{۵}\right)\right](w-s) = -F(s).$$

در نتیجه

$$w = s - ۲۴\left[۱۱F'\left(\frac{۴s+w}{۵}\right) + F'\left(\frac{۳s+۲w}{۵}\right) + F'\left(\frac{۲s+۳w}{۵}\right) + ۱۱F'\left(\frac{s+۴w}{۵}\right)\right]^{-۱} F(s). \qquad (۹)$$

اکنون گام‌های الگوریتم نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای را بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۳: روش نیوتن ـ کاتس چهار نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی (۴NC)

گام اول: تقریب اولیه $x^{۰} \in \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon > ۰$ را انتخاب کن.

گام دوم: y^k را با (۷) محاسبه کن.

گام سوم: تکرار جدید را به‌صورت زیر پیدا کن

$$x^{k+۱} = x^k - ۲۴\left[۲۴A - ۱۱D\left(\frac{۴x^k+y^k}{۵}\right) - D\left(\frac{۳x^k+۲y^k}{۵}\right) - D\left(\frac{۲x^k+۳y^k}{۵}\right) - ۱۱D\left(\frac{x^k+۴y^k}{۵}\right)\right]^{-۱} F(x^k).$$

گام چهارم: اگر $\|Ax^k - |x^k| - b\| \le \varepsilon$ توقف کن. در غیراین‌صورت به گام پنجم برو.

گام پنجم: به‌جای k قرار بده $k+۱$ و به گام دوم برو.

گزاره ۱.۴. فرض کنید

$$\theta_۱^k = \frac{۴x^k+y^k}{۵}, \qquad \theta_۲^k = \frac{۳x^k+۲y^k}{۵},$$

$$\theta_۳^k = \frac{۲x^k+۳y^k}{۵}, \qquad \theta_۴^k = \frac{x^k+۴y^k}{۵}.$$

در این‌صورت با استفاده از (۹) *گام سوم الگوریتم* ۴NC *به‌صورت زیر تبدیل می‌شود*

$$x^{k+1} = x^k - 24\left[11F'(\theta_1^k) + F'(\theta_2^k) + F'(\theta_3^k) + 11F'(\theta_4^k)\right]^{-1} F(x^k).$$

فرض کنید

$$\Sigma = 11F'(\theta_1^k) + F'(\theta_2^k) + F'(\theta_3^k) + 11F'(\theta_4^k).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Sigma &= 11A - 11D(\theta_1^k) + A - D(\theta_2^k) + A - D(\theta_3^k) + 11A - 11D(\theta_4^k)\\ &= 24A - 11D(\theta_1^k) - D(\theta_2^k) - D(\theta_3^k) - 11D(\theta_4^k),\end{aligned}$$

که در آن $D(\theta_1^k)$، $D(\theta_2^k)$، $D(\theta_3^k)$ *و* $D(\theta_4^k)$ *ماتریس‌های قطری هستند .*

۴ .۱ . *آنالیز همگرایی*

در این بخش همگرایی الگوریتم ۴NC برای حل معادله قدرمطلقی (۱) را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۴. *اگر همه مقادیر تکین ماتریس* A *بزرگ‌تر از یک باشند آنگاه ماتریس* Σ *نامنفرد است .*

اثبات . به برهان خلف فرض کنیم Σ منفرد باشد. در این‌صورت $s \neq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Sigma s = 0$. اکنون از لم ۱ در [۷] داریم

$$\begin{aligned}s^T s &< s^T A^T A s\\ &= \frac{1}{576} s^T \Big(11D(\theta_1^k) + D(\theta_2^k) + D(\theta_3^k) + 11D(\theta_4^k)\Big)^T \Big(11D(\theta_1^k) + D(\theta_2^k) + D(\theta_3^k) + 11D(\theta_4^k)\Big) s\\ &\leq \frac{1}{576} \times 576 s^T s = s^T s,\end{aligned}$$

که این یک تناقض است. پس ماتریس Σ نامنفرد می‌باشد و Σ^{-1} وجود دارد. □

لم ۳.۴. [۵] *اگر مقادیر تکین ماتریس* A *بزرگ‌تر از یک باشند آنگاه دنباله* $\{x^k\}$ *تولید شده با الگوریتم* ۴NC *خوش‌تعریف است و نقطه حدی* $\bar{x}$ *وجود دارد که*

$$\bar{x} = \bar{x} - 24\Big(24A - 11D(\theta_1^k) - D(\theta_2^k) - D(\theta_3^k) - 11D(\theta_4^k)\Big)^{-1} F(\bar{x}).$$

همچنین

$$\Big(A - \bar{D}(\bar{x})\Big)\bar{x} = b,$$

که در آن $\bar{D}$ *ماتریسی قطری با عناصر قطری* $\{-1, 0, +1\}$ *است .*

لم ۴.۴. [۵] *اگر*

$$\left\|\Big(11F'(\theta_1^k) + F'(\theta_2^k) + F'(\theta_3^k) + 11F'(\theta_4^k)\Big)^{-1}\right\| < \frac{1}{72},$$

آنگاه دنباله $\{x^k\}$ *تولید شده با الگوریتم* ۴NC *به جواب معادله قدرمطلقی* (۱) *همگراست .*

قضیه ۵.۴. *فرض کنید* $\|A^{-1}\| < \frac{1}{73}$ *و ماتریس‌های* $D(\theta_1^k)$، $D(\theta_2^k)$، $D(\theta_3^k)$ *و* $D(\theta_4^k)$ *ناصفر باشند . در این‌صورت به‌ازای هر* $b \in \mathbb{R}^n$ *الگوریتم* ۴NC *خوش‌تعریف است و دنباله* $\{x^k\}$ *تولید شده با این الگوریتم به‌ازای هر* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *به جواب منحصربه‌فرد معادله قدرمطلقی* (۱) *همگراست .*

اثبات. چون $\|A^{-1}\| < \frac{1}{73}$ لذا معادله قدرمطلقی (۱) به‌صورت منحصربه‌فرد حل‌پذیر است. چون A^{-1} وجود دارد لذا از لم ۲.۳.۲ در [۱۱] داریم

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(11F'(\theta_1^k)+F'(\theta_2^k)+F'(\theta_3^k)+11F'(\theta_4^k)\right)^{-1}\right\| \\
&= \left\|\left(24A-11D(\theta_1^k)-D(\theta_2^k)-D(\theta_3^k)-11D(\theta_4^k)\right)^{-1}\right\| \\
&\le \frac{\|(24A)^{-1}\|\|-11D(\theta_1^k)-D(\theta_2^k)-D(\theta_3^k)-11D(\theta_4^k)\|}{1-\|(24A)^{-1}\|\|-11D(\theta_1^k)-D(\theta_2^k)-D(\theta_3^k)-11D(\theta_4^k)\|} \\
&\le \frac{\frac{1}{24}\|A^{-1}\|\times 24}{1-\frac{1}{24}\|A^{-1}\|\times 24} \\
&= \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|} < \frac{\frac{1}{73}}{\frac{72}{73}} = \frac{1}{72}.
\end{aligned}$$

اکنون از لم ۴.۴ نتیجه می‌گیریم دنباله $\{x^k\}$ به جواب منحصربه‌فرد معادله قدرمطلقی همگراست. □

۵. نتایج عددی

در این بخش دو مثال از معادلات قدرمطلقی را در نظر می‌گیریم و برای حل آن‌ها از الگوریتم‌های 2NC، 3NC و 4NC استفاده می‌کنیم. معادلات قدرمطلقی در ابعاد $n = 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000$ هستند و شرط توقف همه الگوریتم‌ها برقراری نامساوی زیر می‌باشد

$$RES := \|Ax^k - |x^k| - b\| \le 10^{-15}.$$

نتایج حاصل از الگوریتم‌های مبتنی بر روش‌های نیوتن–کاتس برای حل معادلات قدرمطلقی در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. در این جدول‌ها $Iter$ تعداد تکرارها و $Time$ زمان لازم برای اجرای الگوریتم‌ها را نشان می‌دهد. در همه الگوریتم‌ها بردار b به‌صورت زیر تولید شده است

$$b = (A - eye(n)) * ones(n, 1),$$

که در آن $eye(n)$ ماتریس همانی و $ones(n,1)$ برداری با مؤلفه‌های یک می‌باشد. همه الگوریتم‌ها روی لپ‌تاپ سه هسته‌ای با فرکانس ۲٫۳ گیگاهرتز و ۴ گیگابایت حافظه در محیط نرم‌افزار متلب $2017a$ اجرا شده‌اند.

مثال ۱.۵. فرض کنید مؤلفه‌های ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به‌صورت تولید شده باشند

$$\begin{cases} a_{ii} = 4 & i = 1, 2, \dots, n \\ a_{i,(i+1)} = -1 & i = 1, \dots, n-1 \\ a_{i,(i-1)} = -1 & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

همچنین سایر مؤلفه‌های ماتریس برابر صفر باشد. تقریب اولیه نیز به‌صورت $x^\circ = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ است. نتایج حاصل در جدول ۱ ارائه شده‌اند که نشان می‌دهد روش‌های 3NC و 4NC با تعداد تکرارهای کمتر و در زمان کوتاه‌تری معادلات قدرمطلقی در ابعاد مختلف را حل می‌کنند.

مثال ۲.۵. فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ با دستور زیر در نرم‌افزار متلب تولید شده باشد که همه مقادیر تکین آن بزرگ‌تر از یک هستند

$$A = \text{round}(n * \text{eye}(n)) - 0.02 * (2 * \text{rand}(n, n) - 1).$$

همچنین تقریب اولیه نیز به‌صورت $x^\circ = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد. نتایج حاصل در جدول ۲ ارائه شده‌اند که نشان می‌دهد روش‌های 3NC و 4NC با تعداد تکرارهای کمتری قادر هستند معادلات قدرمطلقی در ابعاد مختلف را حل کنند.

جدول ۱: نتایج حاصل از الگوریتم‌های ۲NC، ۳NC و ۴NC برای حل معادله قدرمطلقی مثال ۱

	۴NC			۳NC			۲NC		
$Time$	RES	$Iter$	$Time$	RES	$Iter$	$Time$	RES	$Iter$	n
۰٫۴۶۲۲	$۱٫۲۹۰۰ \times ۱۰^{-۱۵}$	۷	۰٫۵۱۴۳	$۱٫۲۹۰۰ \times ۱۰^{-۱۵}$	۷	۰٫۶۸۴۲	$۴٫۴۴۰۹ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۲	۵۰۰
۳٫۳۵۸۳	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۳٫۳۱۶۹	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۴٫۷۹۸۴	$۹٫۹۳۰۱ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۲	۱۰۰۰
۱۰٫۲۸۰۶	$۷٫۸۵۰۵ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۰	۱۰٫۰۹۱۴	$۷٫۸۵۰۵ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۰	۱۲٫۱۴۴۶	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۱۲	۱۵۰۰
۱۶٫۰۰۴۱	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۱۶٫۴۴۸۹	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۲۴٫۵۹۱۴	$۶٫۲۸۰۴ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۳	۲۰۰۰
۲۶٫۶۶۰۹	$۱٫۲۴۶۲ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۲۷٫۰۶۴۸	$۱٫۲۴۶۲ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۴۵٫۰۶۲۴	$۸٫۸۸۱۸ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۲	۲۵۰۰
۴۸٫۱۰۱۲	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۴۲٫۶۱۲۹	$۱٫۱۶۴۴ \times ۱۰^{-۱۵}$	۸	۷۰٫۰۲۹۳	$۸٫۸۸۱۸ \times ۱۰^{-۱۶}$	۱۲	۳۰۰۰

جدول ۲: نتایج حاصل از الگوریتم‌های ۲NC، ۳NC و ۴NC برای حل معادله قدرمطلقی مثال ۲

	۴NC			۳NC			۲NC		
$Time$	RES	$Iter$	$Time$	RES	$Iter$	$Time$	RES	$Iter$	n
۰٫۱۵۷۹	۰	۳	۰٫۱۴۸۳	۰	۳	۰٫۱۵۵۰	۰	۳	۵۰۰
۰٫۹۳۲۶	۰	۳	۰٫۹۱۹۱	۰	۳	۱٫۲۶۴۷	۰	۴	۱۰۰۰
۳٫۷۵۳۴	۰	۴	۳٫۷۳۰۵	۰	۴	۳٫۵۷۲۲	۰	۴	۱۵۰۰
۶٫۹۵۵۵	۰	۳	۶٫۶۴۳۸	۰	۳	۸٫۴۳۵۹	۰	۴	۲۰۰۰
۱۴٫۳۶۸۵	۰	۳	۱۳٫۵۳۹۵	۰	۳	۱۷٫۷۰۲۷	۰	۴	۲۵۰۰
۳۳٫۸۰۹۶	۰	۴	۲۹٫۶۳۷۰	۰	۴	۳۸٫۶۹۵۵	۰	۴	۳۰۰۰

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله از سه روش تکراری برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادله قدرمطلقی استفاده کرده‌ایم. همه این روش‌های تکراری شامل دو گام می‌باشند. گام اول، روش تکراری ارائه شده توسط منگسرین می‌باشد اما گام دوم مبتنی بر روش‌های نیوتن–کاتس دو، سه و چهار نقطه‌ای است. تحت شرایط خاص، همگرایی روش دوگامی نیوتن–کاتس چهار نقطه‌ای برای حل معادله قدرمطلقی بررسی شده است. برای بررسی کارایی عددی از دو مثال عددی استفاده کرده‌ایم که نتایج عددی حاصل از آن‌ها نشان می‌دهند که روش‌های مبتنی بر نیوتن–کاتس سه و چهار نقطه‌ای کاراتر از روش نیوتن–کاتس دو نقطه‌ای می‌باشد.

References

[1] R. Ali, M. R. Khan, A. Abidi, S. Rasheed, A. M. Galal, Application of PEST and PEHF in magneto-Williamson nanofluid depending on the suction/injection, Case Studies in Thermal Engineering, **27**, (2021) 101329.

[2] M. Dehghan, A. Shirilord, Matrix multisplitting Picard-iterative method for solving generalized absolute value matrix equation, Applied Numerical Mathematics, **158**, (2020), 425–438.

[3] G. Ebadi, S. Seifollahzadeh, C. Vuik, New iterative methods for solving generalized absolute value equations, Computational and Applied Mathematics, **43:313**, (2024), 1–15.

[4] J. Feng, S. Liu, An improved generalized Newton method for absolute value equations, SpringerPlus, **5**, (2016), 1–10.

[5] A. Khan, J. Iqbal, R. Shah, A new efficient two-step iterative method for solving absolute value equations, Engineering Computations, **41(3)**, (2024), 597–610.

[6] O. L. Mangasarian, Absolute value equation solution via concave minimization, Optimization Letters, **1(1)**, (2007), 3–8.

[7] O. L. Mangasarian, A generalized Newton method for absolute value equations, Optimization Letters, **3(1)**, (2009), 101–108.

[8] O. L. Mangasarian, P. R. Meyer, Absolute value equations, Linear Algebra and its Applications, **419**, (2006), 359–367.

[9] A. Mansoori, M. Erfanian, A dynamic model to solve the absolute value equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, **333**, (2018), 28–35.

[10] X. H. Miao, J. T. Yang, B. Saheya, J. S. Chen, A smoothing Newton method for absolute value equation associated with second-order cone, Applied Numerical Mathematics, **120**, (2017), 82–96.

[11] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[12] A. Pal, Numerical Analysis, National Institute of Technology Durgapur, 2024.

[13] J. Rohn, A theorem of the alternatives for the equation $Ax + B|x| = b$, Linear and Multilinear Algebra, **52(6)**, (2004), 421–426.

[14] N. Yilmaz, A. Sahiner, Smoothing techniques in solving non-Lipschitz absolute value equations, International Journal of Computer Mathematics, **100(4)**, (2023), 867–879.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–110، صص. ۱۹–۲۵

مجموعه جولیا و نقاط ثابت روش‌های نیوتن و هالی برای توابع مختلط نمایی

فرزاد راه‌پیمایی *،آ

آگروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها:
مجموعه جولیا
نقاط ثابت
روش نیوتن
روش هالی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
30D05
30D20
65H04

چکیده

در این مقاله روش‌های نیوتن و هالی را برای توابع مختلط نمایی بررسی می‌کنیم. اگر $p(z)$ و $q(z)$ توابع چندجمله‌ای مختلط و $F(z) = p(z)e^{q(z)}$ باشد آنگاه مجموعه جولیا برای روش هالی همبند نیست اما برای روش نیوتن همبند است. همچنین انواع نقاط ثابت توابع نمایی مختلط را برای نگاشت‌های نیوتن و هالی به‌دست می‌آوریم.

۱. مقدمه

یکی از مسأله‌های مهم و کاربردی در ریاضیات، حل معادله $F(x) = \alpha$ می‌باشد که معمولاً α برابر صفر است. پژوهش‌های مختلفی برای بررسی وجود و منحصربه‌فرد بودن جواب این معادله انجام شده است [۱، ۲]. فرض کنیم $p(z)$ و $q(z)$ چندجمله‌ای‌های مختلط باشند. تابع مختلط نمایی زیر را در نظر بگیرید [۳]

$$F(z) = p(z)e^{q(z)}. \qquad (۱)$$

تعریف ۱.۱. [۴] فرض کنید $p(z)$ و $q(z)$ چندجمله‌ای‌های مختلط و $R(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ باشد.

الف) $\xi \in \mathbb{C}$ را نقطه ثابت تابع $R(z)$ می‌نامیم هرگاه $R(\xi) = \xi$ باشد.
ب) عدد مختلط $\lambda(\xi) = R'(\xi)$ را ضریب تابع $R(z)$ در نقطه ثابت ξ می‌نامیم.
پ) اگر برای نقطه ثابت ξ داشته باشیم $|\lambda(\xi)| < ۱$ آنگاه ξ را نقطه ثابت جذب‌کننده می‌نامیم.
ت) اگر برای نقطه ثابت ξ داشته باشیم $|\lambda(\xi)| > ۱$ آنگاه ξ را نقطه ثابت دفع‌کننده می‌نامیم.
ث) اگر برای نقطه ثابت ξ داشته باشیم $|\lambda(\xi)| = ۱$ آنگاه ξ را نقطه ثابت خنثی می‌نامیم.

*سخنران
پست الکترونیک: rahpeyma_83@yahoo.com (فرزاد راه‌پیمایی)

تعریف ۲.۱. [۵] مجموعه‌ای از اعداد مختلط که در صورت اجرای تکراری یک نگاشت ریاضی بر روی آن‌ها، نتیجه به هیچ مقداری همگرا نشود را مجموعه جولیا می‌نامیم. همچنین مجموعه جولیای توپر مجموعه‌ای از اعداد در صفحه مختلط است که در صورت اجرای تکراری نگاشت بر روی آن‌ها، مقدار حاصل به بی‌نهایت میل نکند.

مثال ۳.۱. مجموعه جولیا برای تابع $f(z)=z^{۲}$ به‌صورت دایره واحد می‌باشد. بنابراین صفحه مختلط به دو قسمت درون و بیرون دایره واحد تقسیم می‌شود و در این دو ناحیه تکرارها به‌ترتیب به صفر و ∞ میل می‌کنند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید A یک میدان برداری باشد. نگاشت $f : A \longrightarrow A$ را آفین می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $f(x)=ax+b$.

روش نیوتن برای حل معادله $F(z)=۰$ به‌صورت زیر است

$$N_F(z)=z-\frac{F(z)}{F'(z)}=z-\frac{p(z)e^{q(z)}}{p'(z)e^{q(z)}+p(z)q'(z)e^{q(z)}}$$
$$=\frac{zp'(z)+zp(z)q'(z)-p(z)}{p'(z)+p(z)q'(z)}. \qquad (۲)$$

همچنین روش هالی برای حل این معادله برابر است با:

$$H_F(z)=z-\frac{۲F'(z)F(z)}{۲(F'(z))^{۲}-F(z)F''(z)}$$
$$=z-\frac{۲p(z)p'(z)+p^{۲}(z)q'(z)}{۲\big(p'(z)+p(z)q'(z)\big)^{۲}-p(z)p''(z)-۲p(z)p'(z)q'(z)-p^{۲}(z)q''(z)-p^{۲}(z)q'^{۲}(z)}$$
$$=z-\frac{۲p(z)p'(z)+p^{۲}(z)q'(z)}{۲p'^{۲}(z)+۲p(z)p'(z)q'(z)+p^{۲}(z)q'^{۲}(z)-p(z)p''(z)-p^{۲}(z)q''(z)}$$
$$=z-\frac{۲z-۲N_F(z)}{۲-N_F'(z)}. \qquad (۳)$$

۲. مجموعه جولیا و نقاط ثابت

در این بخش به بررسی ویژگی‌های مجموعه جولیا و نقاط ثابت برای روش‌های نیوتن و هالی می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. [۳] *مجموعه جولیای روش هالی برای تابع مختلط نمایی* (۱) *همبند نیست.*

قضیه ۲.۲. *فرض کنید* $\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ *و* $H_F : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ *روش هالی برای تابع مختلط نمایی* (۱) *باشد. همچنین* α_i *ریشه تکراری* $F(z)=۰$ *از مرتبه* $n_i \geq ۱$ *باشد.*

الف) نقاط ثابت جذب‌کننده H_F *صفرهای تابع* $p(z)$ *با مرتبه تکرار* $\frac{n_i-۱}{n_i+۱}$ *هستند.*

ب) نقاط ثابت بیرونی H_F *صفرهای تابع* $F'(z)$ *می‌باشند. اگر* β_j *ریشه تکراری مرتبه* m_j *معادله* $F'(z)=۰$ *باشد آن‌گاه نقطه ثابت دفع‌کننده با مرتبه تکرار* $\frac{۲}{m_j}+۱$ *است.*

پ) روش هالی برای تابع F *نقطه ثابت سهموی در* ∞ *با مرتبه تکرار* $n+۱$ *دارد. همچنین اگر* $q(z)$ *از درجه* n *باشد آن‌گاه دقیقاً* n *گلبرگ جذب‌کننده و* n *گلبرگ دفع‌کننده وجود دارد.*

اثبات. (الف) چون α_i ریشه تکراری مرتبه n_i می‌باشد پس $F(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$F(z)=(z-\alpha_i)^{n_i}g(z),$$

که در آن $g(z)$ یک تابع تحلیلی در همسایگی α_i و $g(\alpha_i) \neq 0$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} N_F(z) &= z - \frac{F(z)}{F'(z)} \\ &= z - \frac{(z-\alpha_i)^{n_i} g(z)}{n_i(z-\alpha_i)^{n_i-1} g(z) + (z-\alpha_i)^{n_i} g'(z)} \\ &= z - \frac{(z-\alpha_i) g(z)}{n_i g(z) + (z-\alpha_i) g'(z)} \\ &= z - \frac{1}{n_i}(z-\alpha_i) + O(z-\alpha_i)^2 \\ &= z - \alpha_i + \alpha_i - \frac{1}{n_i}(z-\alpha_i) + O(z-\alpha_i)^2 \\ &= \alpha_i + (z-\alpha_i)\Big(1 - \frac{1}{n_i}\Big) + O(z-\alpha_i)^2. \end{aligned} \tag{۴}$$

همچنین

$$N_F'(z) = 1 - \frac{1}{n_i} + O(z-\alpha_i). \tag{۵}$$

با جایگذاری (۴) و (۵) در (۳) داریم

$$\begin{aligned} H_F(z) &= z - \frac{2z - 2\alpha_i - 2(z-\alpha_i)\Big(1 - \frac{1}{n_i}\Big) + O(z-\alpha_i)^2}{2 - \Big(1 - \frac{1}{n_i}\Big) + O(z-\alpha_i)} \\ &= z - \frac{\frac{2}{n_i}(z-\alpha_i) + O(z-\alpha_i)^2}{1 + \frac{1}{n_i} + O(z-\alpha_i)} \\ &= \alpha_i + (z-\alpha_i) - \frac{2}{n_i+1}(z-\alpha_i) + O(z-\alpha_i)^2 \\ &= \alpha_i + (z-\alpha_i)\frac{n_i - 1}{n_i + 1} + O(z-\alpha_i)^2. \end{aligned}$$

بنابراین α_i ریشه تکراری مرتبه $\frac{n_i - 1}{n_i + 1}$ است.

(ب) فرض کنیم β_j ریشه تکراری از مرتبه m_j برای $F'(z) = 0$ باشد. در این‌صورت β_j قطب چندگانه برای N_F است. لذا اگر $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ باشد آنگاه

$$N_F(z) = \frac{\lambda}{(z-\beta_j)^{mj}} + O(z-\beta_j)^{-(m_j-1)}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} N_F'(z) &= -\frac{\lambda m_j (z-\beta_j)^{m_j-1}}{(z-\beta_j)^{2m_j}} + O(z-\beta_j)^{-m_j} \\ &= -\frac{\lambda m_j}{(z-\beta_j)^{m_j+1}} + O(z-\beta_j)^{-m_j}. \end{aligned}$$

پس

$$H_F(z) = z - \frac{۲z - \frac{۲\lambda}{(z-\beta_j)^{m_j}} + O(z-\beta_j)^{-(m_j-۱)}}{۲ + \frac{\lambda m_j}{(z-\beta_j)^{m_j}} + O(z-\beta_j)^{-m_j}}$$
$$= z - \frac{\frac{\lambda}{(z-\beta_j)^{m_j}} + O(z-\beta_j)^{-(m_j-۱)}}{\frac{\lambda m_j}{(z-\beta_j)^{m_j+۱}} + O(z-\beta_j)^{-m_j}}$$
$$= \beta_j + (z-\beta_j) + \frac{۲(z-\beta_j)}{m_j} + O(z-\beta_j)^{۲}$$
$$= \beta_j + \left(۱ + \frac{۲}{m_j}\right)(z-\beta_j) + O(z-\beta_j)^{۲}.$$

بنابراین β_j نقطه ثابت دفع‌کننده از مرتبه $۱ + \frac{۲}{m_j}$ می‌باشد.

(پ) فرض کنید $p(z)$ و $q(z)$ به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های مختلط از مرتبه m و n باشند. در این‌صورت

$$N_F(v) = v + \frac{v^{n+۱}}{n} + O(v^{n+۲}),$$
$$N_F'(v) = ۱ + \frac{(n+۱)v^n}{n} + O(v^{n+۱}).$$

بنابراین

$$H_F(v) = v - \frac{-\frac{۲v^{n+۱}}{n} + O(v^{n+۲})}{۱ - \frac{(n+۱)v^n}{n} + O(v^{n+۱}} = v + \frac{۲v^{n+۱}}{n} + O(v^{n+۲}).$$

پس ∞ نقطه ثابت سهموی با مرتبه تکرار $n+۱$ است. □

۳. نگاشت‌های کسری نیوتن و هالی

در گزاره‌های زیر شرایط لازم و کافی برای نگاشت‌های کسری نیوتن و هالی بیان شده است [۳].

گزاره ۱.۳. *(نگاشت کسری نیوتن) تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. نگاشت نیوتن $N_f(z)$ کسری است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای‌های $p(z)$ و $q(z)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(z) = p(z)e^{q(z)}$ باشد. در این حالت ∞ نقطه ثابت دفع‌کننده یا سهموی می‌باشد.*

گزاره ۲.۳. *(نگاشت کسری هالی) تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. نگاشت هالی $H_f(z)$ کسری است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای‌های $p(z)$ و $q(z)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(z) = p(z)e^{q(z)}$ باشد. در این حالت ∞ نقطه ثابت سهموی است.*

۴. مقیاس‌بندی روش‌های نیوتن و هالی

در این بخش مقیاس‌بندی روش‌های نیوتن و هالی را برای توابع مختلط نمایی به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۴. *فرض کنید $F(z) = p(z)e^{q(z)}$ باشد که در آن $p(z)$ و $q(z)$ چندجمله‌ای‌های مختلط هستند. همچنین به‌ازای $\alpha \neq ۰$، $A(z) = \alpha z + \beta$ نگاشت آفین باشد. اگر برای $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم*

$$G(z) = \lambda F o A(z),$$

آن‌گاه

$$N_F(z) = A o N_G o A^{-۱}(z),$$

که در آن N_G مزدوج N_F نسبت به A است.

اثبات . فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ و $G(z) = \lambda FoA(z)$ باشد. در این‌صورت

$$F(z) = \lambda^{-1}\big(GoA^{-1}\big)(z).$$

چون

$$A^{-1}(z) = \frac{z-\beta}{\alpha},$$

پس

$$F'(z) = (\lambda\alpha)^{-1}G'(A^{-1}(z)).$$

همچنین

$$\begin{aligned} AoN_GoA^{-1}(z) &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{G(A^{-1}(z))}{G'(A^{-1}(z))}\right) \\ &= A\left(\frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{G(A^{-1}(z))}{G'(A^{-1}(z))}\right) \\ &= A\Big(\frac{z-\beta}{\alpha}\Big) - \frac{\lambda^{-1}G(A^{-1}(z))}{\alpha^{-1}\lambda^{-1}G'(A^{-1}(z))} \\ &= z - \frac{F(z)}{F'(z)} \\ &= N_F(z). \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۴. *فرض کنید* $F(z) = p(z)e^{q(z)}$ *باشد که در آن* $p(z)$ *و* $q(z)$ *چندجمله‌ای‌های مختلط هستند . همچنین به‌ازای* $\alpha \neq 0$، $A(z) = \alpha z + \beta$ *نگاشت آفین باشد . اگر برای* $\lambda \in \mathbb{C}$ *داشته باشیم*

$$G(z) = \lambda FoA(z),$$

آن‌گاه

$$H_F(z) = AoH_GoA^{-1}(z),$$

که در آن H_G *مزدوج* H_F *نسبت به* A *است .*

اثبات . فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ و $G(z) = \lambda FoA(z)$ باشد. در نتیجه

$$A\big(N_G(z)\big) = \alpha N_G(z) + \beta = N_F\big(A(z)\big).$$

همچنین

$$N_F'(\alpha z + \beta) = N_F'(A(z)).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} H_F(A(z)) &= A(z) - \frac{2A(z) - 2N_F(A(z))}{2 - N_F'(A(z))} \\ &= \alpha z + \beta - \frac{2\alpha z + 2\beta - 2\alpha N_G(z) - 2\beta}{2 - N_G'(z)} \\ &= \alpha\left(z - \frac{2z - 2N_G(z)}{2 - N_G'(z)}\right) + \beta \\ &= A\Big(H_G(z)\Big). \end{aligned}$$

□

گزاره ۳.۴. *فرض کنید* $G(z) = p(z)e^{p(z)}$ *باشد که در آن*

$$p(z) = a_1 z + a_2,$$

چندجمله‌ای خطی، $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ *و* $a_1 \neq 0$ *باشد. در این‌صورت* H_z *مزدوج* H_F *به‌ازای* $F(z) = ze^z$ *است.*

اثبات. چون A نگاشت آفین است لذا تعریف می‌کنیم

$$A(z) = \frac{z}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}.$$

بنابراین

$$P\big(A(z)\big) = a_1\left(\frac{z}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\right) + a_2 = z.$$

همچنین

$$G\big(A(z)\big) = P\big(A(z)\big)e^{p\left(A(z)\right)} = ze^z.$$

اکنون از قضیه ۱.۴ نتیجه می‌گیریم که H_G مزدوج H_F می‌باشد. □

گزاره ۴.۴. *فرض کنید* $G(z) = p(z)e^{p(z)}$ *باشد که در آن*

$$p(z) = a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

چندجمله‌ای درجه دوم، $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ *و* $a_1 \neq 0$ *است. در این‌صورت* H_G *مزدوج* H_F *به‌ازای* $F(z) = \alpha z(z-1)e^{\lambda z(z-1)}$ *می‌باشد که* $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ *است.*

اثبات. فرض کنید α و β ریشه‌های چندجمله‌ای $p(z)$ باشند. بنابراین

$$p(z) = (z-\alpha)(z-\beta).$$

نگاشت آفین زیر را در نظر بگیرید

$$T(z) = (\beta - \alpha)z + \alpha.$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned}(poT)(z) = P(T(z)) &= (T(z)-\alpha)(T(z)-\beta)\\ &= \Big((\beta-\alpha)z + \alpha - \alpha\Big)\Big((\beta-\alpha)z + \alpha - \beta\Big)\\ &= (\beta-\alpha)z\Big((\beta-\alpha)z - (\beta-\alpha)\Big)\\ &= (\beta-\alpha)^2 z^2 - (\beta-\alpha)^2 z\\ &= (\beta-\alpha)^2 z(z-1).\end{aligned}$$

تعریف کنید

$$\gamma = \beta - \alpha, \qquad r_\gamma(z) = \gamma^2 z(z-1).$$

در نتیجه

$$(poT)(z) = r_\gamma(z).$$

پس

$$(GoT)(z) = p(T(z))e^{p(T(z))} = r_\gamma(z)e^{r_\gamma(z)}.$$

اکنون از قضیه ۲.۴ نتیجه می‌شود که H_G مزدوج H_{r_γ} است و با قرار دادن $\lambda = \gamma^2$ اثبات کامل می‌شود. □

۵. نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج عددی حاصل از روش‌های نیوتن و هالی برای تابع مختلط نمایی $F(z) = p(z)e^{q(z)}$ می‌پردازیم. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

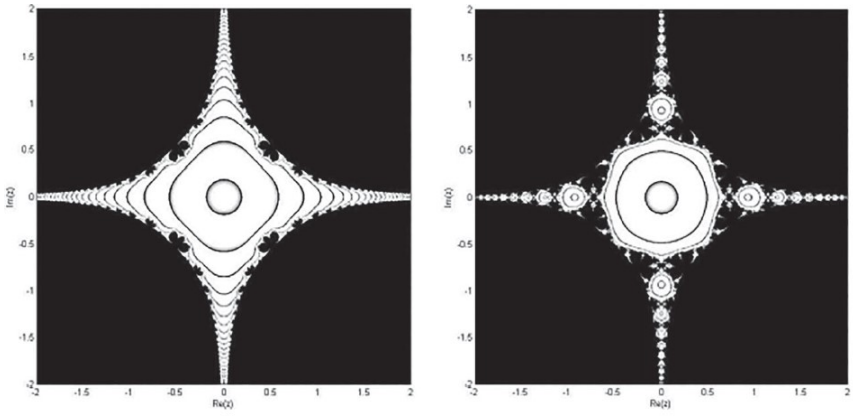
$$F_1(z) = ze^z, \qquad F_2(z) = ze^{z^2}, \qquad F_3(z) = ze^{z^4}.$$

در همه این حالت‌ها نمودارهای مربوط به برش همواری از $|z|$ را رسم کرده‌ایم. نمودارهای توابع $F_1(z)$ و $F_2(z)$ نشان می‌دهند که نقاط داخلی سریعتر از نقاط بیرونی همگرا می‌شوند. علاوه براین، نقطه‌های سیاه در نمودار نشان‌دهنده نقاطی هستند که روش نیوتن یا هالی به ریشه تابع $F(z) = 0$ همگرا نمی‌شوند. رفتار تابع $F_3(z)$ متفاوت از رفتار دو تابع دیگر می‌باشد. ناحیه مورد نظر برای تابع $F_3(z)$ محدود است ولی برای توابع $F_1(z)$ و $F_2(z)$ ناحیه مورد نظر نامحدود می‌باشد.
برای تابع $F_3(z)$ نقطه $z = 0$ نقطه ثابت جذب‌کننده برای روش‌های نیوتن و هالی است. برای روش هالی چهار نقطه ثابت دفع‌کننده زیر وجود دارد که همه آن‌ها ریشه‌های تکراری از مرتبه ۳ هستند

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \qquad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

شکل ۱ حوزه جذب تابع $F_3(z)$ در نقطه صفر و شکل ۲ نمای ∞ را برای این تابع نشان می‌دهند. برای توابع $F_1(z)$ و $F_2(z)$ نقطه $z = 0$ نقطه ثابت جذب‌کننده برای روش‌های نیوتن و هالی می‌باشد. در شکل ۳ حوزه جذب تابع $F_1(z)$ برای روش هالی در نقطه $z = 0$ نمایش داده شده است. همچنین $z = -1$ نقطه ثابت دفع‌کننده با مرتبه تکرار ۳ برای تابع $F_1(z)$ می‌باشد.
در شکل ۴ حوزه جذب تابع $F_2(z)$ برای روش هالی در نقطه $z = 0$ نمایش داده شده است. این تابع دو نقطه ثابت دفع‌کننده با مرتبه تکرار ۳ به‌صورت زیر دارد

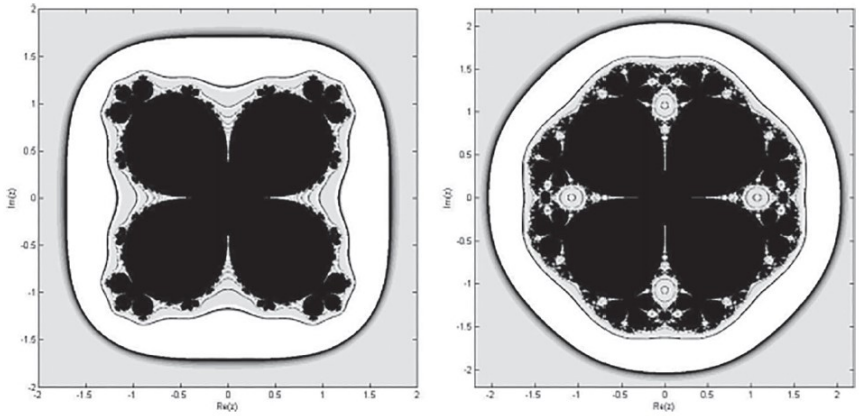
$$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$



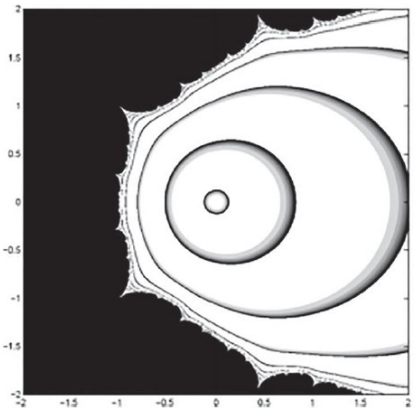
شکل ۱: حوزه جذب تابع $F_3(z)$ در نقطه $z = 0$ برای روش‌های هالی (راست) و نیوتن (چپ).

References

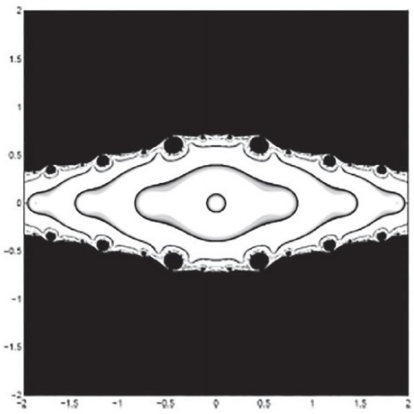
[1] F. V. Haeseler, H. O. Peitgen, Newton's method and complex dynamical systems, Acta Applicandae Mathematicae, **13(1-2)**, (1988), 3–58.
[2] J. L. Varona, Graphic and numerical comparison between iterative methods, The Mathematical Intelligencer, **24(1)**, (2002), 37–46.
[3] P. Cumsille, J. G. Marinc, G. Honoratod, D. Lugod, Disconnected Julia set of Halley's method for exponential maps, Dynamical systems, **37(2)**, (2022), 280–294.
[4] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures, 3rd ed., Princeton University Press, New Jersey, 2006.
[5] S. Sutherland, An introduction to Julia and Fatou sets, Springer-Verlag, 2014.



شکل ۲: نمای ∞ برای تابع $F_3(z)$ در نقطه $z = 0$ برای روش‌های هالی (راست) و نیوتن (چپ).



شکل ۳: حوزه جذب تابع $F_1(z)$ برای روش هالی در نقطه $z = 0$.



شکل ۴: حوزه جذب تابع $F_2(z)$ برای روش هالی در نقطه $z = 0$.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–112، صص. ۲۷–۳۱

T–نرم‌ها و اثرپذیری آن‌ها روی زیرحلقه‌های فازی

رسول رسولی[آ]، سی‌به‌رقادری*[ب]

[آ]استادیار ریاضی، دانشگاه پیام نور
[ب]هیات علمی ریاضی، دانشگاه پیام نور

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
نظریه حلقه‌ها
نرم‌ها
نظریه مجموعه‌های فازی
زیرحلقه‌های فازی
ضرب مستقیم
همریختی حلقه‌ها

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
18B40
03BXX
03B 52
20D35
05C62

چکیده

در این مقاله سعی می‌کنیم به کمک T–نرم‌ها، زیرحلقه‌های فازی را تعریف کنیم. اشتراک، حاصلضرب مستقیم آن‌ها را تعریف و نتایج مهمی از آن‌ها را بدست آوریم. خصوصیات اصلی آن‌ها را ثابت می‌کنیم. حلقه‌های خارج قسمتی از آن‌ها را شناسایی می‌کنیم. در خاتمه تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها را تحت همریختی حلقه‌ها تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها همچنان زیرحلقه‌های فازی نرم‌دار خواهد بود.

۱. مقدمه

انسان علیرغم اطلاعات نادقیق و ناکافی در مواجهه با مسایل پیچیده دنیای واقعی، رفتار و ماهیت سیستم را به‌طور دقیق درک و تحلیل می‌نماید. مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط لطفی‌زاده [۳۰] مطرح شد. در مجموعه‌های کلاسیک یک عنصر قطعاً عضو مجموعه هست یا قطعاً عضو مجموعه نیست، اما در عمل مواردی وجود دارند که تعریف حد و مرز دقیق و قطعی برای مجموعه‌ها امکان‌پذیر نیست. برای مثال برای مجموعه افراد چاق نمی‌توان حد و مرز مشخصی تعریف کرد، زیرا ملاک مشخصی برای چاق بودن وجود ندارد. لذا به مجموعه‌ای نیاز داریم که محدوده‌ی آن منعطف و به طور تقریبی (نادقیق) تعریف شود. به این مجموعه‌ها، مجموعه‌های فازی گفته می‌شود. عضویت عناصر در مجموعه‌های فازی با درجه عضویت که عددی بین صفر و یک است بیان می‌گردد. نظریه مجموعه‌های فازی در بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضی مانند گروه‌ها، آنالیز تابعی، نظریه احتمالات، توپولوژی و غیره ورود پیدا کرده است و مطالعات گسترده‌ای صورت گرفته است. نظریه حلقه‌ها به مطالعه ساختار حلقه‌ها می‌پردازد. یک حلقه [۱] یک مجموعه مجهز به عمل دو تایی است که ویژگی‌هایی شبیه جمع و ضرب اعداد صحیح را برآورده می‌کند. مفهوم‌سازی برای حلقه‌ها در دهه ۱۸۷۰ شروع و در دهه ۱۹۲۰ کامل شد. افرادی مانند ددکیند، هیلبرت، فرانکل و نوتر نقش کلیدی و اساسی در بیان مفهوم حلقه‌ها داشتند.

*سخنران
پست الکترونیک : Rasuli@pnu.ac.ir (رسول رسولی)، ghaderi_s@pnu.ac.ir (سی‌به‌رقادری)

[1] Ring

زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌های فازی برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط لیو [۱۰] بیان گردید و نتایجی به دست آمد. در ادامه تحقیقات بیشتری در ارتباط با زیرحلقه‌های فازی و ایده‌آل‌های فازی صورت گرفت [۳، ۹–۱۲].
نرم[۲] در ریاضی و رشته‌های مربوط به آن در مواردی که عناصر به مقادیر مثبت محدود می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرند. مولف اول این مقاله در کارهای قبلی خود، اثر نرم‌ها را روی مفاهیم فازی جبری بررسی کرده است و این مقاله در ادامه تحقیقات قبلی می‌باشد[۱۳–۲۵]. در این مقاله ما از t–نرم‌ها کمک می‌گیریم و آن‌ها را روی زیرحلقه‌های فازی اعمال می‌کنیم و مفهوم جدید $(TF(R))$ را بیان می‌کنیم. ثابت می‌کنیم اشتراک آن‌ها همچنان $TF(R)$ خواهد بود. ارتباط $TF(R)$ را با زیرحلقه‌های کلاسیک از حلقه R بررسی می‌کنیم. در ادامه ارتباط $TF(R)$ را با ایده‌آل‌های حلقه R بررسی می‌کنیم. خصوصیات اصلی $TF(R)$ را بیان و ثابت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها تحت همریختی حلقه‌ها همچنان $TF(R)$ می‌باشد. در ادامه تعریف زیرحلقه‌های خارج قسمتی از آن‌ها یعنی $TF(\frac{R}{I})$ را ذکر می‌کنیم و قضیه مهمی را ثابت می‌کنیم. سپس حاصلضرب مستقیم آن‌ها یعنی $TF(R_1 \times R_2)$ را ذکر می‌کنیم و مطالبی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش یک سری تعاریف و قضایایی که در این مقاله لازم داریم را می‌آوریم و برای جزئیات بیشتر، خواننده را به منابع [۱، ۲، ۴–۸، ۲۶–۳۰] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. دستگاه جبری $(R, +, .)$ از نوع $\tau = (2, 2)$ را (همراه با عمل دوتایی که معمولا یکی را با نماد جمع و دیگری را با نماد ضرب نشان می‌دهیم) حلقه می‌گوییم اگر:

۱. دستگاه جبری $(R, +)$ گروه آبلی باشد.
۲. دستگاه جبری $(R, .)$ نیم‌گروه (گروهواره شرکت‌پذیر) باشد.
۳. برای هر $x, y, z \in R$ اتحادهای توزیع‌پذیری ضرب روی جمع برقرار باشد یعنی:
(آ) $x.(y + z) = x.y + x.z$.
(ب) $(y + z).x = y.x + z.x$.

توجه: از این پس برای راحتی کار به جای $x.y$ می‌نویسیم xy و عضو خنثی گروه آبلی $(R, +)$ را با 0 و قرینه $x \in R$ را با $-x$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲. فرض کنید عمل‌های دوتایی حلقه همان جمع و ضرب معمولی باشد و $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد، در این صورت $(\mathbb{Z}, +, .)$ و $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, 0)$ که در آن $\mathbb{Z}[2] = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ هر دو حلقه می‌باشند.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(R, +, .)$ یک حلقه و $S \neq \emptyset$ یک زیرمجموعه R باشد. می‌گوییم S یک زیرحلقه R است و با نماد $S \leq R$ نشان می‌دهیم اگر S نسبت به جمع و ضرب حلقه R بسته باشد و با همان اعمال تشکیل یک حلقه دهد.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $(R, +, .)$ حلقه و $S \neq \emptyset$ زیرمجموعه R باشد. در این صورت S یک زیرحلقه R است اگر و فقط اگر*

۱. $0 \in S$
۲. *برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $ab \in S$ و $a - b \in S$.*

مثال ۵.۲. فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد در این صورت $(n\mathbb{Z}, +, .)$ یک زیرحلقه $(\mathbb{Z}, +, .)$ می‌باشد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید R یک حلقه و $\emptyset \neq I$ یک زیرمجموعه R باشد. می‌گوییم I یک ایده‌آل چپ از حلقه R است اگر برای هر $x, y \in I$ و $r \in R$ داشته باشیم $x - y \in I$ و $rx \in I$. هم‌چنین می‌گوییم I یک ایده‌آل راست حلقه R است اگر $x - y \in I$ و $xr \in I$ باشد.

نکته: هر ایده‌آل I از حلقه R می‌تواند یک زیرحلقه R هم باشد ولی هر زیرحلقه لزوماً یک ایده‌آل نیست. برای مثال فرض کنید $X \neq \emptyset$ یک مجموعه دلخواه باشد در این صورت $R = (P(X), \Delta, \cap)$ یک حلقه است که $P(X)$ مجموعه توانی X و Δ تفاضل متقارن است. اگر قرار دهیم $X = \{1, 2, 3\}$ آن‌گاه $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ یک زیرحلقه R است اما ایده‌آل نیست چون $S \in \{2, 3\}$ و $R \in \{2\}$ اما $\{2\} \notin S$ و $\{2\} = \{2, 3\} \cap \{2\}$ پس نمی‌تواند ایده‌آل باشد.

تعریف ۷.۲. فرض کنید $(R, +, .)$ یک حلقه و I یک ایده‌آل R باشد، می‌گوییم $(\frac{R}{I}, +, .)$ یک حلقه خارج‌قسمتی به صورت زیر تعریف می‌شود به طوری که برای هر $a + I, b + I \in \frac{R}{I}$ داریم:

$$\frac{R}{I} = \{a + I | a \in R\}$$

[2] Norm

۱. $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$.
۲. $(a+I).(b+I)=ab+I$.

تعریف ۸.۲. فرض کنید $X\neq\emptyset$ یک مجموعه دلخواه باشد. تابع $\eta: X\to[0,1]$ را یک زیرمجموعه فازی از X می‌گوییم و مجموعه تمامی مجموعه‌های فازی از X را با نماد $[0,1]^X$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲. تابع $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ را یک tـنرم می‌گوییم اگر برای هر $x,y,z\in[0,1]$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $T(x,1)=x$،
۲. اگر $y\leq z$ آنگاه $T(x,y)\leq T(x,z)$،
۳. $T(x,y)=T(y,x)$،
۴. $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$.

می‌گوییم T یک tـنرم خودتوان است اگر برای هر $x\in[0,1]$ داشته باشیم $T(x,x)=x$.

مثال ۱۰.۲. فرض کنید $x,y\in[0,1]$ در این صورت هر یک از موارد زیر یک tـنرم هستند:

۱. $T_m(x,y)=\min\{x,y\}$،
۲. $T_b(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$،
۳. $T_p(x,y)=xy$.

لم ۱۱.۲. *فرض کنید T یک tـنرم و $x,y,z,w\in[0,1]$ در این صورت*

$$T(T(x,y),T(z,w))=T(T(x,z),T(y,w))$$

همیشه برقرار است.

۳. نتایج اصلی

تعریف ۱.۳. فرض کنید R یک حلقه و $\mu:R\to[0,1]$ یک زیرمجموعه فازی باشد. می‌گوییم μ یک زیرحلقه فازی متناسب با tـنرم T است اگر شرایط:

۱. $\mu(xy)\geq T\big(\mu(x),\mu(y)\big)$،
۲. $\mu(x-y)\geq T\big(\mu(x),\mu(y)\big)$

برای هر $x,y\in R$ برقرار باشند. مجموعه تمام زیرحلقه‌های فازی متناسب با tـنرم T از حلقه R را با $TF(R)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۳. فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و $R=(\mathbb{Z},+,.)$ یک حلقه باشد، تعریف می‌کنیم $\mu:R\to[0,1]$ با رابطه

$$\mu(x)=\begin{cases}0/9 & \text{اگر } x\in\{0,\pm2,\pm4,\cdots\}\\ 0/7 & \text{اگر } x\in\{\pm1,\pm3,\cdots\}\end{cases}$$

و اگر برای هر $a,b\in[0,1]$ قرار دهیم $T(a,b)=ab$، در این صورت $\mu\in TF(R)$ می‌باشد.

در این قسمت می‌خواهیم مفاهیم زیرمجموعه بودن، تساوی و اشتراک آن‌ها را بررسی کنیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\mu_1,\mu_2\in TF(R)$ و $x\in R$.

۱. می‌گوییم $\mu_1\subseteq\mu_2$ اگر $\mu_1(x)\leq\mu_2(x)$.
۲. می‌گوییم $\mu_1=\mu_2$ اگر $\mu_1(x)=\mu_2(x)$.
۳. اشتراک $\mu_1\cap\mu_2:R\to[0,1]$ را به صورت $(\mu_1\cap\mu_2)(x)=T\big(\mu_1(x),\mu_2(x)\big)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $\mu_1,\mu_2\in TF(R)$ در این صورت $(\mu_1\cap\mu_2)\in TF(R)$.*

نکته: می‌توان گفت که اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای $TF(R)$ همچنان $TF(R)$ می‌باشد.

نکته: در قضیه زیر ارتباط بین زیرحلقه‌های فازی $TF(R)$ و زیرحلقه‌های کلاسیک حلقه R بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۳. *فرض کنید $\mu \in TF(R)$ و T یک tـنرم خودتوان باشد. در این صورت*

$$R_t = \{x \in R | \mu(x) \geq t\}$$

برای هر $t \in [0,1]$ یک زیرحلقه R است.

توجه: قضیه زیر ارتباط $\mu : R \to [0,1]$ و ایده‌آل‌های حلقه R را بیان می‌کند و نیازی نیست که حتماً $\mu \in TF(R)$ باشد.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\mu \in [0,1]^R$ و T یک tـنرم خودتوان باشد. اگر $\mu(x-y) \geq T(\mu(x),\mu(y))$ و $\mu(rx) \geq \mu(x)$ برای هر $x,y,r \in R$ برقرار باشند، آنگاه داریم:*

۱. $\mu(0) \geq \mu(x)$ *برای هر* $x \in R$.
۲. $\mu(x) = \mu(-x)$ *برای هر* $x \in R$.
۳. *مجموعه* $R_t = \{x \in R | \mu(x) \geq t\}$ *برای هر* $t \in [0,1]$ *یک ایده‌آل چپ حلقه* R *است.*
۴. *مجموعه* $R_0[= \{x \in R | \mu(x) = \mu(0)\}$ *یک ایده‌آل چپ حلقه* R *است.*

نکته: در قضیه زیر نیازی نیست که $\mu \in TF(R)$ باشد و اهمیت عضو خنثی را بیان می‌کند.

قضیه ۷.۳. *فرض کنید $\mu \in [0,1]^R$ و T یک tـنرم خودتوان باشد. فرض کنید $x \in R$ در این صورت داریم $\mu(x-y) = \mu(-y)$ اگر و فقط اگر $\mu(x) = 0$ به طوری‌که $y \in R$.*

تعریف ۸.۳. فرض کنید $\phi : R \to S$ یک همریختی بین حلقه‌های R و S باشد و $\mu \in [0,1]^R$ و $\nu \in [0,1]^S$. دراین صورت $f(\mu) : S \to [0,1]$ به طوری که به صورت

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) | x \in R, f(x) = y\} & \text{اگر } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{اگر } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. همچنین $f^{-1}(\nu) : R \to [0,1]$ که به صورت $f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$ برای هر $x \in R$ تعریف می‌کنیم.

توجه: قضیه زیر ارتباط $TF(R)$ و همریختی حلقه‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۹.۳. *فرض کنید $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد.*

۱. *اگر* $\mu \in TF(R)$ *آنگاه* $f(\mu) \in TF(S)$.
۲. *اگر* $\nu \in TF(S)$ *آنگاه* $f^{-1}(\nu) \in TF(R)$.

نکته: حال می‌خواهیم روی حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ که I ایده‌آل حلقه R است بحث کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل حلقه R باشد. فرض کنید $\mu_I : I \subseteq R \to [0,1]$ به طوری که $\mu_I \in TF(R)$. تعریف می‌کنیم

$$\mu : \frac{R}{I} \to [0,1]$$
$$\mu(x+I) = \begin{cases} T(\mu_I(x), \mu_I(i)) & \text{اگر } x \neq i \\ 1 & \text{اگر } x = i \end{cases}$$

به طوری‌که $x \in R$ و $i \in I$.

توجه: قضیه زیر ارتباط بین $TF(\frac{R}{I})$ و $TF(R)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه R و $\mu_I \in TF(R)$ و T یک tـنرم خودتوان باشد. در این صورت $\mu \in TF(\frac{R}{I})$.*

نکته: در ادامه می‌خواهیم روی ضرب مستقیم حلقه‌های R و S بحث کنیم و $TF(R \times S)$ را تعریف کنیم.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید R و S دو حلقه باشند و $\mu : R \to [0,1]$ و $\nu : S \to [0,1]$ دو مجموعه فازی باشند. مجموعه فازی $\mu \times \nu : R \times S \to [0,1]$ را به صورت $(\mu \times \nu)(x,y) = T(\mu(x),\nu(y))$ که $(x,y) \in R \times S$ است، تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنید $\mu \in TF(R)$ و $\nu \in TF(s)$ در این صورت $\mu \times \nu \in TF(R \times S)$.*

قضیه ۱۴.۳. *قضیه۱۳.۳ برای هر تعداد متناهی هم برقرار است یعنی اگر $\mu_i \in TF(R_i)$ در این صورت*

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n \in TF(R_1 \times \cdots \times R_n).$$

.

۴. نتیجه‌گیری و مسأله باز

در سراسر این مقاله ما به کمک tـنرم‌ها حلقه‌های فازی را تعریف کردیم و خصوصیات آن‌ها را بررسی کردیم. در ادامه اشتراک، حاصلضرب مستقیم آن‌ها را بیان کردیم، حلقه‌های خارج قسمتی را تعریف کردیم. سپس تعاریف مقدماتی را آورده‌ایم. حال در ادامه به عنوان یک مسأله باز علاقه‌مندان می‌توانند سایر مفاهیم مانند قضیه‌های همریختی را بیان و ثابت کنند. زیرحلقه‌های فازی تولید شده توسط یک مجموعه را بیان کنند. دامنه‌های صحیح فازی و میدان‌های فازی مناسب با tـنرم‌ها را بیان کنند و تمامی موارد و تعاریف و نتایجی که در زمینه جبر کلاسیک داشتیم را در قالب مجموعه‌های فازی متناسب با tـنرم‌ها بیان کنیم. تمامی موارد فوق می‌تواند به عنوان یک مسأله باز برای علاقه‌مندان به موضوع باشد.

مراجع

[1] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra*, volume 28. Princeton university press, 1999.
[2] I. S. Cohen. Commutative rings with restricted minimum condition. pages 27–42, 1950.
[3] V. N. Dixit, R. Kumar and A. Ajmal. Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring. *Fuzzy sets and systems*, 44(1):127–138, 1991.
[4] I. N. Herstein. *Topics in algebra*. John Wiley & Sons, 1991.
[5] U. Höhle and S. E. Rodabaugh. *Mathematics of fuzzy sets: logic, topology, and measure theory*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2012.
[6] J. A. Huckaba. *Commutative Rings with Zero Divisors*. Chapman & Hall Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc, 1988. ISBN 9780824778446. URL https://books.google.com/books?id=uJ9pQgAACAAJ.
[7] T. W. Hungerford, Algebra, Springer, USA, 1973.
[8] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap. Triangular norms. 2000.
[9] R. Kumar. Fuzzy Algebra. University of Delhi, Publication Division, 1993. URL https://books.google.com/books?id=RxTYHAAACAAJ.
[10] W. J. Liu. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. *Fuzzy sets and Systems*, 8(2):133–139, 1982.
[11] T. K. Mukherjee and M. K. Sen. Prime fuzzy ideals in rings. *Fuzzy Sets and Systems*, 32(3):337–341, 1989. ISSN 0165-0114. doi: https://doi.org/۱۰.۱۰۱۶/۰۱۶۵-۰۱۱۴)۸۹(۹۰۲۶۶-۲. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011489902662.
[12] D. Piciu. *Algebras of fuzzy logic*. Universitaria, 2007.
[13] R. Rasuli. T-fuzzy subalgebras of bci-algebras. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 16(1):55–72, 2023.
[14] R. Rasuli. Q-intuitionistic fuzzy subgroups of a group. *Notes on intuitionistic Fuzzy Sets*, 29(1):30–45, 2023.
[15] R. Rasuli. Some properties of fuzzy algebraic structures of $qifsn(g)$. in *4th International Conference on Computational Algebra, Computational Number Theory and Applications, CACNA2023, University of Kashan, Iran*, 2023.
[16] R. Rasuli. Anti fuzzy multigroups and t-conorms. in *National Conference on soft Computing and Cognitive Science held by Conbad Kavous University, Faculty of Technology and Engineering Minutest, Iran, Minudasht, during Aprill 18-19*, 2023.
[17] R. Rasuli. Norms over intuitionistic fuzzy subgroups on direct product of groups. *Communications in combinatorics, cryptography & computer science*, 2023(1):39–54, 2022.
[18] R. Rasuli. Norms over intuitionistic fuzzy subgroups on direct product of groups. *Communications in combinatorics, cryptography & computer science*, 2023(1):39–54, 2022.
[19] R. Rasuli. Normalization, commutativity and centralization of tfsm (g). *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, pages 1–24, 2022.
[20] R. Rasuli. Fuzzy ideals of bci-algebras with respect to t-norm. *Mathematical Analysis and its Contemporary Applications*, 5(2):39–59, 2023.
[21] R. Rasuli. Intuitionistic fuzzy complex subgroups with respect to norms (t, s). *Journal of fuzzy extension and applications*, 4(2):92–114, 2023.
[22] R. Rasuli. Normality and translation of ifs (g× q) under norms. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 29(2):114–132, 2023.
[23] R. Rasuli. Intuitionistic fuzzy g-modules with respect to norms (t and s). 2023.
[24] R. Rasuli. Complex fuzzy lie subalgebras and complex fuzzy ideals under t-norms. *Journal of fuzzy extension and applications*, 4(3):173–187, 2023.
[25] R. Rasuli. Anti fuzzy b-subalgebras under s-norms. *Communications in Combinatorics, Cryptography & Computer Science*, 2023(1):61–74, 2023.
[26] R. Y. Sharp. *Steps in commutative algebra*. Cambridge University Press, 2000.
[27] U. M. Swamy and K. L. N. Swamy. Fuzzy prime ideals of rings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 134(1):94–103, 1988.
[28] E. Turunen. Mathematics behind fuzzy logic. *A Springer-Verlag Co*, 1999.
[29] Z. Yue. Prime l-fuzzy ideals and primary l-fuzzy ideals. *Fuzzy sets and systems*, 27(3):345–350, 1988.
[30] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965.
[31] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*. number v. 1In Commutative Algebra. D. Van Nostrand., 1958. URL https://books.google.com/books?id=6sw-AAAAIAAJ.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–113، صص. ۳۲–۳۸

مدول‌های شبه وفادار و مدول‌های شبه وفادار ضعیف

علی‌رضا آل‌هفت‌تن *،[آ]

[آ] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران .

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
شبه وفادار
شبه وفادار ضعیف
(شبه) تزریقی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
13C05
13C60

چکیده

در این مقاله با الگو گرفتن از مفهوم مدول‌های وفادار، مفاهیم شبه وفادار بودن و شبه وفادار ضعیف بودن را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌هارا بیان کرده‌ایم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که تزریقی بودن R–مدول شبه وفادار A با شبه تزریقی بودن آن به‌عنوان $\frac{R}{Ann(A)}$–مدول معادل است و نیز شرایطی را معرفی می‌کنیم که هر دو مفهوم شبه وفادار بودن و شبه وفادار ضعیف بودن بر هم منطبق باشند.

۱. مقدمه

مدول‌های وفادار به‌عنوان دسته‌ی مهمی از مدول‌ها همواره مورد توجه و مطالعه‌ی جبردان‌ها بوده‌اند. هم‌چنین علاوه بر بررسی ویژگی‌های آن‌ها، ارتباطشان با سایر مفاهیم نظریه‌ی مدول‌ها مانند: مدول‌های آرتینی، مدول‌های تزریقی و ...، بسیاری ار نویسندگان را به خود مشغول کرده است. از این رو در این مقاله ب با الگو قرار دادن مدول‌های وفادار، ابتدا مدول شبه وفادار را تعریف کرده و نشان می‌دهیم حاصل‌جمع مستقیم دو R–مدول شبه وفادار نیز این ویژگی را دارد. هم‌چنین ثابت می‌کنیم ویژگی شبه وفاداری، هنگام موضعی سازی حفظ خواهد شد. در ادامه به بررسی ارتباط مفاهیم تزریقی و شبه تزریقی بودن و مفهوم شبه وفاداری پرداخته و نشان می‌دهیم یک R–مدول شبه وفادار و شبه تزریقی، $\frac{R}{Ann(A)}$–مدولی تزریقی است. در بخش بعد نیز مفهوم شبه وفادای ضعیف یک مدول را معرفی کرده و ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در پایان ثابت می‌کنیم که اگر زیرمدول $\circ$ از مدول A، نیم اول باشد، آنگاه شبه وفادار بودن و شبه وفادار بودن ضعیف A با هم معادل هستند.

لازم به ذکر است که در سراسر این مقاله همه‌ی حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یک‌دار و مدول‌ها یکانی هستند. این یک ملاحظه است.

۲. مدول شبه وفادار

تعریف ۱.۲. R–مدول A را شبه وفادار می‌نامیم، هرگاه $\circ \neq a \in A$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$Ann(A) = Ann(Ra)$$

یا به طور معادل

*سخنران
پست الکترونیک : a.r.alehafttan@jsu.ac.ir (علی‌رضا آل‌هفت‌تن)

$$Ann(A) = Ann(a)$$

مثال ۲.۲. مدول‌های دوری شبه وفادار هستند.

می‌دانیم که Rـمدول A اول نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، $Ann(A) = Ann(B)$.

مثال ۳.۲. هر مدول اول، شبه وفادار است.

گزاره ۴.۲. *اگر A و B دو Rـمدول شبه وفادار باشند، آنگاه $A \oplus B$ نیز شبه وفادار است.*

اثبات. فرض کنیم برای $a \in A$ و $b \in B$،

$$Ann(A) = Ann(a) \quad \text{و} \quad Ann(B) = Ann(b)$$

$(a,b) \in A \oplus B$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر برای $r \in R$، $r(a,b) = (0,0)$، آنگاه $ra = 0$ و $rb = 0$ و در نتیجه،

$$r \in Ann(a) = Ann(A) \quad \text{و} \quad r \in Ann(b) = Ann(B)$$

اکنون برای هر $(x,y) \in A \oplus B$،

$$r(x,y) = (rx, ry) = (0,0)$$

و این ایجاب می‌کند $r \in Ann(A \oplus B)$. از این رو، $Ann((a,b)) \subseteq Ann(A \oplus B)$. اما؛ همواره داریم $Ann(A \oplus B) \subseteq Ann((a,b))$. پس؛

$$Ann(A \oplus B) = Ann((a,b))$$

یعنی؛ $A \oplus B$، شبه وفادار است. □

نتیجه ۵.۲. *جمع مستقیم هر تعداد متناهی از مدول‌های شبه وفادار، یک مدول شبه وفادار است.*

مثال آتی نشان می‌دهد که قید متناهی در نتیجه‌ی ۵.۲، ضروری است.

مثال ۶.۲. برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}_p$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول، شبه وفادار است. اما؛ $\bigoplus_{p \text{ عددی اول است}} \mathbb{Z}_p$، شبه وفادار نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که جمع‌وند مستقیم یک مدول شبه وفادار، لزوماً شبه وفادار نیست.

مثال ۷.۲. اگر $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ را به‌عنوان یک $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیریم، آنگاه A شبه وفادار است (در واقع A وفادار است)، اما؛ $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ شبه وفادار نیست.

گزاره ۸.۲. *فرض کنیم A یک Rـمدول و I ایدالی از R و مشمول در $Ann(A)$ باشد. در این صورت، A یک Rـمدول شبه وفادار است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ـمدولی شبه وفادار باشد.*

اثبات. فرض کنیم A به‌عنوان Rـمدول شبه وفادار باشد و به ازای $a \in A$ داشته باشیم

$$Ann_R(A) = Ann_R(a)$$

اکنون اگر $r + I \in Ann_{\frac{R}{I}}(a)$، آنگاه $ra = (r+I)a = 0$. پس

$$r \in Ann_R(a) = Ann_R(A)$$

و از این رو برای هر $x \in A$ خواهیم داشت، $rx = 0$، لذا؛ $(r+I)x = 0$. یعنی؛ $r+I \in Ann_{\frac{R}{I}}(A)$ و در نتیجه $Ann_{\frac{R}{I}}(a) \subseteq Ann_{\frac{R}{I}}(A)$. اما؛ در حالت کلی $Ann_{\frac{R}{I}}(A) \subseteq Ann_{\frac{R}{I}}(a)$ که تساوی

$$Ann_{\frac{R}{I}}(A) = Ann_{\frac{R}{I}}(a)$$

را ایجاب می‌کند. به‌عکس؛ فرض کنیم A یک $\frac{R}{I}$ـمدول شبه وفادار باشد و برای یک $b \in A$ داشته باشیم

$$Ann_{\frac{R}{I}}(A) = Ann_{\frac{R}{I}}(b)$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود $Ann_R(A) = Ann_R(b)$، که نشان می‌دهد A یک Rـمدول شبه وفادار است. □

گزاره ۹.۲. *فرض کنیم A یک مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی R و S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد. آنگاه*

$$S^{-1}Ann_R(A) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}A)$$

اثبات. به گزاره‌ی ۳.۱۴ از [۲] مراجعه شود. □

گزاره ۱۰.۲. *فرض کنیم A یک Rـمدول متناهی مولد و S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد. در این صورت اگر A یک Rـمدول شبه وفادار باشد، آنگاه $S^{-1}A$ یک $S^{-1}R$ـمدول شبه وفادار است.*

اثبات. فرض کنیم برای $a \in A$،

$$Ann(A) = Ann(Ra)$$

بنابراین،

$$S^{-1}Ann(A) = S^{-1}Ann(Ra)$$

حال با استفاده از گزاره‌ی ۹.۲، نتیجه می‌گیریم

$$Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}A) = S^{-1}Ann(A) = S^{-1}Ann(Ra) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}(Ra)).$$

اکنون کافی است نشان دهیم $S^{-1}(Ra)$ دوری است. اگر $x \in S^{-1}(Ra)$، آنگاه $y \in Ra$ و $s \in S$ وجود دارند، به‌طوری‌که $x = \frac{y}{s}$. لذا،

$$x = \frac{ra}{s} = \frac{r}{s}\frac{a}{1} \in (S^{-1}R)a$$

و در نتیجه

$$S^{-1}(Ra) \subseteq (S^{-1}R)(\tfrac{a}{1})$$

هم‌چنین، هرگاه $\alpha \in (S^{-1}R)(a)$، آنگاه $\alpha = \frac{u}{t}\frac{a}{1}$ که در آن $ua \in Ra$ و $t \in S$. بنابراین خواهیم داشت $\alpha \in (S^{-1}R)(a)$ و از این رو

$$(S^{-1}R)(\tfrac{a}{1}) \subseteq S^{-1}(Ra)$$

که این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۱۱.۲. *اگر A یک Rـمدول متناهی مولد و شبه وفادار و P ایدالی اول از R باشد، آنگاه A_P یک R_Pـمدول شبه وفادار است.*

تعریف ۱۲.۲. Rـمدول A شبه تزریقی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، هر Rـهم‌ریختی $f : B \to A$ قابل توسیع به یک Rـدرون‌ریختی مانند $g : A \to A$ باشد.

لم ۱۳.۲. *فرض کنیم A یک Rـمدول باشد. اگر برای $a \in A$، داشته باشیم $Ann(A) = Ann(a)$، آنگاه برای هر $x \in A$، یک Rـهم‌ریختی مانند $f : Ra \to Rx$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(a) = x$.*

اثبات. $f : Ra \to Ry$ را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $ra \in Ra$، $f(ra) = rx$. f یک تابع است. زیرا؛ اگر $ra = sa$، آنگاه $(r-s)a = 0$ و در نتیجه

$$r - s \in Ann(a) = Ann(A)$$

. از این رو $(r-s)x = 0$ و لذا،

$$f(ra) = rx = sx = f(sa)$$

در ادامه به آسانی دیده می‌شود که f یک Rـهمریختی است چنانکه $f(a) = x$. □

گزاره ۱۴.۲. *اگر A یک Rـمدول شبه وفادار و شبه تزریقی باشد، آنگاه $a \in A$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $x \in A$، $f \in End(A)$ وجود دارد چنانکه $x = f(a)$.*

اثبات. چون A شبه وفادار است، پس؛ $a \in A$ موجود است به‌طوری‌که

$$Ann(A) = Ann(a)$$

بنابراین با توجه به لم ۱۳.۲، برای هر $x \in A$ یک هم‌ریختی مانند $f : Ra \to Rx$ وجود دارد چنانکه $f(a) = x$. حال اگر هم‌ریختی شمول، یعنی؛ $i : Rx \hookrightarrow A$ را در نظر بگیریم، آنگاه $i \circ f : Ra \to A$ یک هم‌ریختی است. اما؛ A شبه تزریقی است، پس؛ درون‌ریختی $g : A \to A$ وجود دارد به‌طوری‌که $g|_{Ra} = f$. از این رو

$$g(a) = f(a) = x$$

□

قضیه ۱۵.۲. *فرض کنیم A یک R–مدول باشد. اگر A یک $\frac{R}{Ann(A)}$–مدول تزریقی باشد، آنگاه A R–مدولی شبه تزریقی است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۱۴۹ از [۳]، مراجعه شود. □

با توجه به مثال زیر عکس قضیه‌ی ۱۵.۲، در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۶.۲. اگر $\bigoplus_{p \text{ عددی اول است}} \mathbb{Z}_p$ را به‌عنوان یک مدول روی $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، شبه تزریقی خواهد بود اما؛ به‌عنوان $\frac{\mathbb{Z}}{\bigoplus_{p \text{ عددی اول است}} \mathbb{Z}_p}$–مدول، تریقی نیست.

لم ۱۷.۲. (محک بئر) *R–مدول A تزریقی است اگر و تنها اگر برای هر ایدال I از حلقه‌ی R و هر R–هم‌ریختی مانند $f : I \to A$، $a \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in I$، $f(x) = xa$.*

اثبات. به قضیه‌ی ۶ از [۴]، مراجعه شود. □

لم ۱۸.۲. *اگر A یک R–مدول شبه تزریقی باشد و $I \subseteq Ann(A)$، آنگاه A یک $\frac{R}{I}$–مدول شبه تزریقی نیز است.*

اثبات. به لم ۲ از [۱]، مراجعه شود. □

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد عکس قضیه‌ی ۱۵.۲، در حالتی که A شبه وفادار باشد برقرار است.

قضیه ۱۹.۲. *اگر A یک R–مدول شبه وفادار و شبه تزریقی باشد، آنگاه A یک $\frac{R}{Ann(A)}$–مدول تزریقی است.*

اثبات. فرض کنیم $a \in A$ و

$$Ann(A) = Ann(a)$$

بنابراین A یک $\frac{R}{Ann(a)}$–مدول وفادار است. اکنون اگر $\varphi : \frac{R}{Ann(a)} \to A$ را با ضابطه‌ی

$$\varphi(r + Ann(a)) = ra$$

تعریف کنیم، به آسانی دیده می‌شود که φ یک $\frac{R}{Ann(A)}$–تک‌ریختی است. حال فرض کنیم $\frac{I}{Ann(a)}$ ایدالی از $\frac{R}{Ann(a)}$ و $f : \frac{I}{Ann(a)} \to A$ یک یک $\frac{R}{Ann(A)}$–هم‌ریختی باشد. بنابراین

$$f \circ \varphi^{-1} \circ i : \varphi(\tfrac{I}{Ann(a)}) \to A$$

یک $\frac{R}{Ann(A)}$–هم‌ریختی است. اما؛ با توجه به لم ۱۸.۲، A $\frac{R}{Ann(a)}$–مدول شبه تزریقی است، پس؛ دارای توسیعی مانند $g : A \to A$ خواهد بود. اکنون اگر قرار دهیم $x = g(a)$ آنگاه برای هر $r + I$،

$$f(r + I) = (r + I)x$$

از این رو با استفاده از لم ۱۷.۲ نتیجه می‌گیریم که A به‌عنوان $\frac{R}{Ann(A)}$–مدول، تزریقی است. □

نتیجه ۲۰.۲. *R–مدول شبه وفادار A شبه تزریقی است اگر و تنها اگر به‌عنوان $\frac{R}{Ann(A)}$–مدول تزریقی باشد.*

۳. مدول شبه وفادار ضعیف

تعریف ۱.۳. مدول A روی حلقه‌ی R شبه وفادار ضعیف نامیده می‌شود، هرگاه $a \in A \neq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\sqrt{Ann(A)} = \sqrt{Ann(a)}$$

یا به طور معادل

$$\sqrt{Ann(A)} = \sqrt{Ann(Ra)}$$

گزاره ۲.۳. *فرض کنیم A و B دو Rـمدول شبه وفادار ضعیف باشند. آنگاه $A \oplus B$ نیز شبه وفادار ضعیف است.*

اثبات. فرض کنیم $a \in A$ و $b \in B$ به‌طوری‌که

$$\sqrt{Ann(A)} = \sqrt{Ann(a)} \quad \text{و} \quad \sqrt{Ann(B)} = \sqrt{Ann(b)}$$

بنابراین $(a,b) \in A \oplus B$ و

$$\sqrt{Ann(A \oplus B)} \subseteq \sqrt{Ann((a,b))}$$

اکنون فرض کنیم $r \in \sqrt{Ann((a,b))}$. پس؛ $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $r^n \in Ann((a,b))$، یعنی؛ $r^n(a,b) = (0,0)$ و در نتیجه $r^n a = 0$ و $r^n b = 0$. از این رو

$$r \in \sqrt{Ann(a)} = \sqrt{Ann(A)}$$

و لذا، $m,k \in \mathbb{N}$ موجودند که

$$r^m \in Ann(A) \quad \text{و} \quad r^k \in Ann(B)$$

حال فرض کنیم $(x,y) \in A \oplus B$ و قرار می‌دهیم $t = max\{m,k\}$. پس؛

$$r^t(x,y) = (r^t x, r^t y) = (0,0)$$

از این رو $r \in \sqrt{Ann(A \oplus B)}$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

گزاره ۳.۳. *فرض کنیم A یک Rـمدول و I ایدالی از R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq Ann(A)$. در این صورت Rـمدول A شبه وفادار ضعیف است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ـمدول A شبه وفادار ضعیف باشد.*

اثبات. فرض کنیم A به‌عنوان Rـمدول، شبه وفادار ضعیف است و

$$\sqrt{Ann_R(A)} = \sqrt{Ann_R(a)}$$

فرض کنیم $r + I \in \sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(a)}$. بنابراین عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $(r+I)^n a = 0$، لذا؛ $r^n a = 0$ و

$$r \in \sqrt{Ann_R(a)} = \sqrt{Ann_R(A)}$$

از این روی برای یک عدد طبیعی مانند m داریم $r^m \in Ann_R(A)$ و لذا، برای هر $x \in A$ $r^m x = 0$ که ایجاب می‌کند برای هر $x \in A$، $(r+I)^m x = 0$ و در نتیجه $(r+I) \in \sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(A)}$. یعنی؛

$$\sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(a)} \subseteq \sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(A)}$$

و چون عکس این شمول همواره برقرار است می‌توان نوشت

$$\sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(A)} = \sqrt{Ann_{\frac{R}{I}}(a)}$$

به‌عکس؛ با توجه به این‌که استدلالی مشابه دارد، از بیان آن صرف‌نظر می‌کنیم. □

لم ۴.۳. *فرض کنیم A یک مدول روی حلقه‌ی R و S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد. در این صورت اگر*

$$S^{-1}Ann_R(Ra) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))$$

آن‌گاه

$$S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)} = \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

اثبات. اگر $x \in S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)}$، آن‌گاه $r \in \sqrt{Ann_R(Ra)}$ و $s \in S$ وجود دارند، به‌طوری‌که $x = \frac{r}{s}$ و در نتیجه برای عددی طبیعی مانند n داریم، $r^n \in Ann_R(Ra)$ ولذا،

$$.x^n = \frac{r^n}{s^n} \in Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))$$

بنابراین $x \in \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$ و

$$S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)} \subseteq \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

به‌عکس؛ فرض کنیم

$$x = \frac{r}{s} \in \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

در این صورت عددی طبیعی مانند n وجود خواهد داشت به‌طوری‌که

$$x^n = \frac{r^n}{s^n} \in Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a)) = S^{-1}Ann_R(Ra)$$

بنابراین $r_1 \in Ann_R(Ra)$ و $t \in S$ وجود دارد چنانکه $\frac{r^n}{s^n} = \frac{r_1}{t}$. لذا، می‌توان $t_1 \in S$ یافت که

$$t_1 t r^n = t_1 r_1 s^n \in Ann_R(Ra)$$

که ایجاب می‌کند $t_1 tr \in \sqrt{Ann_R(Ra)}$ و در نتیجه

$$x = \frac{r}{s} = \frac{t_1 tr}{t_1 ts} \in \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

یعنی؛

$$S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)} = \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

گزاره ۵.۳. *اگر A یک Rـمدول متناهی مولد وشبه وفادار ضعیف باشد، آن‌گاه $S^{-1}A$ یک $S^{-1}R$ـمدول شبه وفادار ضعیف است.*

اثبات. اگر A یک Rـمدول شبه وفادار ضعیف باشد، آن‌گاه برای یک $a \in A$ داریم

$$\sqrt{Ann_R(A)} = \sqrt{Ann_R(Ra)}$$

و در نتیجه

$$S^{-1}\sqrt{Ann_R(A)} = S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)}$$

اکنون می‌توان از گزاره‌ی ۹.۲ استفاده کرده و نوشت

$$S^{-1}Ann_R(Ra) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a)) \quad \text{و} \quad S^{-1}Ann_R(A) = Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}A)$$

از این رو با استفاده از لم ۴.۳ داریم

$$\sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}A)} = S^{-1}\sqrt{Ann_R(A)} = S^{-1}\sqrt{Ann_R(Ra)} = \sqrt{Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}R(a))}$$

که نشان می‌دهد $S^{-1}A$ یک S^{-1}ـمدول شبه وفادار ضعیف است. □

تعریف ۶.۳. فرض کنیم A یک مدول روی حلقه ی R باشد. زیرمدول B از A را نیم اول می‌نامیم، هرگاه برای هر $r \in R$، $a \in A$ و $n \in \mathbb{N}$، از $r^n a \in B$، نتیجه شود $ra \in B$.

گزاره ۷.۳. *فرض کنیم A یک Rـمدول شبه وفادار ضعیف باشد. اگر زیرمدول 0 از A، نیم اول باشد، آن‌گاه A شبه وفادار است.*

اثبات. فرض کنیم A شبه وفادار ضعیف باشد

$$\sqrt{Ann(A)} = \sqrt{Ann(a)}$$

برای اثبات شبه وفادار بودن، کافی است نشان دهیم $Ann(A) = Ann(a)$. حال فرض کنیم $r \in Ann(a)$. پس؛

$$r \in \sqrt{Ann(a)} = \sqrt{Ann(A)}$$

لذا، عدد طبیعی n موجود است به‌طوری‌که $r^n \in Ann(A)$. از این رو برای هر $x \in A$ می‌توان نوشت $r^n x = 0$ و چون 0 نیم اول، $rx = 0$. یعنی؛ $r \in Ann(A)$ و

$$Ann(a) \subseteq Ann(A)$$

توجه به این نکته که عکس رابطه‌ی شمول هموتره برقرار است اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۸.۳. *فرض کنیم A یک مدول و زیر مدول 0 آن نیم اول باشد. در این صورت A شبه وفادار است اگر و تنها اگر شبه وفادار ضعیف باشد.*

مراجع

[1] J. Ashan, Rings All of Whose Cyclic Modules Are Quasi-Injective, Proc., London Math. Soc. 3:27 (1973) 425-439.
[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Univesity of Oxford, 1969.
[3] C. Faith, *Modules finite over endomorphism ring*, Department of Mathematics Rutgers, The State University New Brunswick, New Jersey.
[4] C. Faith, *Lectures on Injective Modules and Quotient Rings*, Springer-Verlag Berlin Beidelberg New York.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–114، صص. ۳۹–۴۴

بررسی برخی مدول‌ها نسبت به مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های چپ

علی‌رضا آل‌هفت‌تن *،آ

آگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران .

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
$\mathcal{L}$–بی‌تاب
$\mathcal{L}$–تاب‌دار
$\mathcal{L}$–تزریقی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
00A05
00A35

چکیده

در این مقاله برخی از مفاهیم در نظریه‌ی مدول‌ها مانند: تزریقی بودن، تاب‌دار بودن، بی‌تاب بودن و زیرمدول ضربی را نسبت به زیرمجموعه‌ای از ایده‌آل‌های یک حلقه تعمیم داده و خواصی از آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

مفاهیم مهم که نقشی پر رنگ در نظریه‌ی مدول‌ها ایفا می‌کنند، به‌طور معمول به روش‌های مختلف و توسط طیف وسیعی از نویسندگان از دیدگاه‌های مختلف تعمیم داده می‌شوند. ما در این مقاله به روش مشابه، یعنی با استفاده از زیرمجموعه‌ای از ایده‌ال‌های چپ حلقه، دو مفهوم اساسی در نظریه‌ی مدول‌ها را که عبارتند از مفهوم تزریقی بودن و مفهوم تاب‌دار (بی‌تاب) بودن یک مدول تعمیم داده‌ایم. لازم به ذکر است که در سراسر این مقاله همه‌ی حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار و همه‌ی مدول‌ها چپ و یکانی در نظر گرفته می‌شوند. هم‌چنین $\mathcal{L}$ نشان دهنده‌ی زیرمجموعه‌ای از ایده‌آل‌های چپ حلقه است.
در ادامه تعاریف مورد نیاز در دو بخش اصلی را می‌آوریم.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از R را یک ایده‌آل چپ R می‌نامیم و می‌نویسیم $I \trianglelefteq_l R$ هرگاه

۱. برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم $x - y \in I$.
۲. برای هر $x \in I$ و برای هر $r \in R$ داشته باشیم $rx \in I$.

تعریف ۲.۱. R–مدول A را نیم‌ساده می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، زیرمدولی مانند C از A موجود باشد به طوری که $A = B \oplus C$.
حلقه‌ی R را نیم‌ساده‌ی چپ (نیم‌ساده‌ی راست) می‌نامیم، هرگاه به عنوان مدول چپ (راست) روی خودش، نیم‌ساده باشد.

قضیه ۳.۱. (*قضیه‌ی ودربورن*) *فرض کنیم R یک حلقه ی نیم ساده‌ی چپ (راست) باشد . آنگاه حلقه‌های تقسیم D_1، D_2، ...، D_m وجود دارند به طوری که حلقه‌ی R با حلقه‌ی*

$$M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_m}(D_m)$$

یکریخت است .

*سخنران
پست *الکترونیک :* a.r.alehafttan@jsu.ac.ir (علی‌رضا آل‌هفت‌تن)

نتیجه ۴.۱. *یک حلقه نیم‌ساده‌ی چپ است اگر و تنها اگر نیم‌ساده‌ی راست باشد .*

با توجه به نتیجه‌ی قبل، از این پس برای مطالعه‌ی حلقه‌های نیم‌ساده، کافی است حلقه‌های نیم‌ساده‌ی چپ را در نظر بگیریم. بنابراین در ادامه از نوشتن کلمه‌ی چپ پرهیز خواهیم کرد.

قضیه ۵.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ای نیم‌ساده باشد . آنگاه R هم نوتری و هم آرتینی است .*

قضیه ۶.۱. *برای حلقه‌ی R شرایط زیر معادل‌اند .*

۱. *R نیم‌ساده است .*
۲. *هر Rـمدول نیم‌ساده است .*
۳. *هر دنباله‌ی دقیق از Rـمدول‌ها شکافته می‌شود .*
۴. *هر Rـمدول تصویری است .*
۵. *هر Rـمدول تزریقی است .*
۶. *هر ایده‌آل چپ R به صورت Re است که e عضوی خودتوان از R است .*

تعریف ۷.۱. فرض کنیم A یک Rـمدول باشد. زیرمدول B از A را اساسی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر C از A داشته باشیم $B \cap C \neq 0$.

تعریف ۸.۱. حلقه‌ی R را فون‌نیومن می‌نامیم، هرگاه برای هر $r \in R$، وجود داشته باشد $x \in R$ به‌طوری‌که $rxr = r$.

تعریف ۹.۱. Rـمدول A را بخش‌پذیر می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in$ و $r \in R$، در صورتی که $ann_l(r) \subseteq ann(a)$، آنگاه عضوی مانند $b \in A$ موجود باشد، چنانکه $a = rb$.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم A یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. $a \in A$ را یک عنصر تاب‌دار A می‌نامیم، هرگاه $0 \neq r \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $ra = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر تاب‌دار A را با $T(A)$ نمایش می‌دهیم. اگر $T(A) = 0$ ($T(A) = A$)، آنگاه A را مدولی بی‌تاب (تاب‌دار) می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱. Rـمدول A را ضربی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، ایده‌آل I از R موجود باشد، به‌طوری‌که $B = IA$.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم A یک Rـمدول باشد. زیرمدول سره‌ی B از A را اول می‌نامیم، هرگاه به‌ازای $r \in R$ و $a \in A$، از $ra \in B$ نتیجه بگیریم که $a \in B$ یا $rA \subseteq B$.

۲. مدول $\mathcal{L}$ـتزریقی

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک زیرمجموعه از ایده‌آل‌های چپ حلقه‌ی R و A یک Rـمدول باشد. A را $\mathcal{L}$ـتزریقی می‌نامیم، هرگاه برای هر $I \in \mathcal{L}$، هر هم‌ریختی $\varphi : I \longrightarrow A$ قابل توسیع به یک هم‌ریختی از R به‌توی A باشد.

با توجه به تعریف، هر Rـمدول تزریقی یک Rـمدول $\mathcal{L}$ـتزریقی است. اما در ابتدای بخش دوم از [۱] نشان داده شده است که عکس این مطلب در حالتی که R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری باشد برقرار نیست.

گزاره ۲.۲. *بیان‌های زیر برای Rـمدول A معادل هستند :*

۱. *A مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی است .*
۲. *برای هر $I \in \mathcal{L}$ و هر هم‌ریختی $\varphi : I \longrightarrow A$، $a \in A$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $x \in I$، $\varphi(x) = xa$.*

اثبات .

۲ $\Longrightarrow$ ۱: فرض کنیم A مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی، $i : I \hookrightarrow R$ تابع شمول و $\varphi : I \longrightarrow R$ یک هم‌ریختی باشد. پس یک هم‌ریختی مانند $\psi : R \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\varphi = \psi \circ i$. حال قرار می‌دهیم $x = \psi(1)$ و برای هر $x \in I$ داریم

$$\varphi(x) = (\psi \circ i)(x) = \psi(x) = \psi(x1) = x\psi(1) = xa.$$

۱ $\Longrightarrow$ ۲: فرض کنیم $I \in \mathcal{L}$ و $\varphi : I \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد. اگر $a \in A$ موجود باشد چنانکه برای هر $x \in I$، $\varphi(x) = xa$، آنگاه کافی است $\psi : R \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $\psi(r) = ra$ تعریف کنیم. آشکار است که ψ یک هم‌ریختی و توسیعی از φ خواهد بود. یعنی؛ A یک مدول $\mathcal{L}$ـتزریقی است. □

گزاره ۳.۲. *فرض کنیم $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های چپ اساسی حلقه‌ی R و A یک Rـمدول $\mathcal{L}$ـتزریقی باشد. آنگاه A یک Rـمدول تزریقی است، هرگاه برای هر Rـمدول M و هر زیرمدول اساسی از آن مانند N، هر هم‌ریختی $\varphi : N \longrightarrow A$، قابل توسیع به یک هم‌ریختی از M به‌توی A باشد.*

اثبات. فرض کنیم A مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی باشد و $N \leqslant_e M$. حال فرض کنیم $\varphi : N \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی و $i : N \hookrightarrow M$ تابع شمول باشند. T را به‌عنوان مجموعه‌ی همه‌ی توسیع‌های N در نظر می‌گیریم. یعنی؛ قرار می‌دهیم

$$T = \{(C, \lambda) \quad | \quad N \leqslant C \leqslant M, \quad \lambda \text{ توسیعی از } \varphi \text{ است}\}.$$

چون $\varphi \in T$، پس؛ $T \neq \emptyset$. با توجه به لم زورن، T دارای عنصری بیشین مانند (D, ψ) خواهد بود. در ادامه کافی است نشان دهیم $D = M$. فرض خلف می‌کنیم که چنین نباشد. لذا وجود دارد $d \in M \setminus D$. قرار می‌دهیم $I = \{r \in R \quad | \quad rd \in D\}$. اما؛ I یک ایده‌آل چپ اساسی از R است. حال اگر هم‌ریختی $f : I \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $f(x) = \psi(xd)$ در نظر بگیریم، حال با توجه به $\mathcal{L}$ـتزریقی بودن مدول A، وجود دارد $a \in A$ چنان‌که $f(x) = xa = \psi(xd)$. اکنون هم‌ریختی $g : D + Rd \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $g(y + rd) = f(y) + ra$ را تعریف می‌کنیم که توسیعی از ψ است. زیرا؛

$$y + ra = z + sa \Longrightarrow r - s \in I \Longrightarrow f(r - s) = f(r) - f(s) = ra - sa.$$

بنابراین

$$f(r) - f(s) = \psi(rd) - \psi(sd) = \psi(rd - sd) = \psi(z - y) = \psi(z) - \psi(y).$$

از این‌رو

$$\psi(z) - \psi(y) = \psi(ra) - \psi(sa).$$

در نتیجه

$$g(y + ra) = \psi(y) + rd = \psi(z) + sd = \psi(z + sa).$$

که نشان می‌دهد g خوش‌تعریف است. به آسانی دیده می‌شود که g یک هم‌ریختی نیز هست، لذا $(D + Rd, g) \in T$ و این با بیشین بودن (D, ψ) در تناقض است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره‌ی ۳.۲ لزوماً برقرار نیست.

مثال ۴.۲. $\mathbb{Z}_۲$ را به عنوان $\mathbb{Z}_۶$ـمدول در نظر می‌گیریم. ایده‌آل‌های $I = \{\bar{۰}, \bar{۳}\}$ و $J = \{\bar{۰}, \bar{۲}, \bar{۴}\}$ را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $\mathcal{L} = \{I, J\}$. هیچ هم‌ریختی ناصفری از J به‌توی $\mathbb{Z}_۲$ وجود ندارد و تنها هم‌ریختی ناصفر از I به‌توی $\mathbb{Z}_۲$ عبارت است از $f : I \longrightarrow \mathbb{Z}_۲$ با ضابطه‌ی $f(\bar{۰}) = \bar{۰}, f(\bar{۳}) = \bar{۱}$. حال اگر $g : \mathbb{Z}_۶ \longrightarrow \mathbb{Z}_۲$ را با ضابطه‌ی $g(\bar{۰}) = g(\bar{۲}) = g(\bar{۴}) = \bar{۰}, g(\bar{۱}) = g(\bar{۳}) = g(\bar{۵}) = \bar{۱}$ تعریف کنیم، آنگاه g یک هم‌ریختی و توسیعی از f است. بنابراین $\mathbb{Z}_۲$ به عنوان $\mathbb{Z}_۶$ـمدول، تزریقی است. ولی توجه می‌کنیم که I و J در $\mathbb{Z}_۶$ اساسی نیستند.

گزاره ۵.۲. *اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده و A مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی باشد، آنگاه هر زیرمدول A نیز $\mathcal{L}$ـتزریقی است.*

اثبات. فرض کنیم B زیرمدولی از A باشد. چون R نیم‌ساده است، پس؛ A، B و $\frac{A}{B}$، همگی تصویری هستند. از این‌رو دنباله‌ی دقیق $۰ \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{B} \longrightarrow ۰$ شکافته می‌شود. حال هم‌ریختی شمول، یعنی؛ $i : B \hookrightarrow A$ را در نظر بگیریم، آنگاه هم‌ریختی $\varphi : A \longrightarrow B$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\varphi \circ i = id_K$. حال فرض کنیم $I \in \mathcal{L}$ و $f : I \longrightarrow B$ یک هم‌ریختی باشد. اما؛ با توجه به $\mathcal{L}$ـتزریقی بودن A، هم‌ریختی $i \circ f : I \longrightarrow A$ یک توسیع مانند $g : R \longrightarrow A$ خواهد داشت. اکنون قرار می‌دهیم $h = \varphi \circ g$ و $h : R \longrightarrow B$ توسیعی از f خواهد بود. لذا نتیجه می‌شود که B مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی است. □

گزاره ۶.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌ساده و A مدولی $\mathcal{L}$ـتزریقی باشد. آنگاه هر تصویر هم‌ریخت A نیز $\mathcal{L}$ـتزریقی است.*

اثبات. فرض کنیم M یک Rـمدول و $h : A \longrightarrow M$ یک برووریختی باشد. حال اگر I یک ایده‌آل چپ R و متعلق به $\mathcal{L}$ و $f : I \longrightarrow M$ یک هم‌ریختی باشد، آنگاه با توجه به نیم‌ساده بون R، I به عنوان مدول، تصویری است و در نتیجه یک هم‌ریختی مانند $\overline{f} : I \longrightarrow A$ وجود دارد، چنان‌که $f = h \circ \overline{f}$. چون A یک مدول $\mathcal{L}$ـتزریقی است، $\overline{f}$ دارای توسیعی مانند $g : R \longrightarrow A$ خواهد بود و در واقع اگر $i : I \hookrightarrow R$ هم‌ریختی شمول باشد، انگاه $g \circ i = \overline{f}$. حال قرار می‌دهیم $\overline{g} = h \circ g$ و در این صورت

$$\overline{g} \circ i = f \quad \text{و} \quad h \circ g \circ i = h \circ \overline{f} \quad \text{و} \quad g \circ i = h \circ \overline{f}$$

که نتیجه می‌دهد $\overline{g}$ توسیعی از f است و این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۷.۲. *اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده و A مدولی $\mathcal{L}$–تزریقی باشد، آنگاه هر مدول خارج‌قسمتی A نیز $\mathcal{L}$–تزریقی است.*

گزاره ۸.۲. *جمع مستقیم دو مدول $\mathcal{L}$–تزریقی یک مدول $\mathcal{L}$–تزریقی است.*

اثبات. فرض کنیم A_1 و A_2 دو مدول $\mathcal{L}$–تزریقی باشند و $I \in \mathcal{L}$. اگر $f_1 : I \longrightarrow A_1$ و $f_2 : I \longrightarrow A_2$ دو هم‌ریختی باشند، آنگاه داری توسیع‌هایی مانند $\overline{f_1} : R \longrightarrow A_1$ و $\overline{f_2} : R \longrightarrow A_2$ هستند. حال فرض کنیم $\varphi : I \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ یک هم‌ریختی باشد. در این صورت $\pi_1 \circ \varphi : I \longrightarrow A_1$ و $\pi_2 \circ \varphi : I \longrightarrow A_2$ دو هم‌ریختی خواهند بود. اکنون فرض کنیم $\psi_1 : R \longrightarrow A_1$ و $\psi_2 : R \longrightarrow A_2$ توسیع‌های آن‌ها باشند و قرار دهیم $\psi : R \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ به‌طوری‌که $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. آنگاه ψ توسیعی از φ است. □

گزاره ۹.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی فون‌نیومن باشد که هر ایده‌آل چپ آن اصلی است. آنگاه A یک R–مدول $\mathcal{L}$–تزریقی است اگر و تنها اگر بخش‌پذیر باشد.*

اثبات. فرض کنیم A یک R–مدول بخش‌پذیر و $\varphi : Rx \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد که در آن $Rx \in \mathcal{L}$. فرض کنیم $\varphi(x) = y$ و برای هر $r \in R$ داریم

$$rx = 0 \Longrightarrow \varphi(rx) = 0 \Longrightarrow r\varphi(x) = 0 \Longrightarrow ry = 0 \Longrightarrow ann_l(x) \subseteq ann_l(y).$$

پس؛ با توجه به بخش‌پذیر بودن A، وجود دارد $a \in A$، به‌طوری‌که $y = xa$. حال اگر $\psi : R \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $\psi(s) = sa$ تعریف کنیم، آنگاه ψ یک توسیع از φ خواهد بود. در نتیجه A $\mathcal{L}$–تزریقی است. به‌عکس؛ کافی است نشان دهیم $ann_A(ann_l(x)) \subseteq xA$. اگر A مدولی A یک R–مدول $\mathcal{L}$–تزریقی باشد، آنگاه هر هم‌ریختی $f : Rx \longrightarrow A$ دارای توسیعی مانند $g : R \longrightarrow A$ است. اکنون فرض کنیم $a \in xI$، پس؛ وجود دارد $b \in I$، به‌طوری‌که $a = xr$. اما؛

$$ann_l(x)x = 0 \Longrightarrow ann_l(x)xb = 0 \Longrightarrow ann_l(x)a = 0 \Longrightarrow a \in ann(ann_l(x)).$$

و چون $a \in A$، نتیجه می‌گیریم $a \in ann_A(ann_l(x))$. یعنی؛ $xA \subseteq ann_A(ann_l(x))$. حا اگر $y \in ann_A(ann_A(x))$، آنگاه $f : Rx \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $f(rx) = ry$ یک هم‌ریختی است. زیرا؛

$$rx = sx \Longrightarrow (r-s)x = 0 \Longrightarrow r - s \in ann_l(x) \Longrightarrow (r-s)y = 0 \Longrightarrow ry = sy.$$

بنابراین f خوش‌تعریف است و هم‌ریختی بودن نیز به آسانی ثابت می‌شود. از آن‌جا که A $\mathcal{L}$–تزریقی است، f دارای توسیعی مانند $g : R \longrightarrow A$ خواهد بود. اکنون $t = g(1)$ را در نظر می‌گیریم و داریم

$$y = f(x) = g(x) = xg(1) = xv.$$

که نشان می‌دهد $ann_A(ann_l(x)) \subseteq xA$. □

۳. مدول $\mathcal{L}$–تاب‌دار

تعریف ۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه و $\mathcal{L}$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های چپ ناصفر آن و A یک R–مدول باشد. در این صورت $\mathcal{LT}(A)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{LT}(A) = \{a \in A | \quad \exists I \in L; \quad Ia = 0\}.$$

چون $0 \in \mathcal{LT}(A)$، بنابراین $\mathcal{LT}(A) \neq \emptyset$. هم‌چنین اگر $\mathcal{LT}(A) = 0$ باشد، A را $\mathcal{LT}(A)$–بی‌تاب و در صورتی که $\mathcal{LT}(A) = A$، آن را مدولی $\mathcal{LT}(A)$–تاب‌دار می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۳. ۱. اگر برای هر $I, J \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $I \cap J \in \mathcal{L}$، آنگاه $\mathcal{LT}(A)$ یک زیرمدول A است. بویژه اگر $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های چپ R باشد، آنگاه $\mathcal{LT}(A)$ زیرمدولی از A خواهد بود.

۲. هر مدول $\mathcal{L}$–تاب‌دار یک مدول تاب‌دار است اما؛ مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست.

۳. اگر B زیرمدولی از A باشد، آنگاه $\mathcal{LT}(B) = \mathcal{LT}(A) \cap B$. بنابراین هرگاه A یک مدول $\mathcal{LT}(A)$–تاب‌دار ($\mathcal{LT}(A)$–بی‌تاب) باشد، هر زیرمدول آن نیز $\mathcal{LT}(A)$–تاب‌دار ($\mathcal{LT}(A)$–بی‌تاب) خواهد بود.

۴. اگر $f : A \longrightarrow B$ یک هم‌ریختی باشد، آنگاه $f(\mathcal{LT}(A)) \subseteq \mathcal{LT}(B)$.

مثال ۳.۳. برای هر $n \in \mathbb{N} \neq ۱$، $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول تاب‌دار است. اما؛ اگر قرار دهیم $\mathcal{L} = \{m\mathbb{Z}\}$ چنانکه m و n نسبت به هم اول‌اند، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ مدولی $\mathcal{L}$ـتاب‌دار نیست.

گزاره ۴.۳. *فرض کنیم* $۰ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ *یک دنباله‌ی دقیق از* Rـمدول‌ها *باشد. اگر برای ایده‌آل چپ* I *از* R *داشته باشیم* $IB \subseteq f(A)$ *و* $I \in \mathcal{L}$، *آنگاه* C *یک مدول* $\mathcal{L}$ـتاب‌دار *است.*

اثبات. با توجه به مفروضات داریم، $IB \subseteq f(A) = Ker(g)$ و بنابراین $Ig(B) = g(IB) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $g(B)$ زیرمدولی مدولی $\mathcal{L}$ـتاب‌دار است. اما؛ g پوشاست، از این‌رو $C = g(B)$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره‌ی ۴.۳، برقرار نیست.

مثال ۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ناصفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ باشد. اگر قرار دهیم $B = C = \bigoplus_{p \text{ عددی اول است}} \mathbb{Z}_p$، آنگاه C یک $\mathbb{Z}$-مدول $\mathcal{L}$ـتاب‌دار است. حال اگر دنباله‌ی دقیق کوتاه $۰ \longrightarrow ۰ \longrightarrow B \xrightarrow{id} C \longrightarrow ۰$ را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر $I \in \mathcal{L}$، $IB \nsubseteq f(A) = ۰$.

تعریف ۶.۳. Rـمدول A را $\mathcal{L}$ـضربی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، $I \in \mathcal{L}$ موجود باشد، به‌طوری‌که $B = IA$.

گزاره ۷.۳. *فرض کنیم* B *یک مدول* $\mathcal{L}$ـضربی *باشد. اگر دنباله‌ی دقیق کوتاه* $۰ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ *موجود باشد، آنگاه* C *مدولی* $\mathcal{L}$ـتاب‌دار *است.*

اثبات. با توجه به $\mathcal{L}$ـضربی بودن B، وجود دارد $I \in \mathcal{L}$، به‌طوری‌که $f(A) = IB$. پس؛ با توجه به گزاره‌ی ۴.۳، C یک مدول $\mathcal{L}$ـتاب‌دار است. □

بنا به تعاریف ۱.۳ و ۶.۳، اگر A یک مدول $\mathcal{L}$ـضربی باشد، آنگاه برای هر زیرمدول B از آن، $\frac{A}{B}$ مدولی $\mathcal{L}$ـتاب‌دار است.

گزاره ۸.۳. B *یک مدول* $\mathcal{L}$ـبی‌تاب *است اگر و تنها اگر برای هر مدول* $\mathcal{L}$ـتاب‌دار *مانند* A، $Hom(A, B) = ۰$.

اثبات. فرض کنیم B یک مدول $\mathcal{L}$ـبی‌تاب باشد. اگر A مدولی $\mathcal{L}$ـتاب‌دار و $f : B \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی باشد، آنگاه $f(A) = f(\mathcal{L}T(A)) \subseteq \mathcal{L}T(B) = ۰$، لذا $f = ۰$. به‌عکس؛ فرض کنیم برای هر Rـمدول $\mathcal{L}$ـتاب‌دار، $Hom(A, B) = ۰$. چون $L\mathcal{L}(B)$ یک مدول $\mathcal{L}$ـتابدار است، پس؛ $Hom(\mathcal{L}T(B), B) = ۰$. حال اگر هم‌ریختی شمول $i : \mathcal{L}T(B) \longrightarrow B$ را در نظر بگیریم، $i \in Hom(\mathcal{L}T(B), B)$ و در نتیجه $\mathcal{L}T(B) = i(\mathcal{L}T(B)) = ۰$. یعنی؛ B مدولی $\mathcal{L}$ـبی‌تاب است. □

با توجه به گزاره‌ی ۸.۳ و این حقیقت که اگر $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌ها باشد و برای هر $i \in I$، داشته باشیم $Hom(A, M_i) = ۰$، آنگاه $Hom(A, \prod_{i \in I} M_i) = ۰$، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۹.۳. *اگر* $\{B_i\}_{i \in I}$ *یک خانواده از* Rـمدول‌های $\mathcal{L}$ـبی‌تاب *باشد، آنگاه* $\prod_{i \in I} B_i$ نیز Rـمدولی $\mathcal{L}$ـبی‌تاب *است.*

چون $\bigoplus_{i \in I} B_i$ را می‌توان به عنوان زیرمدولی از $\prod_{i \in I} B_i$ در نظر گرفت، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۱۰.۳. *اگر* $\{B_i\}_{i \in I}$ *یک خانواده از* Rـمدول‌های $\mathcal{L}$ـبی‌تاب *باشد، آنگاه* $\bigoplus_{i \in I} B_i$ نیز Rـمدولی $\mathcal{L}$ـبی‌تاب *است.*

گزاره ۱۱.۳. *فرض کنیم* A *یک مدول و* $\mathcal{L}T(A)$ *یک زیرمدول سره از آن باشد. آنگاه* $\mathcal{L}T(A)$ *یک زیرمدول اول از* A *است.*

اثبات. فرض کنیم $ra \in A \setminus \mathcal{L}T(A)$ و $a \notin \mathcal{L}T(A)$. دراین صورت وجود دارد $I \in \mathcal{L} \neq ۰$، به‌طوری‌که $Ira = ۰$ و چون $a \notin \mathcal{L}T(A)$، پس؛ $Ir = ۰$. در نتیجه $I(rA) = ۰$، یعنی؛ $rA \subseteq \mathcal{L}T(A)$. بنابراین $\mathcal{L}T(A)$ زیرمدولی اول از A است. □

گزاره ۱۲.۳. *فرض کنیم* $A = \bigoplus_{i \in I}(A_i)$. *اگر* $\mathcal{L}T(A) \neq ۰$، *آنگاه برای هر* $i \in I$، $\mathcal{L}T(A_i) \neq ۰$ *و بویژه* $\mathcal{L}T(\bigoplus_{i \in I} A_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}T(A_i)$.

اثبات. اگر $\mathcal{L}T(A) \neq ۰$ آنگاه با توجه به ملاحظه‌ی ۲.۳ (بند ۳)، برای هر $i \in I$، $\mathcal{L}T(A_i) \neq ۰$. از این‌رو $\mathcal{L}T(A_i) \subseteq \mathcal{L}T(A)$ و در نتیجه $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}T(A_i) \subseteq \mathcal{L}T(\bigoplus_{i \in I} A_i)$. حال فرض کنیم $a \in \mathcal{L}T(\bigoplus_{i \in I} A_i)$. لذا وجود دارد $J \in \mathcal{L}$ چنانکه $Ja = ۰$. اما $a \in A$، پس؛ $a = a_{i_۱} + a_{i_۲} + \cdots + a_{i_n}$ که در آن برای هر $۱ \leqslant t \leqslant n$، $a_{i_t} \in A_{i_t}$. بنابراین

$$۰ = Ja = J(a_{i_۱} + a_{i_۲} + \cdots + a_{i_n}) = Ja_{i_۱} + Ja_{i_۲} + \cdots + Ja_{i_n}.$$

پس؛ برای هر $1 \leqslant t \leqslant n$، $Ja_{i_t} = 0$ که نتیجه می‌دهید برای هر $1 \leqslant t \leqslant n$، $a_{i_t} \in \mathcal{LT}(A_{i_t})$. لذا $\mathcal{LT}(\bigoplus_{i\in I} A_i) \subseteq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{LT}(A_i)$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره‌ی ۱۲.۳، برقرار نیست.

مثال ۱۳.۳. اگر حلقه‌ی $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ و مدول‌های $A = \mathbb{Z}_2 \oplus 0$ و $B = 0 \oplus \mathbb{Z}_2$ را روی آن در نظر بگیریم و قرار دهیم $\mathcal{L} = \{R\}$، آن‌گاه $\mathcal{LT}(A) = A$ و $\mathcal{LT}(B) = B$، اما؛ $\mathcal{LT}(A \oplus B) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$ که زیرمدولی از $A \oplus B$ نیست.

مراجع

[1] P.F. Smith, Injective modules and prime ideals, Comm. Algebra. **9** (1981) 989-999.
[2] K. R. Goodearl, R. B. Warfield, (1989). An Introduction to Non-Commutative Noetherian Rings. London Math. Soc., Vol. 16. Cambridge: Cambridge University Press
[3] K.R. Goodearl, Ring theory, nonsingular rings and modules, Marcel Dekker, New York and Basel, 1976.
[4] F. Kasch, Modules and rings , Academic press , London , 1982 .
[5] A. Tercan, C. Yucel, Module theory. extending modules and generalizations, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–115، صص. ۴۵–۵۱

ارتباط T–نرم‌ها و فازی کردن حاصلضرب مستقیم گروه‌ها

رسول رسولی[آ]، سی‌به‌رقادری*[ب]

[آ]استادیار ریاضی، دانشگاه پیام نور
[ب]هیات علمی ریاضی، دانشگاه پیام نور

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
نظریه گروهها
نرم ها
نظریه مجموعه هاي فازي
زیرگروههاي نرمال
اشتراك
حاصلضرب دکارتي

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
18B40
03BXX
03B 52
20D35
05C62

چکیده

در این مقاله زیرگروه‌های فازی را روی حاصلضرب مستقیم گروه‌ها را بررسی می‌کنیم، T–نرم‌ها را روی آن‌ها اعمال می‌کنیم و تعریف می‌کنیم. خصوصیات بارز آن‌ها را بیان می‌کنیم و نتایج مهمی را ثابت می‌کنیم. نرمال بودن بین آن‌ها را مطرح می‌کنیم و مفهوم اشتراک را روی آن‌ها بیان می‌کنیم. در نهایت تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها را با توجه به همریختی گروه‌ها بررسی می‌کنیم و نتایج اصلی را بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

نظریه گروه‌ها[1] در ریاضیات و جبر مجرد به مطالعه ساختارهای جبری به نام گروه‌ها می‌پردازد به طوری‌که حلقه‌ها، میدان‌ها و فضاهای برداری همگی به صورت گروه‌هایی هستند که دارای عملیات و اصول موضوعه بیشتری هستند. تاریخچه نظریه گروه‌ها از قرن ۱۹ میلادی شروع شده و یکی از مهم‌ترین دستاوردهای ریاضیات سده‌ی ۲۰ میلادی است. مجموعه‌های فازی[2] از تعمیم نظریه کلاسیک مجموعه‌ها به دست می‌آید که برای اولین بار توسط لطفی‌زاده [۱۷] در سال ۱۹۶۵ مطرح شد و ایشان به این نکته اشاره دارند که ما نیازمند یک نوع دیگری از ریاضیات هستیم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدل‌سازی کنیم، مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات است.
ریاضیات فازی در بسیاری از گرایش‌های ریاضی مانند جبر، آنالیز، هندسه و توپولوژي‌ورود پیدا کرده است. مفهوم گروه‌های فازی برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط رونسفلد [۱۶] بیان گردید. در ادامه فعالیت‌های زیادی در زمینه‌های نیم‌گروه‌های فازی و حلقه‌های فازی [۱، ۲، ۴، ۵، ۱۸] صورت گرفت.

*سخنران
پست الکترونیک : Rasuli@pnu.ac.ir (رسول رسولی)، ghaderi_s@pnu.ac.ir (سی‌به‌رقادری)

[1]Group Theory
[2]Fuzzy Set

در سال ۱۹۷۹ آنتونی و شروود [۲۰] برای اولین‌بار T–نرم‌ها را روی گروه‌های فازی اعمال کردند و نتایج مهمی را بدست آوردند. مولف اول مقاله در تحقیقات قبلی خود اثر T–نرم‌ها را روی مفاهیم فازی جبری کلاسیک بررسی کرده است. [۷، ۹، ۱۲–۱۵، ۱۹]
در این مقاله ما از T–نرم‌ها کمک می‌گیریم و آن‌ها را روی فازی کردن حاصلضرب مستقیم گروه‌ها اعمال می‌کنیم. خصوصیات مهم و اساسی آن‌ها را اثبات می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که نسبت به خاصیت اشتراک بسته هستند. ثابت می‌کنیم که تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها نسبت به همریختی گروه‌ها همچنان زیرگروه فازی خواهد بود. در ادامه نرمال بودن آن‌ها را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اشتراک هر چه تعداد از زیرگروه‌های فازی نرمال همچنان فازی نرمال خواهد بود. همریختی گروه‌ها را روی آن‌ها اعمال می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تصویر و پیش‌تصویر آن‌ها همچنان فازی نرمال می‌باشد.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش تعاریف و قضیه‌هایی که در این مقاله از آن‌ها استفاده شده است را می‌آوریم، برای جزئیات بیشتر علاقه‌مندان می‌توانند به منابع [۳، ۶، ۸، ۱۰، ۱۱، ۲۱] مراجعه کنند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک مجموعه غیرتهی باشد و $*$ یک عمل دوتایی روی G باشد. در این صورت می‌گوییم $(G,*)$ یک گروه است اگر:

۱. G نسبت به عمل $*$ بسته باشد یعنی برای هر $a,b\in G$ شرط $a*b\in G$ برقرار باشد.
۲. عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد، برای هر $a,b,c\in G$ شرط $(a*b)*c=a*(b*c)$ برقرار باشد.
۳. برای هر $a\in G$ عنصر $e\in G$ (عنصر خنثی یا همانی) موجود باشد به طوری‌که $a*e=e*a=a$ برقرار باشد.
۴. G عنصر معکوس یا وارون داشته باشد یعنی برای هر $a\in G$ عنصر $b\in G$ موجود باشد به طوری‌که $a*b=e$ و $b*a=e$ معکوس a را با a^{-1} نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\emptyset\neq H\subseteq G$ یک زیرمجموعه باشد. اگر H نسبت به عمل دوتایی گروه G خودش یک گروه باشد، آنگاه H یک زیرگروه G است.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(G,*)$ و $(H,\star)$ دو گروه باشند و $f:G\to H$ یک تابع باشد. می‌گوییم f یک همریختی است اگر برای هر $a,b\in G$ شرط

$$f(a*b)=f(a)\star f(b)$$

برقرار باشد.

تعریف ۴.۲. فرض کنید H یک زیرگروه G باشد. می‌گوییم H در G نرمال است اگر برای هر $g\in G$ و هر $h\in H$ شرط $ghg^{-1}\in H$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $(G,*)$ و $(H,\star)$ دو گروه باشند. تعریف می‌کنیم $G\times H=\{(g,h)|\ g\in G,h\in H\}$. حال می‌خواهیم گروه حاصلضربی $(G\times H,.)$ را به صورت زیر بسازیم:
برای هر $g_i\in G$ و $h_i\in H$ که $i=1,2$:

۱. تعریف می‌کنیم $(g_1,h_1).(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\star h_2)$.
۲. عضو خنثی یا همانی $G\times H$ به صورت (e_G,e_H) است.
۳. معکوس (g_1,h_1) به صورت $(g_1,h_1)^{-1}=(g_1^{-1},h_1^{-1})$ می‌باشد.

نکته: در سراسر این مقاله به عمل گروه اشاره نمی‌کنیم و منظورمان از گروه G همان گروه $(G,*)$ است.

تعریف ۶.۲. فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه دلخواه با عضو همانی e_1 و e_2 باشند. منظور از زیرمجموعه فازی از $G_1\times G_2$ تابعی به صورت $\mu:G_1\times G_2\to[0,1]$ می‌باشد.
مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های فازی از $G_1\times G_2$ را با نماد $[0,1]^{G_1\times G_2}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲. منظور از t–نرم T تابعی به صورت $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ است که برای هر $x,y,z\in[0,1]$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $T(x,1)=x$.
۲. اگر $y\leq z$ آنگاه $T(x,y)\leq T(x,z)$.
۳. $T(x,y)=T(y,x)$.
۴. $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$.

می‌گوییم T خودتوان است اگر $T(x,x)=x$.

مثال ۸.۲. موارد زیر همگی مثال‌هایی از tـنرم هستند که

۱. $T_m(x,y)=\min\{x,y\}$.
۲. $T_b(x,y)=\max\{۰,x+y-۱\}$.
۳. $T_p(x,y)=xy$.

لم ۹.۲. *فرض کنید T یک tـنرم باشد، در این صورت برای هر $x,y,z,w\in[۰,۱]$ شرط*

$$T\big(T(x,y),T(w,z)\big)=T\big(T(x,w),T(y,z)\big)$$

برقرار است .

۳. نتایج اصلی

تعریف ۱.۳. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گروه باشند و $\mu:G_۱\times G_۲\to[۰,۱]$ یک تابع فازی باشد. می‌گوییم μ یک زیرگروه فازی متناسب با tـنرم T است اگه دو شرط زیر برای هر $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)\in G_۱\times G_۲$ برقرار باشند:

۱. $\mu\big((x_۱,y_۱)(x_۲,y_۲)\big)\geq T\big(\mu(x_۱,y_۱),\mu(x_۲,y_۲)\big)$.
۲. $\mu(x_۱,y_۱)^{-۱}\geq\mu(x_۱,y_۱)$

در سراسر این مقاله مجموعه زیرگروه‌های فازی $G_۱\times G_۲$ متناسب با tـنرم T را با $TF(G_۱\times G_۲)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۳. فرض کنید $\mathbb{Z}_۲=\{\bar{۰},\bar{۱}\}$ و $\mathbb{Z}_۳=\{\bar{۰},\bar{۱},\bar{۲}\}$ دو گروه باشند. در این صورت

$$\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳=\{(\bar{۰},\bar{۰}),(\bar{۰},\bar{۱}),(\bar{۰},\bar{۲}),(\bar{۱},\bar{۰}),(\bar{۱},\bar{۱}),(\bar{۱},\bar{۲})\}$$

و اگر تعریف کنیم $\mu:\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳\to[۰,۱]$

$$\mu(x,y)=\begin{cases}۰/۸ & \text{اگر } (x,y)=(\bar{۰},\bar{۰})\\ ۰/۷ & \text{اگر } (x,y)=(\bar{۱},\bar{۰})\\ ۰/۶ & \text{اگر } (x,y)=(\bar{۰},\bar{۲}),(\bar{۰},\bar{۱})\\ ۰/۵ & \text{اگر } (x,y)=(\bar{۱},\bar{۱}),(\bar{۱},\bar{۲})\end{cases}$$

و اگر قرار دهیم

$$T(a,b)=\max\{۰,a+b-۱\}$$

برای هر $(a,b)\in[۰,۱]\times[۰,۱]$ در این صورت $\mu\in TF(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۳)$. حال می‌خواهیم مفاهیم اولیه از $TF(G_۱\times G_۲)$ را بیان کنیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\mu_۱,\mu_۲\in TF(G_۱\times G_۲)$ و $(x,y)\in G_۱\times G_۲$.

۱. می‌گوییم $\mu_۱\subseteq\mu_۲$ اگر $\mu_۱(x,y)\leq\mu_۲(x,y)$.
۲. می‌گوییم $\mu_۱=\mu_۲$ اگر $\mu_۱(x,y)=\mu_۲(x,y)$.
۳. اشتراک $\mu_۱$ و $\mu_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$[\mu_۱\cap\mu_۲:G_۱\times G_۲\to[۰,۱]$ که در آن $(\mu_۱\cap\mu_۲)(x,y)=T(\mu_۱(x,y),\mu_۲(x,y))$.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $\mu_۱,\mu_۲\in TF(G_۱\times G_۲)$، در این صورت $(\mu_۱\cap\mu_۲)\in TF(G_۱\times G_۲)$*

در واقع این قضیه بیان می‌کند که اشتراک هر دو عضو از $TF(G_۱\times G_۲)$ همچنان $TF(G_۱\times G_۲)$ است.
نکته: می‌توان نتیجه گرفت که قضیه ۴.۳ برای اشتراک هر تعداد متناهی هم برقرار است.

مثال ۵.۳. فرض کنید $\mathbb{Z}_۳ = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}\}$ یک گروه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mu_۱, \mu_۲ : \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳ \to [۰, ۱]$$

به طوری که

$$\mu_۱(x,y) = \begin{cases} ۰/۹ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۰}) \\ ۰/۸ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۱}), (\overline{۰}, \overline{۲}) \\ ۰/۷ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۰}), (\overline{۱}, \overline{۱}), (\overline{۲}, \overline{۲}) \\ ۰/۶ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۲}), (\overline{۲}, \overline{۰}), (\overline{۲}, \overline{۱}) \end{cases}$$

$$\mu_۲ : \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳ \to [۰, ۱]$$

به طوری که

$$\mu_۲(x,y) = \begin{cases} ۰/۶ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۰}) \\ ۰/۴ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۱}), (\overline{۲}, \overline{۲}) \\ ۰/۵ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۱}), (\overline{۰}\overline{۲}) \\ ۰/۳ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۰}), (\overline{۱۲}) \\ ۰/۲ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۲}, \overline{۱}), (\overline{۲}\overline{۰}) \end{cases}$$

حال تعریف می‌کنیم $T : [۰,۱] \times [۰,۱] \to [۰,۱]$ به صورت $T(a,b) = T_p(a,b) = ab$. برای هر $a, b \in [۰,۱]$ در این صورت $\mu_۱, \mu_۲ \in TF(G_۱ \times G_۲)$. همچنین تعریف می‌کنیم $\mu_۱ \cap \mu_۲ : G_۱ \times G_۲ \to [۰,۱]$ که در آن

$$\begin{aligned}(\mu_۱ \cap \mu_۲)(x,y) &= T_p\big(\mu_۱(x,y), \mu_۲(x,y)\big) \\ &= \mu_۱(x,y)\mu_۲(x,y) \\ &= \begin{cases} ۰/۵۴ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۰}) \\ ۰/۴ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۰}, \overline{۱}), (\overline{۰}, \overline{۲}) \\ ۰/۲۱ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۰}) \\ ۰/۲۸ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۱}), (\overline{۲}, \overline{۲}) \\ ۰/۱۸ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۱}, \overline{۲}) \\ ۰/۱۲ & \text{اگر } (x,y) = (\overline{۲}, \overline{۰}), (\overline{۲}, \overline{۱}) \end{cases}\end{aligned}$$

در این صورت $\mu_۱ \cap \mu_۲ \in TF(\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳)$.

نکته: در لم زیر تحت شرایط خاص تعریف $TF(G_۱ \times G_۲)$ را مجددا بررسی می‌کنیم.

لم ۶.۳. *فرض کنید $\mu \in [۰,۱]^{G_۱ \times G_۲}$ و T یک t–نرم خودتوان و $G_۱ \times G_۲$ یک گروه متناهی باشد. در این صورت اگر $\mu \in TF(G_۱ \times G_۲)$ آنگاه $\mu\big((x_۱,y_۱)(x_۲,y_۲)\big) \geq T\big(\mu(x_۱,y_۱), \mu(x_۲,y_۲)\big)$ به طوری که $(x_۱,y_۱), (x_۲,y_۲) \in G_۱ \times G_۲$.*

لم ۷.۳. *فرض کنید $\mu \in TF(G_۱ \times G_۲)$ و T یک t–نرم خودتوان باشد در این صورت موارد زیر برقرار هستند:*

۱. $\mu(e_۱, e_۲) \geq \mu(x,y)$ *برای هر* $(x,y) \in G_۱, G_۲$.
۲. $\mu(x,y)^n \geq \mu(x,y)$ *برای هر* $(x,y) \in G_۱ \times G_۲$ *و هر* n *عدد طبیعی.*
۳. $\mu(x,y) = \mu(x,y)^{-۱}$ *برای هر* $(x,y) \in G_۱ \times G_۲$.

نکته: در قضیه زیر ارزش عضوهای همانی و تاثیر آن‌ها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید $\mu \in TF(G_۱ \times G_۲)$ و $(x_۱,y_۱) \in G_۱ \times G_۲$. اگر T خودتوان باشد. در این صورت $\mu\big((x_۱,y_۱), (x_۲,y_۲)\big) = \mu(x_۲,y_۲)$ اگر و فقط اگر $\mu(x_۱,y_۱) = \mu(e_۱,e_۲)$ برای هر $(x_۲,y_۲) \in G_۱ \times G_۲$ برقرار است.*

توجه: در ادامه می‌خواهیم نرمال بودن $TF(G_۱ \times G_۲)$ را بیان کنیم.

تعریف ۹.۳. فرض کنید $\mu \in TF(G_1 \times G_2)$ می‌گوییم μ نرمال است اگر برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \times G_2$ رابطه

$$\mu\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_1, y_1)^{-1}\big) = \mu(x_2, y_2)$$

برقرار باشد. مجموعه همه زیرگروه‌های نرمال $TF(G_1 \times G_2)$ را با $NTF(G_1 \times G_2)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۰.۳. فرض کنید $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ و $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ در این صورت اگر تعریف کنیم $\mu : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to [0, 1]$

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0.75 & \text{اگر } (x, y) = (\bar{0}, \bar{0}) \\ 0.65 & \text{اگر } (x, y) = (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}) \\ 0.53 & \text{اگر } (x, y) = (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}) \\ 0.47 & \text{اگر } (x, y) = (\bar{1}, \bar{2}) \end{cases}$$

و برای هر $a, b \in [0, 1]$ اگر $T(a, b) = T_p(a, b) = ab$، آنگاه $\mu \in NTF(G_1 \times G_2)$.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید $G_1 \times G_2$ و $H_1 \times H_2$ دو گروه باشند و $\phi : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ یک همریختی بین گروه‌ها باشد. فرض کنید $\mu \in [0, 1]^{G_1 \times G_2}$ و $\nu \in [0, 1]^{H_1 \times H_2}$. می‌خواهیم تاثیر ϕ را روی μ بیان کنیم:

$$\phi(\mu) : H_1 \times H_2 \to [0, 1]$$
$$\phi(\mu)(h_1, h_2) = \sup\{\mu(g_1, g_2) | \phi(g_1, g_2) = (h_1, h_2)\}$$

و پیش‌تصویر ν تحت ϕ به صورت زیر است.

$$\phi^{-1}(\nu) : G_1 \times G_2 \to [0, 1]$$
$$\phi^{-1}(\nu)(g_1, g_2) = \nu\big(\phi(g_1, g_2)\big)$$

به طوری که $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ و $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$.

نکته: حال تاثیرات $\phi : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ را روی $TF(G_1 \times G_2)$ و $NTF(G_1 \times G_2)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۳. *فرض کنید $\phi : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ یک همریختی پوشا بین گروه‌ها باشد، در این صورت موارد زیر برقرار هستند.*

۱. *اگر $\mu \in TF(G_1 \times G_2)$ آنگاه $\phi(\mu) \in TF(H_1 \times H_2)$.*
۲. *اگر $\nu \in TF(H_1 \times H_2)$ آنگاه $\phi^{-1}(\nu) \in TF(G_1 \times G_2)$.*
۳. *اگر $\mu \in NTF(G_1 \times G_2)$ آنگاه $\phi(\mu) \in NTF(H_1 \times H_2)$.*
۴. *اگر $\nu \in NTF(H_1 \times H_2)$ آنگاه $\phi^{-1}(\nu) \in NTF(G_1 \times G_2)$.*

توجه: در قضیه زیر بیان می‌کنیم که اشتراک هر دو عضو از $NTF(G_1 \times G_2)$ همچنان عضوی از $NTF(G_1 \times G_2)$ است .

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنید $\mu_1, \mu_2 \in NTF(G_1 \times G_2)$ در این صورت $\mu_1 \cap \mu_2 \in NTF(G_1 \times G_2)$.*

توجه شود که این قضیه برای هر تعداد متناهی هم برقرار است.

توجه: حال می‌خواهیم نرمال بودن را بین اعضای $TF(G_1 \times G_2)$ بیان کنیم.

تعریف ۱۴.۳. فرض کنید $\mu, \nu \in TF(G_1 \times G_2)$ و $\mu \subseteq \nu$. می‌گوییم μ در ν نرمال است و با نماد $\mu \ltimes \nu$ نشان می‌دهیم اگر رابطه

$$\mu\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_1, y_1)^{-1}\big) \geq T\big(\mu(x_2, y_2), \nu(x_1, y_1)\big)$$

برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \times G_2$ برقرار باشد.

قضیه ۱۵.۳. ۱. *فرض کنید T یک t–نرم خودتوان باشد، در این صورت هر عضو $TF(G_1 \times G_2)$ در خودش نرمال است، یعنی اگر $\mu \in TF(G_1 \times G_2)$ آنگاه $\mu \ltimes \mu$.*

۲. *فرض کنید* $\mu \in TF(G_1 \times G_2)$ *در این صورت* $\mu \in NTF(G_1 \times G_2)$ *اگر و فقط اگر* $\mu \propto 1_{G_1 \times G_2}$. *که در آن*

$$1_{G_1 \times G_2} : G_1 \times G_2 \to [0,1]$$
$$1_{G_1 \times G_2}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (x,y) \in G_1 \times G_2 \\ 0 & \text{اگر } (x,y) \notin G_1 \times G_2 \end{cases}$$

مثال ۱۶.۳. فرض کنید $G_1 = G_2 = \{1, -1\}$ یک گروه ضربی باشد و

$$\mu : G_1 \times G_2 \to [0,1]$$
$$\mu(x,y) = \begin{cases} 0.7 & \text{اگر } (x,y) = (1,1), (-1,-1) \\ 0.6 & \text{اگر } (x,y) = (1,-1), (-1,1) \end{cases}$$

و

$$T(a,b) = T_m(a,b) = \min\{a,b\}$$

به طوری که $a, b \in [0,1]$ در این صورت $\mu \propto \mu$. هم‌چنین $\mu \in NTF(G_1 \times G_2)$ اگر و فقط اگر $\mu \propto 1_{G_1 \times G_2}$.

قضیه ۱۷.۳. *فرض کنید* T *یک* t*–نرم خودتوان باشد و* $\mu_1, \mu_2, \nu \in TF(G_1 \times G_2)$. *اگر* $\mu_1, \mu_2 \propto \nu$ *آنگاه* $\mu_1 \cap \mu_2 \propto \nu$.

توجه: قضیه فوق برای هر تعداد متناهی و دلخواه برقرار است.

مثال ۱۸.۳. فرض کنید $G_1 = \{1, -1\}$ و $G_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ و تعریف می‌کنیم $\mu_1, \mu_2, \nu : G_1 \times G_2 \to [0,1]$ به صورت زیر

$$\mu_1(x,y) = \begin{cases} 0.9 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{0}) \\ 0.8 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{1}) \\ 0.7 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{0}) \\ 0.6 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{1}) \end{cases},$$

$$\mu_2(x,y) = \begin{cases} 0.6 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{0}) \\ 0.5 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{1}) \\ 0.4 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{0}) \\ 0.3 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{1}) \end{cases}$$

و همچنین

$$\nu(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{0}) \\ 0.4 & \text{اگر } (x,y) = (1,\bar{1}) \\ 0.3 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{0}) \\ 0.2 & \text{اگر } (x,y) = (-1,\bar{1}) \end{cases}$$

حال اگر $T(a,b) = T_p(a,b) = ab$ برای هر $a, b \in [0,1]$ آنگاه $\mu_1 \cap \mu_2 \propto \nu$ و $\nu \propto \mu_1, \mu_2$.

قضیه ۱۹.۳. *فرض کنید* T *یک* t*–نرم خودتوان باشد. اگر* $\mu \in NTF(G_1 \times G_2)$ *و* $\nu \in TF(G_1 \times G_2)$ *آنگاه* $\mu \cap \nu \propto \nu$.

نکته: در ادامه می‌خواهیم بحث همریختی گروه‌ها را نسبت به خاصیت نرمال بودن مطرح کنیم.

قضیه ۲۰.۳. *فرض کنید* $\phi : G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$ *یک همریختی گروه‌ها باشد.*

۱. *فرض کنید* $\mu, \nu \in TF(G_1 \times G_2)$ *و* $\mu \propto \nu$ *آنگاه* $\phi(\mu) \propto \phi(\nu)$.
۲. *فرض کنید* $\mu, \nu \in TF(H_1 \times H_2)$ *و* $\mu \propto \nu$ *آنگاه* $\phi^{-1}(\mu) \propto \phi^{-1}(\nu)$.

۴. نتیجه‌گیری و مساله باز

در این مقاله ما روی حاصلضرب گروه‌های G_1 و G_2 یعنی $G_1 \times G_2$ زیرگروه‌های فازی متناسب با t–نرم‌ها، مطالبی را بیان و ثابت کردیم. حال علاقه‌مندان می‌توانند تمامی مواردی که ما بیان کردیم در مورد حاصلضرب R–مدول‌های M_1 و M_2 یعنی $M_1 \times M_2$ بیان کنند و این می‌تواند یک مساله باز برای علاقه‌مندان باشد.

مراجع

[1] J. Ahsan, R. M. Latif and M. Shabir. Fuzzy quasi-ideals in semigroups. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(2):259–270, 01 2001.

[2] J. M. Anthony and H. Sherwood. Fuzzy groups redefined. *Journal of mathematical analysis and applications*, 69(1):124–130, 1979.

[3] F. Feng, Y. B. Jun and X. Z. Zhao. Soft semirings. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(10):2621–2628, 2008.

[4] D. S. Malik and J. S. Mordeson. *Fuzzy commutative algebra*. World Scientific, 1998.

[5] J. N. Mordeson, D. S. Malik and N. Kuroki. *Fuzzy Semigroups*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2003. ISBN 9783540032434. URL https://books.google.com/books?id=OvUOrIyjuksC.

[6] J. N. Mordeson, K. R. Bhutani and A. Rosenfeld. *Fuzzy Group Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 9783540323952. URL https://books.google.com/books?id=zBp6CwAAQBAJ.

[7] R. Rasuli. T-fuzzy subalgebras of bci-algebras. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 16(1):55–72, 2023.

[8] R. Rasuli, A. Shomali and H. Naraghi. (m,n)-fuzzy subrings with respect to a t-norm t. National Mathematics Conference of Payame Noor university, 16–17 October, Yazd, Iran, 2024.

[9] R. Rasuli, A. Shomali and H. Naraghi. Q-intuitionistic fuzzy(subrings and ideals) according to norms. National Mathematics Conference of Payame Noor university, 16–17 October, Yazd, Iran, 2024.

[10] R. Rasuli. Norms over q-intuitionistic fuzzy subgroups of a group. *Notes on intuitionistic fuzzy sets*, 29(1):30–45, 2023.

[11] R. Rasuli. Intuitionistic fuzzy complex subgroups with respect to norms (t, s). *Journal of fuzzy extension and applications*, 4(2):92–114, 2023.

[12] R. Rasuli. Fuzzy ideals of bci-algebras with respect to t-norm. *Mathematical Analysis and its Contemporary Applications*, 5(2):39–59, 2023.

[13] R. Rasuli. Complex fuzzy lie subalgebras and complex fuzzy ideals under t-norms. *Journal of fuzzy extension and applications*, 4(3):173–187, 2023.

[14] R. Rasuli. T-norms over complex fuzzy subgroups. *Mathematical Analysis and its Contemporary Applications*, 5(1):33–49, 2023.

[15] R. Rasuli. Normalization, commutativity and centralization of tfsm (g). *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 26 (4):1027–1050, 2023.

[16] R. Rasuli. Normality and translation of ifs (g× q) under norms. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 29(2):114–132, 2023.

[17] R. Rasuli, M. M. Motamedi Nezhad and L. M. Dizaj Herik. Conjugates, middle cosets and generalized characteristics of qfst(g). in *Iranian Conference on Fuzzy Systems*, 2024. URL https://civilica.com/doc/2040085.

[18] A. Rosenfeld. Fuzzy groups. *Journal of mathematical analysis and applications*, 35(3):512–517, 1971.

[19] M. Shabir and M. I. Ali. Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups. *New Mathematics and Natural Computation*, 5(03):599–615, 2009.

[20] Y. Cheng-Fu . Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(2):255–261, 2011.

[21] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, pages 338–353, 1965.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–130، صص. ۵۲–۵۸

برخی خواص مشتق در جبرهای هوپ

علی معدنشکاف*[آ]، محمد مهدی معتمدی نژاد[ب]

[آ] عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان
[ب] دانشجوی دکتری دانشگاه سمنان و عضو هیات علمی دانشگاه جامع علمی کاربردی

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
جبرهای هوپ ۱
مشتق ضربی ۲
ریشه دوم ۳

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله، ضمن معرفی مشتقات ضربی، برخی ویژگی های این مشتقات را بررسی و خصوصیاتی از مشتقات ضربی را در جبرهای هوپ ارائه می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم مجموعه مشتقات ضربی بر جبرهای هوپ، تحت شرایطی، تشکیل مشبکه توزیع پذیر می‌دهند.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۶۹ بوسباخ رده‌ای از جبرهای منطقی را معرفی و خاصیت‌هایی از آنها را ارائه نمود [۳، ۴]. بوچی و اونز [۵] در اواسط دهه هفتاد، جبرهایی که دارای خاصیت جابجایی در این رده معادله ای بودند را جبرهای هوپ نامگذاری کردند. طی حدود بیش از ۵۰ سال گذشته، دانشمندان و محققان بسیاری درخصوص ویژگی‌های این جبرها مطالعه نموده و مقالات زیادی منتشر شده است. در این بخش، برخی خصوصیات جبرهای هوپ که در ادامه این پژوهش مورد نیاز است ارائه شده است. در بخش دوم، ضمن بررسی مفهوم مشتق بر جبرهای هوپ، برخی ویژگی های آن بر جبرهای هوپ مورد بررسی قرار گرفته است.

تعریف ۱.۱. [۷] جبر هوپ [۱] ساختار $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ از نوع $(2,2,0)$ است بطوری‌که:
$H1$. $(H;\odot,1)$ تکواره جابجایی با عضو همانی باشد،
$H2$. $x\longrightarrow x=1$ برای هر $x\in H$
$H3$. $x\odot(x\longrightarrow y)=y\odot(y\longrightarrow x)$ برای هر $x,y\in H$
$H4$. $(x\odot y)\longrightarrow z=x\longrightarrow(y\longrightarrow z)$ برای هر $x,y,z\in H$.

تعریف ۲.۱.

۱. در جبر هوپ H، تعریف می‌کنیم:

$$x\leq y \text{ اگر تنها و اگر } x\longrightarrow y=1$$

به راحتی قابل بررسی است که $\leq$ رابطه ترتیب جزئی روی H است.

*محمد مهدی معتمدی نژاد
پست الکترونیک : amadanshekaf@semnan.ac.ir (علی معدنشکاف)، motamedinezhad@semnan.ac.ir (محمد مهدی معتمدی نژاد)

[1] Hoop algebra

۲. جبر هوپ کراندار، جبر $(H;\odot,\longrightarrow,0,1)$ است بطوریکه $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ جبر هوپ بوده و $x\leq 0$، برای هر $x\in H$ (به [۱] مراجعه نمایید).

۳. در جبر هوپ H، تعریف می‌کنیم $x^0=1$ و $x^n=x^{n-1}\odot x$، برای هر $n\in\mathbb{N}$. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. عمل متمم «$'$» را برای هر $x\in H$ به صورت $x'=x\longrightarrow 0$ تعریف می‌کنیم. همچنین قرار می‌دهیم $(x')'=x''$. اگر برای هر $x\in H$، $x''=x$ باشد، آنگاه گوئیم جبر هوپ کراندار H، دارای «ویژگی نفی مضاعف» [۲]، یا به اختصار (DNP) است ([۱، ۲] را ببینید).

۴. عضو $x\in H$ را خودتوان [۳]، نامیم اگر و فقط اگر $x^2=x$. مجموعه اعضای خودتوان H را با $Id(H)=\{x\in H: x^2=x\}$ نشان می‌دهیم. اگر $H=Id(H)$، جبر هوپ را خودتوان می‌نامیم.

۵. فرض کنیم H و G دو جبر هوپ باشند. نگاشت $f:H\longrightarrow G$ را همریختی هوپ می‌نامیم اگر و تنها اگر $f(1)=1$ و $f(x\odot y)=f(x)\odot f(y), f(x\longrightarrow y)=f(x)\longrightarrow f(y)$ برای هر $x,y\in H$. اگر H و G دو جبر هوپ کراندار باشند، آنگاه تعریف می‌کنیم $f(0)=0$.

قضیه ۳.۱. [۳، ۴، ۶] *فرض کنیم $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ جبر هوپ است. در این صورت برای هر $x,y,z,a\in H$:*

(i) $(H,\leq)$، $\wedge$- نیم مشبکه است *بطوریکه* $x\wedge y=x\odot(x\longrightarrow y)$،

(ii) $x\odot y\leq z$ *اگر و تنها اگر* $x\leq y\longrightarrow z$.

(iii) $x\odot y\leq x,y$،

(iv) $x\odot(x\longrightarrow y)\leq x,y$،

(v) $x\leq y\longrightarrow x$،

(vi) $1\longrightarrow x=x$،

(vii) $x\longrightarrow 1=1$،

(viii) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $x\odot z\leq y\odot z$،

(ix) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $z\longrightarrow x\leq z\longrightarrow y$،

(x) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $y\longrightarrow z\leq x\longrightarrow z$،

تعریف ۴.۱. [۲] جبر هوپ H را $\vee$ـهوپ می‌نامیم اگر $\vee$، عمل دوتائی سوپریمم (کوچکترین کران بالا) روی H باشد.

گزاره ۵.۱. [۶] *فرض کنیم H جبر هوپ و $x,y,z\in H$ و I مجموعه‌ای دلخواه است. در صورت وجود جوین دلخواه، داریم:*

(i) $(x\vee y)\longrightarrow z=(x\longrightarrow z)\wedge(y\longrightarrow z)$،

(ii) $x\odot(\bigvee_{i\in I}y_i)=\bigvee_{i\in I}(x\odot y_i)$،

(iii) $x\wedge(\bigvee_{i\in I}y_i)=\bigvee_{i\in I}(x\wedge y_i)$.

ملاحظه ۶.۱. [۶، گزاره ۴. ۶] فرض کنیم H یک جبر $\vee$ـهوپ است. در این صورت $(H;\vee,\wedge)$ مشبکه توزیع پذیر است.

گزاره ۷.۱. [۳، ۴، ۶] *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار است. در این صورت برای هر $x,y\in H$:*

(i) $x\leq x''$، $x\odot x'=0$، $x'''=x'$، $x'\leq x\longrightarrow y$

(ii) *اگر* $x\leq y$ *آنگاه* $y'\leq x'$،

(iii) $x\longrightarrow y'=y\longrightarrow x'=(x\odot y)'$

(iv) $x\odot y=0$ *اگر و تنها اگر* $x\leq y'$.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم مشبکه H دارای کوچکترین عضو 0 و بزرگترین عضو 1 باشد. برای $a\in H$، گوئیم $b\in H$ متمم [۴] a است اگر $a\vee b=1$ و $a\wedge b=0$. در این صورت a را متمم *دار* می‌نامیم. اگر a دارای متمم یکتا باشد آن را با a^* نشان می‌دهیم. اگر H مشبکه توزیع پذیر و $a\in H$ متمم دار باشد، در این صورت متمم a منحصر بفرد است. مجموعه تمام اعضای متمم دار H را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم و آن را مرکز بولی H می‌نامیم.

---

[2] Double negation property
[3] Idempotent element
[4] complement

لم ۹.۱. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار، $x \in B(H)$ و x^* متمم x است. در این صورت*

(i) $x' = x^*$ و $x'' = x$.

(ii) *برای هر* $a \in H$، $x \odot a = x \wedge a$ (به [۹] *مراجعه کنید*).

لم ۱۰.۱. [۹] *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار و $x \in B(H)$ است. در این صورت احکام ذیل برقرار است:*

(i) $x^2 = x$ و $x'' = x$،

(ii) $x^2 = x$ و $x' \longrightarrow x = x$،

(iii) $x' \wedge x = 0$.

تعریف ۱۱.۱. جبر هوپ H را حذف پذیر [۵] نامیم اگر تکواره $(H; \odot, 1)$ حذف پذیر باشد.

گزاره ۱۲.۱. [۶] *فرض کنیم H جبر هوپ حذف پذیر است. در این صورت برای هر* $x, y, z \in H$:

(i) $z \longrightarrow x = (z \odot y) \longrightarrow (x \odot y)$،

(ii) $(x \odot y) \leq (z \odot y)$ *اگر و تنها اگر* $x \leq z$.

(به [۹] *مراجعه کنید*.)

۲. نتایج اصلی

در این بخش، ضمن تعریف مشتق ضربی بر جبرهای هوپ، به بررسی برخی خاصیت‌های آن می‌پردازیم. در سراسر این بخش فرض می کنیم H جبر $\vee$–هوپ است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $d : H \to H$ تابع روی H است. برای هر $x, y \in H$، d را مشتق [۶] روی H می‌نامیم اگر

$$d(x \odot y) = (d(x) \odot y) \vee (x \odot d(y))$$

این مشتق را مشتق ضربی [۷] نیز می‌نامیم.

(i) d را مشتق یکنوا [۸] روی H می‌نامیم اگر $x \leq y$ آنگاه $d(x) \leq d(y)$.

(ii) d را مشتق انقباضی [۹] روی H می‌نامیم اگر $d(x) \leq x$.

(iii) d را مشتق ایدال [۱۰] روی H می‌نامیم اگر هم یکنوا و هم انقباضی باشد.

(iv) d را مشتق خودتوان [۱۱] روی H می‌نامیم اگر $d^2 = d$ باشد، بطوریکه $d^2(x) = d(d(x))$، برای هر $x \in H$.

مجموعه تمام مشتقات روی H را با نماد $Der(H)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲. تابع $d_0 : H \to H$ را برای هر $x \in H$ به صورت $d_0(x) = 0$ تعریف کنیم. در این صورت d_0 تابع مشتق روی H است که آن را مشتق صفر می‌نامیم. همچنین، برای هر $x \in H$ تابع d_1 را به صورت $d_1(x) = x$ تعریف کنیم، در این صورت d_1 تابع مشتق روی H است که آن را مشتق همانی می‌نامیم.

گزاره ۳.۲. *فرض کنیم H کراندار و $d : H \to H$ مشتق روی H است. در این صورت برای هر* $x, y \in H$:

(i) $d(0) = 0$،

(ii) $d(x) \odot x' = x \odot d(x') = 0$،

(iii) *اگر* $x \leq y$ *آنگاه* $d(x) \leq y''$. *بنابراین اگر* $x \odot y = 0$ *آنگاه* $d(x) \odot y = 0$،

---

[5] cancellative
[6] Derivation
[7] multiplicative derivation
[8] isotone derivation
[9] contractive derivation
[10] ideal derivation
[11] idempotent derivation

(iv) $x \odot d(1) \leq d(x)$،

(v) $d(x) \leq x''$. اگر H دارای (DNP) باشد یا $x^2 = x$، آنگاه $d(x) \leq x$،

(vi) $d(x^n) = x^{n-1} \odot d(x)$، برای هر $1 \leq n \in \mathbb{N}$،

(vii) $x \odot d(1) \odot d(x)' = 0$ و بنابراین $d(x) = d(x) \vee (x \odot d(1))$،

(viii) اگر $d(x) = 1$، آنگاه $x' = 0$ و بنابراین $x = 1$،

(ix) اگر $x \leq y'$، آنگاه $d(y) \leq x'$ و $d(x) \leq y'$،

(x) $d(1) = 1$ اگر و تنها اگر $x \leq d(x)$ برای هر $x \in H$،

(xi) $d(x \odot y) \leq d(x) \vee d(y)$،

(xii) $d(x') \leq d(x)'$.

([۸] را ببینید.)

گزاره ۴.۲. *فرض کنیم $d : H \to H$، مشتق یکنوا روی H است. در این صورت برای هر $x, y, z \in H$:*

(i) اگر $z \leq x \longrightarrow y$، آنگاه $z \leq d(x) \longrightarrow d(y)$ و $x \leq d(z) \longrightarrow d(y)$،

(ii) $x \longrightarrow y \leq d(x) \longrightarrow d(y)$ و $d(x \longrightarrow y) \leq x \longrightarrow d(y)$،

(iii) $x \longrightarrow y \leq d(x \vee y) \longrightarrow d(y)$،

(iv) $d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$. اگر H مرتب کلی باشد، تساوی برقرار است.

(v) $d(x \wedge y) \leq d(x) \wedge d(y)$. اگر H مرتب کلی باشد، تساوی برقرار است.

(vi) $d(x) \leq d(1)$،

(vii) $x \odot d(y) \leq d(x)$،

(viii) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $d^n(x) \geq d(x)^n$.

گزاره ۵.۲. *فرض کنیم $d : H \to H$، مشتق انقباضی روی H است. در این صورت برای هر $x, y \in H$:*

(i) $d(x) \odot d(y) \leq d(x \odot y)$،

(ii) اگر d مشتق یکنوا باشد آنگاه $d(x \longrightarrow y) \leq d(x) \longrightarrow d(y) \leq d(x) \longrightarrow y$،

(iii) اگر $d(1) = 1$، آنگاه d مشتق همانی است.

(iv) $x \odot d(x \longrightarrow y) \leq y$،

(v) $d^n(x) \leq d^{n-1}(x)$ برای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$،

(vi) اگر برای هر $x \in H$ $d(x) \leq d(1)$، آنگاه $d^n(x) \geq d(x)^n$، برای هر $n \in \mathbb{N}$.

گزاره ۶.۲. *فرض کنیم $d : H \to H$، مشتق انقباضی روی H است. اگر $d(1) \in B(H)$، آنگاه عبارت های ذیل معادلند:*

(i) d مشتق ایدال روی H است.

(ii) برای هر $x \in H$، $d(x) \leq d(1)$،

(iii) برای هر $x \in H$، $d(x) = d(1) \odot x$،

(iv) برای هر $x, y \in H$، $d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$،

(v) برای هر $x, y \in H$، $d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$،

(vi) *برای هر* $x,y \in H$، $d(x \odot y) = d(x) \odot d(y)$.

(vii) *اگر* H *حذف پذیر باشد، آنگاه برای هر* $x,y \in H$
$d(x \longrightarrow y) = d(x) \longrightarrow d(y)$.

اثبات . (i) $\Longrightarrow$ (ii). براساس گزاره ۵.۲(iv)، واضح است.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). فرض کنیم برای هر $x \in H$، $d(x) \leq d(1)$. اگر $d(1) \in B(H)$، آنگاه براساس لم ۹.۱(ii) و قضیه ۳.۱(xiii)، داریم

$$d(x) = d(1) \wedge d(x) = d(1) \odot d(x) \leq d(1) \odot x$$

از طرف دیگر براساس گزاره ۳.۲(iv)، می دانیم $x \odot d(1) \leq d(x)$. در نتیجه تساوی برقرار است.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv). فرض کنیم برای هر $x \in H$، $d(x) = d(1) \odot x$. حال براساس لم ۹.۱(ii) و برای هر $x,y \in H$،

$$d(x \wedge y) = d(1) \odot (x \wedge y) = d(1) \wedge (x \wedge y) = (d(1) \wedge x) \wedge (d(1) \wedge y) = d(x) \wedge d(y).$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i). فرض کنیم $x,y \in H$ بطوریکه $x \leq y$. براساس فرض داریم $d(x) = d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$. در نتیجه $d(x) \leq d(y)$. بنابراین d مشتق یکنوا است و چون طبق فرض گزاره، d مشتق انقباضی بوده، لذا d مشتق ایدال است.
(iii) $\Longrightarrow$ (v). فرض کنیم برای هر $x \in H$، $d(x) = d(1) \odot x$. حال براساس گزاره ۵.۱(ii)، برای هر $x,y \in H$، داریم:

$$d(x \vee y) = d(1) \odot (x \vee y) = (d(1) \odot x) \vee (d(1) \odot y) = d(x) \vee d(y)$$

(v) $\Longrightarrow$ (i). فرض کنیم $x,y \in H$ بطوریکه $x \leq y$. براساس فرض داریم

$$d(y) = d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$$

در نتیجه $d(x) \leq d(y)$. بنابراین d مشتق یکنوا است و چون طبق فرض گزاره، d مشتق انقباضی بوده، لذا d مشتق ایدال است.
(iii) $\Longrightarrow$ (vi). فرض کنیم برای هر $x \in H$، $d(x) = d(1) \odot x$. براساس لم ۱۰.۱(i)، برای هر $x,y \in H$، داریم:

$$d(x \odot y) = d(1) \odot (x \odot y) = (d(1) \odot x) \odot (d(1) \odot y) = d(x) \odot d(y)$$

(vi) $\Longrightarrow$ (ii). براساس فرض داریم

$$d(x) = d(x \odot 1) = d(x) \odot d(1) = d(x) \wedge d(1)$$

در نتیجه برای هر $x \in H$، $d(x) \leq d(1)$.
(iii) $\Longrightarrow$ (vii). فرض کنیم برای هر $x \in H$، $d(x) = d(1) \odot x$. با توجه به حذف پذیر بودن H، براساس گزاره ۱۲.۱(i)، برای هر $x,y \in H$، داریم:

$$d(x \longrightarrow y) = d(1) \odot (x \longrightarrow y) = (d(1) \odot x) \longrightarrow (d(1) \odot y) = d(x) \longrightarrow d(y)$$

(vii) $\Longrightarrow$ (i). فرض کنیم $x,y \in H$ بطوریکه $x \leq y$. براساس فرض داریم $d(1) = d(x \longrightarrow y) = d(x) \longrightarrow d(y)$. در نتیجه $d(x) \odot d(1) \leq d(y)$. لذا با توجه به اینکه $d(1) \in B(H)$، داریم $d(x) \odot d(1) \leq d(y) \odot d(1)$. حال با توجه به حذف پذیر بودن H و گزاره ۱۲.۱(ii)، نتیجه می شود $d(x) \leq d(y)$. بنابراین d مشتق یکنوا است و چون طبق فرض گزاره، d مشتق انقباضی بوده، لذا d مشتق ایدال است. □

نتیجه ۷.۲. *فرض کنیم* $d : H \to H$، *مشتق ایدال روی* H *است . اگر* $d(1) \in B(H)$، *آنگاه*
(i) برای هر $x,y \in H$، $d(x) \odot y = x \odot d(y)$. *در نتیجه* $d(x \odot y) = d(x) \odot y = x \odot d(y)$.
(ii) برای هر $x \in H$، $d^2(x) = d(d(x)) = d(x)$.

اثبات . (i) براساس گزاره ۶.۲(iii)، برای هر $x,y \in H$ داریم

$$d(x) \odot y = d(1) \odot x \odot y = d(1) \odot y \odot x = d(y) \odot x$$

(ii) براساس گزاره ۶.۲(vi)، و بند (i)، برای هر $x \in H$ داریم

$$d(d(x)) = d(d(x) \odot 1) = d(x) \odot d(1) = d(x)$$

□

تعریف ۸.۲. فرض کنیم $d : H \to H$، مشتقی روی H است. مجموعه همه نقاط ثابت H تحت مشتق d را با $Fix_d(H)$ نشان می‌دهیم. یعنی $Fix_d(H) = \{x \in H : d(x) = x\}$ (۱۰ را ببینید).

گزاره ۹.۲. *فرض کنیم $d : H \to H$، مشتقی روی H است. در این صورت*

(i) $Fix_d(H)$ تحت $\odot$ بسته است.

(ii) *اگر d مشتق ایدال باشد، آنگاه* $Fix_d(H)$ تحت $\vee$ بسته است.

(iii) *اگر d مشتق ایدال باشد و $d(۱) \in B(H)$، آنگاه $Fix_d(H) = d(H)$.*

اثبات. (i) فرض کنیم $x, y \in Fix_d(H)$. براساس تعریف مشتق داریم:

$$d(x \odot y) = d(x) \odot y \vee x \odot d(y) = x \odot y \vee x \odot y = x \odot y$$

(ii) فرض کنیم $x, y \in Fix_d(H)$. لذا داریم $d(x) = x$ و $d(y) = y$. حال براساس گزاره ۴.۲(iv)، داریم $x \vee y = d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$ در نتیجه $d(x \vee y) \leq x \vee y$ و $d(x) \vee d(y) = d(x \vee y) = x \vee y$ و $x \vee y \in Fix_d(H)$.

(iii) فرض کنیم $a \in d(H)$. بنابراین $b \in H$ وجود دارد بطوریکه $a = d(b)$. حال براساس نتیجه ۷.۲(ii)، داریم

$$d(a) = d(d(b)) = d(b) = a.$$

لذا $a \in Fix_d(H)$. همچنین اگر $a \in Fix_d(H)$، آنگاه $d(a) = a$. در نتیجه $a \in d(H)$. بنابراین حکم برقرار است. □

گزاره ۱۰.۲. *فرض کنیم d و d' دو مشتق روی H باشند. در این صورت $d \vee d'$ با ضابطه $(d \vee d')(x) = d(x) \vee d'(x)$ مشتق روی H است.*

نتیجه ۱۱.۲. *فرض کنیم H کراندار و $Der_c(H)$ مجموعه مشتق های انقباضی روی H باشد. در این صورت $(Der_c(H); \vee, d_۰, d_۱)$ با تعاریف زیر، $\vee$ـنیم مشبکه کراندار است. برای هر $x \in H$ و $d, d' \in Der_c(H)$:*

$$(d \vee d')(x) = d(x) \vee d'(x),\ d_۰(x) = ۰,\ d_۱(x) = x$$

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنیم H کراندار بطوریکه برای هر $x, y \in H$، $x \odot y = x \wedge y$ و $Der_I(H)$ مجموعه مشتق های ایدال روی H باشد. در این صورت $(Der_I(H); \vee, \wedge, d_۰, d_۱)$=$\mathbf{Der_I(H)}$ با تعاریف زیر، مشبکه کراندار توزیع پذیر است. برای هر $x \in H$ و $d, d' \in Der_I(H)$:*

$$(d \vee d')(x) = d(x) \vee d'(x),\ (d \wedge d')(x) = d(x) \wedge d'(x),$$

و $d_۰(x) = ۰,\ d_۱(x) = x$.

اثبات. با توجه به نتیجه ۱۱.۲، کافی است نشان دهیم عمل $\wedge$ روی $Der_I(H)$ خوش تعریف است. لذا فرض کنیم $d_i, d_j \in Der_I(H)$. براساس گزاره ۵.۱(iii)، برای هر $x, y \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}(d_i \wedge d_j)(x \odot y) &= d_i(x \odot y) \wedge d_j(x \odot y)\\ &= ((d_i(x) \odot y) \vee (x \odot d_i(y))) \wedge ((d_j(x) \odot y) \vee (x \odot d_j(y)))\\ &= ((d_i(x) \odot y) \wedge (d_j(x) \odot y)) \vee ((d_i(x) \odot y) \wedge (x \odot d_j(y))) \vee\\ &\quad ((x \odot d_i(y)) \wedge (d_j(x) \odot y)) \vee ((x \odot d_i(y)) \wedge (x \odot d_j(y)))\\ &= (d_i(x) \odot d_j(x) \odot y) \vee (d_i(x) \odot y \odot x \odot d_j(y)) \vee\\ &\quad (x \odot d_i(y) \odot d_j(x) \odot y) \vee (x \odot d_i(y) \odot d_j(y))\end{aligned}$$

از طرفی براساس گزاره ۴.۲(vii) و یکنوا بودن مشتقات، نتیجه می شود

$$d_i(x) \odot y \odot x \odot d_j(y) \leq d_i(y) \odot x \odot d_j(y)$$

و

$$x \odot d_i(y) \odot d_j(x) \odot y \leq d_i(x) \odot d_j(x) \odot y$$

حال براساس فرض داریم:

$$\begin{aligned}(d_i \wedge d_j)(x \odot y) &= (d_i(x) \odot d_j(x) \odot y) \vee (x \odot d_i(y) \odot d_j(y))\\ &= ((d_i \odot d_j)(x) \odot y) \vee (x \odot (d_i \odot d_j)(y))\\ &= ((d_i \wedge d_j)(x) \odot y) \vee (x \odot (d_i \wedge d_j)(y))\end{aligned}$$

لذا $d_i \wedge d_j \in Der_I(H)$. همچنین

$$(d_i \wedge d_\circ)(x) = d_i(x) \wedge d_\circ(x) = d_i(x) \wedge \circ = \circ = d_\circ(x)$$

و براساس انقباضی بودن مشتقات داریم

$$(d_i \wedge d_1)(x) = d_i(x) \wedge d_1(x) = d_i(x) \wedge x = d_i(x)$$

بنابراین $\mathbf{Der_I(H)}=(Der_I(H); \vee, \wedge, d_\circ, d_1)$ مشبکه کراندار است. درخصوص توزیع پذیر بودن $\mathbf{Der_I(H)}$ به سادگی قابل بررسی است که برای هر $d_i, d_j, d_k \in Der_I(H)$ داریم:

$$d_i \wedge (d_j \vee d_k) = (d_i \wedge d_j) \vee (d_i \wedge d_k), \quad d_i \vee (d_j \wedge d_k) = (d_i \vee d_j) \wedge (d_i \vee d_k).$$

□

مراجع

[1] P. Agliano, I.M.A. Ferreirim, F. Montagna, Basic hoops: an algebraic study of continuous t-norms, Studia Logica, 87(1), (2007), 73-98.
[2] R. A. Borzooei, M. Aaly Kologani, Filter Theory of hoop-algebras, JARPM, 6, (2014), 72–86.
[3] B. Bosbach, Komplementare Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, Fund. Math. 64, (1969), 257-287.
[4] B. Bosbach, Komplementare Halbgruppen. Kongruenzen und Quotienten, Fund. Math. 69, (1970), 1-14.
[5] J. R. Buchi and T. M. Owenz, Complemented monoids and hoops, unpublished manuscript.
[6] G. Georgescu, L. Leustean, V. Preoteasa, Pseudo-hoops, MVLSC, 11(1-2), (2005), 153-184.
[7] M. Kondo, Some types of filters in hoops, 41st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, (2011), 50-53, DOI:10.1109/ISMVL.2011.9.
[8] A. Namdar and A. Borumand saeid, (Generalized) Derivation on hoop algebras, NMNC, 20 (2024), 451–471.
[9] D. Piciu, Algebras of Fuzzy Logic, Editura Universtaria, Craiova, 2007.
[10] L. J. Zhang, X. L. Xin, Derivations and differential filters on semihoops, IJPAM, N. 42, (2019), 916–933.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، GC–136، صص. ۵۹–۶۷

تحلیل انرژی گراف‌ها و کاربردهای آن در شبکه‌های اجتماعی

آناهیتا میرابادیان*[آ]، دکتر غلامحسن شیردل[ب]

[آ] دانشجوی دکتری گراف، دانشگاه قم
[ب] استادیار دانشگاه قم

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
تحلیل شبکه‌های اجتماعی
انرژی گراف
نظریهٔ گراف
خوشه‌بندی

چکیده

با توجه به گسترش روزافزون شبکه‌های اجتماعی و تولید حجم بالای داده‌های پیچیده در این پلتفرم‌ها، تحلیل و پردازش این داده‌ها، به‌ویژه در شناسایی الگوهای پنهان و روابط پیچیدهٔ میان کاربران، چالش‌های زیادی را ایجاد کرده است. هدف این تحقیق، استفاده از نظریهٔ گراف و تحلیل انرژی گراف‌ها به‌عنوان ابزاری مؤثر برای مدل‌سازی و تحلیل شبکه‌های اجتماعی است. در این پژوهش، از مفاهیم گراف‌ها برای نمایش روابط کاربران و از انرژی گراف‌ها به‌عنوان معیاری برای ارزیابی پیچیدگی و تنوع این روابط استفاده شد. روش تحقیق شامل استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته برای شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی، خوشه‌بندی جوامع و تحلیل ویژگی‌های مختلف گراف‌ها همچون مرکزیت و مدولاریتی بود. نتایج نشان داد که مدل‌های پیشنهادی به‌طور مؤثری در کاهش بار محاسباتی، بهینه‌سازی فرایندهای تحلیل داده‌ها و شبیه‌سازی رفتار کاربران در شبکه‌های اجتماعی مفید واقع شده‌اند. این پژوهش علاوه بر کاربردهای گسترده در تحلیل رفتار کاربران، در شبیه‌سازی تعاملات پیچیده و شناسایی روندهای پنهان در شبکه‌های اجتماعی تأثیر قابل توجهی دارد.

۱. مقدمه

با گسترش روزافزون فضای دیجیتال و ایجاد شبکه‌های اجتماعی آنلاین، حجم عظیمی از داده‌ها در این پلتفرم‌ها تولید می‌شود که تحلیل و پردازش آن‌ها بدون استفاده از روش‌های نوین، چالشی بزرگ به‌نظر می‌رسد [۱۰]. شبکه‌های اجتماعی مانند فیسبوک، توییتر، اینستاگرام و لینکدین نه تنها مکانی برای تعاملات اجتماعی و فرهنگی افراد فراهم می‌آورند، بلکه به‌عنوان منابعی بی‌پایان از داده‌های ساختاریافته و غیرساختاریافته به‌شمار می‌روند [۵]. این داده‌ها از طریق ارتباطات، تعاملات و رفتارهای کاربران به‌طور مداوم در حال تغییر و به‌روز شدن هستند که تحلیل صحیح آن‌ها نیازمند تکنیک‌های پیشرفته است [۱]. در این میان، استفاده از گراف‌ها به‌عنوان مدل ریاضی برای تحلیل و نمایش روابط پیچیده در شبکه‌های اجتماعی می‌تواند به‌طور مؤثری در شناسایی الگوها و روندهای پنهان در این داده‌ها کمک کند [۳]. تحلیل انرژی گراف‌ها، به‌عنوان یک رویکرد نوین، ابزار قدرتمندی برای کشف ساختارهای پنهان و روابط پیچیده در شبکه‌های اجتماعی به‌شمار می‌رود. این روش با استفاده از مفاهیم ریاضی و الگوریتم‌های پیچیده، توانایی شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های شبکه‌های اجتماعی را فراهم می‌آورد [۸]. در حقیقت، انرژی گراف، به‌عنوان یک ویژگی خاص، نشان‌دهندهٔ میزان پیچیدگی و تنوع روابط درون گراف است که می‌تواند در تحلیل رفتارهای کاربران، شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی و شناسایی جوامع در شبکه‌های اجتماعی مؤثر باشد [۱۶]. این پژوهش به‌دنبال معرفی و توسعهٔ مدل‌های نوین تحلیل انرژی گراف‌ها در شبکه‌های اجتماعی است. هدف اصلی این تحقیق، کاهش بار محاسباتی و بهینه‌سازی فرایندهای تحلیل داده‌های پیچیده در شبکه‌های اجتماعی است. با توجه به حجم و پیچیدگی بالای داده‌ها در این شبکه‌ها، چالش اصلی در این تحقیق، استفادهٔ بهینه از داده‌ها برای استخراج اطلاعات مفید و شناسایی روندهای نهفته به‌صورت خودکار و بدون نیاز به تحلیل دستی است [۱۳]. این هدف باعث می‌شود که

*سخنران
پست الکترونیک : anamirabadian@gmail.com (آناهیتا میرابادیان)

مدل‌های پیشنهادی در این پژوهش نه تنها از نظر کارایی بهینه باشند، بلکه در کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی و تسریع در فرایند تحلیل داده‌ها نیز مؤثر واقع شوند [۲]. نوآوری این تحقیق در استفاده از روش‌های به‌روز و تلفیق الگوریتم‌های پیشرفتهٔ تحلیل گراف، به‌ویژه تحلیل انرژی گراف‌ها، در شبکه‌های اجتماعی است. این پژوهش نه‌تنها به شناسایی و تحلیل روابط پیچیده در شبکه‌های اجتماعی می‌پردازد، بلکه به کاهش بار محاسباتی و بهبود کارایی الگوریتم‌ها نیز توجه دارد. مدل‌های ارائه‌شده در این مقاله می‌توانند به‌طور مؤثری در بهینه‌سازی تحلیل‌های شبکه‌های اجتماعی و شبیه‌سازی رفتار کاربران کاربرد داشته باشند. این مقاله ابتدا مفاهیم پایه‌ای تحلیل گراف‌ها و انرژی گراف‌ها را معرفی کرده و سپس به بررسی روش‌ها و الگوریتم‌های تحلیل انرژی گراف‌ها در شبکه‌های اجتماعی می‌پردازد. در ادامه، مدل‌های پیشنهادی تحلیل داده‌های شبکه‌های اجتماعی ارائه و نتایج شبیه‌سازی‌های تجربی تحلیل خواهد شد.

۲. مبانی نظری تحلیل شبکه‌های اجتماعی (SNA)

تحلیل شبکه‌های اجتماعی (SNA) به‌عنوان یک رویکرد بین‌رشته‌ای است که بر مبنای نظریهٔ گراف که یکی از شاخه‌های ریاضیات استوار است، توسعه یافته است [۱۴]. گراف‌ها ساختارهای ریاضی هستند که از مجموعه‌ای از رأس‌ها (نقاط) و یال‌ها (اتصالات بین رأس‌ها) تشکیل می‌شوند. در تحلیل شبکه‌های اجتماعی، رأس‌ها نمایانگر افراد یا نهادها و یال‌ها نشان‌دهندهٔ ارتباطات یا پیوندهای میان این رأس‌ها هستند [۱۱]. تحلیل شبکه‌های اجتماعی به‌طور خاص به شناسایی و مطالعهٔ روابط پیچیدهٔ اجتماعی و الگوهای تعاملات در جوامع انسانی پرداخته و از نظریهٔ گراف برای مدل‌سازی و تجزیه‌وتحلیل این شبکه‌ها استفاده می‌کند [۴]. مهم‌ترین مفاهیم در SNA شامل انواع مختلفی از معیارهای شبکه است که هرکدام به نوعی اهمیت گره‌ها در شبکه را مشخص می‌کند. یکی از این معیارها، **مرکزیت درجه** است که تعداد اتصالات گره‌ها را اندازه‌گیری می‌کند و اهمیت و تأثیر آن‌ها در شبکهٔ اجتماعی را مشخص می‌کند [۷]. در کنار این، **مرکزیت میان‌نهادی** به تعیین گره‌هایی می‌پردازد که نقش پیوندی میان دیگر گره‌ها ایفا می‌کنند و برای جریان اطلاعات یا تأثیر در شبکه ضروری هستند. **مرکزیت نزدیکی** نیز به ارزیابی فاصلهٔ میان یک گره و دیگر گره‌ها پرداخته و به نوعی نشان‌دهندهٔ دسترسی سریع به دیگر گره‌ها در شبکه است [۶]. یکی دیگر از ویژگی‌های شبکه‌های اجتماعی **عامل خوشه‌بندی** است که نشان‌دهندهٔ تمایل گره‌ها به ایجاد گروه‌ها یا خوشه‌های خاص است و وجود زیرساخت‌های منسجم در شبکه را نمایان می‌سازد [۹]. همچنین، پدیدهٔ **دنیای کوچک** در شبکه‌های اجتماعی به این معنی است که در اکثر مواقع، دو گره در شبکه می‌توانند از طریق تعداد کمی از گره‌های واسط به هم متصل شوند که این ویژگی شبکه‌های اجتماعی را به‌صورت کارامدتر و بهینه‌تر نشان می‌دهد. SNA علاوه بر ارائهٔ تصویری از ساختار شبکه‌های اجتماعی، به تحلیل نحوهٔ انتقال اطلاعات، تأثیر و رفتار از طریق این شبکه‌ها می‌پردازد. این تحلیل‌ها می‌توانند به شبیه‌سازی گسترش نوآوری‌ها، انتشار شایعات و مکانیسم‌های تصمیم‌گیری جمعی در جوامع انسانی کمک کنند [۱۵]. مبانی نظری SNA فراتر از جامعه‌شناسی سنتی رفته و به دیگر حوزه‌ها از جمله علم کامپیوتر، کسب‌وکار، اپیدمیولوژی، علوم سیاسی و بسیاری از دیگر رشته‌ها گسترش یافته است. این تحلیل‌ها به‌ویژه در علوم کامپیوتر تأثیرگذار بوده و به توسعهٔ سیستم‌های توصیه‌گر، الگوریتم‌های پیش‌بینی پیوند و درک شبکه‌های اجتماعی آنلاین کمک کرده است. همچنین، SNA درک بهتری از ساختار و پویایی شبکه‌ها ارائه داده و ابزارهایی برای تحلیل پیچیده‌تری همچون شبکه‌های چندلایه و چندگانه را به پژوهشگران معرفی کرده است [۱۲]. امروزه، تحلیل شبکه‌های اجتماعی به‌وسیلهٔ روش‌های پیشرفته‌ای مانند یادگیری ماشین، پردازش زبان طبیعی و تکنیک‌های آماری پیشرفته به‌طور قابل توجهی پیشرفت کرده است. این پیشرفت‌ها ابعاد جدیدی از تحلیل شبکه‌های اجتماعی را به‌روی پژوهشگران گشوده‌اند که به آن‌ها این امکان را می‌دهد تا شبکه‌های پیچیده‌تر و داده‌های بزرگ‌تر را به‌طور مؤثرتری تجزیه‌وتحلیل کنند.

۳. روش پژوهش

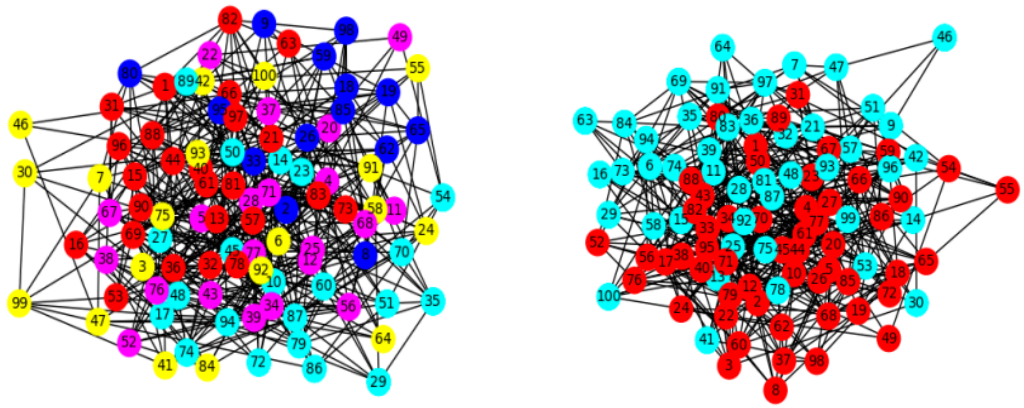
در این پژوهش، از روش‌های مدل‌سازی گراف‌ها و تحلیل انرژی گراف‌ها برای تحلیل داده‌های شبکه‌های اجتماعی استفاده شده است. ابتدا داده‌های مربوط به شبکه‌های اجتماعی، شامل روابط و تعاملات میان کاربران، جمع‌آوری و به‌صورت گراف مدل‌سازی می‌شوند. در این گراف‌ها، رأس‌ها نمایانگر کاربران و یال‌ها نشان‌دهندهٔ روابط میان آن‌ها هستند. به‌منظور تحلیل شبکه‌ها و شبیه‌سازی رفتار کاربران، از مفاهیم مختلف گراف مانند مرکزیت‌ها (مرکزیت درجه، مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بین)، خوشه‌بندی و تحلیل مدولاریتی بهره‌برداری می‌شود. در گام بعدی، از تحلیل انرژی گراف‌ها برای شبیه‌سازی و ارزیابی پیچیدگی روابط درون گراف‌ها استفاده می‌شود. انرژی گراف به‌عنوان معیاری برای اندازه‌گیری میزان تنوع و پیچیدگی روابط میان گره‌ها عمل می‌کند. در این پژوهش، انرژی گراف‌ها به‌ویژه برای تحلیل و شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی، شناسایی الگوهای پنهان و پیش‌بینی رفتار کاربران به‌کار گرفته شده است. الگوریتم‌های پیشرفتهٔ تحلیل گراف‌ها برای شناسایی جوامع، تحلیل روابط پیچیده و پیش‌بینی روندهای شبکه‌های اجتماعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای ارزیابی کارایی مدل‌ها و کاهش بار محاسباتی، از شبیه‌سازی‌های تجربی و تکنیک‌های بهینه‌سازی استفاده می‌شود. در نهایت، نتایج حاصل از این مدل‌ها به تحلیل رفتار شبکه‌های اجتماعی و شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی کمک می‌کند. این روش‌ها نه تنها در تحلیل داده‌های پیچیده و شبیه‌سازی رفتارهای کاربران مؤثرند، بلکه به کاهش پیچیدگی محاسباتی در فرایندهای تحلیل کمک می‌کنند.

۴. کاربردهای نظریهٔ گراف در شبکه‌های اجتماعی (SN)

با توجه به توسعهٔ قابل توجه فناوری اطلاعات و ارتباطات (ICT)، استفاده از شبکه‌های اجتماعی (SN) به‌طور نمایی در حال افزایش است. در سال‌های اخیر، شبکه‌های اجتماعی به ابزاری محبوب برای اشتراک‌گذاری اطلاعات و برقراری ارتباط، به‌ویژه در میان نوجوانان تبدیل شده‌اند. علاوه بر این، ارائه‌دهندگان خدمات و کسب‌وکارها از داده‌های کاربران در شبکه‌های اجتماعی برای مقاصد مختلفی همچون توصیهٔ برندهای جدید و کمپین‌های تبلیغاتی استفاده می‌کنند. شرکت‌های تحلیلی نیز به‌طور گسترده‌ای از داده‌های کاربران شبکه‌های اجتماعی برای تحلیل روندهای اجتماعی، تحلیل نگرش کاربران نسبت به برندهای جدید، استخراج نیت‌ها، تحلیل احساسات و تحلیل شخصیت استفاده می‌کنند. این مفاهیم و کاربردها در مطالعات مختلف به‌طور جامع توضیح داده شده‌اند. شبکه‌های اجتماعی ساختارهای پیچیده‌ای هستند و می‌توانند به‌عنوان یک گراف $G(U,V)$ مدل‌سازی شوند که در آن U لیستی از کاربران شبکهٔ اجتماعی و V مجموعه‌ای از یال‌ها است که روابط بین کاربران را نشان می‌دهد. روابط ممکن است دوستی، علاقه‌مندی، عضویت خانواده با روابط مشابه دیگر باشند.

۴. ۱. *استفاده از گراف‌ها برای خوشه‌بندی جوامع در شبکهٔ اجتماعی*

یک جامعه در شبکهٔ اجتماعی به گروهی از افراد یا کاربران اطلاق می‌شود که ویژگی‌ها، علایق یا رفتارهای مشابهی دارند. شناسایی جوامع در شبکهٔ اجتماعی می‌تواند مزایای بسیاری داشته باشد؛ از جمله تبلیغات هدفمند، فیلترگذاری همکارانه، پیشنهاد گروهی، بازاریابی بر اساس علایق، گسترش اطلاعات، تبلیغات شخصی‌سازی‌شده، انتخاب رهبران نظرات و تسریع در پخش اطلاعات. به‌عنوان مثال، مطابق شکل ۱، در یک گراف با ۱۰۰ کاربر، این کاربران می‌توانند به دو یا پنج جامعه تقسیم شوند که این تقسیم‌بندی می‌تواند به شناسایی الگوهای مختلف در شبکه کمک کند.



(آ) دو جامعه در یک نمودار.

(ب) پنج جامعه در یک نمودار.

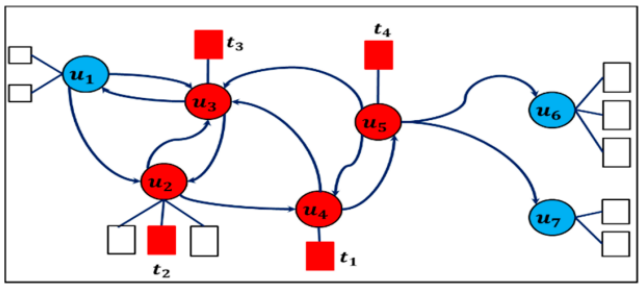
شکل ۱: مثال‌هایی از جوامع شناسایی‌شده در یک گراف ۱۰۰ نفره از کاربران شبکهٔ اجتماعی.

۴. ۲. *استفاده از گراف‌ها برای گسترش اطلاعات در شبکه‌های اجتماعی*

استفاده از گراف‌ها در شبکه‌های اجتماعی (SN) به‌طور گسترده‌ای برای گسترش اطلاعات میان کاربران مورد استفاده قرار می‌گیرد. شبکه‌های اجتماعی به میلیون‌ها کاربر این امکان را می‌دهند که محتوای دیجیتال شامل متن، تصاویر، ویدیوها و دیگر انواع محتوا را تولید و مصرف کنند. فرایند گسترش اطلاعات به اشتراک‌گذاری این محتوا میان تعداد زیادی از مخاطبان در مدت زمان کوتاه اطلاق می‌شود. این فرایند وقتی موفق است که اطلاعات به‌سرعت به کاربران زیادی برسد. گسترش اطلاعات معمولاً از طریق گره‌های تأثیرگذار صورت می‌گیرد که به‌واسطهٔ جوامع تشکیل‌شده بر اساس شباهت‌ها، علایق و اعتماد میان کاربران تقویت می‌شود. در شکل ؟؟، فرایند گسترش اطلاعات نشان داده شده است که در آن گره‌های قرمزرنگ مشارکت کرده‌اند. شناسایی کاربران تأثیرگذار (IS) برای گسترش اطلاعات در زمینه‌هایی همچون شیوع بیماری‌ها، گسترش ویروس‌ها یا حتی نظرسنجی‌های سیاسی اهمیت زیادی دارد، چراکه این کاربران می‌توانند به‌سرعت اطلاعات را در بین جمعیت گسترده‌ای منتشر کنند.

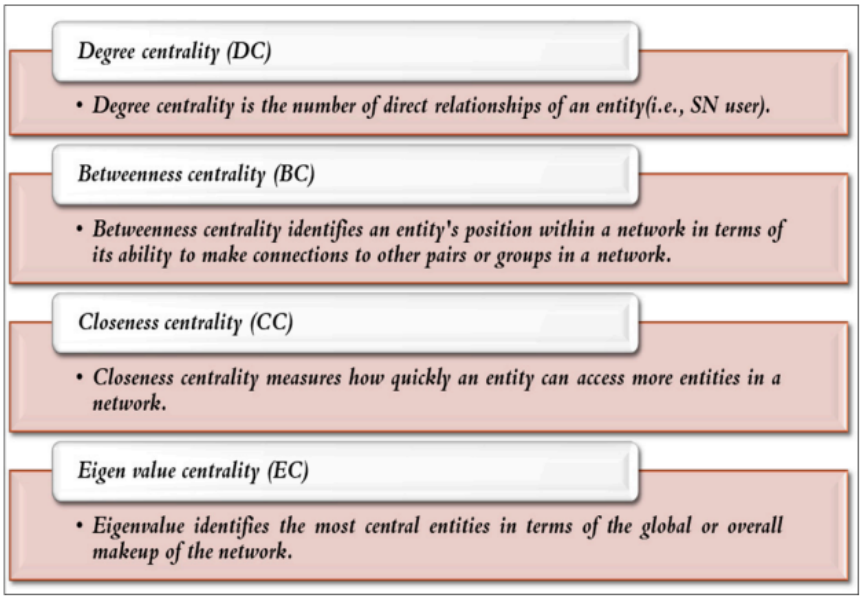
۴. ۳. *تجزیه‌وتحلیل شبکه‌های اجتماعی از طریق گراف‌ها*

تجزیه‌وتحلیل شبکه‌های اجتماعی (SNA) یک حوزهٔ تحقیقاتی جدید است که در آن از نظریهٔ گراف برای نمایش وضعیت موجودیت‌ها در یک شبکهٔ اجتماعی استفاده می‌شود. این روش از مجموعه‌ای از متدولوژی‌ها و فرمول‌های ریاضی برای محاسبهٔ معیارهای مختلف استفاده می‌کند که پیوندهای میان افراد، اشیا یا موارد مختلف را اندازه‌گیری می‌کند. با استفاده از تجزیه‌وتحلیل شبکه‌های اجتماعی، می‌توان پاسخ‌های مختلفی



شکل ۲: فرایند گسترش اطلاعات خاص در یک شبکهٔ اجتماعی.

به پرسش‌هایی مانند میزان اتصال یک موجودیت در شبکه، میزان اهمیت آن در شبکه، نحوهٔ جریان اطلاعات در شبکه، مرکزیت یک موجودیت و توانایی آن در گسترش اطلاعات به‌دست آورد. در این تحقیق، چهار معیار مهم مرتبط با SNA تعریف شده‌اند که در شکل ۳ به‌طور گرافیکی نشان داده شده‌اند.



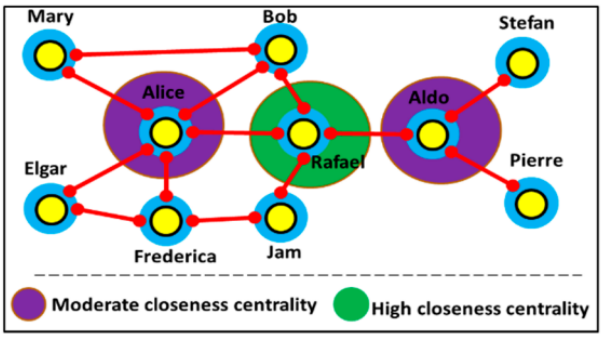
شکل ۳: توضیحات چهار مرکزیت مورد استفاده در تجزیه‌وتحلیل شبکه‌های اجتماعی (SNA).

۴.۳.۱. مرکزیت نزدیکی

مرکزیت نزدیکی (CC) به‌طور کلی میزان سرعت دسترسی یک کاربر یا موجودیت به تعداد زیادی از موجودیت‌ها در شبکه را اندازه‌گیری می‌کند. موجودیتی که مرکزیت نزدیکی بالایی دارد، معمولاً چهار ویژگی دارد: اول، دسترسی سریع به دیگر موجودیت‌ها؛ دوم، مسافت کوتاه به دیگر موجودیت‌ها؛ سوم، نزدیکی به دیگر موجودیت‌ها؛ و چهارم، دیدگاه بالا از آنچه که در شبکه در حال رخ دادن است. در شکل ۴ نمونه‌ای از مرکزیت نزدیکی با استفاده از گراف نشان داده شده است. اگر شبکه شامل موجودیت‌هایی باشد که به هیچ موجودیت دیگری متصل نیستند، مقدار مرکزیت نزدیکی برای تمام موجودیت‌ها برابر صفر خواهد بود. موجودیت‌هایی که دارای مرکزیت نزدیکی بالایی هستند، می‌توانند برای کنترل یا گسترش اطلاعات استفاده شوند.

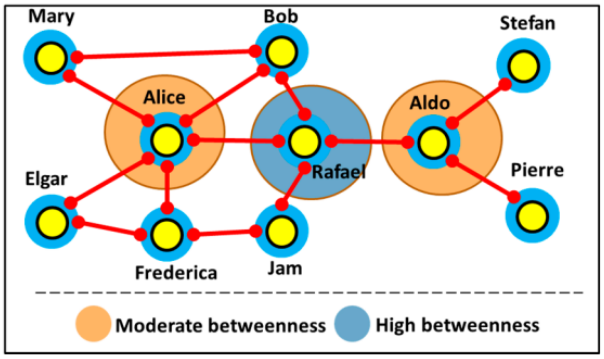
۴.۳.۲. بین مرکزیت

بین مرکزیت (BC) به‌طور عمده موقعیت یک کاربر را در گراف از نظر توانایی آن در اتصال به دیگر کاربران یا گروه‌های کاربران در یک شبکه شناسایی می‌کند. موجودیتی که بین مرکزیت بالایی دارد، معمولاً سه ویژگی دارد: اول، آن موجودیت موقعیت ویژه‌ای در شبکه دارد؛ دوم، احتمال



شکل ۴: نمای کلی از مرکزیت نزدیکی (CC) در یک شبکهٔ اجتماعی.

شکست در یک نقطهٔ واحد وجود دارد، یعنی حذف این موجودیت باعث قطع ارتباطات بین گروه‌ها می‌شود؛ و سوم، آن موجودیت تأثیر زیادی بر آنچه که در شبکه اتفاق می‌افتد، دارد. در شکل ۵ نمونه‌ای از بین مرکزیت با استفاده از گراف نشان داده شده است. در این مثال، رافائل بالاترین بین مرکزیت را دارد، زیرا او در میان آلیس و آلدوی قرار داید که خود در میان سایر کاربران هستند. بنابراین، اگرچه آلیس دارای مرکزیت درجهٔ بالاتری است، اما رافائل از نظر SNA در برخی جنبه‌ها اهمیت بیشتری دارد.



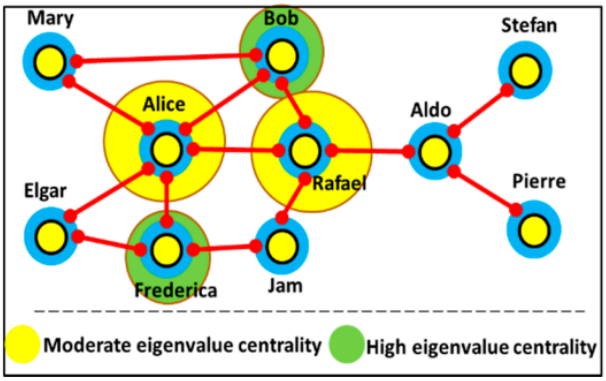
شکل ۵: نمای کلی از بین مرکزیت (BC) در یک شبکهٔ اجتماعی.

۴.۳.۳. *مرکزیت ارزش ویژه*

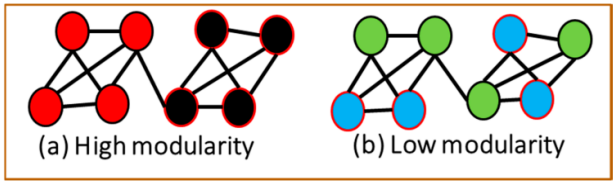
مرکزیت ارزش ویژه (EVC) میزان نزدیکی یک کاربر به دیگر موجودیت‌های نزدیک در شبکه را اندازه‌گیری می‌کند. یک مقدار بالای EVC دو ویژگی اصلی دارد: اول، آن نشان‌دهندهٔ یک بازیگر است که موقعیت مرکزی‌تری نسبت به الگوی فاصله‌ها در میان تمام موجودیت‌ها در شبکه دارد؛ و دوم، آن به‌عنوان معیاری برای برخی جنبه‌های مرکزیت از نظر مزیت‌های موقعیتی مناسب است. در شکل ۶ می‌توان مشاهده کرد که رافائل و آلیس به دیگر موجودیت‌های نزدیک در شبکه نزدیک‌تر هستند. همچنین، فردریکا و باب نیز نزدیکی بالایی دارند، اما با مقدار کمتر. مفاهیم نظریهٔ گراف همچنین می‌توانند برای نشان دادن حداقل تعداد اتصالاتی که توسط کاربران مختلف در یک شبکهٔ اجتماعی می‌توان ایجاد کرد، استفاده شوند.

۴.۴. *تجزیه‌وتحلیل مدولاریتی در گراف کاربران شبکهٔ اجتماعی*

در بسیاری از مواقع، می‌توان شبکه را به تعدادی جامعه (که به آن‌ها زیرگراف‌ها نیز گفته می‌شود) تقسیم‌بندی کرد. برای ارزیابی «کیفیت» این تقسیم‌بندی در یک گراف کامل شبکهٔ اجتماعی، می‌توان از امتیاز یا معیار مدولاریتی استفاده کرد. نمرهٔ بالاتر نشان‌دهندهٔ این است که تقسیم شبکه به زیرگراف‌ها یا جوامع کوچک بسیار دقیق بوده است، در حالی که نمرهٔ پایین‌تر نشان‌دهندهٔ این است که جوامع شبیه به تصادفی هستند و نتایج مفیدی ارائه نمی‌دهند. در این حالت، این تقسیم‌بندی اشتباه می‌تواند منجر به پیشنهادها یا تحلیل‌های نادرست شود. به‌طور کلی، تقسیم‌بندی که همبستگی قوی‌تری بین اشیا در زیرگراف‌ها داشته باشد، ترجیح داده می‌شود. به زبان ساده، مدولاریتی کیفیت تقسیم‌بندی را اندازه‌گیری می‌کند. در شکل ۷، مثال‌هایی از مدولاریتی بالا و پایین نشان داده شده است. با توجه به استفادهٔ روزافزون از شبکه‌های اجتماعی در سال‌های اخیر، مفهوم مدولاریتی به‌طور گسترده‌ای در تحقیقات مورد مطالعه قرار گرفته است.



شکل ۶: نمای کلی از مرکزیت ارزش ویژه (EVC) در یک شبکهٔ اجتماعی.



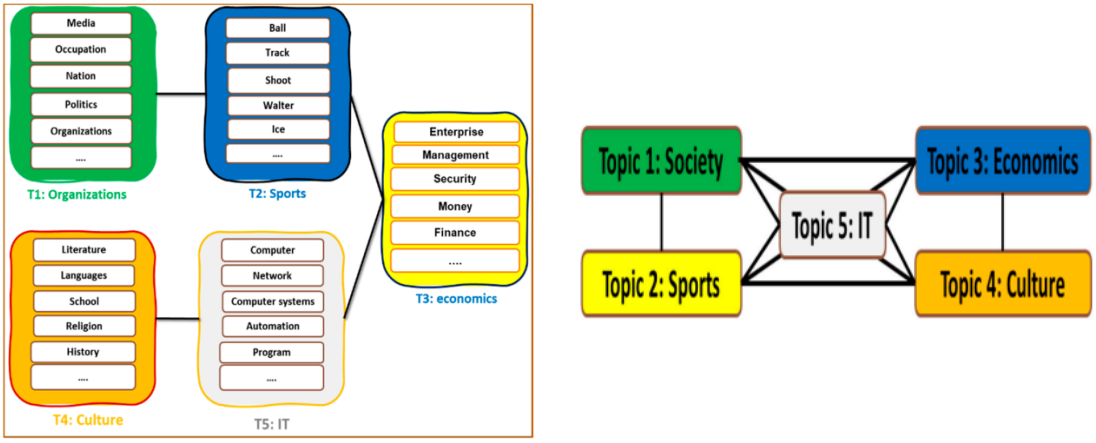
شکل ۷: نمای کلی از مدولاریتی بالا و پایین در یک گراف.

۴.۵. *مدل‌سازی موضوعات مورد علاقه با استفاده از گراف‌ها در شبکه‌های اجتماعی*

گراف‌ها می‌توانند برای مدل‌سازی موضوعات مورد علاقه در شبکه‌های اجتماعی استفاده شوند. با گسترش استفاده از شبکه‌های اجتماعی (SN)، مدل‌سازی موضوعات به‌طور قابل توجهی برای استخراج اطلاعات چندجانبه از کاربران به‌کار گرفته شده است. مدل‌سازی موضوعات روشی است برای پیدا کردن گروهی از کلمات (یعنی موضوع) از مجموعه‌ای از اسناد یا پاراگراف‌ها (مثلاً پست‌ها، نظرات، بازخوردها و کامنت‌های کاربران در پلتفرم‌های SN) که بهترین نمایندهٔ اطلاعات در آن مجموعه هستند. این فرایند به‌عنوان یک شکل از استخراج یا پردازش متن نیز شناخته می‌شود که الگوهای تکراری کلمات را در مواد متنی شبیه‌سازی می‌کند. مدل‌سازی موضوعات می‌تواند شامل مدل‌سازی مبتنی بر اطلاعات، محتوا، فعالیت‌ها و جنبه‌های مختلف باشد. در سناریوی میکروبلاگ‌ها، نهادهای اسمی نقش مهمی در درک زبان، تفسیر و تولید محتوا دارند که به‌طور مؤثری دانش علایق شخصی را منعکس می‌کند. به‌عنوان مثال، پنج موضوع استخراج‌شده از میکروبلاگ‌ها در شکل ۸ نمایش داده شده است. در این گراف‌ها، رئوس نمایانگر موضوعات هستند و یال‌ها رابطهٔ میان آن‌ها را مدل‌سازی می‌کنند. این موضوعات می‌توانند بر اساس اطلاعات موجود در آن‌ها بیشتر دسته‌بندی شوند. از طریق مدل‌سازی موضوعات، بازیابی و پردازش اطلاعات می‌تواند مقاوم‌تر شود. علاوه بر این، مدل‌سازی موضوعات می‌تواند برای تجزیه‌وتحلیل رفتارهای کاربران در شبکه‌های اجتماعی به‌کار رود و برای مدل‌سازی پروفایل کاربران جهت تبلیغات هدفمند نیز مفید باشد. اخیراً این روش به‌طور گسترده‌ای در تحلیل احساسات برای شناسایی قلدری اینترنتی در شبکه‌های اجتماعی مورد استفاده قرار گرفته است. پیشرفت‌های تکنیک‌های یادگیری ماشین و یادگیری عمیق باعث شده‌اند که مدل‌سازی موضوعات به‌طور گسترده‌ای در تحلیل احساسات مربوط به موضوعات مورد علاقه، بازخورد دربارهٔ برنامه‌ها و نقدهای محصولات استفاده شود.

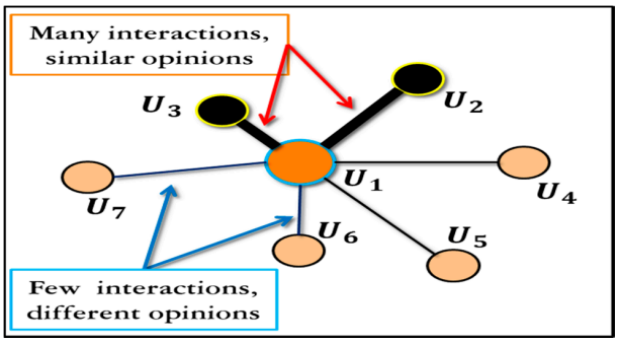
۴.۶. *برآورد و استنباط قدرت روابط اجتماعی بین افراد مختلف در شبکه‌های اجتماعی با استفاده از گراف‌ها*

نظریهٔ گراف می‌تواند برای برآورد قدرت روابط اجتماعی میان کاربران مختلف در گراف کاربران شبکهٔ اجتماعی (SN) به‌کار رود. در گراف‌های روابط اجتماعی، رأس‌ها نمایانگر کاربران و یال‌ها نشان‌دهندهٔ تعاملات میان آن‌ها هستند. با تحلیل این تعاملات، نظرات کاربران می‌توانند مدل‌سازی شود. روابط مستقیم بین نظرات و تعاملات وجود دارد. یک مثال برای برآورد قدرت روابط اجتماعی بین کاربران از طریق تعاملات شبکهٔ اجتماعی در شکل ۹ نشان داده شده است. این تحلیل می‌تواند برای شناسایی و ارزیابی تأثیرات تعاملات اجتماعی و نظرات افراد در شبکهٔ اجتماعی مفید باشد. علاوه بر این، گراف‌ها می‌توانند برای مدل‌سازی و تحلیل تمامی مشکلات و پدیده‌های مربوط به شبکه‌های اجتماعی به‌کار روند. با کمک گراف‌ها، مدل‌سازی و تحلیل شبکه‌های اجتماعی بسیار ساده‌تر می‌شود. همچنین، نمایشی که گراف‌ها از کاربران ارائه می‌دهند، مزایای زیادی از جمله خلاصه‌سازی داده‌های بزرگ به‌شکل بصری، مقایسهٔ آسان بین مجموعه‌های دادهٔ مختلف و شفاف‌سازی بهتر روندها نسبت به سایر روش‌های نمایشی مانند جداول دارد. گراف‌ها اطلاعات بیشتری در مورد موجودیت‌ها مانند ویژگی‌های رأس‌ها، درجهٔ رأس‌ها، برچسب‌های یال‌ها/رأس‌ها و شاخص‌های گراف (نزدیکی، مرکزیت‌ها، طول مسیرها، کلیک‌ها، زیرگراف‌ها و دسترسی) را در خود دارند که در دستیابی به اهداف علمی و تجاری از طریق تحلیل گراف‌های شبکه‌های اجتماعی بسیار حیاتی است.



(آ) مدل‌سازی موضوعات با استفاده از گراف میکروبلاگ‌ها. (ب) نمونه‌ای از اطلاعات موجود در هر موضوع.

شکل ۸: نمای کلی مدل‌سازی موضوعات و اطلاعات موجود در هر موضوع از طریق بهره‌گیری از گراف‌ها.



شکل ۹: طبقه‌بندی مشکلات تحلیل شبکه‌های اجتماعی آنلاین.

۵. یافته‌های اصلی

در این مطالعه، مفاهیم نظریهٔ گراف به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی و تحلیل مسائل مختلف در حوزهٔ شبکه‌های اجتماعی (SN)، علوم کامپیوتر و ریاضیات مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با توجه به کاربردهای متعدد نظریهٔ گراف، این مقاله به بررسی تعدادی از کاربردهای کلیدی این مفاهیم در شبکه‌های اجتماعی پرداخته است. در شبکه‌های اجتماعی، گراف‌ها می‌توانند به‌طور مؤثری برای مدل‌سازی روابط میان کاربران، تحلیل ساختارهای اجتماعی و شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی استفاده شوند. به‌طور مثال، در تحلیل شبکه‌های اجتماعی، رأس‌ها نمایانگر کاربران و یال‌ها نمایانگر روابط میان آن‌ها هستند. این گراف‌ها می‌توانند جهت‌دار یا بدون جهت باشند و می‌توانند برای نمایش شباهت، اعتماد، هزینهٔ ارتباطات، فرکانس تعاملات و تأثیرات کاربران در شبکهٔ اجتماعی به‌کار روند. در این زمینه یکی از کاربردهای مهم استفاده از نظریهٔ گراف در تحلیل ویژگی‌های اجتماعی و رفتارهای کاربران است. برای مثال، گراف‌ها در تحلیل رفتار خرید مشتریان، پیش‌بینی الگوهای خرید، شناسایی رهبران تأثیرگذار در شبکه‌های اجتماعی و همچنین، تحلیل‌های امنیتی و حریم خصوصی کاربرد دارند. علاوه بر این، در شبکه‌های اجتماعی، گراف‌ها می‌توانند برای مدل‌سازی فرایندهای انتشار اطلاعات، تجزیه‌وتحلیل شبکه‌های اعتماد، مدل‌سازی تحلیلی و تشخیص تقلب مورد استفاده قرار گیرند. با این حال، استفاده از گراف‌ها برای مدل‌سازی شبکه‌های اجتماعی و تحلیل‌های ریاضی با چالش‌هایی همراه است. یکی از این چالش‌ها مقیاس‌پذیری گراف‌ها است، چراکه در بسیاری از مشکلات دنیای واقعی، گراف‌ها بسیار بزرگ و پیچیده می‌شوند و نیاز به قدرت پردازشی و ذخیره‌سازی زیادی دارند. همچنین، تجزیه‌وتحلیل دینامیکی شبکه‌ها و ارزیابی دقیق روابط اجتماعی کاربران با توجه به پیچیدگی داده‌ها و تغییرات سریع در شبکه‌های اجتماعی، از دیگر چالش‌های عمده هستند. در نهایت، این مقاله علاوه بر بررسی کاربردهای نظریهٔ گراف در شبکه‌های اجتماعی، چالش‌های فنی مرتبط با پردازش و مدل‌سازی گراف‌ها را نیز مطرح کرده است. این چالش‌ها شامل انتخاب روش‌های مناسب برای تجسم داده‌ها، پردازش گراف‌های بزرگ و ارزیابی صحت روابط و الگوهای اجتماعی در شبکه‌های پیچیده است.

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، استفاده از نظریهٔ گراف و تحلیل انرژی گراف‌ها به‌عنوان ابزاری نوین برای مدل‌سازی و تحلیل شبکه‌های اجتماعی مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به افزایش روزافزون حجم داده‌ها در شبکه‌های اجتماعی و پیچیدگی روابط کاربران، تحلیل صحیح این داده‌ها به‌وسیلهٔ روش‌های سنتی دشوار است. هدف اصلی این تحقیق، ارائهٔ مدل‌هایی برای کاهش بار محاسباتی و بهینه‌سازی فرایندهای تحلیل شبکه‌های اجتماعی با استفاده از تحلیل گراف‌ها و انرژی گراف‌ها بود. در این تحقیق، از مدل‌سازی گراف‌ها برای شبیه‌سازی روابط پیچیدهٔ کاربران و تحلیل الگوهای پنهان در شبکه‌ها استفاده شد و از انرژی گراف‌ها به‌عنوان معیاری برای اندازه‌گیری پیچیدگی و تنوع روابط بهره‌برداری گردید. روش‌های تحلیلی شامل شبیه‌سازی تجربی، استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته برای خوشه‌بندی و شناسایی جوامع و تحلیل ویژگی‌های مختلف گراف‌ها همچون مرکزیت و مدولاریتی بود. نتایج نشان داد که مدل‌های پیشنهادی قادرند به‌طور مؤثری در بهینه‌سازی تحلیل‌ها، کاهش پیچیدگی محاسباتی و شبیه‌سازی رفتار کاربران در شبکه‌های اجتماعی کمک کنند. این پژوهش، به‌ویژه در زمینهٔ تحلیل داده‌های بزرگ و شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی، نقش مهمی ایفا کرده و کاربردهای گسترده‌ای در تحلیل رفتار شبکه‌های اجتماعی دارد.

پیشنهادهای پژوهشی

- توسعهٔ الگوریتم‌های بهینه برای کاهش بار محاسباتی در تحلیل گراف‌های بزرگ
- تحلیل انرژی گراف‌ها در شبیه‌سازی فرایندهای اطلاعاتی پیچیده در شبکه‌های اجتماعی
- ارزیابی تأثیر ویژگی‌های مختلف گراف مانند مرکزیت و مدولاریتی در تحلیل شبکه‌های اجتماعی
- بررسی استفاده از روش‌های یادگیری ماشین در بهبود مدل‌های تحلیل انرژی گراف‌ها

محدودیت‌های پژوهش

- محدودیت داده‌های قابل دسترس برای تحلیل شبکه‌های اجتماعی
- پیچیدگی محاسباتی در تحلیل گراف‌های با اندازهٔ بزرگ
- محدودیت در پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیشرفته روی پلتفرم‌های محدود
- دشواری در شبیه‌سازی تعاملات پیچیده و شناسایی روندهای پنهان در زمان واقعی

مراجع

[۱] زهرا اسماعیلی، محمدرضا نام‌آور زینی‌وندی، اسماعیل عنانی و مهدی احسان. مروری بر برنامه‌ریزی سیستم‌های ذخیره‌ساز انرژی در شبکه‌های توزیع فعال و کاربردهای آن. *مهندسی برق و الکترونیک ایران*، ۴: ۲۵۵–۲۷۵، ۱۴۰۱.

[۲] مریم خادمی، نیما شیخ‌خانی و پونه خدابخش. یافتن افراد تأثیرگذار در گراف شبکه‌های اجتماعی بر اساس الگوریتم CSCS و مقدار شاپلی در نظریهٔ بازی. *پژوهش‌های ریاضی مصاحب*، ۳: ۳۷۳–۳۸۶، ۱۳۹۹.

[۳] حسین سهلانی. تحلیل اخلالگران بازار ارز با استفاده از روش‌های تحلیل شبکه‌های اجتماعی و مبتنی بر گراف. *پدافند الکترونیکی و سایبری*، ۱: ۱۰۷–۱۱۶، ۱۴۰۲.

[۴] امیرمحمد شاه‌پرستان، امینه امینی و هادی صبوحی. افزایش دقت تشخیص حملات سیبیل در شبکه‌های اجتماعی با استفاده از روش خوشه‌بندی ترکیبی بر روی گراف ساختاری. *رایانش نرم و فناوری اطلاعات*، ۳: ۸۵–۹۸، ۱۴۰۲.

[5] T. Bian, X. Xiao, T. Xu, P. Zhao, W. Huang, Y. Rong, and J. Huang. Rumor detection on social media with bi-directional graph convolutional networks. in *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 34(1), pages 549–556, New York Hilton Midtown, New York, New York, USA, February 7–12, 2020.

[6] Y. Chen, T. Xie, H. Chen, X. Huang, N. Cui, and J. Li. KGCF: Social relationship-aware graph collaborative filtering for recommendation. *Information Sciences*, 680:121102, 2024.

[7] N. Hafiene, W. Karoui, and L. B. Romdhane. Influential nodes detection in dynamic social networks: A survey. *Expert Systems with Applications*, 159:113642, 2020.

[8] S. Liang, Y. Wang, C. Liu, L. He, L. I. Huawei, D. Xu, and X. Li. EnGN: A high-throughput and energy-efficient accelerator for large graph neural networks. *IEEE Transactions on Computers*, 70(9):1511–1525, 2020.

[9] W. Liao, D. Yang, Y. Wang, and X. Ren. Fault diagnosis of power transformers using graph convolutional network. *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, 7(2):241–249, 2020.

[10] A. Majeed, and I. Rauf. Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks. *Inventions*, 5(1):10, 2020.

[11] B. C. Molokwu, S. B. Shuvo, N. C. Kar, and Z. Kobti. Node classification in complex social graphs via knowledge-graph embeddings and convolutional neural network. in *International Conference on Computational Science*, pages 183–198, Cham: Springer International Publishing, 2020.

[12] Q. Ni, J. Guo, W. Wu, H. Wang, and J. Wu. Continuous influence-based community partition for social networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 9(3):1187–1197, 2021.
[13] A. A. Ojugo, and D. O. Otakore, Intelligent cluster connectionist recommender system using implicit graph friendship algorithm for social networks. *IAES International Journal of Artificial Intelligence*, 9(3):497, 2020.
[14] E. Rossi, H. Kenlay, M. I. Gorinova, B. P. Chamberlain, X. Dong, and M. M. Bronstein. On the unreasonable effectiveness of feature propagation in learning on graphs with missing node features. in *Proceedings of the First Learning on Graphs Conference*, volume 198, pages 1–16, Virtual Event, December 9-12, 2022.
[15] M. Xu. Understanding graph embedding methods and their applications. *SIAM Review*, 63(4):825–853, 2021.
[16] K. Zhou, X. Huang, D. Zha, R. Chen, L. Li, S. H. Choi, and X. Hu. Dirichlet energy constrained learning for deep graph neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34:21834–21846, 2021.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، CT–137، صص. ۶۸–۷۷

بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی

سید احسان حسینی *[آ]، دکتر محمود محمودی[ب]

[آ] دانشجوی دکتری آنالیز عددی دانشگاه قم
[ب]استادیار دانشگاه قم

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
الگوریتم ژنتیک
بهینه‌سازی چندهدفه
فشرده‌سازی تصاویر
تصاویر پزشکی.

چکیده

بهینه‌سازی چندهدفه ابزاری مؤثر برای مدیریت اهداف متضاد در مسائل پیچیده، به‌ویژه در کاربردهای حساس مانند فشرده‌سازی تصاویر پزشکی است. اهمیت این موضوع در حفظ کیفیت اطلاعات حیاتی تصاویر پزشکی، از جمله تصاویر CT و DICOM، نمایان می‌شود؛ چراکه این تصاویر در تشخیص و درمان بیماری‌ها نقش حیاتی دارند و کاهش حجم داده‌ها نباید به از دست رفتن کیفیت یا اطلاعات کلیدی منجر شود. هدف این پژوهش، دستیابی به تعادلی میان معیارهای کیفیت تصویر (PSNR، SSIM و RMSE) و نسبت فشرده‌سازی (CR) از طریق روشی مبتنی بر الگوریتم‌های تکاملی و به‌ویژه الگوریتم ژنتیک (GA) است. در این روش، از تبدیل موجک گسسته چندسطحی (DWT) برای تجزیه تصویر و کمیت‌سازی برداری (VQ) برای کاهش داده‌ها استفاده شد. سپس، بهینه‌سازی چندهدفه با الگوریتم ژنتیک جهت دستیابی به جبهه پارتو و انتخاب بهترین مقادیر برای معیارهای مذکور صورت گرفت. نتایج تجربی نشان داد که این روش، در مقایسه با روش‌های مرجع، بهبود قابل‌توجهی در حفظ کیفیت تصویر و افزایش نسبت فشرده‌سازی دارد. شاخص تعادل (BIX) نیز عملکرد بهینه این روش را در ترکیب معیارهای چندهدفه تأیید می‌کند. این یافته‌ها نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی در فشرده‌سازی کارآمد و حفظ اطلاعات تصاویر پزشکی است.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، بهینه‌سازی چندهدفه به یکی از مهم‌ترین موضوعات تحقیقاتی در حوزه علوم کامپیوتر و مهندسی تبدیل شده است [۱۳]. این نوع بهینه‌سازی که به دنبال یافتن راه‌حل‌هایی برای تعادل میان چندین هدف متضاد است، نقش مهمی در حل مسائل پیچیده دنیای واقعی ایفا می‌کند [۱۶]. برخلاف روش‌های سنتی که معمولاً بر حل مسائل تک‌هدفه تمرکز دارند، در بهینه‌سازی چندهدفه هدف یافتن مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه، موسوم به جبهه پارتو، است که در آن هیچ هدفی نمی‌تواند بدون قربانی کردن سایر اهداف بهبود یابد [۱].

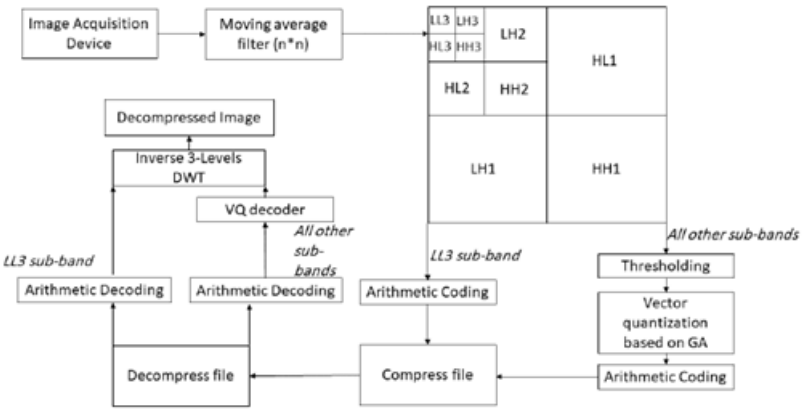
این مسائل در حوزه‌های مختلف از جمله مهندسی، اقتصاد، کشاورزی، و پردازش تصویر کاربرد دارند. با توجه به پیچیدگی این مسائل، روش‌های سنتی مبتنی بر ریاضیات اغلب قادر به حل مؤثر مسائل چندهدفه نیستند؛ چراکه این روش‌ها به فرمول‌بندی‌های دقیق و فرضیاتی وابسته‌اند که در دنیای واقعی به‌ندرت قابل‌اجرا هستند [۱۲]. در این راستا، الگوریتم‌های تکاملی به‌ویژه الگوریتم ژنتیک (Genetic Algorithm) به‌عنوان یکی از پرکاربردترین روش‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه مطرح شده‌اند [۲]. این الگوریتم‌ها که از فرایند انتخاب طبیعی و تکامل زیستی الهام گرفته‌اند، می‌توانند فضای جستجوی بزرگی را با حفظ تنوع جمعیت بررسی کرده و راه‌حل‌های بهینه را شناسایی کنند [۹]. یکی از کاربردهای مهم بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی در فشرده‌سازی تصویر است [۱۰]. فشرده‌سازی تصاویر دیجیتال، به‌ویژه در حوزه تصاویر پزشکی، یکی از چالش‌های اساسی در علوم کامپیوتر است. تصاویر پزشکی باید به‌گونه‌ای فشرده شوند که در عین کاهش حجم داده‌ها، کیفیت تصویر و اطلاعات مهم آن برای تشخیص حفظ شود [۶]. این موضوع به‌ویژه در شرایطی که نسبت فشرده‌سازی

*سخنران
پست الکترونیک : hosseini.essi@gmail.com (سید احسان حسینی)

(Compression Ratio) در مقابل معیارهای کیفیت تصویر مانند میانگین مربعات خطا (MSE)، نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) و شاخص شباهت ساختاری (SSIM) قرار می‌گیرد، چالش‌برانگیزتر می‌شود [۱۴]. در مطالعات مرتبط با بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، پژوهش‌های متعددی انجام شده است [۴، ۵]. به‌عنوان‌مثال، الکینانی و همکاران (۲۰۲۱) [۷] روشی را با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات (PSO) برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه پیشنهاد کردند. آن‌ها از ترکیب تبدیل موجک و PSO برای کاهش عدم پیوستگی موجک‌ها در فشرده‌سازی تصویر استفاده کردند و نشان دادند که این روش در بهبود نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) و نسبت فشرده‌سازی (CR) مؤثر است [۳]. در مطالعه دیگری، راحبی (۲۰۲۲) [۱۵] از الگوریتم بهینه‌سازی نهنگ برای بهبود فرآیند کمیت‌سازی برداری (VQ) در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه استفاده کرد. این تحقیق نشان داد که الگوریتم‌های تکاملی می‌توانند در انتخاب کدبوک بهینه تأثیر بسزایی داشته باشند و باعث کاهش اعوجاج تصویر و بهبود عملکرد فشرده‌سازی شوند [۱۵]. این دو مطالعه نشان می‌دهند که استفاده از الگوریتم‌های تکاملی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌تواند بهبودهایی در عملکرد و دقت راه‌حل‌ها به همراه داشته باشد. با وجود پیشرفت‌های حاصل‌شده در این حوزه، چالش‌ها و شکاف‌های تحقیقاتی همچنان وجود دارد. یکی از شکاف‌های مهم، محدودیت استفاده از الگوریتم‌های تکاملی پیشرفته‌تر است [۱۱]. اگرچه الگوریتم ژنتیک یک روش کارآمد محسوب می‌شود، سایر الگوریتم‌ها مانند NSGA-II، MOEA/D و بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) در برخی مسائل عملکرد بهتری از خود نشان داده‌اند [۳]. از این‌رو، نیاز به مقایسه دقیق‌تر و جامع‌تر این الگوریتم‌ها و بررسی نقاط قوت و ضعف هرکدام احساس می‌شود. هدف از این پژوهش، بررسی روش‌های نوین در حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با تمرکز بر الگوریتم‌های ژنتیک و سایر الگوریتم‌های تکاملی است. در این راستا، به تحلیل پیشرفت‌های اخیر در این حوزه و کاربرد آن‌ها در مسائل واقعی پرداخته می‌شود. همچنین، با استفاده از فشرده‌سازی تصویر به‌عنوان یک مطالعه موردی، به بررسی نحوه عملکرد این روش‌ها در حل مسائل چندهدفه پرداخته خواهد شد. در ادامه، به شرح الگوریتم‌های تکاملی مورد استفاده در بهینه‌سازی چندهدفه و تحلیل کاربرد الگوریتم‌های ژنتیک در فشرده‌سازی تصویر پرداخته خواهد شد.

۲. روش تحقیق

روش تحقیق این پژوهش بر استفاده از الگوریتم‌های تکاملی به‌ویژه الگوریتم ژنتیک (GA) متمرکز است و هدف آن حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با تعادل میان اهداف متضاد می‌باشد. در این روش، فرآیند فشرده‌سازی تصویر به دو بخش اصلی فشرده‌سازی (Compress Partition) و بازسازی (Decompress Partition) تقسیم شده است. برای دستیابی به تعادل میان نسبت فشرده‌سازی (CR) و حفظ کیفیت تصویر (معیارهای CSC شامل MSE، PSNR، و SSIM)، از الگوریتم ژنتیک به‌عنوان ابزار اصلی بهینه‌سازی استفاده شده است. در این روش، ابتدا تصویر ورودی از نویزهای اضافی پاک‌سازی می‌شود و سپس با استفاده از تبدیل موجک گسسته چندسطحی (DWT)، زیرباندهای تصویر ایجاد می‌شوند. زیرباندهای کلیدی با روش آستانه‌گذاری و کمیت‌سازی برداری (VQ) پردازش شده و در نهایت، الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی این فرآیندها به کار می‌رود. فرآیند بهینه‌سازی به‌گونه‌ای طراحی شده که جبهه پارتو به‌عنوان مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه برای مدیریت اهداف متضاد حاصل گردد. مراحل این روش در ادامه شرح داده می‌شود. شکل ۱ جریان کلی روش پیشنهادی فشرده‌سازی تصویر بهینه‌شده را نشان می‌دهد.

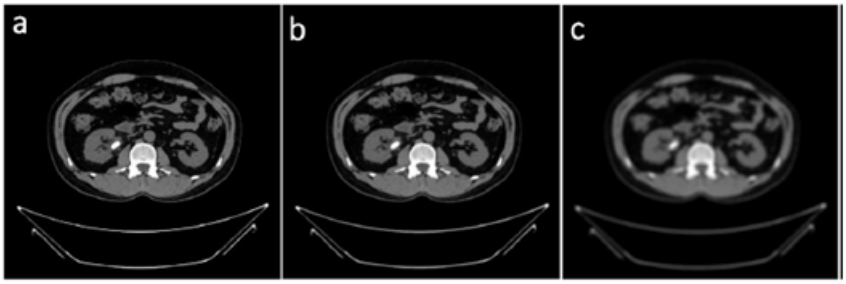


شکل ۱: جریان کلی روش تحقیق برای فشرده‌سازی بهینه تصویر

۲.۱. بخش فشرده‌سازی

در فرآیند فشرده‌سازی، تصویر ورودی ابتدا از دستگاه‌های تصویربرداری دریافت شده و با استفاده از فیلتر میانگین متحرک (MAF)، از نویزهای اضافی پاک‌سازی می‌شود. این فیلتر با کاهش نویزها، لبه‌های تصویر را حفظ کرده و تصویر را برای مراحل بعدی آماده می‌کند. نمونه‌هایی از

تصاویر فیلترشده با اندازه‌های مختلف پنجره در شکل ۲ نشان داده شده است. پس از این مرحله، تبدیل موجک گسسته سه‌سطحی (3-LDWT) بر روی تصویر اعمال می‌شود. این تبدیل، تصویر را به زیرباندهایی با فرکانس‌های مختلف تقسیم می‌کند که از میان آن‌ها زیرباند LL-3 به‌عنوان حامل اطلاعات کلیدی تصویر، جداگانه پردازش می‌شود. سایر زیرباندها با استفاده از روش آستانه‌گذاری پردازش شده و مقادیر کوچکتر از آستانه به صفر تبدیل می‌شوند که این امر باعث افزایش نسبت فشرده‌سازی می‌گردد. در ادامه، زیرباندهای پردازش‌شده به فرآیند کمیت‌سازی برداری (VQ) وارد می‌شوند. این فرآیند با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی شده تا بهترین کدبوک برای فشرده‌سازی انتخاب شود. کدبوک به‌عنوان مرجع برای کاهش داده‌ها عمل کرده و داده‌ها در نهایت با استفاده از روش کدگذاری حسابی (Arithmetic Coding) فشرده می‌شوند.



شکل ۲: تصاویر فیلترشده بر اساس اندازه‌های مختلف پنجره؛ (الف) تصویر اصلی، (ب) پنجره ۳ × ۳، (ج) پنجره ۹ × ۹.

۲.۲ . *بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم ژنتیک*

در این پژوهش، فرآیند کمیت‌سازی به‌عنوان یکی از مراحل کلیدی فشرده‌سازی تصویر، بهینه‌سازی شده است. کمیت‌سازی به کاهش تعداد سطوح شدت تصویر اشاره دارد که منجر به کاهش حجم داده‌ها می‌شود. با این حال، این کاهش ممکن است کیفیت تصویر را تحت تأثیر قرار دهد. هدف از این فرآیند، دستیابی به تعادل میان کاهش حجم داده‌ها و حفظ کیفیت تصویر با استفاده از الگوریتم ژنتیک است.

در این پژوهش، بهینه‌سازی چندهدفه برای فرآیند کمیت‌سازی تصویر به کار گرفته شده است. سطح شدت پیکسل‌های تصویر (بین ۰ تا ۲۵۵) به n سطح تقسیم می‌شود. هدف اصلی این بهینه‌سازی، تعیین تعداد سطوح n و مقادیر مربوطه با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک چندهدفه (MOGAO) است. این فرآیند به‌عنوان یک چالش تعادل میان اعوجاج تصویر و معیارهای عملکرد سیستم (CSC) تعریف شده و تأثیر قابل‌توجهی بر کیفیت بازسازی تصویر و نسبت فشرده‌سازی دارد. برای مدل‌سازی این مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، یک تابع هدف (Mobj) تعریف شده است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$Mobj = \frac{\alpha}{f_1} + \beta \times f_2 + \gamma \times f_3 + \omega \times f_4 \qquad (1)$$

در این معادله، α، β، γ و ω ضرایب اولویت‌دهی به معیارهای CSC هستند و با توجه به نیازهای سیستم تنظیم می‌شوند. این ضرایب امکان کنترل اهمیت نسبی معیارها را فراهم می‌کنند. معیارهای CSC به شرح زیر تعریف شده‌اند:

هدف اول: خطای میانگین مربعات (MSE)

این معیار میزان تفاوت میان تصویر اصلی و تصویر بازسازی‌شده را اندازه‌گیری می‌کند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_1(MSE) = \frac{1}{M \times N} \sum_{X=1}^{M} \sum_{X=1}^{N} \left(I(x,y) - I'(x,y) \right) \qquad (2)$$

که در آن M و N به ترتیب تعداد پیکسل‌های طول و عرض تصویر هستند.

هدف دوم: نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR)

این معیار کیفیت تصویر بازسازی‌شده را با اندازه‌گیری نسبت سیگنال به نویز ارزیابی می‌کند:

$$f_2(PSNR) = 10 \log \frac{255^2}{MSE} \qquad (3)$$

هدف سوم: شاخص شباهت ساختاری (SSIM)

این معیار برای اندازه‌گیری شباهت ساختاری میان تصویر اصلی و بازسازی‌شده به‌کار می‌رود:

$$f_۳(SSIM) = \frac{۲\mu_x\mu_y}{\mu_x^۲ + \mu_y^۲} \times \frac{۲\delta_x\delta_y}{\delta_x^۲ + \delta_y^۲} \times \frac{۲\delta_{xy}}{\delta_x\delta_y} \quad (۴)$$

که در آن:

$$\mu_x = \frac{۱}{k}\sum_{i=۱}^{k} x_i \quad (۵)$$

$$\mu_y = \frac{۱}{k}\sum_{i=۱}^{k} y_i \quad (۶)$$

$$\delta_x = \left(\frac{۱}{k-۱}\sum_{i=۱}^{k}(x_i - \mu_x)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \quad (۷)$$

$$\delta_y = \left(\frac{۱}{k-۱}\sum_{i=۱}^{k}(y_i - \mu_y)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \quad (۸)$$

هدف چهارم: نسبت فشرده‌سازی (CR)
این معیار نشان‌دهنده کارایی فشرده‌سازی تصویر است:

$$f_۴(CR) = \frac{I(x,y)}{I'(x,y)} \quad (۹)$$

در الگوریتم ژنتیک، ابتدا معیارهای CSC و سطوح n به کروموزوم‌های باینری تبدیل می‌شوند و جمعیتی اولیه شامل ۱۰۰ فرد ایجاد می‌گردد. این الگوریتم طی ۱۰۰۰ تکرار و با نرخ جهش ۰٫۰۰۱ اجرا می‌شود تا بهترین کروموزوم انتخاب شود. مقدار برازش هر کروموزوم با توجه به اهداف تعریف‌شده شامل MSE، PSNR، SSIM و CR محاسبه می‌شود. والدین برای تولید نسل جدید از طریق روش انتخاب تورنمنتی انتخاب می‌شوند، به‌گونه‌ای که ۲۰ درصد جمعیت با بالاترین مقدار برازش برای تولید فرزندان جدید انتخاب می‌گردند. عملگر تقاطع تک‌نقطه‌ای برای مبادله اطلاعات ژنتیکی بین والدین و عملگر جهش با نرخ ثابت برای ایجاد تنوع ژنتیکی در جمعیت به کار گرفته می‌شوند. در هر نسل، راه‌حل‌ها بر اساس مفهوم غلبه غیر مستقیم مرتب می‌شوند و راه‌حل‌هایی که در جبهه پارتو قرار دارند، برای نسل بعد حفظ می‌شوند. این روش با استفاده از آستانه‌های پراکندگی، تنوع جمعیت را در طول جبهه پارتو افزایش می‌دهد. در پایان، کروموزومی که بالاترین مقدار برازش را دارد، به‌عنوان راه‌حل نهایی انتخاب می‌شود و بهترین مقادیر سطوح n و معیارهای CSC را ارائه می‌دهد و تعادلی بهینه میان کیفیت تصویر و نسبت فشرده‌سازی برقرار می‌کند.

۳.۲ . *فشرده‌سازی نهایی تصویر*

در مرحله فشرده‌سازی نهایی تصویر، زیرباندهای تولیدشده پس از کمیت‌سازی برداری با استفاده از روش کدگذاری حسابی (Arithmetic Coding) فشرده می‌شوند. این روش با کاهش تکرار داده‌های اضافی و استفاده بهینه از داده‌ها، نسبت فشرده‌سازی (CR) را بهبود می‌بخشد. در ادامه، تمامی زیرباندهای پردازش‌شده به همراه زیرباند LL-3 با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا فایل فشرده نهایی ایجاد شود. این فایل شامل تمامی اطلاعات لازم برای بازسازی تصویر در مرحله بازسازی است و بهینه‌ترین استفاده از منابع را برای ذخیره‌سازی و انتقال داده‌ها ممکن می‌سازد.

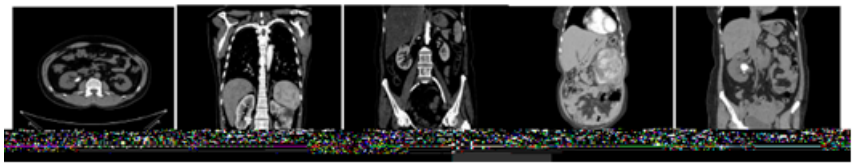
۴.۲ . *بخش بازسازی*

در فرآیند بازسازی، فایل فشرده‌شده به‌صورت معکوس پردازش می‌شود. ابتدا فایل رمزگشایی شده و زیرباند LL-3 و سایر زیرباندها جداگانه بازیابی می‌شوند. سپس، با استفاده از الگوریتم ژنتیک و کمیت‌سازی برداری، زیرباندها پردازش می‌شوند. در نهایت، با استفاده از تبدیل موجک معکوس سه‌سطحی (Inverse 3-LDWT)، تصویر نهایی بازسازی می‌شود. این فرآیند نشان‌دهنده توانایی روش پیشنهادی در حفظ کیفیت تصویر و کاهش حجم داده‌ها به‌طور هم‌زمان است.

۳. نتایج تجربی و بحث

۳.۱. آماده‌سازی داده‌ها

برای ارزیابی پایداری و عملکرد روش پیشنهادی، از مجموعه داده‌های عمومی شامل مجموعه CT KIDNEY DATASET: Normal-Cyst-Tumor and Stone و تصاویر اولتراسوند (US) استفاده شد. این مجموعه داده‌ها شامل تصاویر متنوعی از بیماران با شرایط مختلف هستند و به ۱۰ مجموعه مجزا تقسیم شدند. این مجموعه‌ها شامل تصاویری از اعضای بدن و شرایطی همچون آنوریسم مغزی، سرطان مغز، تورم مغز، کیست کلیه، کلیه نرمال، سنگ کلیه، تورم کلیه، بارداری غیرطبیعی، بارداری طبیعی و مغز نرمال بودند. هر مجموعه شامل ۵ تصویر از ۵ بیمار مختلف با شرایط مشابه است. تمامی نتایج ارائه‌شده در این بخش به‌صورت میانگین برای هر مجموعه تصویر محاسبه شده‌اند. به‌عنوان مثال، مقدار PSNR محاسبه‌شده برای مجموعه ۱ با اندازه پنجره ۳ × ۳، با استفاده از معادله ۳ برای هر تصویر محاسبه شده و مقدار نهایی میانگین تمامی تصاویر مجموعه است که در جدول ۱ با مقدار ۳۱٫۴۶ نشان داده شده است. تمامی آزمایش‌ها با استفاده از نرم‌افزار Matlab R2022a انجام شد. جدول ۱ مقایسه معیارهای CSC برای اندازه‌های مختلف پنجره را ارائه می‌دهد و نمونه‌ای از تصاویر اصلی در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳: نمونه ای از مجموعه داده اصلی تصویر.

جدول ۱: مقایسه معیارهای CSC با اندازه های مختلف پنجره.

مجموعه تصاویر	سایز پنجره ۳ × ۳				سایز پنجره ۹ × ۹				سایز پنجره ۲۰ × ۲۰			
	PSNR ↑	RMSE ↓	SSIM ↑	CR ↑	PSNR ↑	RMSE ↓	SSIM ↑	CR ↑	PSNR ↑	RMSE ↓	SSIM ↑	CR ↑
مجموعه ۱	۳۱٫۴۶	۴٫۴۴	۰٫۸۱	۲۱٫۰۳	۳۰٫۱۸	۴٫۶۲	۰٫۷۸	۲۹٫۶۰	۲۸٫۹۵	۴٫۸۱	۰٫۷۵	۵۳٫۷۰
مجموعه ۲	۲۸٫۳۵	۳٫۲۶	۰٫۹۰	۲۳٫۰۱	۲۷٫۵۲	۳٫۳۶	۰٫۸۸	۲۹٫۷۱	۲۶٫۷۲	۳٫۴۶	۰٫۸۵	۴۷٫۰۱
مجموعه ۳	۲۴٫۹۱	۳٫۶۳	۰٫۸۷	۳۰٫۰۴	۲۴٫۸۵	۳٫۶۷	۰٫۸۷	۳۰٫۷۴	۲۴٫۷۹	۳٫۶۴	۰٫۸۷	۳۲٫۱۸
مجموعه ۴	۳۳٫۲۰	۴٫۲۶	۰٫۹۵	۱۸٫۰۶	۳۱٫۱۳	۴٫۵۳	۰٫۸۹	۲۹٫۳۱	۲۹٫۱۹	۴٫۸۱	۰٫۸۴	۶۵٫۸۴
مجموعه ۵	۲۹٫۱۴	۱٫۸۶	۰٫۸۸	۲۵٫۰۳	۲۸٫۵۵	۱٫۹۰	۰٫۸۶	۳۰٫۰۶	۲۷٫۹۸	۱٫۹۴	۰٫۸۵	۴۲٫۱۱
مجموعه ۶	۲۸٫۵۰	۱٫۶۷	۰٫۸۷	۲۳٫۰۵	۲۷٫۸۷	۱٫۷۴	۰٫۸۳	۳۳٫۴۳	۲۵٫۱۰	۱٫۸۲	۰٫۷۹	۶۳٫۵۲
مجموعه ۷	۲۵٫۱۵	۲٫۹۵	۰٫۹۰	۲۴٫۰۵	۲۴٫۰۵	۳٫۲۴	۰٫۹۳	۳۰٫۸۱	۲۳٫۷۶	۲٫۳۵	۰٫۹۰	۴۸٫۱۱
مجموعه ۸	۳۴٫۶۰	۳٫۴۱	۰٫۹۱	۲۵٫۹۱	۳۲٫۵۱	۳٫۵۱	۰٫۹۳	۴۰٫۵۸	۳۱٫۹۱	۲٫۶۱	۰٫۹۰	۷۲٫۸۴
مجموعه ۹	۳۳٫۷۳	۳٫۶۰	۰٫۹۱	۳۳٫۰۳	۳۱٫۸۰	۳٫۲۹	۰٫۹۳	۳۵٫۰۴	۳۲٫۸۷	۱٫۸۵	۰٫۹۲	۴۴٫۰۶
مجموعه ۱۰	۳۱٫۱۴	۱٫۸۰	۰٫۹۲	۲۲٫۰۲	۲۹٫۰۸	۱٫۹۲	۰٫۸۶	۳۶٫۵۷	۲۷٫۱۶	۲٫۰۵	۰٫۸۰	۸۴٫۸۹

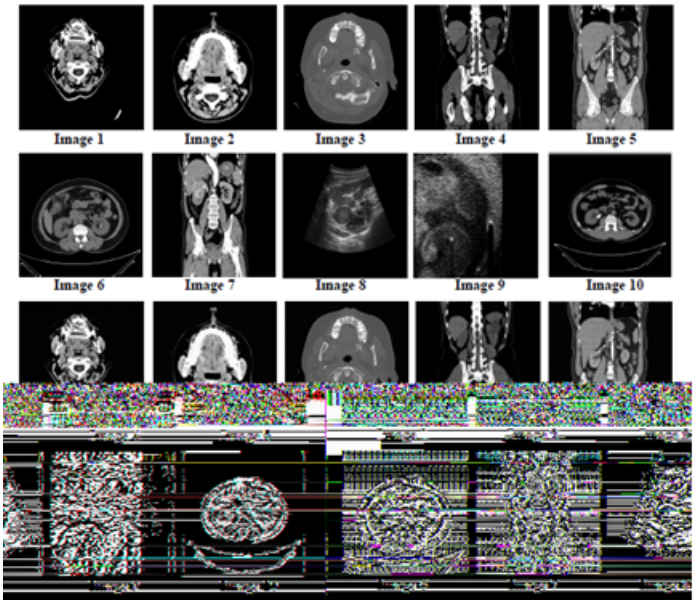
۳.۲. مرحله پیش‌پردازش (Preprocessing Phase)

در مرحله پیش‌پردازش، عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از اندازه‌های مختلف پنجره در فیلتر میانگین متحرک (MAF) مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از جدول ۱ نشان داد که استفاده از پنجره ۳ × ۳ منجر به دستیابی به مقادیر بالاتر در معیارهای PSNR، RMSE و SSIM نسبت به پنجره‌های بزرگ‌تر مانند ۹ × ۹ و ۲۰ × ۲۰ می‌شود. این امر به دلیل کاهش نویزهای موجود در تصویر و حفظ بهتر لبه‌ها با اندازه پنجره کوچک‌تر است. در مقابل، افزایش اندازه پنجره موجب صاف‌شدگی بیش‌ازحد لبه‌های تصویر می‌شود و اگرچه نسبت فشرده‌سازی (CR) را افزایش می‌دهد، اما کیفیت تصویر را کاهش می‌دهد. بنابراین، استفاده از پنجره ۳ × ۳ به‌عنوان انتخاب بهینه در روش پیشنهادی معرفی شده است، زیرا باعث حفظ تعادل مطلوب بین کیفیت تصویر و عملکرد فشرده‌سازی می‌شود.

۳.۳. پردازش تبدیل موجک گسسته (DWT Processing)

در این بخش، تأثیر اعمال آستانه بر ضرایب حاصل از تبدیل موجک گسسته (DWT) بر تصاویر فیلترشده ارزیابی شده است. این بررسی شامل دو سناریو می‌شود: تجزیه دو سطحی (سناریوی ۱) و تجزیه سه سطحی (سناریوی ۲). ضرایبی که مقدارشان کمتر از مقدار آستانه باشد، به صفر

تبدیل می‌شوند. معیارهای CSC تصاویر فشرده‌سازی شده و بازسازی شده در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با حذف برخی ضرایب، نویز تصویر کنترل شده و کیفیت تصویر (PSNR، RMSE و SSIM) تحت تأثیر قرار نگرفته است. افزایش تعداد ضرایب غیرقابل استفاده در عمق بالاتر تجزیه‌ها مشاهده شده و احتمال توالی طولانی از ضرایب صفر در این موارد افزایش یافته است. این موضوع تأثیر مثبتی بر کاهش حجم داده‌ها و افزایش کارایی فشرده‌سازی دارد. نمونه‌هایی از مجموعه تصاویر قبل و بعد از فشرده‌سازی در شکل ۴ ارائه شده‌اند، که هر تصویر به مجموعه تصویر متناظر در جدول ۲ مرتبط است. ردیف‌های اول و دوم، تصاویر اصلی با نویز نمک را نشان می‌دهند، در حالی که ردیف‌های سوم و چهارم تصاویر بازسازی‌شده مربوط به همان تصاویر را نمایش می‌دهند. تمامی این تصاویر با اندازه پنجره ۳ × ۳ انتخاب شده‌اند. علیرغم وجود نویز نمک در تصاویر اولیه، همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده، کیفیت تصاویر بازسازی‌شده قابل قبول بوده و این موضوع با مقادیر RMSE مناسب در جدول ۲ تأیید شده است. این نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در حفظ کیفیت تصویر و کاهش نویز موفق عمل کرده است.



شکل ۴: مقایسه کیفی تصاویر اندام‌های مختلف.

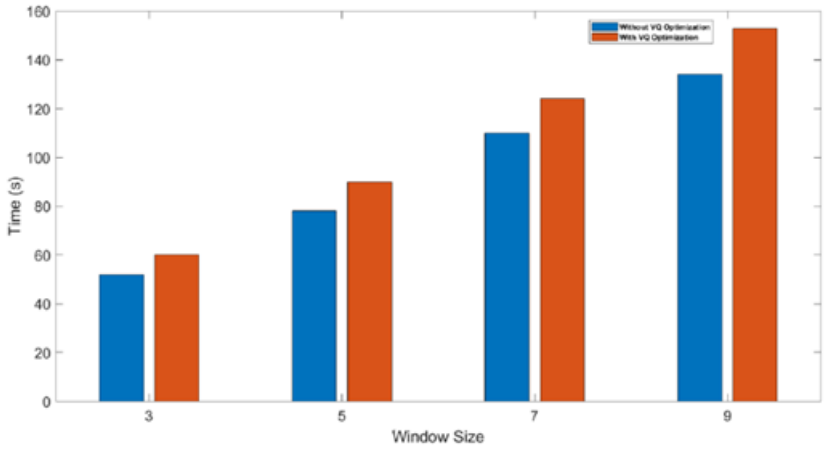
جدول ۲: مقایسه معیارهای CSC در سناریوهای مختلف تبدیل موجک گسسته (DWT).

مجموعه تصاویر	سناریوی ۱				سناریوی ۲			
	PSNR ↑	RMSE ↓	SSIM ↑	CR ↑	PSNR ↑	RMSE ↓	SSIM ↑	CR ↑
مجموعه ۱	۳۱٫۴۶	۴٫۴۴	۰٫۸۱	۲۱٫۰۳	۲۹٫۵۲	۶٫۷۶	۰٫۶۲	۲۷٫۷۵
مجموعه ۲	۲۸٫۳۵	۳٫۲۶	۰٫۹۰	۲۳٫۰۱	۲۸٫۲۲	۳٫۴۲	۰٫۸۹	۲۹٫۰۱
مجموعه ۳	۲۴٫۹۱	۳٫۶۳	۰٫۸۷	۳۰٫۰۴	۲۳٫۶۹	۵٫۰۹	۰٫۷۵	۳۶٫۰۱
مجموعه ۴	۳۳٫۲۰	۴٫۲۶	۰٫۹۵	۱۸٫۰۶	۳۱٫۶۱	۶٫۱۸	۰٫۷۹	۲۴٫۵۵
مجموعه ۵	۲۹٫۱۴	۱٫۸۶	۰٫۸۸	۲۵٫۰۳	۲۸٫۶۷	۲٫۴۲	۰٫۸۵	۳۰٫۸۸
مجموعه ۶	۲۸٫۵۰	۱٫۶۷	۰٫۸۷	۲۳٫۰۵	۲۶٫۵۳	۴٫۰۴	۰٫۸۶	۲۸٫۲۳
مجموعه ۷	۲۵٫۱۵	۲٫۲۲	۰٫۹۵۵	۲۴٫۰۵	۲۳٫۶۸	۳٫۸۹	۰٫۸۰	۳۰٫۹۳
مجموعه ۸	۳۴٫۶۰	۲٫۴۱	۰٫۹۷	۲۹٫۰۴	۳۳٫۳۸	۳٫۸۹	۰٫۸۵	۳۴٫۵۱
مجموعه ۹	۳۳٫۷۳	۱٫۸۰	۰٫۹۴	۳۱٫۰۵	۳۳٫۶۰	۱٫۹۶	۰٫۹۳	۳۶٫۲۲
مجموعه ۱۰	۳۱٫۱۴	۱٫۸۰	۰٫۹۲	۲۲٫۰۲	۳۰٫۴۴	۲٫۶۴	۰٫۸۵	۲۸٫۹۱

۴.۳ . *ارزیابی نسبت فشرده‌سازی (CR) و هزینه محاسباتی*

در این بخش، تأثیر روش پیشنهادی بر نسبت فشرده‌سازی (CR) در مقایسه با یک روش مرجع ارائه‌شده در پژوهش [۸] بررسی می‌شود. جدول ۳ نشان‌دهنده عملکرد روش بهینه‌سازی چندهدفه (MOGAO) در مقابل روش مرجع است. همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، مقادیر

CR برای مجموعه تصاویر در روش پیشنهادی به طور قابل توجهی بالاتر از روش مرجع است. این نتایج تأثیر مثبت الگوریتم جستجوی بهینه در تعیین بهترین مقدار CR را نشان می‌دهد. علاوه بر این، شکل ۵ مقایسه‌ای از هزینه محاسباتی بین روش پیشنهادی و روش مرجع ارائه می‌دهد. این مقایسه برای اندازه‌های مختلف پنجره، شامل ۳ × ۳، ۵ × ۵، ۷ × ۷ و ۲۰ × ۲۰ انجام شده است. اگرچه هزینه محاسباتی در روش پیشنهادی در مقایسه با روش مرجع تا حدود ۱۰ درصد افزایش یافته است، اما این افزایش هزینه به دلیل بهبود قابل توجه در مقادیر CR قابل چشم‌پوشی است. نتایج نشان می‌دهد که روش MOGAO نه تنها کارایی بالایی در فشرده‌سازی تصاویر دارد، بلکه هزینه محاسباتی معقولی را نیز حفظ می‌کند.



شکل ۵: مقایسه هزینه محاسباتی روش پیشنهادی در مقابل روش مرجع برای اندازه‌های مختلف پنجره.

جدول ۳: مقایسه کمی نسبت فشرده‌سازی (CR) روش پیشنهادی (MOGAO) در مقابل روش مرجع [۸].

مجموعه تصاویر	مجموعه ۱	مجموعه ۲	مجموعه ۳	مجموعه ۴	مجموعه ۵	مجموعه ۶	مجموعه ۷	مجموعه ۸	مجموعه ۹	مجموعه ۱۰
MOGANO	۳۵	۳۶	۳۶	۴۰	۴۲	۴۵	۴۹	۵۳	۵۴	۶۰
روش مرجع	۲۳	۲۵	۲۶	۳۰	۳۲	۳۴	۴۰	۴۰	۴۴	۴۵

۵ ۳. *ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی MOGAO*

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی MOGAO بر روی دو نوع تصویر مختلف شامل تصاویر سی‌تی (CT) و تصاویر استاندارد پزشکی (DICOM) مورد ارزیابی قرار گرفته است. استاندارد DICOM در حوزه تصویربرداری پزشکی بسیار رایج است و اطلاعات مهمی از جمله مشخصات بیماران، پارامترهای تصویربرداری و جزئیات مطالعات را شامل می‌شود. این استاندارد با تضمین دقت تصاویر، بهره‌گیری از پروتکل‌های ارتباطی مؤثر، و یکپارچه‌سازی با سیستم‌های فناوری اطلاعات پزشکی، امکان اشتراک‌گذاری، تحلیل و ذخیره‌سازی کارآمد تصاویر را فراهم می‌کند. به‌علاوه، رعایت الزامات حریم خصوصی و امنیت داده‌ها در این استاندارد مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین، ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی بر روی این نوع تصاویر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. علاوه بر معیارهای CSC ، برای بررسی دقیق‌تر عملکرد روش پیشنهادی، شاخص تعادل (BIX) محاسبه شده است که از معادله زیر مشتق می‌شود:

$$BIX = \frac{A}{RMSE} + B \times PSNR + C \times SSIM + D \times CR \qquad (۱۰)$$

در این معادله، BIX به‌عنوان یک معیار جامع برای متعادل‌سازی تمامی معیارهای CSC مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب A، B، C و D اولویت‌های هر معیار را نشان می‌دهند و برای محاسبه عادلانه BIX، هر ضریب به‌صورت برابر (۲۵٪) تنظیم شده است تا مجموع اولویت‌ها برابر با ۱ باشد. همچنین، برای محاسبه BIX، تمامی مقادیر معیارهای CSC از جدول ۴ برای هر روش و نوع تصویر نرمال‌سازی شده‌اند جدول ۴ مقایسه معیارهای CSC روش پیشنهادی MOGAO با سایر روش‌های موجود را نشان می‌دهد. نتایج حاکی از آن است که روش پیشنهادی با استفاده از تنظیمات مشابه فشرده‌سازی برای هر نوع تصویر، بهترین عملکرد را در مقایسه با سایر روش‌ها ارائه داده است. این مقایسه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی MOGAO توانایی بهبود عملکرد تصاویر CT و DICOM را دارد و در حالی که کیفیت تصویر را حفظ می‌کند، نسبت فشرده‌سازی را نیز بهبود می‌بخشد.

جدول ۴: مقایسه معیارهای CSC روش پیشنهادی با سایر روش‌ها.

نوع تصویر	CSC Metric	روش پژوهش حاضر	Ammah, 2019
تصویر CT	PSNR↑	۶۶	۵۴
	RMSE ↓	۳٫۵۰	۴٫۱۰
	SSIM↑	۰٫۹۳	۰٫۸۴
	CR↑	۹۴	۸۱
	BIX ↑	۰٫۷۸	۰٫۶۸
تصویر DICOM	PSNR↑	۶۶	۵۲
	RMSE ↓	۴٫۱۰	۳٫۸۰
	SSIM↑	۰٫۸۹	۰٫۸۲
	CR↑	۹۷	۸۹
	BIX ↑	۰٫۸۰	۰٫۶۹

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، به‌ویژه الگوریتم ژنتیک (GA)، مورد بررسی قرار گرفت. این پژوهش به دنبال یافتن تعادلی میان معیارهای متضاد نظیر کیفیت تصویر (PSNR، SSIM و RMSE) و نسبت فشرده‌سازی (CR) بود. اهمیت این موضوع در کاربردهای حساس مانند فشرده‌سازی تصاویر پزشکی، به‌ویژه تصاویر CT و DICOM، که نیاز به حفظ اطلاعات دقیق برای تشخیص بیماری‌ها دارند، بیشتر نمایان می‌شود. هدف این پژوهش، ارائه روشی کارآمد برای بهبود کیفیت فشرده‌سازی تصاویر با حفظ تعادل بهینه میان معیارهای مختلف بود. روش تحقیق شامل دو بخش اصلی فشرده‌سازی و بازسازی بود. در بخش فشرده‌سازی، با استفاده از فیلتر میانگین متحرک (MAF)، نویز تصاویر کاهش یافت و سپس از تبدیل موجک گسسته (DWT) برای تجزیه تصویر استفاده شد. کمیت‌سازی برداری (VQ) با کمک الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی گردید و در نهایت، کدگذاری حسابی برای فشرده‌سازی داده‌ها به‌کار رفت. در بخش بازسازی، داده‌های فشرده‌شده رمزگشایی و تصاویر بازسازی شدند. الگوریتم ژنتیک در این فرآیند نقش اساسی در بهینه‌سازی معیارهای چندگانه ایفا کرد. نتایج تجربی نشان داد که روش پیشنهادی عملکرد بالاتری نسبت به روش‌های مرجع داشت. به‌طور خاص، با استفاده از پنجره ۳ × ۳ در فیلتر MAF، کیفیت تصویر حفظ شد و در عین حال نسبت فشرده‌سازی بهبود یافت. در سناریوهای مختلف تبدیل موجک، حذف ضرایب کم‌اهمیت منجر به کاهش حجم داده‌ها بدون تأثیر منفی بر کیفیت تصویر گردید. مقایسه با روش‌های موجود نشان داد که روش MOGAO در بهینه‌سازی معیارهای CSC مانند PSNR، SSIM و CR بهتر عمل کرده و شاخص تعادل (BIX) بهتری ارائه داده است. به‌عنوان‌مثال، در تصاویر CT، مقدار PSNR به ۶۶ و مقدار CR به ۹۴ رسید که نشان‌دهنده کارایی بالای روش پیشنهادی است. در نهایت، این پژوهش نشان داد که الگوریتم‌های تکاملی نظیر GA می‌توانند راه‌حل‌های بهینه‌ای برای مسائل پیچیده چندهدفه ارائه دهند. روش پیشنهادی با دستیابی به تعادل مناسب میان معیارهای کیفیت و فشرده‌سازی تصویر، قابلیت خود را در کاربردهای حساس مانند تصویربرداری پزشکی به‌خوبی اثبات کرد.

پیشنهادات برای پژوهش های آینده:

بررسی کاربرد الگوریتم‌های تکاملی ترکیبی برای بهبود عملکرد در مسائل فشرده‌سازی تصاویر پزشکی

ارزیابی تأثیر استفاده از تکنیک‌های یادگیری عمیق در کنار الگوریتم‌های تکاملی برای بهینه‌سازی چندهدفه

تحلیل کارایی روش پیشنهادی بر روی انواع دیگر داده‌های پزشکی مانند تصاویر MRI و PET

توسعه شاخص‌های جامع‌تر برای ارزیابی ترکیبی معیارهای کیفیت و نسبت فشرده‌سازی.

مراجع

[۱] علی عسکری زاده، الهه مشهور*، محسن صنیعی. ۱۴۰۳. ارائه یک مدل بهینه سازی چندهدفه مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای مدیریت ولتاژ شبکه های توزیع شعاعی مناطق گرمسیری جنوب ایران با تکیه بر خازن های ثابت و رگولاتورهای ولتاژ. روشهای هوشمند در صنعت برق ۶۰. ۱۷۱-۱۹۴.

[۲] پژمان غلام نژاد*، امیرمهدی سازدار، عبدالله غفاری. ۱۴۰۳. الگوریتم ژنتیک چند هدفه مرتب سازی نامغلوب مبتنی بر خوشه بندی فازی. علوم رایانشی ۱. ۵۳-۶۰.

[۳] داریوش آدینه وند، ابراهیم علی رازینی*، محمود خدام، فریدون اوحدی، الهام سادات هاشمی زاده. ۱۴۰۲. بررسی کارآمدی مدل های بهینه سازی فرا ابتکاری الگوریتم ژنتیک چندهدفه تحت معیار ریسک MSV و الگوریتم ازدحام ذرات تحت معیار ریسک CVaR در تعیین سبد سهام شرکت های پذیرفته شده در سازمان بورس اوراق بهادار. اقتصاد مالی ۶۵. ۳۰۷-۳۲۲.

[۴] محمد ساویز اسدی لاری*، مریم عباس قربانی، رضا توکلی مقدم. ۱۴۰۲. مدل سازی ریاضی چندهدفه متمرکز بر درآمد هتل و هزینه مسافر با الگوریتم های MOPSO و NSGA-II. تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات ۱. ۳۹-۷۱.

[۵] محمدعلی شمع علیزاد بایی*. ۱۴۰۰. طراحی الگوریتم مخفی سازی پیام اصلاح شده در نهان نگاری تصویر مبتنی بر فشرده سازی روش AMBTC. علوم و فناوری های پدافند نوین ۲. ۲۱۷-۲۲۸.

[۶] طیار ترابی، سیدمحمود انیشه. ۱۳۹۹. ارائه روشی جهت فشرده سازی تصویر با استفاده از شبکه عصبی سه لایه و الگوریتم ژنتیک چندهدفه. هفتمین کنگره ملی تازه یافته های مهندسی برق ایران

[7] Alkinani, M. H., Zanaty, E. A., & Ibrahim, S. M. (2021). Medical Image Compression Based on Wavelets with Particle Swarm Optimization. Computers, Materials & Continua, 67(2).

[8] Ammah, P. N. T., & Owusu, E. (2019). Robust medical image compression based on wavelet transform and vector quantization. Informatics in medicine unlocked, 15, 100183.

[9] Bao, C., Gao, D., Gu, W., Xu, L., & Goodman, E. D. (2023). A new adaptive decomposition-based evolutionary algorithm for multi-and many-objective optimization. Expert Systems with Applications, 213, 119080.

[10] Cavallaro, C., Cutello, V., Pavone, M., & Zito, F. (2024). Machine Learning and Genetic Algorithms: A case study on image reconstruction. Knowledge-Based Systems, 284, 111194.

[11] Chinchanikar, S., Shinde, S., Shaikh, A., Gaikwad, V., & Ambhore, N. H. (2024). Multi-objective optimization of FDM using hybrid genetic algorithm-based multi-criteria decision-making (MCDM) techniques. Journal of The Institution of Engineers (India): Series D, 105(1), 49-63.

[12] Doerr, B., & Zheng, W. (2021, July). Theoretical analyses of multi-objective evolutionary algorithms on multi-modal objectives: (hot-off-the-press track at GECCO 2021). In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion (pp. 25-26).

[13] Ma, H., Wei, H., Tian, Y., Cheng, R., & Zhang, X. (2021). A multi-stage evolutionary algorithm for multi-objective optimization with complex constraints. Information Sciences, 560, 68-91.

[14] Nogales, A., Perez-Lara, F., & García-Tejedor, Á. J. (2024). Enhancing breast cancer diagnosis with deep learning and evolutionary algorithms: A comparison of approaches using different thermographic imaging treatments. Multimedia Tools and Applications, 83(14), 42955-42971.

[15] Rahebi, J. (2022). Vector quantization using whale optimization algorithm for digital image compression. Multimedia Tools and Applications, 81(14), 20077-20103.

[16] Wang, Y., Ma, J., & Zhang, Y. (2024). Application of improved frog leaping algorithm in multi objective optimization of engineering project management. Decision Making: Applications in Management and Engineering, 7(1), 364-379.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، DE–141، صص. ۷۸–۸۴

نمایش انتگرالی تابع میتگ ـلفلر

محمد جعفری

دانشگاه پیام نور . دانشکده علوم . تهران . ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
تابع میتگ ـلفلر
نمایش انتگرالی
کانتور هانکل

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
33E12

چکیده

تعمیم نمایش انتگرالی تابع گاما به دست آمده است که نشان می‌دهد کانتور هانکل در صفحه مختلط چرخش می‌کند. محدوده مقادیر مجاز برای زاویه چرخش کانتور تعیین شده است. با استفاده از این نمایش انتگرالی، تعمیم نمایش انتگرالی تابع میتگ ـلفلر به دست آمده است که مقدار این تابع را بر حسب انتگرال کانتوری بیان می‌کند.

۱. مقدمه

تابع میتگ ـلفلر یک تابع کامل است که توسط یک سری توانی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\rho(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n/\rho)},\quad \rho>0,\quad z\in\mathbb{C},$$

که در آن $\Gamma(x)$ تابع گاما است. این تابع توسط میتگ ـلفلر[1] بین سال‌های ۱۹۰۲ تا ۱۹۰۵ معرفی شد. تابع $E_\rho(z)$ همچنین به عنوان تابع میتگ ـلفلر با یک پارامتر شناخته می‌شود. با جایگزینی عدد یک در آرگومان تابع گاما با یک پارامتر دلخواه $\mu\in\mathbb{C}$، تعمیم تابع $E_\rho(z)$ در حالت دو پارامتر به دست می‌آید:

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)},\quad \rho>0,\quad \mu\in\mathbb{C},\quad z\in\mathbb{C},\qquad (1)$$

که به آن تابع میتگ ـلفلر با دو پارامتر می‌گویند. همان‌طور که می‌بینیم، تابع $E_{\rho,\mu}(z)$ با $E_\rho(z)$ توسط رابطه $E_{\rho,1}(z)=E_\rho(z)$ مرتبط است. عمده توجه زیاد به تابع میتگ ـلفلر به دلیل استفاده از این تابع برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری است. در چنین مسائلی، تابع میتگ ـلفلر به عنوان یک تابع ویژه برای عملگرهای مشتق کسری عمل می‌کند. تابع میتگ ـلفلر همچنین برای توصیف فرآیندهای انتشار غیرعادی در نظریه احتمال و آمار ریاضی و همچنین در بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم که در آن‌ها معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری ظاهر می‌شوند، استفاده می‌شود. در این راستا، توجه زیادی به مطالعه خواص تحلیلی تابع میتگ ـلفلر شده است. نمایش انتگرالی تابع $E_{\rho,\mu}(z)$ که

پست الکترونیک : m_jafari@pnu.ac.ir (محمد جعفری)

[1] Mittage-Leffler

در این مقاله بررسی می‌شود، مقدار آن را بر حسب انتگرال کانتوری بیان می‌کند. این نمایش امکان مطالعه رفتار مجانبی تابع میتگ ـلفلر و توزیع صفرهای آن را فراهم میسازد.

چندین شکل برای نوشتن نمایش انتگرالی تابع $E_{\rho,\mu}(z)$ وجود دارد. هر یک از این اشکال با توجه به ویژگی‌های کانتور هانکل[۲] و تبدیل تابع زیر انتگرال، متفاوت هستند.

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon)}\frac{t^{\alpha-\beta}e^{t}}{t^{\alpha}-z}dt,\quad \alpha>0,\quad \beta>0. \tag{۲}$$

در اینجا کانتور $\gamma(\varepsilon)$ یک خود ـحلقه[۳] است که از یک نیم‌خط $S_1=\{t:\arg t=-\pi,|t|\geqslant\varepsilon\}$، یک کمان دایره $C_\varepsilon=\{t:-\pi\leqslant\arg t\leqslant\pi,|t|=\varepsilon>|z|^{1/\alpha}\}$ و یک نیم‌خط $S_2=\{t:\arg t=\pi,|t|\geqslant\varepsilon\}$ تشکیل شده است. کانتور $\gamma(\varepsilon)$ در جهت مثبت پیموده می‌شود. پارامترهای α و β این نمایش با پارامترهای ρ و μ در فرمول (۱) توسط روابط $\alpha=1/\rho$ و $\beta=\mu$ مرتبط هستند.

$$E_{\rho,\mu}(z)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\theta)}\frac{\tau^{\rho(1-\mu)}\exp\{\tau^{\rho}\}}{\tau-z}d\tau. \tag{۳}$$

در اینجا کانتور انتگرال‌گیری $\gamma(\varepsilon,\theta)$ از یک نیم‌خط $S_1=\{\tau:\arg\tau=-\theta,|\tau|\geqslant\varepsilon\}$، یک کمان دایره $C_\varepsilon=\{\tau:-\theta\leqslant\arg\tau\leqslant\theta,|\tau|=\varepsilon\}$ و یک نیم‌خط $S_2=\{\tau:\arg\tau=\theta,|\tau|\geqslant\varepsilon\}$ تشکیل شده است، بطوریکه ε یک عدد حقیقی دلخواه است که دارای $\varepsilon>|z|$ می باشد، و پارامتر θ شرایط زیر را دارد: $\frac{\pi}{2\rho}<\theta<\pi$ اگر $1/2<\rho\leqslant 1$ و $\frac{\pi}{2\rho}<\theta<\frac{\pi}{\rho}$ اگر $\rho>1$. تفاوت اصلی نمایش (۳) با نمایش (۲) در کانتور انتگرال‌گیری است. کانتور انتگرال‌گیری $\gamma(\varepsilon,\theta)$ این واقعیت را در نظر می‌گیرد که نیم‌خط‌های S_1 و S_2 کانتور هانکل در نمایش انتگرالی تابع گامای اویلر می‌توانند در یک زاویه دلخواه θ قرار گیرند که شرط $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ را برآورده کند. تابع زیر انتگرال (۳) از تابع زیر انتگرال (۲) با جایگزینی متغیر انتگرال‌گیری $\tau=t^{\alpha}$ به دست می‌آید.

می توان نشان داده شد که نیم‌خط‌های S_1 و S_2 کانتور هانکل می‌توانند در زوایای دلخواه θ_1 و θ_2 قرار گیرند که شرایط $\theta_1\in(-3\pi/2,-\pi/2)$ و $\theta_2\in(\pi/2,3\pi/2)$ را برآورده کنند. در نتیجه، نمایش انتگرالی تابع $E_{\rho,\mu}(z)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$E_{\rho,\mu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\theta_1,\theta_2)}\frac{t^{1/\rho-\mu}e^{t}}{t^{1/\rho}-z}dt,$$

بطوریکه کانتور $\gamma(\varepsilon,\theta_1,\theta_2)$ یک خود ـحلقه است که از نیم‌خط $S_1=\{t:\arg t=\theta_1,|t|\geqslant\varepsilon\}$، کمان دایره $C_\varepsilon=\{t:\theta_1\leqslant\arg t\leqslant\theta_2,\ |t|=\varepsilon\}$ و نیم‌خط $S_2=\{t:\arg t=\theta_2,\ |t|\geqslant\varepsilon\}$ تشکیل شده است. پارامترهای $\varepsilon,\theta_1,\theta_2$ باید شرایط $\varepsilon>|z|^{\rho}$، $\theta_1\in(-3\pi/2,-\pi/2)$ و $\theta_2\in(\pi/2,3\pi/2)$ را برآورده کنند.

امکان تعمیم بیشتر نمایش انتگرالی تابع میتگ ـلفلر وجود دارد اگر برخی از ویژگی‌های دیگر کانتور هانکل را در نظر بگیریم. این کار دقیقاً با هدف به دست آوردن چنین نمایش انتگرالی انجام شده است.

۲. نمایش انتگرالی تابع گاما

میخواهیم نشان دهیم که کانتور هانکل در نمایش انتگرالی تابع گاما می‌تواند با یک زاویه دلخواه ψ و شرطی که در ادامه تعیین می‌شود را برآورده کند، چرخش کند. در عین حال، مقدار تابع گاما به زاویه ψ بستگی ندارد. این ویژگی امکان افزودن قابلیت‌های اضافی هنگام استفاده از نمایش انتگرالی تابع گاما را فراهم می‌کند. به ویژه، این امکان را می‌دهد که کانتور انتگرال‌گیری را در صفحه مختلط به روش مورد نیاز جهت‌دهی کنیم، که در برخی موارد بسیار مفید است. این ویژگی برای به دست آوردن نمایش انتگرالی تابع میتگ ـلفلر استفاده خواهد شد.

کانتور $\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)$ را در نظر بگیرید که از نیم‌خط S_1، کمان دایره C_ε با شعاع ε و نیم‌خط S_2 تشکیل شده است. فرض کنید که کانتور با زاویه ψ نسبت به مبدأ مختصات چرخش کرده است (شکل ۱). در عین حال، چرخش کانتور با زاویه ψ به این معنی است که برش صفحه مختلط نیز با همان زاویه چرخش می‌کند. محوری که چرخش کانتور را تعیین می‌کند، امتداد خط برش است و با خط برش یک خط مستقیم را تشکیل می‌دهد. در شکل ۱ این محور به عنوان OA مشخص شده است. بنابراین، لبه پایینی برش در امتداد نیم‌خط $\arg t=\psi-\pi$ و لبه بالایی برش در امتداد نیم‌خط $\arg t=\psi+\pi$ قرار دارد. فرض کنید زوایای δ_1 و δ_2 در حالت کلی با یکدیگر برابر نباشند و مقادیر آن‌ها در بازه‌های $\pi/2<\delta_1\leqslant\pi$ و $\pi/2<\delta_2\leqslant\pi$ قرار گیرند. فرض کنیم که این زوایا از محور OA اندازه‌گیری شوند. در نتیجه، لم زیر برقرار است:

[2] Hankel contour
[3] self-loop

لم ۱.۲. *برای هر ε، δ_1، δ_2، ψ حقیقی که شرایط زیر را برآورده کنند:*

$$\varepsilon > 0, \quad \pi/2 < \delta_1 \leqslant \pi, \quad \pi/2 < \delta_2 \leqslant \pi, \quad \pi/2 - \delta_2 < \psi < -\pi/2 + \delta_1, \tag{۴}$$

و برای هر $s \in \mathbb{C}$، نمایش زیر برای تابع گاما برقرار است:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)} e^t t^{-s} dt, \tag{۵}$$

بطوریکه کانتور $\gamma(\varepsilon, \psi, \delta_1, \delta_2)$ به شکل زیر تعریف می‌شود (شکل ۱ را ببینید):

$$\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2) = \begin{cases} S_1 = \{t : \ \arg t = -\delta_1 + \psi, \ |t| \geqslant \varepsilon\}, \\ C_\varepsilon = \{t : \ -\delta_1 + \psi \leqslant \arg t \leqslant \delta_2 + \psi, |t| = \varepsilon\}, \\ S_2 = \{t : \ \arg t = \delta_2 + \psi, |t| \geqslant \varepsilon\}. \end{cases} \tag{۶}$$

اثبات. انتگرال $I_1 = \int_{C_1} e^t t^{s-1} dt$ را در نظر بگیرید. بطوریکه کانتور C_1 از بخش Γ_1'، کمان دایره C_R با شعاع R، بخش Γ_2' و کمان دایره C_ε با شعاع ε تشکیل شده است (شکل ۲). این کانتور در صفحه مختلط t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_1 = \begin{cases} \Gamma_1' = \{t : \ \arg t = \delta_2 + \psi, \ \varepsilon \leqslant |t| \leqslant R\}, \\ C_R = \{t : \ \delta_2 + \psi \leqslant \arg t \leqslant \pi, \ |t| = R\}, \\ \Gamma_2' = \{t : \ \arg t = \pi, \ \varepsilon \leqslant |t| \leqslant R\}, \\ C_\varepsilon = \{t : \ \delta_2 + \psi \leqslant \arg t \leqslant \pi, \ |t| = \varepsilon\}. \end{cases}$$

بطوریکه $\pi/2 < \delta_2 + \psi < 3\pi/2$. با جایگذاری متغیر $t = re^{i\varphi}$ در انتگرال I_1 و محاسبه مستقیم، به دست می‌آوریم:

$$I_1 = \int_\varepsilon^R \exp\{re^{i(\delta_2+\psi)}\} r^{s-1} e^{is(\delta_2+\psi)} dr + i \int_{\delta_2+\psi}^{\pi} \exp\{Re^{i\varphi}\} R^s e^{is\varphi} d\varphi \tag{۷}$$

$$+ \int_R^\varepsilon \exp\{re^{i\pi}\} r^{s-1} e^{is\pi} dr + i \int_\pi^{\delta_2+\psi} \exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\} \varepsilon^s e^{is\varphi} d\varphi = J_1' + J_2' + J_3' + J_4'.$$

در این عبارت، $R \to \infty$ و $\varepsilon \to 0$ را در نظر می‌گیریم. برای انتگرال

$$J_4' = i \int_\pi^{\delta_2+\psi} \exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\} \varepsilon^s e^{is\varphi} d\varphi \tag{۸}$$

داریم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_4'| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\pi^{\delta_2+\psi} |\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\} \varepsilon^s e^{is\varphi}| \, |d\varphi|.$$

برای تابع زیر انتگرال، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\{\varepsilon \cos\varphi + \Re s \ln\varepsilon - \Im s\varphi\} = 0, \quad \Re s > 0. \tag{۹}$$

بنابراین،

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_4'| = 0, \quad \text{در} \quad \Re s > 0. \tag{۱۰}$$

برای انتگرال

$$J_۲' = i\int_{\delta_۲+\psi}^{\pi} \exp\{Re^{i\varphi}\} R^s e^{is\varphi} d\varphi \qquad (۱۱)$$

داریم:

$$\lim_{R\to\infty} |J_۲'| \leqslant \lim_{R\to\infty} \int_{\delta_۲+\psi}^{\pi} |\exp\{Re^{i\varphi}\} R^s e^{is\varphi}|\,|d\varphi|.$$

برای تابع زیر انتگرال، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{R\to\infty} |\exp\{Re^{i\varphi} + s\ln R + is\varphi\}| = \lim_{R\to\infty} e^{R\cos\varphi} R^{\Re s} e^{\varphi\Im s} \qquad (۱۲)$$

از آنجایی که e^{π} سریع‌تر از هر توانی از عدد x رشد می‌کند، بنابراین $\lim_{R\to\infty} \exp\{R\cos\varphi + \Re s \ln R - \varphi\Im s\} = ۰$، اگر $\cos\varphi < ۰$. ما به محدوده مقادیر $۰ \leqslant \varphi \leqslant ۲\pi$ علاقه‌مندیم. بنابراین، شرط $\cos\varphi < ۰$ منجر به شرط $\pi/۲ < \varphi < ۳\pi/۲$ می‌شود. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که مقادیر $\varphi = \pi/۲$ و $\varphi = ۳\pi/۲$ در این بازه قرار نمی‌گیرند، زیرا در این مقادیر $\cos\varphi = ۰$ است و برای اینکه حد (۱۲) برابر صفر باشد، شرط $\Re s < ۰$ باید برآورده شود، که این شرط با شرط (۱۰) در تناقض است.
با جایگزینی حد پایین انتگرال‌گیری $J_۲'$ در نابرابری $\pi/۲ < \varphi < ۳\pi/۲$، محدوده مجاز برای مقدار ψ به دست می‌آید:

$$\pi/۲ - \delta_۲ < \psi < ۳\pi/۲ - \delta_۲. \qquad (۱۳)$$

بنابراین، برای انتگرال $J_۲'$ داریم:

$$\lim_{R\to\infty} |J_۲'| = ۰, \quad \text{اگر} \quad \pi/۲ - \delta_۲ < \psi < ۳\pi/۲ - \delta_۲. \qquad (۱۴)$$

اکنون به انتگرال $I_۱$ بازمی‌گردیم. عبارت (۷) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\varepsilon \to ۰$ و $R \to \infty$. با توجه به (۱۰) و (۱۴)، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to۰,\\ R\to\infty}} I_۱ = \int_۰^{\infty} \exp\{re^{i(\delta_۲+\psi)}\} r^{s-۱} e^{is(\delta_۲+\psi)} dr - \int_۰^{\infty} \exp\{re^{i\pi}\} r^{s-۱} e^{is\pi} dr, \qquad (۱۵)$$

که $\Re s > ۰$, $\pi/۲ - \delta_۲ < \psi < ۳\pi/۲ - \delta_۲$. با توجه به تعریف تابع گاما:

$$\Gamma(s) = \int_۰^{\infty} e^{-x} x^{s-۱} dx, \quad s \in \mathbb{C},\ \Re s > ۰, \qquad (۱۶)$$

جمله دوم (۱۵) را می‌توان به شکل $\int_۰^{\infty} \exp\{re^{i\pi}\} r^{s-۱} e^{is\pi} dr = e^{is\pi}\Gamma(s)$ نوشت. با توجه به اینکه کانتور $C_۱$ یک کانتور بسته است و تابع زیر انتگرال هیچ قطبی در داخل این کانتور ندارد، در نتیجه بر اساس قضیه کوشی $I_۱ = \int_{C_۱} e^t t^{s-۱} dt = ۰$. در نتیجه، از (۱۵) به دست می‌آوریم:

$$\int_۰^{\infty} \exp\{re^{i(\delta_۲+\psi)}\} r^{s-۱} e^{is(\delta_۲+\psi)} dr = e^{i\pi s}\Gamma(s),$$

که $\Re s > ۰$, $\pi/۲ - \delta_۲ < \psi < ۳\pi/۲ - \delta_۲$. با توجه به متغیر مختلط $re^{i\varphi} = t$، این عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_۰^{\infty \exp\{i(\delta_۲+\psi)\}} e^t t^{s-۱} dt = e^{i\pi s}\Gamma(s), \quad \Re s > ۰, \quad \pi/۲ - \delta_۲ < \psi < ۳\pi/۲ - \delta_۲. \qquad (۱۷)$$

در ادامه، انتگرال $I_۲ = \int_{C_۲} e^t t^{s-۱} dt$ را در نظر می‌گیریم. بطوریکه کانتور $C_۲$ از بخش $\Gamma_۱''$، کمان دایره C_e'' با شعاع ε، بخش $\Gamma_۲''$ و کمان دایره C_R'' با شعاع R تشکیل شده است (شکل ۳). این کانتور در صفحه مختلط t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_۲ = \begin{cases} \Gamma_۱'' = \{t : \ \arg t = -\delta_۱ + \psi,\ \varepsilon \leqslant |t| \leqslant R\}, \\ C_e'' = \{t : \ -\delta_۱ + \psi \leqslant \arg t \leqslant -\pi,\ |t| = \varepsilon\}, \\ \Gamma_۲'' = \{t : \ \arg t = -\pi,\ \varepsilon \leqslant |t| \leqslant R\}, \\ C_R'' = \{t : \ \delta_۲ + \psi \leqslant \arg t \leqslant \pi,\ |t| = R\}. \end{cases}$$

که در آن $-۳\pi/۲ < -\delta_۱ + \psi < -\pi/۲$. به طور مشابه با حالت قبلی، به دست می‌آوریم:

$$I_۲ = \int_{\varepsilon}^{R} \exp\{re^{-i\pi}\} r^{s-۱} e^{-is\pi} dr + i \int_{-\pi}^{-\delta_۱+\psi} \exp\{Re^{i\varphi}\} R^s e^{is\varphi} d\varphi \tag{۱۸}$$

$$+ \int_{R}^{\varepsilon} \exp\{re^{i(-\delta_۱+\psi)}\} r^{s-۱} e^{is(-\delta_۱+\psi)} dr + i \int_{-\delta_۱+\psi}^{-\pi} \exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\} \varepsilon^s e^{is\varphi} d\varphi = J_۱'' + J_۲'' + J_۳'' + J_۴''.$$

در انتگرال $J_۴'' = i \int_{-\delta_۱+\psi}^{-\pi} \exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\} \varepsilon^s e^{is\varphi} d\varphi$ وقتی $\varepsilon \to ۰$، می‌توان نشان داد که:

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} |J_۴''| = ۰, \quad \Re s > ۰. \tag{۱۹}$$

سپس، در انتگرال

$$J_۲'' = i \int_{-\pi}^{-\delta_۱+\psi} \exp\{Re^{i\varphi}\} R^s e^{is\varphi} d\varphi \tag{۲۰}$$

وقتی $R \to \infty$، می‌توان نشان داد که:

$$\lim_{R \to \infty} |J_۲''| = ۰, \tag{۲۱}$$

اگر شرط زیر برآورده شود:

$$-۳\pi/۲ + \delta_۱ < \psi < -\pi/۲ + \delta_۱. \tag{۲۲}$$

اکنون به عبارت (۱۸) بازمی‌گردیم. با فرض $\varepsilon \to ۰$، $R \to \infty$ و با توجه به (۱۹) و (۲۱)، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{R \to ۰} I_۲ = \int_{۰}^{\infty} \exp\{re^{-i\pi}\} r^{s-۱} e^{-is\pi} dr - \int_{۰}^{\infty} \exp\{re^{i(-\delta_۱+\psi)}\} r^{s-۱} e^{is(-\delta_۱+\psi)} dr. \tag{۲۳}$$

بطوریکه $\int_{۰}^{\infty} \exp\{re^{-i\pi}\} r^{s-۱} e^{-i\pi s} dr = e^{-i\pi s}\Gamma(s)$ ،$\Re s > ۰$ ،$-۳\pi/۲+\delta_۱ < \psi < -\pi/۲+\delta_۱$. با استفاده از (۱۶)، جمله اول را می‌توان به شکل نوشت. با توجه به اینکه کانتور انتگرال‌گیری $C_۲$ یک کانتور بسته است و هیچ نقطه تکینی در داخل این کانتور وجود ندارد، بنابراین بر اساس قضیه کوشی $I_۲ = \int_{C_۲} e^t t^{s-۱} dt = ۰$. از (۲۳) به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{\infty} \exp\{re^{i(-\delta_۱+\psi)}\} r^{s-۱} e^{is(-\delta_۱+\psi)} dr = e^{-i\pi s}\Gamma(s),$$

بطوریکه $\Re s > ۰$ ،$-۳\pi/۲ + \delta_۱ < \psi < -\pi/۲ + \delta_۱$. با تغییر متغیر مختلط $re^{i\varphi} = t$، به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{\infty . \exp\{i(-\delta_۱+\psi)\}} e^t t^{s-۱} dt = e^{-i\pi s}\Gamma(s), \quad \Re s > ۰, \quad -۳\pi/۲ + \delta_۱ < \psi < -\pi/۲ + \delta_۱. \tag{۲۴}$$

حال انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I(s)=\int_{\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)} e^t t^{s-1}dt, \tag{۲۵}$$

که در آن کانتور $\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)$ با عبارت (۶) تعریف شده است. با جایگزینی متغیر انتگرال‌گیری $t=re^{i\varphi}$ و محاسبه مستقیم انتگرال، به دست می‌آوریم:

$$I(s)=\int_{\infty}^{\varepsilon}\exp\{re^{i(-\delta_1+\psi)}\}r^{s-1}e^{is(-\delta_1+\psi)}dr+i\int_{-\delta_1+\psi}^{\delta_1+\psi}\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\}\varepsilon^s e^{is\varphi}d\varphi+\int_{\varepsilon}^{\infty}\exp\{re^{i(\delta_2+\psi)}\}r^{s-1}e^{is(\delta_2+\psi)}dr. \tag{۲۶}$$

اکنون جمله دوم در سمت راست این عبارت را در نظر می‌گیریم و در این جمله وقتی $\varepsilon\to 0$ داریم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|i\int_{-\delta_1+\psi}^{\delta+\psi}\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\}\varepsilon^s e^{is\varphi}d\varphi\right|\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\delta_1+\psi}^{\delta+\psi}\left|\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\}\varepsilon^s e^{is\varphi}\right||d\varphi|$$

با محاسبه حد تابع زیر انتگرال، می‌توان نشان داد:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}+s\ln\varepsilon+is\varphi\}\right|=0,\quad \text{در}\quad \Re s>0.$$

بنابراین، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|i\int_{-\delta_1+\psi}^{\delta+\psi}\exp\{\varepsilon e^{i\varphi}\}\varepsilon^s e^{is\varphi}d\varphi\right|=0,\quad \text{در}\quad \Re s>0. \tag{۲۷}$$

به عبارت (۲۶) بازمی‌گردیم و فرض می‌کنیم $\varepsilon\to 0$. با توجه به (۲۷)، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I(s)=\int_{0}^{\infty}\exp\{re^{i(\delta_2+\psi)}\}r^{s-1}e^{is(\delta_2+\psi)}dr-\int_{0}^{\infty}\exp\{re^{i(-\delta_1+\psi)}\}r^{s-1}e^{is(-\delta_1+\psi)}dr=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\psi}}{r^{s-1}}dt-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\psi}}{r^{s-1}}dt, \tag{۲۸}$$

دوباره به متغیر مختلط t رسیدیم. با جایگزینی عبارات (۱۷) و (۲۴) در (۲۸)، به دست می‌آوریم:

$$I(s)=e^{is\pi}\Gamma(s)-e^{-is\pi}\Gamma(s)=2i\sin(\pi s)\Gamma(s)=\frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)},$$

که از ویژگی $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ استفاده شده است. اشتراک نواحی (۱۳) و (۲۲) محدوده مقادیر مجاز برای زاویه ψ را تعیین می‌کند که توسط نابرابری (۴) مشخص شده است.
با توجه به (۲۵)، به دست می‌آوریم:

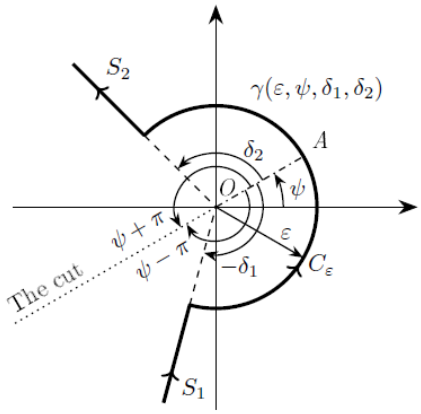
$$\int_{\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)} e^t t^{s-1}dt=\frac{2\pi i}{\Gamma(1-s)},\quad \Re s>0, \tag{۲۹}$$

جایی که کانتور انتگرال‌گیری $\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)$ توسط (۶) تعریف شده است. همان‌طور که می‌بینیم، هر دو طرف این تساوی توابع کامل هستند و به ازای $\Re s>0$ با هم مطابقت دارند. بنابراین، بر اساس قضیه یکتایی، آن‌ها در کل صفحه مختلط با هم مطابقت خواهند داشت. با جایگزینی $1-s$ به جای s در (۲۹)، به دست می‌آوریم:

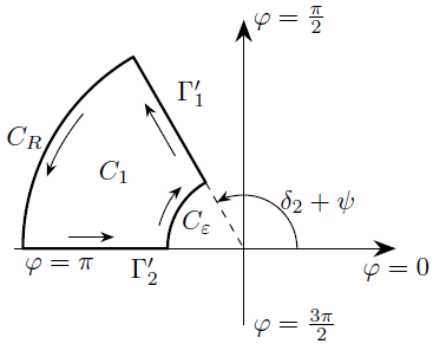
$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)} e^t t^{-s} dt,$$

برای هر مقدار $s \in \mathbb{C}$. □

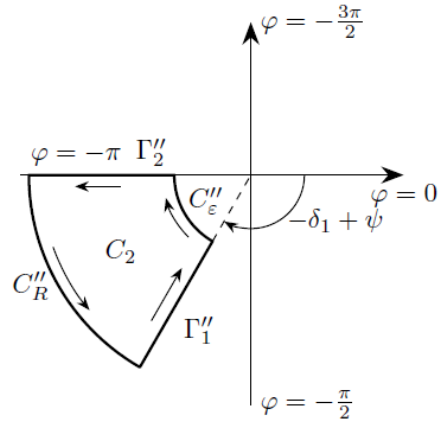
لم اثبات‌شده نشان می‌دهد که کانتور انتگرال‌گیری $\gamma(\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2)$ در نمایش (۵) می‌تواند با یک زاویه دلخواه ψ نسبت به مبدأ مختصات چرخش کند. در شکل ۴، ناحیه چرخش به رنگ خاکستری نشان داده شده است. مقدار تابع گاما به پارامترهای $\varepsilon,\psi,\delta_1,\delta_2$ بستگی ندارد. زاویه چرخش کانتور می‌تواند در بازه $\psi \in (\frac{\pi}{2}-\delta_2, -\frac{\pi}{2}+\delta_1)$ قرار گیرد. با این حال، مقادیر انتهایی این بازه برای زاویه ψ نمی‌توانند انتخاب شوند، زیرا در این حالت انتگرال در سمت راست (۵) واگرا خواهد شد. در واقع، اگر $\psi = \pi/2 - \delta_2$ باشد، نیم‌خط S_2 در امتداد بخش مثبت محور موهومی قرار خواهد گرفت.



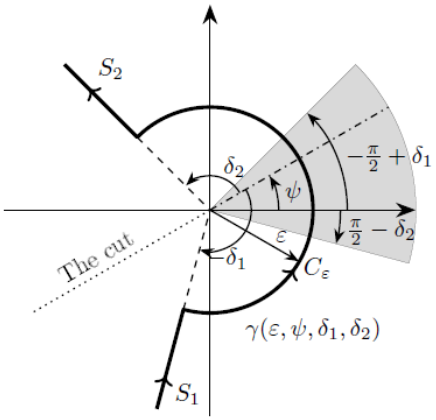
شکل ۱:



شکل ۲:



شکل ۳:



شکل ۴:

مراجع

[1] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin,*Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.

[2] V. V. Saenko, *Two Forms of the Integral Representations of the Mittag-Leffler Function*, Mathematics 8 (7) (2020) 1101.

[3] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., & Tricomi, F. G. (1955).*Higher Transcendental Functions*, Vol. 3. McGraw-Hill.

[4] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional*.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–144، صص. ۸۵–۹۰

بررسی همریختی ها و ویژگی های پایدار ضعیف در رسته S–مجموعه های جزئی مرتب

معصومه هزارجریبی*[آ]، زینب عباس زاده[۱]

[آ] دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
پایدارضعیف
S–مجموعه‌های جزئی مرتب
مسطح ضعیف اصلی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
18B35
06A11
18C40

چکیده

در این مقاله، ساختارها و ویژگی‌های رسته S–مجموعه‌های جزئی مرتب با تمرکز بر مفاهیم پایدارضعیف، مسطح ضعیف و همنهشتی‌ها بررسی شده‌اند. نتایج پژوهش نشان می‌دهند که S–همریختی‌های راست مرتب در این رسته در شرایط خاصی ضعیف پایدار می باشد. علاوه بر این، مشخص شده است که ترکیب‌های ترامتناهی از S–همریختی‌های پایدار و مسطح ضعیف در این رسته حفظ می شوند و سیستم‌های مستقیم نیز هم‌حد مستقیمی را حفظ می‌کنند که مسطح ضعیف است. همچنین، شرایط لازم و کافی برای پایدار بودن زوج همریختی‌ها در این رسته به صورت دقیق ارائه شده است. این نتایج علاوه بر گسترش نظریه‌های جبری در رسته S–مجموعه‌های جزئی مرتب، ابزارهای جدیدی را برای تحلیل و توسعه ساختارهای پیچیده در این زمینه فراهم می‌کند.

۱. مقدمه

مجموعه‌های جزئی مرتب روی تکواره های جزیی مرتب و رسته‌های مرتبط با آن‌ها به دلیل کاربردهای گسترده در ریاضیات، نظریه رسته‌ها و جبر، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند. S–مجموعه‌های جزئی مرتب که با عملیات اسکالری و همریختی‌های خاص تعریف می‌شوند، ابزارهای قدرتمندی برای مطالعه ساختارهای جبری فراهم می‌کنند. مراجع [۲]، [۳]و[۴] را ببینید. در این راستا، مفاهیمی همچون پایدارضعیف، مسطح ضعیف اصلی و همنهشتی‌ها نقش مهمی در تحلیل و بررسی این مجموعه‌ها ایفا می‌کنند. در رسته S- عمل ها برخی مفاهیم ذکر شده بررسی شده اند. مراجع [۱]و [۵] را ببینید. در این مقاله با بهره‌گیری از ابزارهای جبری، خواص ترکیب‌های ترامتناهی و سیستم‌های مستقیم، در این رسته بررسی شده و شرایط لازم و کافی برای ویژگی‌هایی همچون پایدار بودن زوج همریختی‌ها ارائه گردیده است. این پژوهش گامی در جهت توسعه نظریه‌های مرتبط و گسترش درک مفاهیم بنیادین در این حوزه است. فرض می‌کنیم S یک تکواره جزئی مرتب و A یک مجموعه جزئی مرتب ناتهی باشد. آنگاه A را یک S–مجموعه جزئی مرتب راست نامیده می‌شود هرگاه عمل دوتایی مانند $: A \times S \to A$. موجود باشد به قسمی که برای هر $a \in A$ و $s,t \in S$ داشته باشیم $a(st) = (as)t$ و $a1 = a$. همچنین برای هر $s,t \in S$ و $a,b \in A$ اگر $a \leq b$ باشد آنگاه داشته باشیم $as \leq bs$ و اگر $s \leq t$ آنگاه نتیجه دهد $as \leq at$. -S- مجموعه‌های جزئی مرتب چپ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. حال اگر A و B دو S–مجموعه‌ی جزئی مرتب راست باشند آنگاه تابع $f : A \to B$ یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب راست نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in A$ و $s \in S$ داشته باشیم $f(as) = f(a)s$ و به‌ازای هر $a_1, a_2 \in A$، اگر $a_1 \leq a_2$ باشد آنگاه نتیجه دهد $f(a_1) \leq f(a_2)$.

رسته‌ی همه S–مجموعه‌های جزئی مرتب راست (چپ) همراه با S–همریختی‌های بین آن‌ها را با $(S - P \circ S)P \circ S - S$ نشان می‌دهیم.

یک ایده‌آل مرتب راست از یک تکواره جزئی مرتب S، یک زیرمجموعه ناتهی مانند I از S است به‌طوری‌که $IS \subseteq I$ باشد و برای هر $a,b \in S$

*زینب عباس زاده چاری
پست *الکترونیک :* Masoomeh.hezarjaribi@pnu.ac.ir (معصومه هزارجریبی)، nahal.asady.1397@gmail.com (زینب عباس زاده)

اگر $a \leq b$ و $b \in I$ باشد، آنگاه $a \in I$ را ایجاب کند. توجه شود که هرگاه فقط $IS \subseteq I$ برقرار باشد گوییم I یک ایده‌آل S است. فرض کنید A یک S–مجموعه جزئی مرتب راست و مجموعه جزئی مرتب B یک زیرمجموعه ناتهی از A باشد. B را یک S–زیرمجموعه جزئی مرتب از A می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ و $b \in B$ داشته باشیم $bs \in B$.

یک همنهشتی روی یک S–مجموعه جزئی مرتب مانند A یک S–عمل همنهشتی θ (اگر $a\theta a'$ برای $a, a' \in A$ آنگاه $as\theta a's$ برای هر $s \in S$) است به طوری که S–عمل A/θ به یک S–مجموعه جزئی مرتب تبدیل شود و همچنین S–همریختی طبیعی $\pi : A \to A/\theta$ با ضابطه $a \to \bar{a}$ برای هر $a \in A$ یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب شود. حال فرض کنید $H \subseteq A \times A$ یک رابطه دلخواه روی یک S–مجموعه جزئی مرتب A باشد. رابطه همنهشتی $\theta(H)$ که توسط H بر A القا می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$a\theta(H)a'$

اگر و فقط اگر یا $a = a'$ یا $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$ و $(c_i, d_i), (p_j, q_j) \in H \cup H^{-1}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} a \leq s_1 c_1, \quad & a' \leq t_1 p_1, \\ s_1 d_1 \leq s_2 c_2, \quad & t_1 q_1 \leq t_2 p_2, \\ \vdots \quad & \vdots \\ s_n d_n \leq a', \quad & t_m q_m \leq a, \end{aligned}$$

برای $i = 1, \cdots, n$ و $j = 1, \cdots, m$.

علاوه بر این، رابطه ترتیب روی $A/\theta(H)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$[a] \leq [a']$ اگر و فقط اگر یا $a \leq a'$ یا عناصر $s_1, \cdots, s_n \in S$ و $(c_i, d_i) \in H \cup H^{-1}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} a &\leq s_1 c_1, \\ s_1 d_1 &\leq s_2 c_2, \\ &\vdots \\ s_n d_n &\leq a', \end{aligned}$$

برای $i = 1, \cdots, n$.

حال فرض کنید X و Y دو S–مجموعه جزئی مرتب باشند و $f : X \to Y$ یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب باشد. آنگاه f را یک نشاننده ترتیبی می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x \leq y$ اگر و فقط اگر $f(x) \leq f(y)$.

لازم به ذکر است که S–تکریختی منظم از S–مجموعه‌های جزئی مرتب دقیقاً همان نشاننده‌های ترتیبی هستند.

اکنون فرض کنید $f : A \to B$ و $g : A \to C$ دو S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب باشند. جلوبر زوج (f, g) به صورت $P = (B \sqcup C)/\rho(H)$ به همراه S- همریختی های $\ell_C = \pi i_C : C \to P$ و $\ell_B = \pi i_B : B \to P$ می باشند که در آن $\rho(H)$ همنهشتی S-مجموعه جزئی مرتب روی $B \sqcup C$ توسط رابطه دوتایی $H = \{(1, f(a)), (2, g(a)); a \in A\}$، نگاشت $\pi : B \sqcup C \to P$ یک S–برووریختی و $i_C : C \to B \sqcup C$ و $i_B : B \to B \sqcup C$ تزریق‌های هم‌حاصل‌ضرب داده شده با ضابطه های $i_B(b) = (1, b)$ و $i_C(c) = (2, c)$ برای هر $b \in B$ و $c \in C$ می باشد.

فرض کنید A و B دو S–مجموعه جزیی مرتب باشند. همنهشتی ρ روی حاصلضرب دکارتی این دو مجموعه یعنی $A \times B$ توسط رابطه $H = \{((as, b), (a, sb) | a \in A, b \in B, s \in S\}$ را در نظر بگیرید. خارج قسمتی $(A \times B)/\rho$ یک S–مجموعه جزئی مرتب است که که حاصل‌ضرب تانسوری دو S–مجموعه جزئی مرتب A و B روی S نام دارد و آن‌را با $A \otimes_S B$ نشان می‌دهیم.

یک S–مجموعه جزئی مرتب راست A را مسطح ضعیف اصلی می‌نامیم هرگاه تابعگون $A \otimes -$ همه نشاننده‌های از ایده‌آل‌های مرتب چپ اصلی به S را حفظ کنند. کلاس همه S–مجموعه‌های جزئی مرتب مسطح ضعیف اصلی را با PWF نمایش می‌دهیم. حال S–همریختی $f : X \to Y$ و همنهشتی روی S–مجموعه جزئی مرتب راست Y به صورت $\rho_f = (im(f) \times im(f)) \cup 1_Y$ در نظر بگیرید. در این صورت خارج قسمتی ریس S–مجموعه جزئی مرتب Y توسط X را با Y/X نشان می‌دهیم. حال می گوییم $f \in PWF - mono$ است هرگاه f یک S- تکریختی و خارج قسمتی Y/X یک S–مجموعه جزئی مرتب مسطح ضعیف اصلی باشد. همچنین می گوییم $f \in \chi - regular\ mono$ (χ کلاسی از همه S–مجموعه‌های جزئی مرتب است) هر گاه f یک S–تکریختی منظم از S–مجموعه‌های جزئی مرتب و خارج قسمتی Y/X یک S–مجموعه جزئی مرتب باشد.

مجموعه I را مجموعه اندیس مستقیم می‌گویند هرگاه برای $i, j \in I$، یک $k \in I$ی وجود داشته باشد به طوری‌که داشته باشیم $k > i$ و $k > j$.

یادآوری می کنیم که یک سیستم مستقیم، مجموعه ای از S–مجموعه های جزیی مرتب $(X_i)_{i \in I}$ به همراه S–همریختی های $\phi_{i,j} : X_i \longrightarrow X_j$ برای هر $i, j \in I$ که در آن $i \leq j$، به طوری که داشته باشیم $\phi_{i,i} = 1_{X_i}$ و همچنین برای هر $i \leq j \leq k$، $\phi_{j,k}\phi_{i,j} = \phi_{i,k}$ برقرار باشد. هم‌حد از این سیستم مستقیم، یک S–مجموعه جزئی مرتب X همراه با S–همریختی های $\alpha_i : X_i \to X$ است به طوری که $\alpha_j \phi_{i,j} = \alpha_i$که در آن $i \leq j$. حال اگر یک S–مجموعه جزئی مرتب دیگری مانند Y و S–همریختی های $\beta_i : X_i \to Y$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم

$\beta_j\phi_{i,j}=\beta_i$ برای $i\le j$، آنگاه یک Sـهمریختی منحصر بفرد $\psi:X\to Y$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\psi\alpha_i=\beta_i$. اگر I مجموعه اندیس مستقیم باشد هم‌حد را هم‌حد مستقیم می‌نامیم.
فرض کنید λ یک ترتیب نامتناهی باشد. منظور از یک λـدنباله، یک سیستم مستقیم از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب و Sـهمریختی‌هایی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب $(A_\alpha,\phi_{\alpha,\beta}:A_\alpha\to A_\beta)_{\alpha\le\beta<\lambda}$ با هم‌حد مستقیم $(A_\lambda,\phi_\lambda)_{\alpha<\lambda}$ است، به این صورت که برای هر ترتیب حدی $\gamma\le\lambda$، $(A_\alpha,\phi_{\alpha,\gamma})_{\alpha\le\gamma}$، هم‌حد مستقیم $(A_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})_{\alpha\le\beta<\gamma}$ باشد.
اکنون فرض کنید $\mathcal{P}$ یک کلاس از Sـهمریختی‌هایی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب باشد و $(A_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$ یک λـدنباله باشد که در آن برای $\beta<\beta+1<\lambda$ داریم $\phi_{\beta,\beta+1}\in\mathcal{P}$. آنگاه Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب $\phi_{0,\lambda}:A_0\to A_\lambda$ ترکیب ترامتناهی از Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب $\{\phi_{\alpha,\beta}|\alpha\le\beta\le\lambda\}$ نام دارد.
Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب راست $f:X\to Y$ و Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب چپ $g:A\to B$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم زوج (f,g) پایدار است اگر داشته باشیم

$$im(f\otimes 1)\cap im(1\otimes g)=im(f\otimes g)$$

و می‌گوییم Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب f، پایدار است اگر زوج (f,g) برای همه Sـتکریختی هایی از Sـمجموعه های جزئی مرتب چپ g پایدار باشد. می گوییم $f:X\to Y$، پایدار ضعیف است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌آل مرتب چپ اصلی I از مجموعه جزئی مرتب S، (f,ℓ_I) پایدار باشد که در آن $\ell_I:I\to S$ یک Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب شمول طبیعی است. فرض کنید X و Y دو Sـمجموعه جزیی مرتب باشند. می گوییم X درون‌بر Y است اگر برای هر Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب $f:X\to Y$، یک Sـهمریختی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب $h:Y\to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $hf=1_X$.

۲. نتایج اصلی

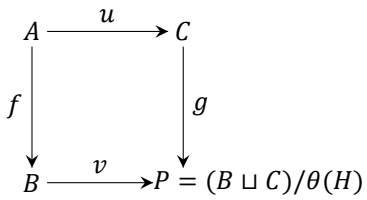
در این مقاله، ساختارها و ویژگی‌های رسته Sـمجموعه‌های جزئی مرتب با تمرکز بر مفاهیم پایدارضعیف، مسطح ضعیف اصلی و همنهشتی‌ها بررسی شده‌اند. نتایج پژوهش نشان می‌دهند که Sـهمریختی‌های راست مرتب در این رسته در شرایط خاصی پایدار ضعیف می باشد. علاوه بر این، مشخص شده است که ترکیب‌های ترامتناهی از Sـهمریختی‌های پایدار و مسطح ضعیف اصلی در این رسته حفظ می شود. همچنین، شرایط لازم و کافی برای پایدار بودن زوج همریختی‌ها در این رسته به صورت دقیق ارائه شده است.

لم ۱.۲. *فرض کنید* $\begin{array}{ccc}A&\xrightarrow{f}&B\\ {\scriptstyle g}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle \gamma}\\ C&\xrightarrow[\delta]{}&P\end{array}$ *یک جلوبر در رسته Sـمجموعه جزئی مرتب و g یک Sـتکریختی منظم باشد. آنگاه γ نیز یک Sـتکریختی منظم است.*

لم ۲.۲. *فرض کنید* $\begin{array}{ccc}A&\xrightarrow{f}&B\\ {\scriptstyle g}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle \gamma}\\ C&\xrightarrow[\delta]{}&P\end{array}$ *یک جلوبر در رسته Sـمجموعه های جزئی مرتب و g یک Sـتکریختی منظم باشد. اگر برای $c_1,c_2\in C$ ی داشته باشیم $\delta(c_1)\le\delta(c_2)$. آنگاه یا $c_1\le c_2$ و یا $a,a'\in A$ وجود دارد به طوری‌که $f(a)\le f(a')$ و $g(a')\le c_2$ و $c_1\le g(a)$.*

گزاره ۳.۲. *فرض کنید χ، کلاسی از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب باشد، آنگاه $\chi-regular\ mono$، جلوبرها را انتقال می‌دهد.*

اثبات. نمودار جلوبر زیر را در رسته Sـمجموعه‌های جزئی مرتب در نظر بگیرید
و فرض کنید $f\in\chi-regular\ mono$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که جلوبر f یعنی g نیز متعلق به $\chi-regular\ mono$ است. حال بنابر لم ۱.۲، g یک Sـتکریختی منظم از Sـمجموعه‌های جزئی مرتب است. لذا کافی است ثابت کنیم P/C یک Sـمجموعه جزئی مرتب است، یعنی $P/C\in\chi$.
اکنون نشان می‌دهیم که P/C یک Sـمجموعه جزئی مرتب است. باید سازگاربودن رابطه ترتیب جزئی را در اعضای P/C بررسی کنیم، یعنی برای هر $\overline{[p]}_{\theta(H)},\overline{[p']}_{\theta(H)}\in P/C$ و $s\in S$ اگر $\overline{[p]}_{\theta(H)}\le_{\theta(P)}\overline{[p']}_{\theta(H)}$ برقرار باشد آنگاه $\overline{[p]}_{\theta(H)}s\le_{\theta(\rho)}\overline{[p']}_{\theta(H)}s$ نتیجه شود. در اینجا $\theta(\rho)$ همنهشتی Sـمجموعه جزئی مرتب تولید شده توسط $\rho=im(g)\times im(g)\cup 1_P$ روی P می‌باشد و $\theta(H)$ نیز همنهشتی Sـمجموعه جزئی مرتب تولید شده توسط $H=\{(1,u(a)),(2,f(a)),a\in A\}$ روی $B\sqcup C$ می‌باشد. حال برای



شکل ۱:

$\overline{[p]}_{\theta(H)}, \overline{[p']}_{\theta(H)} \in ((B \sqcup C)/\theta(H))/\theta(\rho)$ داریم

$$\overline{[p]}_{\theta(H)} \leq_{\theta(H)} \overline{[p']}_{\theta(H)} \text{ اگر و فقط اگر یا } [p] \leq_{\theta(H)} [p'] \quad (۱)$$

یا وجود دارد $s_1, \cdots, s_n \in S$ و $([c_i], [d_i]) \in \rho \cup \rho^{-1}$ به‌طوری که

$$\begin{aligned} [p] &\leq_{\theta(H)} [c_1]s_1, \\ [d_1]s_1 &\leq_{\theta(H)} [c_2]s_2, \\ [d_2]s_2 &\leq_{\theta(H)} [c_3]s_3, \\ &\vdots \\ [d_n]s_n &\leq_{\theta(H)} [p']. \end{aligned} \quad (۲)$$

از رابطه (۱) یعنی، $[p] \leq_{\theta(H)} [p']$ داریم:
$[p] \leq_{\theta(H)} [p']$ اگر و فقط اگر یا $p \leq p'$ یا عناصر $t_1, \cdots, t_n \in S$ و $(l_i, h_i) \in H \cup H^{-1}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} p &\leq l_1 t_1, \\ h_1 t_1 &\leq l_2 t_2, \\ h_2 t_2 &\leq l_3 t_3, \\ &\vdots \\ h_n t_n &\leq p'. \end{aligned}$$

اگر $p \leq p'$ برقرار باشد، داریم:

$$p \leq p' \Rightarrow p.s \leq p'.s \Rightarrow [p.s] \leq [p'.s] \Rightarrow \overline{[p.s]} \leq_{\theta(\rho)} \overline{[p'.s]} \Rightarrow \overline{[p]}.s \leq_{\theta(\rho)} \overline{[p']}.s.$$

حال اگر رابطه (۲)برقرار باشد، آنگاه داریم
$[p] \leq [c_1]s_1 = [c_1 s_1]$ اگر و فقط اگر یا

$$p \leq c_1 s_1 \quad (۳)$$

یا $s'_1, \cdots, s'_n \in S$ و $(c'_i, d'_i) \in H \cup H^{-1}$ وجود دارند به‌طوری که

$$\begin{aligned} p &\leq c'_1 s'_1, \\ d'_1 s'_1 &\leq c'_2 s'_2, \\ d'_2 s'_2 &\leq c'_3 s'_3, \\ &\vdots \\ d'_n s'_n &\leq c_1 s_1. \end{aligned} \quad (۴)$$

اگر رابطه $p \leq c_1 s_1$ برقرار باشد، داریم

$$p \leq c_1 s_1 \Rightarrow ps \leq c_1 s_1 s \Rightarrow [ps] \leq_{\theta(H)} [c_1 s_1 s]$$

و اگر رابطه (۴) برقرار باشد داریم

$$\begin{aligned} p \leq c'_1 s'_1 &\Rightarrow ps \leq c'_1 s_1 s, \\ d'_1 s'_1 s &\leq c'_2 s'_2 s, \\ d'_2 s'_2 s &\leq c'_3 s'_3 s, \\ &\vdots \\ d'_n s'_n s &\leq c_1 s_1 s. \end{aligned}$$

بنابراین از رابطه (۲) داریم

$$\overline{[ps]} \leq \overline{[p's]} \Rightarrow \overline{[p]}s \leq \overline{[p']}s$$

لذا نتیجه برقرار است. حال فرض کنید $s,t \in S$ و $\overline{[p]} \in P/C$ و $s \leq t$ باشد. آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که $\overline{[p]}.s \leq \overline{[p']}.s$. لذا داریم $P/C \in \chi$ و در نتیجه $g \in \chi - regular\ mono$. □

نتیجه ۴.۲. *کلاس $PWF - mono$، جلوبرها را انتقال می‌دهد .*

لم ۵.۲. *فرض کنید S یک تکواره جزئی مرتب باشد و فرض کنید $f : X \to Y$ یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب راست باشد .*

(۱) *اگر Y/X مسطح ضعیف اصلی باشد، آنگاه f پایدار ضعیف است؛*

(۲) *اگر Y مسطح ضعیف اصلی و f پایدار ضعیف باشد، آنگاه Y/X مسطح ضعیف اصلی است .*

(۳) *اگر $g : Y \to Z$ یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب باشد . آنگاه $\bar{g} : Y/X \to Z/Y$ نیز یک S–تکریختی است و داریم*

$$Z/X \cong (Z/Y)/(Y/X).$$

(۴) *اگر $g : Y \to Z$ یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب پایدار ضعیف باشد آنگاه $\bar{g} : Y/X \to Z/Y$ با نیز یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب پایدار ضعیف است .*

گزاره ۶.۲. *کلاس $PWF - mono$ تحت ترکیب بسته است .*

لم ۷.۲. *فرض کنید S یک تکواره جزئی مرتب باشد و $(X_i, \phi_{i,j})$ یک سیستم مستقیم از S–مجموعه‌های جزئی مرتب با مجموعه اندیس مستقیم I باشد و فرض کنید (X, α_i) هم‌حد مستقیم باشد . آنگاه داریم :*

(۱) *α_i یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب است اگر و فقط اگر $\phi_{i,k}$ یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب برای همه $k \geq i$ باشد .*

(۲) *فرض کنید $\lambda : A \to B$ یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب چپ باشد برای هر $i \in I$، اگر $1 \otimes \lambda : X_i \otimes A \to X_i \otimes B$ یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب باشد، آنگاه $1 \otimes \lambda : X \otimes A \to X \otimes B$ نیز یک S–تکریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب است .*

(۳) *فرض کنید یک همنهشتی S–مجموعه جزئی مرتب ρ_i، $i \in I$ روی X_i وجود داشته باشد، به‌طوری‌که داشته باشیم*

$$\begin{aligned} &\theta_{i,j} : X_i/\rho_i \to X_j/\rho_j \\ &\theta_{i,j}(x_i\rho_i) = \phi_{i,j}(x_i)\rho_j \end{aligned}$$

برای $i \leq j$، آنگاه یک همنهشتی S–مجموعه جزئی مرتب ρ روی X و یک S–همریختی از S–مجموعه‌های جزئی مرتب $\beta_i : X_i/\rho_i \to X/\rho$ وجود دارد به‌طوری‌که $(X/\rho, \beta_i)$ هم‌حد $(X_i/\rho_i, \theta_{i,j})$ است .

نتیجه ۸.۲. *فرض کنید I مجموعه اندیس مستقیم $(X_i)_{i \in I}$ یک خانواده از S–مجموعه‌های جزئی مرتب مسطح ضعیف اصلی باشد . در این صورت هم‌حد آن نیز یک S–مجموعه جزئی مرتب مسطح ضعیف اصلی است .*

گزاره ۹.۲. *کلاس $PWF - mono$ تحت ترکیب ترامتناهی بسته است .*

مراجع

[1] Huanyun. Li. and Rongmin. Z., On factorization systems for S-acts, semigroup Forum 107: 478-490(2023).
[2] Farsad. F. and Madanshekaf. A., Weak factorization systems and fibrewise, regular injectivity for actions of pomonods on possets Algebra Discrete Math, 24(2), 235-249 (2017).
[3] Rasouli. H., Categorical properties of regular monomorphisms of S-posets, 2, 166-178(2014).
[4] Bulman-Fleming. S and Mahmoudi, M., The Category of S-posets, semigroup Forum 71(3), 443-461 (2005).
[5] Al Subaiei, B., Renshaw, J., On free products and amalgams of pomonoids. Communi- cations in Algebra. 44, 2455-2474 (2016).

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–155، صص. ۹۱–۹۳

اثبات قضیه مورلی با استفاده از خاصیت نیمسازها

غلامرضا سلطانی ابری[آ]

[آ] پژوهشگر ازاد در حوزه هندسه مسطحه، گنبدکاووس، گلستان، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
قضیه مورلی
تثلیث گرهای همجوار(نزدیک به ضلع مشترک دو زاویه)
خاصیت نیمسازها

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
۵۵A۴۷
۵۲B۳۹
۲۰K۳۴
۸۲B۳۹

چکیده

قضیه مورلی حاکی از آن است که محل تلاقی تثلیث گرهای همجوار زاویه‌های هر مثلث رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند.
ما در این مقاله با داشتن محل تلاقی تثلیث گرهای دو زاویه از سه زاویه یک مثلث که یکی از این نقاط تلاقی (محل تلاقی تثلیث گرهای همجوار)، یکی از رئوس مثلث مورد نظرمورلی نیز است . این نقطه را راس مثلث متساوی الاضلاعی قرار می‌دهیم که دو راس دیگر ان روی دو تثلیث گر دیگر این دو زاویه است و با استفاده از خاصیت نیمسازها ثابت می‌کنیم که این مثلث متساوی الاضلاع همان مثلث مورد نظر مورلی است. و تثلیث گرهای زاویه سوم هم در محل دو راس دیگر همین مثلث با تثلیث گرهای همجوار خود تلاقی می‌کنند.

۱. پیش‌گفتار

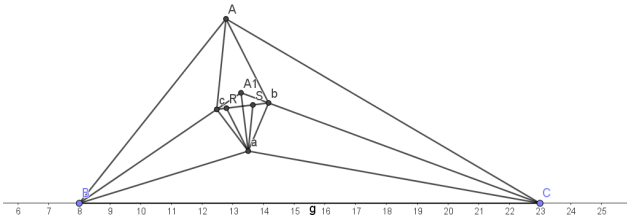
قضیه مورلی بیان کننده این مطلب است که دو به دو زاویه‌های یک مثلث یک ضلع مشترک دارند و محل تلاقی دو تثلیث گر نزدیک به این اضلاع (تثلیث گرهای همجوار) رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند . شکل ۱
قضیه مورلی در سال ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی که در آن موقع استاد ریاضی یکی از دانشگاه‌های امریکا بود، مطرح گردید. اثبات‌های متعددی از قضیه مورلی به طرق مختلف جبری ومثلثاتی وهندسی به عمل امده است. از جمله این ریاضی دانان، الن کن ریاضیدان فرانسوی و برنده جایزه فیلد ز،اثباتی جبری ازقضیه مورلی دارد [۱]. جان کانوی ریاضیدان شهیر انگلیسی واستاد ریاضی دانشگاه پرینستون امریکا که از لحاظ دستاوردهای علمی یکی از پر افتخارترین دانشگاه‌های دنیا به شمار می‌رود نیزاثباتی زیبا و هندسی ازقضیه مورلی دارد. منبع[۲] این جانب هم به غیر از اثبات به عمل امده از قضیه مورلی با استفاده از خاصیت نیمسازها در این مقاله ،قبلا با روشی دیگر و به کمک دایره‌های متناظر و متقارن ، این قضیه را اثبات نموده‌ام [۳].
همچنین مقاله‌ای تحت عنوان(قضیه مورلی و سه مثلث متساوی‌الاضلاع متقارن دیگر) در پنجاه و سومین کنفرانس ریاضی ایران ارائه نموده‌ام [۴].

۲. دست‌آوردهای پژوهش

با توجه به شکل ۱ در مثلث ABC تثلیث گرهای Ba و Ca در نقطه a و تثلیث گرهای Ac و Bc درنقطه c وتثلیث گرهای Ab و Cb در نقطه b به عنوان تثلیث گرهای همجوار با یکدیگر تلاقی نموده اند از نظر مورلی سه نقطه a وb و c رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند.

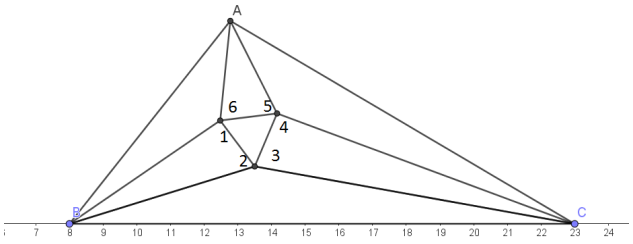
پست الکترونیک : Golamrezasoltaniabri@yahoo.com (غلامرضا سلطانی ابری)

اگر تثلیث گرهای Ba و Ca را امتداد دهیم تا در نقطه A_1 همدیگر را قطع کنند پاره خط A_1a نیمساز زاویه $B\hat{A}_1C$ نیز میشود چون در مثلث $\overset{\triangle}{BA_1C}$. نقطه a محل تلاقی دو نیمسازدیگر این مثلث است ونیمسازهای هر مثلث ازیک نقطه مشترک می‌گذرند.



شکل ۱:

دراین حالت اگر نقطه a را راس زاویه ۶۰ درجه‌ای قرار دهیم که aA_1 نیمساز ان باشد اضلاع این زاویه در نقاط b و c اضلاع BA_1 و CA_1 را قطع می‌کنند .در این حالت با ترسیم ضلع bc مثلث متساوی الساقین abc که زاویه راس آن ۶۰° است متساوی الاضلاع هم می‌شود.چون نقطه a یکی از رئوس مثلث مورلی است وبا این شرایط از این نقطه روی نیمساز زاویه $B\hat{A}_1C$ بیشتر از یک مثلث متساوی الاضلاع نمی‌توان رسم کرد که دو راس دیگر آن مثلث روی اضلاع A_1B و A_1C باشد بنا بر این تثلیث گرهای زاویه راس سوم یعنی زاویه $\hat{A}$ نیز مجبورند و چاره‌ای ندارند مگر این که در نقاط b و c با تثلیث گرهای همجوار خود تلاقی نمایند.
با توجه به شکل ۱، اگر ازنقطه a خطی رسم کنیم که در نقطه R ضلع bc را قطع و با ضلع ac زاویه‌ای برابر ثلث زاویه C بسازد وخط aS را نیز طوری رسم کنیم که با ضلع ab زاویه‌ای برابر ثلث زاویه $\hat{B}$ بسازد. در این حالت داریم $a\hat{R}b = ۶۰° + \hat{c}$ و زاویه $a\hat{S}c = ۶۰° + \hat{b}$.
حالا اگر از نقطه b خطی به موازات aR و از نقطه c خطی به موازات aS رسم کنیم . زاویه‌ای که این خطوط با هم می‌سازند برابر با ثلث زاویه $\hat{A}$ می‌شود و زاویه‌ای که با ضلع ab می‌سازند برابر با $\hat{5} = c\hat{b}A = ۶۰° + \hat{c}$ و $\hat{۶} = ۶۰° + \hat{b} = b\hat{c}A$ درجه می‌شود. و در مثلث بوجود امده داریم، $۱۸۰° = a + (۶۰° + c) + (۶۰° + b)$ است. بنا براین خطوطی که از راس b به موازات aR و از راس c به موازات aS رسم شده اند



شکل ۲:

این دو خط نمی‌توانند جز در نقطه A راس زاویه $B\hat{A}C$ با هم تلاقی کنند ،چون با زاویه‌های قاعده مثلث‌های مشابه دیگری که قاعده آنها اضلاع ab و ac است همخوانی دارد.در این حالت در مثلث $\overset{\triangle}{Cba}$ داریم:

$$\hat{۴} = a\hat{b}C = ۱۸۰° - ۶۰° - (\hat{b} + \hat{c}) = ۶۰° + \hat{a}$$

و

$$\hat{۴} = b\hat{a}C = ۱۸۰° - ((۶۰° + \hat{a}) - \hat{c}) = ۶۰° + \hat{b}$$

همچنین در مثلث $\overset{\triangle}{Bca}$ داریم :

$$\hat{۱} = B\hat{c}a = ۱۸۰° - ۶۰° - (\hat{b} + \hat{c}) = ۶۰° + \hat{a}$$

و

$$\hat{۴} = B\hat{a}c = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + \hat{a}) - \hat{b} = ۶۰^\circ + \hat{c}.$$

قضیه کرم زاده کمک می‌کند تا قضیه مورلی را به شکل (اگر و تنها اگر) بیان کنیم: فرض کنیم در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داشته باشیم $\hat{A} = ۳a$، $\hat{B} = ۳b$، $\hat{C} = c_۳$.

اگر تثلیث‌گرهای سه زاویه مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در سه نقطه a، b، c یکدیگر را قطع کنند ، آنگاه مثلث $\overset{\triangle}{abc}$ یا (همان مثلث مورلی) متساوی الاضلاع است (اگر وتنها اگر) مثلث‌های $\overset{\triangle}{Bac}$، $\overset{\triangle}{Cba}$، $\overset{\triangle}{Abc}$ در تساوی‌های زیر صدق کنند $\hat{۱} = \hat{۴} = ۶۰^\circ + \hat{b}$، $\hat{۴} = \hat{۵} = ۶۰^\circ + \hat{c}$ و $\hat{۳} = \hat{۶} = ۶۰^\circ + \hat{a}$ همانطور که ملاحظه می‌شود این تساوی‌ها در روشی که برای اثبات قضیه مورلی با استفاده از خاصیت نیمسازها بکار برده شده صدق می‌کند.

۳. نتیجه گیری :

با توجه به اینکه دو زاویه قاعده سه مثلث ساخته شده بر روی اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی که ترسیم کرده‌ایم با دو زاویه قاعده سه مثلث مشابه درقضیه مورلی همخوانی دارد و از یک فرمول پیروی می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که مثلث مورد نظر ما همان مثلث مورلی است و محل تلاقی تثلیث گرهای همجوار زاویه‌های هر مثلث رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل می‌دهند .

سپاس‌گزاری

۱- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور استاد بزرگوارجناب پروفسور امید علی شهنی کرم زاده.
۲- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور ریاست محترم شاخه ریاضی فرهنگستان علوم ایران استاد بزرگوار جناب پروفسور مگردیچ تومانیان.
۳- گرامی می‌دارم یاد و خاطره استاد بزرگوارجناب شادروان پروفسور سید علی رضا اشرفی را به عنوان حامی و مشوق اینجانب در ادامه تحقیقات ریاضی.
۴- سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از همه‌ی عوامل و دست‌اندرکاران برگزارکننده پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار دانشگاه گنبدکاووس به ویژه دکتر شاهینی، دبیر محترم همایش، برای راهنمایی و مساعدت در امر آماده‌سازی و ارسال مقاله

مراجع

[۱] م.ر درفشه، اثلات جدیدی از قضیه مورلی، فرهنگ و اندیشه ریلضی، (۱۳۸۷)، شماره ۴۱، ۵۲-۴۳.
[۲] ممتحن و ا. شهنی کرم زاده، همگانی سازی از نوع دوم. فرهنگ و اندیشه ریاضی (۱۳۹۷)، شماره ۶۳، ۳۶-۱.
[۳] غ. سلطانی، روشی برای اثبات قضیه مورلی به کمک دایره‌های متناظر و متقارن. پنجاه و دومین کنفرانس ریاضی ایران (۱۴۰۰)، دانشگاه کرمان.
[۴] غ. سلطانی، قضیه مورلی و سه مثلث متساوی‌الاضلاع و متقارن دیگر. پنجاه و سومین کنفرانس ریاضی ایران(۱۴۰۱)، دانشگاه علم و فناوری مازندران.
[5] O.A.S. Karamzadeh, *Is the mystery of Morleys Triscotor theorem resolued?*, Forum Geometricorum, 18 (2018), 297–306.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–163، صص. ۹۴–۹۸

درباره ابر K–زیرجبر فازی از یک ابر K–جبر

فهیمه محمدزاده*[آ]، الهه محمدزاده[ب]

[آ] استادیار ریاضی محض، گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[ب] استادیار ریاضی محض، گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
ابر K–جبرفازی ۱
ابرK–زیر جبر فازی ۲
ابرBCK–جبر فازی۳

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
06F35
08A72
03E72

چکیده

در این مقاله ابتدا مفهوم ابر K–زیرجبر فازی از یک ابرK- جبر فازی معرفی می‌شود و یک شرط معادل برای آن ذکر می‌شود و در ادامه مثالهایی در باره این مفهوم بیان می‌شود. همچنین توانستیم از یک ابر K–جبر فازی یک ابر K–زیرجبر فازی به دست آوریم.

۱. مقدمه

نظریه فازی در سال ۱۹۶۵ توسط زاده [۱] [۱۰]معرفی شد. این نظریه کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی، کامپیوتر و سایر علوم دارند. در سال ۱۹۷۱، روزنفلد [۲] [۶]مفهوم زیرگروه فازی را تعریف کرد. سپس، بسیاری از محققین مفاهیم جبر انتزاعی را در چارچوب مجموعه‌های فازی گسترش دادند، به منابع [۳، ۱۱] مراجعه شود. بعد از آن در سال ۱۹۹۱، شی [۳] [۹]، مفهوم ابر BCK–جبر فازی را بیان کرد که مقالات زیادی توسط دانشمندان مختلف در این زمینه نوشته شد [۵] .
ابرساختارهای فازی به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول مقالات ابر ساختارهای مجرد به دست امده از مجموعه‌های فازی را بررسی می‌کند که توسط کرسینی معرفی شد [۲] . دسته دوم مقالات، توسیع مستقیمی از مفاهیم جبرهای فازی است که توسط زاهدی [۴] [۱۱] به مفاهیم ابرساختارهای فازی گسترش یافت. دسته سوم که توسط کرسینی و توفان [۳]معرفی شد نیز به ابرگروه‌های فازی مرتبط است منتها با رویکردی کاملا متفاوت. در این روش به هر زوج از عناصر یک مجموعه فازی نسبت داده می‌شود که ابرعمل فازی نام دارد. این ایده توسط سن وهمکارانش [۷] انجام شد و مفهوم ابر نیم‌گروه فازی معرفی شد. لیورینا [۴] مفهوم ابرحلقه‌های فازی را معرفی کرد و مطالعه روی ابرساختارهای فازی همچنان ادامه دارد.
همچنین در مقاله [۱] مفهوم ابر BCK–جبرفازی، ابرK–جبرفازی، ابرI–جبر فازی و ابر K- ایده‌آل فازی (ضعیف) را به روش کرسینی و توفان بیان کردیم و نشان دادیم هر که هر ابرBCK–جبرفازی یک ابر – K جبرفازی است.

*سخنران
پست *الکترونیک :* f.mohammadzadeh@pnu.ac.ir (فهیمه محمدزاده)، mohamadzadeh@pnu.ac.ir (الهه محمدزاده)

[1] Zadeh
[2] Rosenfeld
[3] Xi
[4] Zahedi

در این مقاله ابتدا مفهوم ابر K–زیرجبر فازی از یک ابر K– جبر فازی معرفی می‌شود و یک شرط معادل برای آن ذکر می‌شود و در ادامه مثالهایی در باره این مفهوم بیان می‌شود.
برای یک مجموعه غیرتهی H تابع $\mu : H \to [0,1]$ یک زیرمجموعه فازی H نامیده می‌شود. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی H با $F(H)$ نشان داده می‌شود و $F^*(H) = F(H)\backslash\{0\}$ که منظور از ۰، مجموعه فازی صفر است. تابع $\circ$ از $H \times H$ به $F^*(H)$ یک ابر عمل فازی H نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in H$ داشته باشیم $x_1 \circ x_2 \in F^*(H)$. دراین‌صورت $(H, \circ)$ یک ابرگروهوار فازی نامیده می‌شود (مرجع [۷] را ببینید).

تعریف ۱.۱. [۷] فرض کنید μ و ν زیرمجموعه‌های فازی از ابرگروهوار فازی $(H, \circ)$ باشند. در این‌صورت برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از H و هر $x_1, x_2, r \in H$ عمل‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
(۱) $\odot : F(H) \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \odot \nu)(r) = \bigvee_{p,q \in H} (\mu(p) \wedge (p \circ q)(r) \wedge \nu(q))$$

(۲) $* : H \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(x_1 * \mu)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} ((x_1 \circ t)(r) \wedge \mu(t)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۳) $\bullet : F(H) \times H \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \bullet x_1)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} (\mu(t) \wedge (t \circ x_1)(r)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۴) $\circ : H \times P^*(H) \to F^*(H)$ که در آن $P^*(H)$ مجموعه توانی $H\backslash\{\emptyset\}$ می‌باشد با ضابطه

$$(x_2 \circ A)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_2 \circ x_1)(r)$$

و $\star : P^*(H) \times H \to F^*(H)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \star x_2)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_1 \circ x_2)(r)$$

با توجه به نمادهای تعریف شده در بالا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۲.۱. [۷] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابر نیم‌گروه فازی باشد. اگر برای هر $x \in H$ داشته باشیم $x \circ H = H \circ x = \chi_H$ آنگاه $(H, \circ)$ یک ابرگروه فازی نامیده می‌شود.
فرض کنید $Y \subseteq X$ و $t \in [0,1]$. مجموعه فازی t_Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_Y(x) = \begin{cases} t & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$$

به‌ویژه اگر Y مجموعه یکانی باشد، مانند $\{y\}$، آنگاه $t_{\{y\}}$ یک نقطه فازی نامیده می‌شود و با t_y نشان داده می‌شود. در این مقاله، اگر $a \circ b$ نقطه فازی باشد، آنگاه با نماد $t_y^{(a,b)}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱. [۱] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروهوار فازی و μ و ν دو زیرمجموعه فازی روی H باشند. در این‌صورت رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
(۱) برای هر $x_1, x_2 \in H$ داریم $x_1 < x_2$ اگر و تنها اگر $(x_1 \circ x_2)(0) > 0$.
(۲) $\mu \ll \nu$ اگر و تنها اگر برای هر $r \in H$ بتوان $s \in H$ یافت به‌طوری که $\mu(r) > 0$ و $\nu(s) > 0$ و $r < s$.
(۳) $\mu < \nu$ اگر و تنها اگر $r, s \in H$ موجود باشند به‌طوری‌که $\mu(r) > 0$ و $\nu(s) > 0$ و $r < s$.

تعریف ۴.۱. [۱] فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروهوار فازی با عضو ثابت $\circ$ باشد. در این‌صورت H یک ابر BCK–جبر فازی گفته می‌شود اگر برای هر $x_1,x_2,x_3\in H$ موارد زیر برقرار باشد:
$(x_1\circ x_3)\odot(x_2\circ x_3)\ll x_1\circ x_2$ $(FHK1)$
$(x_1\circ x_2)\bullet x_3=(x_1\circ x_3)\bullet x_2$ $(FHK2)$
$x_1\circ H\ll\chi_{\{x_1\}}$ $(FHK3)$
اگر $x_2<x_1$ و $x_2<x_1$، آنگاه $x_1=x_2$. $((FHK4))$

تعریف ۵.۱. یک مجموعه غیرتهی H همراه با یک ابر عمل فازی "$\circ$" و یک ثابت $\circ$ که در شرایط زیر صدق می‌کند، یک ابر K–جبر فازی نامیده می‌شود.
$(x\circ z)\odot(y\circ z)<x\circ y$. $(HI1)$
$(x\circ y)\bullet z=(x\circ z)\bullet y$. $(HI2)$
$x<x$، $(HI3)$
اگر $x<y$ و $y<x$، آنگاه $x=y$، $(HI4)$
برای هر $x\in H$ داریم $\circ<x$. $(HI5)$
که $x,y,z\in H$

قضیه ۶.۱. *فرض کنید $(H_1,\circ_1,\circ_1)$ و $(H_2,\circ_2,\circ_2)$ ابر K–جبر فازی (ابر BCK–جبر فازی) و $H=H_1\times H_2$ باشد. برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in H$ ابرعمل فازی "$\circ$" را روی H به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)=(a_1\circ_1 a_2,b_1\circ_2 b_2)\qquad(1)$$

به‌طوری که برای هر $\nu\in F(H_2)$ و $\mu\in F(H_1)$ و $r\in H_1$ و $s\in H_2$ داریم

$$(\mu,\nu)(r,s)=(\mu(r),\nu(s))\qquad(2)$$

و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$(a_1,b_1)<(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1<a_2,b_1<b_2.$$

در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی (ابر BCK–جبر فازی) است و آن را ابر K–حاصل‌ضرب فازی (یا ابر BCK–حاصل‌ضرب فازی) H_1 و H_2 می‌نامیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد و S یک زیرمجموعه H شامل $\circ$ باشد. اگر S نسبت به ابر عمل فازی "$\circ$" روی H یک ابر K–جبر فازی باشد، آنگاه S یک ابر K–زیرجبر فازی H نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۲. *فرض‌کنید S یک زیرمجموعه غیرتهی از ابر K–جبر فازی $(H,\circ,\circ)$ باشد. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی H است اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم $x\circ y\subseteq S$ (به‌عبارتی اگر $r\in H$ موجود باشد که $(x\circ y)(r)>\circ$، آنگاه $r\in S$.)*

اثبات. ($\Rightarrow$) S ابر K–زیرجبرفازی H است. بنابراین برای هر $x,y\in S$ داریم

$$x\circ y\in F^*(S).$$

یعنی $x\circ y\subseteq S$.
($\Leftarrow$) فرض‌کنید برای هر $x,y\in S$، $x\circ y\subseteq S$ و همچنین فرض‌کنید $a\in S$. می‌دانیم $(a\circ a)(\circ)>\circ$. پس بنا به فرض $\circ\in S$. حال برای هر $x,y,z\in S$ داریم $x\circ z\subseteq S$ و $y\circ z\subseteq S$ و $x\circ y\subseteq S$. بنابراین چون H ابر K–جبر است داریم

$$(x\circ z)\odot(y\circ z)<x\circ y.$$

درنتیجه $(HI1)$ در S نیز برقرار است. به‌طور مشابه $(HI2)$ و $(HI3)$ و $(HI4)$ و $(HI5)$ نیز برقرارند. بنابراین S یک ابر K–زیرجبر فازی H است. □

مثال ۳.۲. (۱) ابر عمل فازی " $\circ$ " را روی BCK–جبر $(X,*,\circ)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\circ y=\chi_{x*y}\quad \forall x,y\in X$$

در این‌صورت $(X,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است . اگر S یک زیرجبر از BCK–جبر $(X,\circ,\circ)$ باشد، آنگاه S یک ابر K–زیرجبر فازی از $(X,\circ,\circ)$ می‌باشد.
(۲) ابرعمل فازی "$\circ$" روی $H=[\circ,\infty)$ را برای هر x و y از آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\circ y=\begin{cases}\chi_{[\circ,x]} & x\le y\\ \chi_{(\circ,y]} & x>y\neq\circ\\ \chi_{\{x\}} & y=\circ\end{cases}$$

در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است. اکنون فرض کنید $a>\circ$ و $S=[\circ,a]$. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی از $(H,\circ,\circ)$ است.
(۳) فرض کنید $H=\{\circ,a,b\}$ و ابر عمل فازی " $\circ$ " را مطابق جدول زیر را درنظر بگیرید. در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است. فرض کنید $S=\{\circ,a\}$ در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی H می‌باشد.

$\circ$	$\circ$	a	b
$\circ$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ\}}$
a	$\chi_{\{a\}}$	$\chi_{\{\circ,a\}}$	$\chi_{\{\circ,a\}}$
b	$\chi_{\{b\}}$	$\chi_{\{a,b\}}$	$\chi_{\{\circ,a,b\}}$

(۴) فرض کنید $H_1=\{\circ,x,y\}$ و جدول زیر را درنظر بگیرید. در این‌صورت $(H_1,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است اما ابر BCK–جبر فازی نیست زیرا $x\circ y\not\ll\chi_{\{x\}}$.
فرض‌کنید $H=H_1\times H_1$ و $S=H_1\times\{\circ\}$. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی غیربدیهی H می‌باشد.

$\circ$	$\circ$	x	y
$\circ$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$
x	$\chi_{\{x\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$
y	$\chi_{\{y\}}$	$\chi_{\{x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$

گزاره ۴.۲. *فرض کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد و $\mu\in F(H)$ در این‌صورت اگر $\mu<t_\circ$، آنگاه $\mu=t_\circ$.*

اثبات . فرض کنید $r\in H$ اگر $r=\circ$ آنگاه $\mu(r)>\circ$ یا $\mu(r)=\circ$. اما اگر $\mu(r)=\circ$ آنگاه از $\mu<t_\circ$ به تناقض می رسیم. پس همواره $\mu(\circ)>\circ$. حال اگر $r\neq\circ$ آنگاه $\mu(r)=\circ$ یا $\mu(r)>\circ$ که در حالت دوم از $\mu<t_\circ$ به تناقض می رسیم. درنتیجه $\mu=t_\circ$. □

قضیه ۵.۲. *فرض‌کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد . در این‌صورت مجموعه $S_K(H)$ یک ابر K–زیرجبر فازی H می‌باشد .*

$$S_K(H)=\{x\in H\mid x\circ x=t_\circ^{(x,x)}\}$$

اثبات . بنابر $(HI3)$ داریم $\circ<\circ$. بنابراین $t_\circ<\circ\circ\circ$. پس $\circ\in S_K(H)$ و $S_K(H)$ غیرتهی است. فرض‌کنید $x,y\in S_K(H)$ و $a\in H$ موجود باشد به‌طوری که $(x\circ y)(a)>\circ$. نشان می‌دهیم که $a\in S$ یعنی $x\circ y\subseteq S$.
می‌دانیم

$$(x\circ y)\odot(x\circ y)<x\circ x=t_\circ^{(x,x)}$$

قرار می‌دهیم $A=(x\circ y)\odot(x\circ y)$. حال بنا به گزاره ۴.۲ (۲) داریم

$$A=(x\circ y)\odot(x\circ y)=t_\circ \tag{۳}$$

فرض‌کنید $r\in H$ به‌طوری که $(a\circ a)(r)>\circ$. بنابراین

$$((x\circ y)\odot(x\circ y))(r)=\bigvee_{p,q}(x\circ y)(p)\wedge(p\circ q)(r)\wedge(x\circ y)(q)$$

$$\ge(x\circ y)(a)\wedge(a\circ a)(r)>\circ. \tag{۴}$$

حال با توجه به رابطه‌های (۳) و (۴) داریم $t_\circ^A(r)>\circ$ یعنی $r=\circ$. درنتیجه نشان دادیم اگر $(a\circ a)(r)>\circ$، آنگاه $r=\circ$. پس $(a\circ a)=t_\circ^{(a,a)}$. به‌عبارتی $a\in S$ و $S_K(H)$ یک ابر K–زیر جبر فازی H می‌باشد. □

مراجع

[۱] ف. محمدزاده و ا. محمدزاده ابر K–جبرهای فازی مشتق شده از ابر عمل فازی، سیستمهای فازی و کاربردها (۱۴۰۳) ۶۵-۸۶.
[2] P. Corsini, *Fuzzy sets, join spaces and factor spaces*, Journal of Pure Mathematics and Applications, 11(3), (2000), 439-446.
[3] P. Corsini and I. Tofan, *On fuzzy hypergroups*, Pure Mathematics and Applications, 8 (1), (1997), 29-37.
[4] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz, *Fuzzy hyperrings*, Fuzzy Sets and Systems, 160(16), (2009), 2366-2378.
[5] J.Meng, Y.B.Jun and H.S.Kim, *Fuzzy implicative ideals of BCK-algebras*, Fuzzy Sets Systems, 89 (1997), 243-248.
[6] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971), 512-517.
[7] M. K. Sen, R. Ameri and G. Chowdhury, *Fuzzy hypersemigroups*, Soft Computing, 12 (2008), 891-900.
[8] K. Seramidis, A. Kehagias and M. Konstantinidou, *The L-fuzzy Corsini join hyperoperation*, Italalian Journal of Pure and Applied Mathematics, 12 (2002), 83–90.
[9] O.G.Xi, *Fuzzy BCK-algebras*, Math. Japon. 36 (1991), 935-942.
[10] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, 8(1965), 338-353.
[11] MM. Zahedi, M. Bolurian and A. Hasankhani, *On polygroups and fuzzy subpolygroups*, Journal of Fazzy Mathematics, 3 (1995), 1-15.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–164، صص. ۹۹–۱۰۳

درباره ابر K–زیرجبر فازی از یک ابر K–جبر

فهیمه محمدزاده*[آ]، الهه محمدزاده[ب]

[آ] استادیار ریاضی محض، گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[ب] استادیار ریاضی محض، گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
ابر K–جبرفازی ۱
ابرK–زیر جبر فازی ۲
ابرBCK–جبر فازی۳

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
06F35
08A72
03E72

چکیده

در این مقاله ابتدا مفهوم ابر K–زیرجبر فازی از یک ابرK- جبر فازی معرفی می‌شود و یک شرط معادل برای آن ذکر می‌شود و در ادامه مثالهایی در باره این مفهوم بیان می‌شود. همچنین توانستیم از یک ابر K–جبر فازی یک ابر K–زیرجبر فازی به دست آوریم.

۱. مقدمه

نظریه فازی در سال ۱۹۶۵ توسط زاده [۱] [۱۰]معرفی شد. این نظریه کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی، کامپیوتر و سایر علوم دارند. در سال ۱۹۷۱، روزنفلد [۲] [۶]مفهوم زیرگروه فازی را تعریف کرد. سپس، بسیاری از محققین مفاهیم جبر انتزاعی را در چارچوب مجموعه‌های فازی گسترش دادند، به منابع [۳، ۱۱] مراجعه شود. بعد از آن در سال ۱۹۹۱، شی [۳] [۹]، مفهوم ابر BCK–جبر فازی را بیان کرد که مقالات زیادی توسط دانشمندان مختلف در این زمینه نوشته شد [۵] .
ابرساختارهای فازی به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول مقالات ابر ساختارهای مجرد به دست امده از مجموعه‌های فازی را بررسی می‌کند که توسط کرسینی معرفی شد [۲] . دسته دوم مقالات، توسیع مستقیمی از مفاهیم جبرهای فازی است که توسط زاهدی [۴] [۱۱] به مفاهیم ابرساختارهای فازی گسترش یافت. دسته سوم که توسط کرسینی و توفان [۳]معرفی شد نیز به ابرگروه‌های فازی مرتبط است منتها با رویکردی کاملا متفاوت. در این روش به هر زوج از عناصر یک مجموعه فازی نسبت داده می‌شود که ابرعمل فازی نام دارد. این ایده توسط سن وهمکارانش [۷] انجام شد و مفهوم ابر نیم‌گروه فازی معرفی شد. لیورینا [۴] مفهوم ابرحلقه‌های فازی را معرفی کرد و مطالعه روی ابرساختارهای فازی همچنان ادامه دارد.
همچنین در مقاله [۱] مفهوم ابر BCK–جبرفازی، ابرK–جبرفازی، ابرI–جبر فازی و ابر K- ایده‌آل فازی (ضعیف) را به روش کرسینی و توفان بیان کردیم و نشان دادیم هر که هر ابرBCK–جبرفازی یک ابر– K جبرفازی است.

*فهیمه محمدزاده
پست *الکترونیک :* f.mohammadzadeh@pnu.ac.ir (فهیمه محمدزاده)، mohamadzadeh@pnu.ac.ir (الهه محمدزاده)

[1] Zadeh
[2] Rosenfeld
[3] Xi
[4] Zahedi

در این مقاله ابتدا مفهوم ابر K–زیرجبر فازی از یک ابر K– جبر فازی معرفی می‌شود و یک شرط معادل برای آن ذکر می‌شود و در ادامه مثالهایی در باره این مفهوم بیان می‌شود.
برای یک مجموعه غیرتهی H تابع $\mu : H \to [0,1]$ یک زیرمجموعه فازی H نامیده می‌شود. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی H با $F(H)$ نشان داده می‌شود و $F^*(H) = F(H)\backslash\{0\}$ که منظور از ۰، مجموعه فازی صفر است. تابع $\circ$ از $H \times H$ به $F^*(H)$ یک ابر عمل فازی H نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in H$ داشته باشیم $x_1 \circ x_2 \in F^*(H)$. دراین‌صورت $(H, \circ)$ یک ابرگروهوار فازی نامیده می‌شود (مرجع [۷] را ببینید).

تعریف ۱.۱. [۷] فرض کنید μ و ν زیرمجموعه‌های فازی از ابرگروهوار فازی $(H, \circ)$ باشند. در این‌صورت برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از H و هر $x_1, x_2, r \in H$ عمل‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
(۱) $\odot : F(H) \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \odot \nu)(r) = \bigvee_{p,q \in H} (\mu(p) \wedge (p \circ q)(r) \wedge \nu(q))$$

(۲) $* : H \times F(H) \to F(H)$ با ضابطه

$$(x_1 * \mu)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} ((x_1 \circ t)(r) \wedge \mu(t)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۳) $\bullet : F(H) \times H \to F(H)$ با ضابطه

$$(\mu \bullet x_1)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in H} (\mu(t) \wedge (t \circ x_1)(r)) & \mu \neq 0 \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

(۴) $\circ : H \times P^*(H) \to F^*(H)$ که در آن $P^*(H)$ مجموعه توانی $H\backslash\{\emptyset\}$ می‌باشد با ضابطه

$$(x_2 \circ A)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_2 \circ x_1)(r)$$

و $\star : P^*(H) \times H \to F^*(H)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \star x_2)(r) = \bigvee_{x_1 \in A} (x_1 \circ x_2)(r)$$

با توجه به نمادهای تعریف شده در بالا تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۲.۱. [۷] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابر نیم‌گروه فازی باشد. اگر برای هر $x \in H$ داشته باشیم $x \circ H = H \circ x = \chi_H$ آنگاه $(H, \circ)$ یک ابرگروه فازی نامیده می‌شود.
فرض کنید $Y \subseteq X$ و $t \in [0,1]$. مجموعه فازی t_Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_Y(x) = \begin{cases} t & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$$

به‌ویژه اگر Y مجموعه یکانی باشد، مانند $\{y\}$، آنگاه $t_{\{y\}}$ یک نقطه فازی نامیده می‌شود و با t_y نشان داده می‌شود. در این مقاله، اگر $a \circ b$ نقطه فازی باشد، آنگاه با نماد $t_y^{(a,b)}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱. [۱] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروهوار فازی و μ و ν دو زیرمجموعه فازی روی H باشند. در این‌صورت رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:
(۱) برای هر $x_1, x_2 \in H$ داریم $x_1 < x_2$ اگر و تنها اگر $(x_1 \circ x_2)(0) > 0$.
(۲) $\mu \ll \nu$ اگر و تنها اگر برای هر $r \in H$ بتوان $s \in H$ یافت به‌طوری که $\mu(r) > 0$ و $\nu(s) > 0$ و $r < s$.
(۳) $\mu < \nu$ اگر و تنها اگر $r, s \in H$ موجود باشند به‌طوری‌که $\mu(r) > 0$ و $\nu(s) > 0$ و $r < s$.

تعریف ۴.۱. [۱] فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروهوار فازی با عضو ثابت $\circ$ باشد. در این‌صورت H یک ابر BCK–جبر فازی گفته می‌شود اگر برای هر $x_1,x_2,x_3\in H$ موارد زیر برقرار باشد:
$(x_1\circ x_3)\odot(x_2\circ x_3)\ll x_1\circ x_2$ $(FHK1)$
$(x_1\circ x_2)\bullet x_3=(x_1\circ x_3)\bullet x_2$ $(FHK2)$
$x_1\circ H\ll\chi_{\{x_1\}}$ $(FHK3)$
$((FHK4))$ اگر $x_1<x_2$ و $x_2<x_1$، آنگاه $x_1=x_2$.

تعریف ۵.۱. یک مجموعه غیرتهی H همراه با یک ابر عمل فازی "$\circ$" و یک ثابت $\circ$ که در شرایط زیر صدق می‌کند، یک ابر K–جبر فازی نامیده می‌شود.
$(x\circ z)\odot(y\circ z)<x\circ y$ $(HI1)$.
$(x\circ y)\bullet z=(x\circ z)\bullet y$ $(HI2)$.
$x<x$ $(HI3)$،
اگر $x<y$ و $y<x$، آنگاه $x=y$ $(HI4)$،
برای هر $x\in H$ داریم $\circ<x$ $(HI5)$
که $x,y,z\in H$

قضیه ۶.۱. *فرض کنید $(H_1,\circ_1,\circ_1)$ و $(H_2,\circ_2,\circ_2)$ ابر K–جبر فازی (ابر BCK–جبر فازی) و $H=H_1\times H_2$ باشد. برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in H$ ابرعمل فازی "$\circ$" را روی H به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)=(a_1\circ_1 a_2,b_1\circ_2 b_2)\qquad(1)$$

به‌طوری که برای هر $\nu\in F(H_2)$ و $\mu\in F(H_1)$ و $r\in H_1$ و $s\in H_2$ داریم

$$(\mu,\nu)(r,s)=(\mu(r),\nu(s))\qquad(2)$$

و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$(a_1,b_1)<(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1<a_2,b_1<b_2.$$

در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی (ابر BCK–جبر فازی) است و آن را ابر K–حاصل‌ضرب فازی (یا ابر BCK–حاصل‌ضرب فازی) H_1 و H_2 می‌نامیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد و S یک زیرمجموعه H شامل $\circ$ باشد. اگر S نسبت به ابر عمل فازی "$\circ$" روی H یک ابر K–جبر فازی باشد، آنگاه S یک ابر K–زیرجبر فازی H نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۲. *فرض‌کنید S یک زیرمجموعه غیرتهی از ابر K–جبر فازی $(H,\circ,\circ)$ باشد. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی H است اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم $x\circ y\subseteq S$ (به‌عبارتی اگر $r\in H$ موجود باشد که $(x\circ y)(r)>\circ$، آنگاه $r\in S$.)*

اثبات. ($\Rightarrow$) S ابر K–زیرجبرفازی H است. بنابراین برای هر $x,y\in S$ داریم

$$x\circ y\in F^*(S).$$

یعنی $x\circ y\subseteq S$.
($\Leftarrow$) فرض‌کنید برای هر $x,y\in S$، $x\circ y\subseteq S$ و همچنین فرض‌کنید $a\in S$. می‌دانیم $\circ<(a\circ a)(\circ)$. پس بنا به فرض $\circ\in S$. حال برای هر $x,y,z\in S$ داریم $x\circ z\subseteq S$ و $y\circ z\subseteq S$ و $x\circ y\subseteq S$. بنابراین چون H ابر K–جبر است داریم

$$(x\circ z)\odot(y\circ z)<x\circ y.$$

درنتیجه $(HI1)$ در S نیز برقرار است. به‌طور مشابه $(HI2)$ و $(HI3)$ و $(HI4)$ و $(HI5)$ نیز برقرارند. بنابراین S یک ابر K–زیرجبر فازی H است. □

مثال ۳.۲. (۱) ابر عمل فازی " $\circ$ " را روی BCK–جبر $(X,*,\circ)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\circ y=\chi_{x*y}\quad \forall x,y\in X$$

در این‌صورت $(X,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است . اگر S یک زیرجبر از BCK–جبر $(X,\circ,\circ)$ باشد، آنگاه S یک ابر K–زیرجبر فازی از $(X,\circ,\circ)$ می‌باشد.
(۲) ابرعمل فازی "$\circ$" روی $H=[\circ,\infty)$ را برای هر x و y از آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\circ y=\begin{cases}\chi_{[\circ,x]} & x\le y\\ \chi_{(\circ,y]} & x>y\neq\circ\\ \chi_{\{x\}} & y=\circ\end{cases}$$

در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است. اکنون فرض کنید $a>\circ$ و $S=[\circ,a]$. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی از $(H,\circ,\circ)$ است.
(۳) فرض کنید $H=\{\circ,a,b\}$ و ابر عمل فازی " $\circ$ " را مطابق جدول زیر را درنظر بگیرید. در این‌صورت $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است. فرض کنید $S=\{\circ,a\}$ در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی H می‌باشد.

$\circ$	$\circ$	a	b
$\circ$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ\}}$
a	$\chi_{\{a\}}$	$\chi_{\{\circ,a\}}$	$\chi_{\{\circ,a\}}$
b	$\chi_{\{b\}}$	$\chi_{\{a,b\}}$	$\chi_{\{\circ,a,b\}}$

(۴) فرض کنید $H_1=\{\circ,x,y\}$ و جدول زیر را درنظر بگیرید. در این‌صورت $(H_1,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی است اما ابر BCK–جبر فازی نیست زیرا $x\circ y\not\ll\chi_{\{x\}}$.
فرض‌کنید $H=H_1\times H_1$ و $S=H_1\times\{\circ\}$. در این‌صورت S یک ابر K–زیرجبر فازی غیربدیهی H می‌باشد.

$\circ$	$\circ$	x	y
$\circ$	$\chi_{\{\circ\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$
x	$\chi_{\{x\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$
y	$\chi_{\{y\}}$	$\chi_{\{x,y\}}$	$\chi_{\{\circ,x,y\}}$

گزاره ۴.۲. *فرض کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد و $\mu\in F(H)$ در این‌صورت اگر $\mu<t_\circ$، آنگاه $\mu=t_\circ$.*

اثبات . فرض کنید $r\in H$ اگر $r=\circ$ آنگاه $\mu(r)>\circ$ یا $\mu(r)=\circ$. اما اگر $\mu(r)=\circ$ آنگاه از $\mu<t_\circ$ به تناقض می رسیم. پس همواره $\mu(\circ)>\circ$. حال اگر $r\neq\circ$ آنگاه $\mu(r)=\circ$ یا $\mu(r)>\circ$ که در حالت دوم از $\mu<t_\circ$ به تناقض می رسیم. درنتیجه $\mu=t_\circ$. □

قضیه ۵.۲. *فرض‌کنید $(H,\circ,\circ)$ یک ابر K–جبر فازی باشد . در این‌صورت مجموعه $S_K(H)$ یک ابر K–زیرجبر فازی H می‌باشد .*

$$S_K(H)=\{x\in H\mid x\circ x=t_\circ^{(x,x)}\}$$

اثبات . بنابر $(HI3)$ داریم $\circ<\circ$. بنابراین $t_\circ<\circ\circ\circ$. پس $\circ\in S_K(H)$ و $S_K(H)$ غیرتهی است. فرض‌کنید $x,y\in S_K(H)$ و $a\in H$ موجود باشد به‌طوری که $(x\circ y)(a)>\circ$. نشان می‌دهیم که $a\in S$ یعنی $x\circ y\subseteq S$.
می‌دانیم

$$(x\circ y)\odot(x\circ y)<x\circ x=t_\circ^{(x,x)}$$

قرار می‌دهیم $A=(x\circ y)\odot(x\circ y)$. حال بنا به گزاره ۴.۲ (۲) داریم

$$A=(x\circ y)\odot(x\circ y)=t_\circ \tag{۳}$$

فرض‌کنید $r\in H$ به‌طوری که $(a\circ a)(r)>\circ$. بنابراین

$$((x\circ y)\odot(x\circ y))(r)=\bigvee_{p,q}(x\circ y)(p)\wedge(p\circ q)(r)\wedge(x\circ y)(q)$$

$$\ge(x\circ y)(a)\wedge(a\circ a)(r)>\circ. \tag{۴}$$

حال با توجه به رابطه‌های (۳) و (۴) داریم $t_\circ^A(r)>\circ$ یعنی $r=\circ$. درنتیجه نشان دادیم اگر $(a\circ a)(r)>\circ$، آنگاه $r=\circ$. پس $(a\circ a)=t_\circ^{(a,a)}$. به‌عبارتی $a\in S$ و $S_K(H)$ یک ابر K–زیر جبر فازی H می‌باشد. □

مراجع

[۱] ف. محمدزاده و ا. محمدزاده ابر K–جبرهای فازی مشتق شده از ابر عمل فازی، سیستمهای فازی و کاربردها (۱۴۰۳) ۶۵-۸۶.
[2] P. Corsini, *Fuzzy sets, join spaces and factor spaces*, Journal of Pure Mathematics and Applications, 11(3), (2000), 439-446.
[3] P. Corsini and I. Tofan, *On fuzzy hypergroups*, Pure Mathematics and Applications, 8 (1), (1997), 29-37.
[4] V. Leoreanu-Fotea, B. Davvaz, *Fuzzy hyperrings*, Fuzzy Sets and Systems, 160(16), (2009), 2366-2378.
[5] J.Meng, Y.B.Jun and H.S.Kim, *Fuzzy implicative ideals of BCK-algebras*, Fuzzy Sets Systems, 89 (1997), 243-248.
[6] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971), 512-517.
[7] M. K. Sen, R. Ameri and G. Chowdhury, *Fuzzy hypersemigroups*, Soft Computing, 12 (2008), 891-900.
[8] K. Seramidis, A. Kehagias and M. Konstantinidou, *The L-fuzzy Corsini join hyperoperation*, Italalian Journal of Pure and Applied Mathematics, 12 (2002), 83–90.
[9] O.G.Xi, *Fuzzy BCK-algebras*, Math. Japon. 36 (1991), 935-942.
[10] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, 8(1965), 338-353.
[11] MM. Zahedi, M. Bolurian and A. Hasankhani, *On polygroups and fuzzy subpolygroups*, Journal of Fazzy Mathematics, 3 (1995), 1-15.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–170، صص. ۱۰۴–۱۰۶

کاربرد چندجمله‌ای چبیشف در حل معادله‌ی لیزخوردن بدون اصطکاک مهره از روی سیم

علیرضا عموتقی*[آ]، عادل تدین‌فر[ب]

[آ]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، گروه علوم‌پایه، اصفهان، ایران
[ب]شرکت صنایع هواپیماسازی ایران (هسا)، شاهین‌شهر، اصفهان، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها:
چندجمله‌ای چبیشف
مسأله‌ی براچیستوچرون

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
41A35
41A50

چکیده

در این مقاله حرکت مهره روی سیم را بدون اصطکاک و بر اثر میدان گرانشی ثابت زمین در نظر گرفته و با کمک مسأله‌ی براچیستوچرون و چندجمله‌ای‌های چبیشف معادلات به‌وجودآمده را ارایه و راه حل محاسبات آن‌ها را بیان می‌کنیم. در نهایت جواب به‌دست‌آمده را با پاسخ‌هایی که از روش‌های دیگر محاسبه شده، هم‌سنجی می‌کنیم.

۱. مقدمه

در [۵] معادله‌ی لیز خوردن یک مهره از روی سیم بدون اصطکاک با استفاده از معادلات براچیستوچرون ارایه شده است. پیش‌تر حل این معادله با استفاده از روش‌های گرادیان، الگوریتم جاروی پی‌درپی و برنامه‌ریزی پویا انجام شده است ([۱]، [۲]، [۳] و [۸]). در این مقاله قصد داریم تا روش چندجمله‌ای‌های چبیشف را برای حل آن ارایه نماییم.
بدین منظور چندجمله‌ای‌های چبیشف را از درجه‌ی M در نظر گرفته و برای هر k، $۱ \le k \le M-۱$، قرار می‌دهیم $C_k = ۱$ و $C_۰ = C_M = ۲$.
بدین منظور ماتریس $D_{(M+۱)\times(M+۱)}$ را با درایه‌های D_{kl} به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۴].

$$D_{kl} = \begin{cases} \frac{C_k(-۱)^{k+l}}{C_l(t_k - t_l)} & \text{if } k \neq l \\ \frac{۲M^۲+۱}{۶} & \text{if } k = l = ۰ \\ -\frac{۲M^۲+۱}{۶} & \text{if } k = l = M \\ -\frac{t_l}{۲(۱-t_l^۲)} & \text{if } ۱ \le k = l \le M-۱ \end{cases} . \qquad (۱)$$

هم‌چنین برای هر k، $۰ \le k \le M$، σ_k و $U_k(t)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\sigma_k = \frac{\sin((k+۱)\frac{\pi}{۲M})}{(k+۱)\sin(\frac{\pi}{۲M})}, \qquad (۲)$$

*عادل تدین‌فر
پست الکترونیک: Amotaghi@iauln.ac.ir (علیرضا عموتقی)، adeltadayyonfar@yahoo.com (عادل تدین‌فر)

$$U_k(t) = \frac{۱}{k+۱} T_{k+۱}(t). \quad (۳)$$

افزون بر این موارد، برای هر j و l که $۱ \le j \le M$ و $۰ \le l \le M$، $t_{j-\frac{۱}{۲}}$ و $\bar{g}_l(t)$ را نیز به‌صورت زیر معرفی می‌نماییم.

$$t_{j-\frac{۱}{۲}} = \cos(\frac{(j-\frac{۱}{۲})\pi}{M}), \quad (۴)$$

$$\bar{g}_l(t) = \frac{۱}{C_l M}(۱ + \sigma_۱ T_۱(t_۱) U_۱(t) + \sum_{k=۲}^{M} \frac{T_k(t_l)(\sigma_k U_k(t) - \sigma_{k-۲} U_{k-۲}(t))}{C_k}. \quad (۵)$$

در پایان ماتریس $\mathcal{D}$ را با درایه‌های $d_{jl} = \bar{g}_l(t_{j-\frac{۱}{۲}})$ تعریف می‌کنیم.

۲. کمینه کردن معادله‌ی براچیستوچرون

هدف در این مقاله، کمینه کردن معادله‌ی براچیستوچرون با شرایط $\dot{X}(\tau) = U(\tau)$، $X(۰) = ۰$ و $X(۱) = -۰/۵$، به‌صورت زیر است که در آن X و τ، به‌ترتیب، مختصات عمودی و افقی مهره‌ی مذکورند.

$$J = \int_{۰}^{۱} (\frac{۱ + U^۲(\tau)}{۱ - X(\tau)})^{\frac{۱}{۲}} d\tau. \quad (۶)$$

با تغییر متغیر $\alpha = \tan^{-۱}(\dot{X})$، به‌صورت قطبی، مختصات عمودی و افقی مهره برحسب سرعت آن با روابط زیر بیان می‌شود.

$$X = ۱ - \frac{c}{۲}(۱ + \cos\ (۲\alpha)), \quad (۷)$$

$$\tau = \frac{t_۰}{۲} + \frac{c}{۲}(۲\alpha + \sin\ (۲\alpha)). \quad (۸)$$

اکنون برای کمینه کردن معادله‌ی براچیستوچرون (J)، از تغییر متغیر $\tau = \frac{۱}{۲}(۱ + t)$ استفاده کرده و بازه‌ی تغییرات τ را از $(۰, ۱)$ به $(-۱, ۱)$ انتقال می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$J = \frac{۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} \frac{۱ + u^۲(t)}{۱ - x(t)})^{\frac{۱}{۲}} dt, \quad (۹)$$

که در آن $x(t) = \frac{۱}{۲} u(t)$، $x(-۱) = ۰$ و $x(۱) = -۰/۵$.
حال چندجمله‌ای‌های درون‌یاب از درجه‌ی M را برای $x(t)$ و $u(t)$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$x^M(t) = \sum_{k=۰}^{M} (a_k \phi_k(t)), \quad (۱۰)$$

$$u^M(t) = \sum_{k=۰}^{M} (b_k \phi_k(t)), \quad (۱۱)$$

که برای هر k، $0 \le k \le M$، $b_k = \sum_{l=0}^{M} D_{kl} a_l$ و $\phi_k(t)$ همان چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند.
طبق [۶] برای محاسبه‌ی انتگرال J از روش میانگین سلولی استفاده می‌کنیم. بدین منظور $F(t)$ و $d_l^\star$ را بایستی به‌صورت زیر در نظر بگیریم.

$$F(t) = \frac{1 + u^2(t)}{(1 - x(t))^{\frac{1}{2}}}, \tag{۱۲}$$

$$d_l^* = \sum_{j=1}^{M} (t_{j-1} - t_j) d_{jl}. \tag{۱۳}$$

اکنون با توجه به تعاریف بالا، کمینه‌ی معادله‌ی براچیستوچرون به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$J^M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \int_{t_j}^{t_{j-1}} F(t)dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} (t_{j-1} - t_j) \bar{F}_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{M} d_l^\star \left(\frac{1 + (2\sum_{k=0}^{M} D_{lk} a_k)^2}{1 - a_l}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{۱۴}$$

۳. نتایج اصلی

در جدول ۱، با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) بیشینه خطای موجود را برای kها و Mهای گوناگون، $M = 4, 6, 8$ و $0 \le k \le M$، برآورد کرده‌ایم. در جدول ۲ نیز روش میانگین سلولی و چندجمله‌ای چبیشف را با روش‌های دیگر برای Mهای گوناگون ($M = 4, 6, 8$) هم‌سنجی نموده و مشاهده کرده‌ایم که روش چبیشف از روش‌های جاروی پی‌درپی و گرادیان دقیق‌تر است.

$$e^M = |x(t_k) - x^M(t_k)|, \tag{۱۵}$$

$$\bar{e}^M = |u(t_k) - u^M(t_k)|. \tag{۱۶}$$

جدول ۱: بیشینه خطا برای $M = 4, 6, 8$

M	e^M	e^{-M}
۴	$< 10^{-5}$	$< 10^{-3}$
۶	$< 10^{-8}$	$< 10^{-7}$
۸	$< 10^{-10}$	$< 10^{-9}$

مراجع

[1] A.V. Balakrishnan and L.W. Neustadt, Computing Methods in Optimization Problems, Proceedings of a Conference Held at University of California, Academic Press, 2014.
[2] R.J.N.J. Bellman, Dynamic programming princeton university press princeton, New Jersey Google Scholar, 1957.
[3] A.E.Bryson, Applied optimal control: Optimization, Estimization and Control 2, 1975.
[4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and A. Thomas Jr., Spectral methods in fluid dynamics, Springer Science & Business Media, 2012.
[5] P. Dyer, and S.R. McReynolds, The computation and theory of optimal control, No. 629.8312 D9, 1970.
[6] G. Elnagar and M. Razzaghi, An alternative method for a classical problem in the calculus of variations, Mathematical methods in the applied sciences, 19, no. 13 (1996) 1091-1097.
[7] D. Gottlieb, M. Hussaini and S.A. Orzag, Theory and applications of spectral methods for partial differential equations, SIAM, Philadelphia, 1984.
[8] R. VanDooren, J. Vlassenbroeck, A new look at the brachistochrone problem, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP 31, no. 6 (1980) 785-790.

جدول ۲: مقایسه با سایر روش‌ها

روش‌ها	$x^M(۱)$	$u^M(-۱)$	J^M
روش گرادیان برنامه‌نویسی پویا	−۰٫۵	−۰٫۷۸۳۲۲۷۳	۰٫۹۹۸۴۹۸۸
روش جاروی پی‌درپی	−۰٫۵	−۰٫۷۸۳۴۲۹۲	۰٫۹۹۸۴۹۸۹
روش چبیشف ۴	−۰٫۵	−۰٫۷۸۴۴۸۹۳	۰٫۹۹۸۴۹۸۲
روش چبیشف ۶	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۲۱۵	۰٫۹۹۸۴۹۸۱۵
روش چبیشف ۸	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۴۰۶	۰٫۹۹۸۴۹۸۱۴۸۳
روش میانگین سلولی ۴	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۴۱۸	۰٫۹۹۸۴۹۸۲
روش میانگین سلولی ۶	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۴۰۷	۰٫۹۹۸۴۹۸۱۴۷
روش میانگین سلولی ۸	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۴۰۸	۰٫۹۹۸۴۹۸۱۴۸۲۹
پاسخ دقیق	−۰٫۵	−۰٫۷۸۶۴۴۰۸	۰٫۹۹۸۴۹۸۱۴۸۲۹

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–174، صص. ۱۰۸–۱۱۳

زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌های فازی شهودی متناسب با نرم‌ها

رسول رسولی*[آ]، حسن نراقی[ب]، محمد مهدی معتمدی نژاد[ج]

[آ] استادیار ریاضی دانشگاه پیام نور

[ب] هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آشتیان، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

[ج] عضو هیات علمی دانشگاه جامع علمی کاربردی

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
نظریه حلقه‌ها ۱
نرم‌ها ۲
نظریه مجموعه‌های فازی ۳
زیرحلقه‌های فازی شهودی ۴
ایده‌آل‌های فازی شهودی ۵
هوموورفیسم ها ۶
ضرب‌های مستقیم ۷

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
13AXX
03B45
20K30
20K25

چکیده

در جبر کلاسیک، خصوصیات ایده‌آل‌ها و زیرحلقه‌ها، بطور کامل بررسی شده اند. در این مقاله می‌خواهیم از نرم‌های T و C کمک بگیریم و ایده‌آل‌ها و زیرحلقه‌های فازی شهودی را تعریف و برخی از خصوصیات آنها را بیان کنیم. در ادامه، اشتراک، ضرب خارجی و ضرب فازی بین آنها را تعریف، ارتباط آنها با یکدیگر را نشان داده و نتایج مهمی را ارائه می‌کنیم. همچنین ایده‌آل‌ها و زیرحلقه‌های فازی شهودی نرم دار خارج قسمتی را مطرح و ضمن بررسی آنها، خاصیت های اساسی آنها را بیان می‌کنیم. در نهایت از همریختی حلقه‌ها استفاده و ثابت می‌کنیم که تصویر و پیش تصویر یک ایده‌آل فازی شهودی نرم دار و تصویر و پیش تصویر یک حلقه فازی شهودی نرم دار تحت همریختی حلقه‌ها، به ترتیب ایده‌آل فازی شهودی نرم‌دار و حلقه فازی شهودی نرم‌دار خواهد بود.

۱. مقدمه

مجموعه فازی [۱] در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور زاده [۲۷] در یک مقاله علمی برای اولین بار، تعریف و بیان گردید. مجموعه‌های فازی، یک مدل ریاضی برای نمایش ابهام و مفاهیم غیر دقیق ارائه می‌کنند. کلمه فازی (fuzzy) در فرهنگ لغت به معنای مبهم، گنگ، نادقیق و پیچیده بیان شده است. امروزه از کلمات و جملات مبهم زیاد استفاده می‌کنیم، مانند "محمد قد بلند است"، "حسین پیر است" و "هوا خیلی سرد است". این مفاهیم را در قالب مجموعه‌های کلاسیک نمی توان بیان کرد. بسیاری از محققان [۲، ۱۵، ۲۸] مفاهیم حلقه‌های فازی و ایدال‌های فازی را بیان کرده اند. مفهوم مجموعه‌های فازی شهودی [۲] که تعمیم مجموعه‌های فازی است، برای اولین بار توسط آتانسوف [۳، ۴] بیان شد. اخیرا فضاهای توپولوژی فازی شهودی به کمک مجموعه‌های فازی شهودی توسط برخی از محققین مورد بررسی قرار گرفته است [۸–۱۰، ۱۴]. در سال ۱۹۸۹، مفهوم زیرگروه‌های فازی شهودی توسط بیسواس مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت [۶]. در ادامه بانیجی و باسنت [۵]، در سال ۲۰۰۳، مفهوم زیرحلقه‌های فازی شهودی را مطرح و خواص آنها را مورد مطالعه قرار دادند. بعد از آن محققان زیادی [۱۱، ۱۲]، مطالعاتی را در

*حسن نراقی
پست الکترونیک : Rasuli@pnu.ac.ir (رسول رسولی)، hassannaeaghi1976@gmail.com (حسن نراقی)، moatamedinezhad@gmail.com (محمد مهدی معتمدی نژاد)

[1] Fuzzy Sets
[2] Intuitionistic fuzzy sets

همین راستا انجام دادند و نتایج مهمی را بدست آوردند. مولف اول این مقاله در مطالعات قبلی خود، اثر نرم ها را روی مفاهیم جبری فازی مانند زیرگروه‌های فازی، زیرحلقه‌های فازی و ایدال‌های فازی بررسی و نتایج اساسی را بدست آورده است [۱۷–۲۶]. این مقاله در راستای مطالعات قبلی صورت گرفته است. در این مقاله زیرحلقه‌های فازی شهودی را به کمک نرم‌های T و C تعریف و اشتراک و ضرب دکارتی آنها را ارائه می‌کنیم. سپس ثابت می‌کنیم اشتراک و ضرب دکارتی هر تعداد از آنها هم یک زیرحلقه فازی شهودی نرم دار خواهد بود. همچنین ایده‌آل‌های فازی شهودی را با کمک نرم‌های T و C مطرح و خصوصیات اساسی آنها را بیان می‌کنیم. اشتراک و ضرب خارجی بین آنها را تعریف و ثابت خواهیم کرد که اشتراک و ضرب خارجی هر تعداد از آنها هم یک ایده‌آل فازی شهودی نرم دار است. در ادامه ارتباط بین ایده‌آل‌ها و حلقه‌های جبر کلاسیک و ایده‌آل‌ها و حلقه‌های فازی شهودی نرم‌دار را نشان می‌دهیم. بعلاوه ضرب فازی بین ایده‌آل‌های فازی شهودی نرم‌دار را تعریف و ثابت می‌کنیم که ضرب فازی همان اشتراک بین اعضای آنها خواهد بود. سپس از همریختی بین حلقه‌ها استفاده و نشان می‌دهیم که تصویر و پیش تصویر هر حلقه فازی شهودی نرم‌دار یک حلقه فازی شهودی نرم‌دار و تصویر و پیش تصویر هر ایده‌آل فازی شهودی نرم‌دار، یک ایده‌آل فازی شهودی نرم‌دار خواهد بود. در خاتمه، زیرحلقه‌های فازی شهودی خارج قسمتی را بیان و نتایجی را بدست خواهیم آورد.

۲. پیشنیازها

در این بخش تعاریف و قضایایی که در این مقاله لازم داریم را ارائه و برای بررسی بیشتر جزئیات، محققان را به منابع [۱، ۳، ۷، ۱۳، ۱۶–۱۹، ۲۲، ۲۵، ۲۶]، ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X، Y و Z سه مجموعه غیر تهی باشند. تابع $f : X \to Y \times Z$ را یک نگاشت مختلط می‌نامیم بطوریکه $f_1 : X \to Y$ و $f_2 : X \to Z$ هر دو نگاشت هستند. در حالت کلی بصورت زیر نمایش می‌دهیم: $f = (f_1, f_2) : X \to Y \times Z$.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $X \neq \emptyset$، یک مجموعه دلخواه باشد. نگاشت مختلط $(\mu_A, v_A) : X \to [0,1] \times [0,1]$ را یک مجموعه فازی شهودی در X می‌نامیم، اگر $\mu_A + v_A \leq 1$ که در آن $\mu_A : X \to [0,1]$ و $v_A : X \to [0,1]$ نگاشت هایی روی X هستند. مجموعه فازی شهودی تهی را با $O_\sim$ نشان می‌دهیم که در آن $O_\sim : X \to [0,1] \times [0,1]$ و $O_\sim(x) = (0,1)$ که $x \in X$. همچنین مجموعه فازی شهودی عام را با $1_\sim$ نشان می‌دهیم که در آن $1_\sim : X \to [0,1] \times [0,1]$ به صورت $1_\sim(x) = (1,0)$ تعریف می‌گردد. در حالت کلی مجموعه تمامی مجموعه‌های فازی شهودی روی X را با $IFS(X)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه تساوی و زیرمجموعه بودن روی اعضای $IFS(X)$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $A = (\mu_A, v_A) \in IFS(X)$ و $B = (\mu_B, v_B) \in IFS(X)$. در این صورت داریم:
الف) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $\mu_A \leq \mu_B$ و $v_B \leq v_A$.
ب) $A = B$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

تعریف ۴.۲. تابع $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ را یک $t-$ نرم می‌نامیم اگر برای هر $x, y, z \in [0,1]$، شرایط زیر برقرار باشد:
الف) $T(x,1) = x$،
ب) اگر $y \leq z$ آنگاه $T(x,y) \leq T(x,z)$،
ج) $T(x,y) = T(y,x)$،
د) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$.
گوئیم $t-$ نرم T خودتوان است اگر $T(x,x) = x$، برای هر $x \in [0,1]$.

مثال ۵.۲. هر یک از موارد زیر مثال هایی از $t-$ نرم T هستند:
الف) $T(x,y) = T_m(x,y) = min\{x,y\}$،
ب) $T(x,y) = T_b(x,y) = max\{0, x+y-1\}$،
ج) $T(x,y) = T_p(x,y) = xy$.

تعریف ۶.۲. منظور از $t-$ هم نرم C، تابع $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ است بطوریکه برای هر $x, y, z \in [0,1]$، داشته باشیم:
الف) $C(x,0) = x$،
ب) اگر $y \leq z$ آنگاه $C(x,y) \leq C(x,z)$،
ج) $C(x,y) = C(y,x)$،
د) $C(x,C(y,z)) = C(C(x,y),z)$.
گوئیم $t-$ هم نرم C، خودتوان است اگر $C(x,x) = x$، برای هر $x \in [0,1]$.

مثال ۷.۲. هر یک از موارد زیر مثال هایی از t- هم نرم C هستند:
الف) $C(x,y)=C_m(x,y)=max\{x,y\}$،
ب) $C(x,y)=C_b(x,y)=min\{۱,x+y\}$،
ج) $C(x,y)=C_p(x,y)=x+y-xy$.

قضیه ۸.۲. *فرض کنیم $x,y,z,w\in[۰,۱]$ و T یک t- نرم و C یک t- هم نرم باشد. در این صورت بندهای زیر برقرار هستند:*
الف) $T(T(x,y),T(z,w))=T(T(x,z),T(y,z))$،
ب) $C(C(x,y),C(z,w))=C(C(x,z),C(y,z))$.

تعریف ۹.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد.
الف)زیرمجموعه $S\neq\emptyset$ از R را یک زیرحلقه از R نامیم اگر و فقط اگر $x-y\in S$ و $xy\in S$ برای هر $x,y\in S$.
ب) فرض کنیم $I\neq\emptyset$ زیرمجموعه R باشد. گوئیم I یک ایده‌آل چپ حلقه R است اگر $x-y\in I$ و $rx\in I$ برای هر $x,y\in S$ و $r\in R$. همچنین گوئیم I یک ایده‌آل راست حلقه R است اگر $x-y\in I$ و $xr\in I$ برای هر $x,y\in S$ و $r\in R$. در حالت کلی I را ایده‌آل حلقه R نامیم اگر هم ایده‌آل چپ باشد و هم ایده‌آل راست باشد.

۳. نتایج اصلی

در این بخش تعاریف و نتایج اصلی مقاله را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $A=(\mu_A,v_A)\in IFS(R)$. گوئیم A زیرحلقه فازی شهودی متناسب با t- نرم T و t- هم نرم C است اگر:
الف) $\mu_A(x-y)\geq T(\mu_A(x),\mu_A(y))$،
ب) $\mu_A(xy)\geq T(\mu_A(x),\mu_A(y))$،
ج) $v_A(x-y)\leq C(v_A(x),.v_A(y))$،
د) $v_A(xy)\leq C(v_A(x),.v_A(y))$، بطوریکه $x,y\in R$.
مجموعه تمامی زیرحلقه‌های فازی شهودی متناسب با T و C از حلقه R را با $IFSTC(R)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح باشد و $R=(\mathbb{Z},+,۰)$ یک حلقه باشد. در این صورت $A=(\mu_A,v_A)\in IFS(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$\mu_A:R\to[۰,۱]$ و

$$\mu_A(x)=\begin{cases}۰/۸ & \text{if} \quad x\in\{۰,\pm۲,\pm۴,\dots\}\\ ۰/۵ & \text{if} \quad x\in\{\pm۱,\pm۳,\dots\}\end{cases}$$

و همچنین $v_A:R\to[۰,۱]$ و

$$v_A(x)=\begin{cases}۰/۲ & \text{if} \quad x\in\{۰,\pm۲,\pm۴,\dots\}\\ ۰/۳ & \text{if} \quad x\in\{\pm۱,\pm۳,\dots\}\end{cases}$$

حال فرض کنیم $T(a,b)=T_p(a,b)=ab$ و $C(a,b)=C_p(a,b)=a+b-ab$ بطوریکه $a,b\in[۰,۱]$. در این صورت $A=(\mu_A,v_A)\in IFSTC(R)$.

قضیه زیر ارزش عضو خنثی حلقه R را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم T و C هر دو خودتوان باشند و $A=(\mu_A,v_A)\in IFSTC(R)$. در این صورت بندهای زیر برقرار هستند:*
الف) $A(x)\subset A(۰)$، *برای هر* $x\in R$،
ب) $A(x)=A(-x)$، *برای هر* $x\in R$.

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم R حلقه و $A=(\mu_A,v_A)\in IFSTC(R)$. اگر $A(x-y)=(۱,۰)$، در این صورت $A(y)\subset A(x)$ برای هر $x,y\in R$.*

قضیه ۵.۳. *فرض کنیم R حلقه، $A=(\mu_A,v_A)\in IFSTC(R)$ و T و C خودتوان باشند. در این صورت $A(x-y)=A(y)$ اگر و فقط اگر $A(x)=A(۰)$، برای هر $x,y\in R$.*

قضیه ۶.۳. *فرض کنیم R حلقه، $A=(\mu_A,v_A)\in IFSTC(R)$ و T و C خودتوان باشند. در این صورت*
الف) $S=\{x\in R:A(x)=(۱,۰)\}$ *زیرحلقه R است.*
ب) *اگر $\alpha,\beta\in[۰,۱]$ بطوریکه $\alpha+\beta\leq۱$، آنگاه $R_{\alpha,\beta}=\{x\in R:(\alpha,\beta)\subset A(x)\}$ زیرحلقه R است.*

قضیه ۷.۳. *فرض کنیم R حلقه، $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFSTC(R)$ و T و C خودتوان باشند بطوریکه برای هر $x,y\in R$ رابطه های*
الف) $\mu_A(x-y)\geq T(\mu_A(x),\mu_A(y))$،
ب) $\nu_A(x-y)\leq C(\nu_A(x),\nu_A(y))$،
ج) $\mu_A(rx)\geq\mu_A(x)$،
د) $\nu_A(rx)\leq\nu_A(x)$، *برقرار باشند برای هر $r\in R$. در این صورت موارد زیر برقرار هستند:*
الف) $R_\circ=\{x\in R:A(x)=A(\circ)\}$ *ایدال چپ حلقه R است.*
ب) $R_{\alpha,\beta}=\{x\in R:(\alpha,\beta)\subset A(x)\}$ *برای هر $\alpha,\beta\in[\circ,1]$ بطوریکه $\alpha+\beta\leq 1$، ایده‌آل چپ حلقه R است.*

تعریف ۸.۳. فرض کنیم $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFS(R)$ و $B=(\mu_B,\nu_B)\in IFS(R)$.
الف) اشتراک A و B را با صورت $A\cap B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A\cap B:R\to[0,1]\times[0,1],\quad (A\cap B)(x)=(\mu_{A\cap B},\nu_{A\cap B})(x)=(\mu_{A\cap B}(x),\nu_{A\cap B}(x)),$$

که در آن تعاریف زیر را داریم:

$$\mu_{A\cap B}:R\to[0,1],\quad \mu_{A\cap B}(x)=T(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

و

$$\nu_{A\cap B}:R\to[0,1],\quad \nu_{A\cap B}(x)=C(\nu_A(x),\nu_B(x))$$

برای هر $x\in R$.
ب) ضرب فازی شهودی A و B را با صورت $A\circ B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A\circ B:R\to[0,1]\times[0,1],\quad (A\circ B)(x)=(\mu_{A\circ B},\nu_{A\circ B})(x)=(\mu_{A\circ B}(x),\nu_{A\circ B}(x)),$$

که در آن تعاریف زیر را داریم:

$$\mu_{A\circ B}:R\to[0,1],\quad \mu_{A\circ B}(x)=sup_{x=yz}\{T(\mu_A(y),\mu_B(z))\}$$

و همچنین

$$\nu_{A\circ B}:R\to[0,1],\quad \nu_{A\circ B}(x)=inf_{x=yz}\{C(\nu_A(y),\nu_B(z))\}$$

که در آن $x,y,z\in R$ و چنانچه $x\neq yz$ آنگاه تعریف می‌کنیم $(A\circ B)(x)=(\circ,1)$.

قضیه ۹.۳. *فرض کنیم $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFSTC(R)$ و $B=(\mu_B,\nu_B)\in IFSTC(R)$. در این صورت $A\cap B\in IFSTC(R)$.*

قضیه فوق بیان می‌کند که $IFSTC(R)$ نسبت به خاصیت اشتراک هر دو عضوش و به طور کلی اشتراک هر تعداد متناهی بسته است.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنیم R_1 و R_2 دو حلقه و $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFS(R_1)$ و $B=(\mu_B,\nu_B)\in IFS(R_2)$. در این صورت حاصلضرب دکارتی آنها را با $A\times B$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$A\times B:R_1\times R_2\to[0,1]\times[0,1],\quad A\times B=(\mu_{A\times B},\nu_{A\times B})$$

بطوریکه

$$\mu_{A\times B}:R_1\times R_2\to[0,1],\quad \mu_{A\times B}(x_1,x_2)=T(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2))$$

و همچنین

$$\nu_{A\times B}:R_1\times R_2\to[0,1],\quad \nu_{A\times B}(x_1,x_2)=C(\nu_A(x_1),\nu_B(x_2))$$

بطوریکه $(x_1,x_2)\in R_1\times R_2$.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنیم $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFSTC(R_1)$ و $B=(\mu_B,\nu_B)\in IFSTC(R_2)$. در این صورت $A\times B\in IFSTC(R_1\times R_2)$.*

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFS(R)$. گوئیم A یک ایده‌آل فازی شهودی متناسب با t- نرم T و t- هم نرم C است اگر شرایط زیر برای هر $x,y\in R$، برقرار باشند:
(i) $\mu_A(x-y)\geq T(\mu_A(x),\mu_A(y))$،
(ii) $\mu_A(xy)\geq\mu_A(y)$ و $\mu_A(xy)\geq\mu_A(x)$،
(iii) $\nu_A(x-y)\leq C(\nu_A(x),\nu_A(y))$،
(iv) $\nu_A(xy)\leq\nu_A(y)$ و $\nu_A(xy)\leq\nu_A(x)$.
مجموعه تمام ایده‌آل‌های فازی شهودی متناسب با T و C از حلقه R را با $IFITC(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنیم $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFITC(R)$ و $x,y\in R$. در این صورت $A(x-y)=A(\circ)$ اگر و تنها اگر $A(x)=A(\circ)$.*

قضیه ۱۴.۳. *فرض کنیم T و C هر دو خودتوان باشند و $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFS(R)$. در این صورت $A\in IFITC(R)$ اگر و تنها اگر مجموعه $R_{\alpha,\beta}=\{x\in R:(\alpha,\beta)\subset A(x)\}$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد بطوریکه $\alpha,\beta\in[\circ,1]$، $\alpha+\beta\leq 1$ و $(\alpha,\beta)\subset A(\circ)$.*

قضیه ۱۵.۳. *فرض کنیم T و C هر دو خودتوان باشند و $A=(\mu_A,\nu_A)\in IFS(R)$. در این صورت $A\in IFITC(R)$ اگر و تنها اگر مجموعه‌های $U=\{x\in R:\mu_A(x)\geq\alpha\}$ و $L=\{x\in R:\nu_A(x)\leq\beta\}$ ایده‌آل‌های از حلقه R باشند بطوریکه $\alpha,\beta\in[\circ,1]$، $\alpha+\beta\leq 1$.*

قضیه ۱۶.۳. *فرض کنیم* $A = (\mu_A, v_A) \in IFITC(R)$ *و* $B = (\mu_B, v_B) \in IFITC(R)$ *. در این صورت* $A \cap B \in IFITC(R)$.

قضیه فوق برای هر تعداد متناهی نیز برقرار است.

قضیه ۱۷.۳. *فرض کنیم* $A = (\mu_A, v_A) \in IFITC(R)$ *و* $B = (\mu_B, v_B) \in IFITC(R)$. *اگر* R *یک حلقه منظم باشد، آنگاه*

$$A \cap B = A \circ B.$$

قضیه ۱۸.۳. *فرض کنیم* $A_1 = (\mu_{A_1}, v_{A_1}) \in IFITC(R_1)$ *و* $A_2 = (\mu_{A_2}, v_{A_2}) \in IFITC(R_2)$ *. در این صورت*

$$A_1 \times A_2 \in IFITC(R_1 \times R_2).$$

قضیه فوق برای هر تعداد متناهی هم برقرار است.

تعریف ۱۹.۳. فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی بین حلقه‌های R و S باشد. فرض کنیم $A = (\mu_A, v_A) \in IFS(R)$ و $B = (\mu_B, v_B) \in IFS(S)$. در اینصورت داریم:
الف) $f(A) = (f(\mu_A), f(v_A))$ بطوریکه برای هر $y \in S$ تعریف می‌کنیم $f(\mu_A)(y) = sup\{\mu_A(x) : x \in R, f(x) = y\}$ و $f(v_A)(y) = sup\{v_A(x) : x \in R, f(x) = y\}$. اگر $f^{-1}(y) = \emptyset$، آنگاه تعریف می‌کنیم $f(A)(y) = (0, 1)$.
ب) $f^{-1}(B) = (f^{-1}(\mu_B), f^{-1}(v_B))$ که در آن برای هر $x \in R$، تعریف می‌کنیم $f^{-1}(\mu_B)(x) = \mu_B(f(x))$ و $f^{-1}(v_B)(x) = v_B(f(x))$.

قضیه ۲۰.۳. *فرض کنیم* $f : R \longrightarrow S$ *همریختی حلقه باشد.*
الف) اگر $A = (\mu_A, v_A) \in IFSTC(R)$ *آنگاه* $f(A) \in IFSTC(S)$،
ب) اگر $B = (\mu_B, v_B) \in IFSTC(S)$ *آنگاه* $f^{-1}(B) \in IFSTC(R)$،
ج) اگر $A = (\mu_A, v_A) \in IFITC(R)$ *آنگاه* $f(A) \in IFITC(S)$،
د) اگر $B = (\mu_B, v_B) \in IFITC(S)$ *آنگاه* $f^{-1}(B) \in IFITC(R)$.

حال ایده‌آل‌های فازی شهودی خارج قسمتی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۱.۳. فرض کنیم I ایده‌آل حلقه R باشد و $A = (\mu_A, v_A) \in IFS(R)$. تعریف می‌کنیم $A^\bullet = (\mu_{A^\bullet}, v_{A^\bullet}) \in IFS(\frac{R}{I})$. یعنی $A^\bullet = (\mu_{A^\bullet}, v_{A^\bullet}) : \frac{R}{I} \to [0, 1] \times [0, 1]$ بطوریکه $\mu_{A^\bullet} : \frac{R}{I} \to [0, 1]$ و

$$\mu_{A^\bullet}(x + I) = \begin{cases} T(\mu_A(x), \mu_A(i)) & \text{if} \quad x \neq i \\ (1, 0) & \text{if} \quad x = i \end{cases}$$

و همچنین $v_{A^\bullet} : \frac{R}{I} \to [0, 1]$

$$v_{A^\bullet}(x + I) = \begin{cases} C(v_A(x), v_A(i)) & \text{if} \quad x \neq i \\ (0, 1) & \text{if} \quad x = i \end{cases}$$

بطوریکه $x \in R$ و $i \in I$.

قضیه ۲۲.۳. *فرض کنیم* $A = (\mu_A, v_A) \in IFITC(R)$ *و* I *ایده‌آل حلقه* R *باشد. فرض کنیم* T *و* C *خودتوان باشند. در این صورت* $A^\bullet = (\mu_{A^\bullet}, v_{A^\bullet}) \in IFITC(\frac{R}{I})$.

۴. نتیجه گیری و مسئله باز

در این مقاله حلقه‌ها و ایده‌آل‌های فازی شهودی را به کمک نرم‌های T و C بررسی و ویژگی های اصلی آنها را بیان کردیم. آنها را تحت همریختی های حلقه‌ها مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. حال از علاقه مندان به این موضوع دعوت می کنیم که در ادامه همین مطالب ، ایده‌آل های اول فازی شهودی و ایده‌آل‌های ماکزیمال فازی شهودی متناسب با نرم ها را تعریف کنند و آنها را مورد بررسی قرار دهند. همچنین می توانند قضیه های اول، دوم و سوم یکریختی حلقه ها را در مورد حلقه‌های فازی شهودی متناسب با نرم ها بیان و ثابت کنند. تمامی این موارد می تواند به عنوان یک مساله باز مطرح و مورد توجه علاقه مندان قرار گیرد.

مراجع

[1] M. T. Abu Osman, On some products of fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 24, (1987), 79-86.
[2] N. Ajmal and K. V. Thomas, The lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 74, (1995), 371-379.
[3] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, (1986), 87-96.
[4] K. T. Atanassov, New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 61, (1994), 137-142.
[5] B. Banejee and D.Kr. Basnet, Intuitionistic fuzzy subrings and ideals, j. Fuzzy Math., 11(1), (2003), 139-155.
[6] R. Biswas, Intuitionistic fuzzy subrings, Mathematical Forum, 10, (1989), 37-46.
[7] J.J. Buckley and E. Eslami, An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets, Springer-verlag, Berlin Heidelberg GmbH, (2002).
[8] D. Çoker, An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets Syst., 88, (1997), 81-99.
[9] D. Çoker and A.H. Eş, On fuzzy compactness in intuitionistic fuzzy topological spaces, J. Fuzzy Math., 31(4), (1995), 899-909.
[10] H. Gürçay, D. Çoker and A.H. Eş, On fuzzy continuity in intuitionistic fuzzy topological, J. Fuzzy Math., 5(2), (1997), 355-378.
[11] K. Hur, S.Y. Jang and H.W. Kang, intuitionistic fuzzy subgroupoids, Ijfis, 3(1), (2003), 71-77.
[12] K. Hur, H.W. Kang and H.K. Song, intuitionistic fuzzy subgroups and subrings, Honam math. J., 25(1), (2003), 19-41.
[13] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular Norms, Springer Science Business Media Derdercht orginally Publishedby Kluwer Academic Publishers in 2000 Doftcover reprint of the hardcover 1st edition.
[14] S. J. Lee and E. P. Lee, The category of intuitionistic fuzzy topological spaces, Bull. Korean Math. Soc., 37(1), (2000), 63-76.
[15] S. Majumdar and Q. S. Sultana, The lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 81, (1996), 271-273.
[16] S.D. Malik, J.N. Mordeson and M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, McGraw, (1997).
[17] R. Rasuli, Intuitionistic fuzzy congruences on product lattices under norms, Interdiscip. Math., 24(5), (2021), 1281-1304.
[18] R. Rasuli, Norms over intuitionistic fuzzy multigroups, Yugosl. J. Oper. Res., 31(3), (2021), 339-362.
[19] R. Rasuli, Norms over intuitionistic fuzzy SU-algebra, Scientia Magna, 16(1), (2021), 84-96.
[20] R. Rasuli, S-norms on anti Q-fuzzy subgroups, Open J.Discret. Appl. Math., 4(3), (2021), 1-9.
[21] R. Rasuli, Intuitionistic fuzzy BCI-algebras (implicative ideals, closed implicative ideals, commutative ideals) under norms, Mathematical Analysis and its Contemporary Applications, 4(3), (2022), 17-34.
[22] R. Rasuli, Anti complex fuzzy Lie subalgebras under S-norms, Mathematical Analysis and its Contemporary Applications, 4(4), (2022), 13-26.
[23] R. Rasuli, Intuitionistic fuzzy subalgebras, Ideals and positive implicative ideals of BCI-algebras under norms, Scientia Magna, 17(1), (2022), 54-76.
[24] R. Rasuli, T-Fuzzy subalgebras of BCI-algebras, Int. J. Open Problems Compt. Math., 16(1), (2023), 55-72.
[25] R. Rasuli, Intuitionistic fuzzy complex subgroups with respect to norms(T and S), Journal of fuzzy Extention and Applications, 4(2), (2023), 92-114.
[26] R. Rasuli, Anti fuzzy B-subalgebras under S-norms, Commun. Combin., Cryptogr. Computer Sci., 1, (2023), 61-74.
[27] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and Cotrol, 8, (1965), 338-353.
[28] Q. Zhang and , G. Meng, On the lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 112, (2000), 349-353.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–177، صص. ۱۱۴–۱۱۸

مقسوم علیه صفر و حوزه صحیح در جبرهای هوپ

علی معدنشکاف[آ]، محمد مهدی معتمدی نژاد[ب]

[آ] عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان
[ب] دانشجوی دکتری دانشگاه سمنان و عضو هیات علمی دانشگاه جامع علمی کاربردی

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
جبرهای هوپ ۱
مقسوم علیه صفر ۲
حوزه صحیح ۳

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله، ضمن معرفی مقسوم علیه صفر و حوزه صحیح در جبرهای هوپ، برخی ویژگی های آنها را بررسی و خصوصیاتی را در جبرهای هوپ ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

در سال ۱۹۶۹ بوسباخ رده‌ای از جبرهای منطقی را معرفی و خاصیت‌هایی از آنها را ارائه نمود [۲، ۳]. بوچی و اونز [۴] در اواسط دهه هفتاد، جبرهایی که دارای خاصیت جابجایی در این رده معادله ای بودند را جبرهای هوپ نامگذاری کردند. این بخش، برخی خصوصیات جبرهای هوپ که در ادامه این پژوهش مورد نیاز است ارائه شده است. در بخش دوم، ضمن بررسی مقسوم علیه صفر و حوزه صحیح در جبرهای هوپ، برخی ویژگی های آنها در جبرهای هوپ مورد بررسی قرار گرفته است.

تعریف ۱.۱. [۶] جبر هوپ [۱] $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ از نوع $(2,2,0)$ است بطوریکه:
$H1$. $(H;\odot,1)$ تکواره جابجایی با عضو همانی باشد،
$H2$. $x\longrightarrow x=1$ برای هر $x\in H$
$H3$. $x\odot(x\longrightarrow y)=y\odot(y\longrightarrow x)$ برای هر $x,y\in H$
$H4$. $(x\odot y)\longrightarrow z=x\longrightarrow(y\longrightarrow z)$ برای هر $x,y,z\in H$.

تعریف ۲.۱.

۱. در جبر هوپ H، تعریف می‌کنیم:

$$x\leq y \text{ اگر تنها و اگر } x\longrightarrow y=1$$

به راحتی قابل بررسی است که $\leq$ رابطه ترتیب جزئی روی H است.

پست الکترونیک : amadanshekaf@semnan.ac.ir (علی معدنشکاف)، motamedinezhad@semnan.ac.ir (محمد مهدی معتمدی نژاد)

[1] Hoop algebra

۲. جبر هوپ کراندار، جبر $(H;\odot,\longrightarrow,0,1)$ است بطوریکه $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ جبر هوپ بوده و $x\leq 0$، برای هر $x\in H$ (به [۱] مراجعه نمایید).

۳. در جبر هوپ H، تعریف می‌کنیم $x^0=1$ و $x^n=x^{n-1}\odot x$، برای هر $n\in\mathbb{N}$. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. عمل متمم «$'$» را برای هر $x\in H$ به صورت $x'=x\longrightarrow 0$ تعریف می‌کنیم. همچنین قرار می‌دهیم $x''=(x')'$. اگر برای هر $x\in H$، $x''=x$ باشد، آنگاه گوئیم جبر هوپ کراندار H، دارای «ویژگی نفی مضاعف» [۲]، یا به اختصار (DNP) است ([۱] را ببینید).

۴. عضو $x\in H$ را خودتوان [۳]، نامیم اگر و فقط اگر $x^2=x$. مجموعه اعضای خودتوان H را با $Id(H)=\{x\in H: x^2=x\}$ نشان می‌دهیم. اگر $H=Id(H)$، جبر هوپ را خودتوان می‌نامیم.

۵. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. عضو $x\in H$ را پوچ توان [۴]، نامیم اگر و فقط اگر $n\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد بطوریکه $x^n=0$. مجموعه اعضای پوچ توان H را با $N(H)=\{x\in H:\exists n\in\mathbb{N},x^n=0\}$ نشان می‌دهیم.

۶. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. عضو $a\in H$ را چگال [۵] می‌نامیم اگر $a'=0$. مجموعه اعضای چگال H را با $D(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم H و G دو جبر هوپ باشند. نگاشت $f:H\to G$ را همریختی هوپ می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in H$، $f(x\odot y)=f(x)\odot f(y), f(x\longrightarrow y)=f(x)\longrightarrow f(y)$. بدیهی است که $f(1)=1$. اگر H و G دو جبر هوپ کراندار باشند، آنگاه می بایست $f(0)=0$.

قضیه ۴.۱. [۲، ۳، ۵] *فرض کنیم $(H;\odot,\longrightarrow,1)$ جبر هوپ است. در این صورت برای هر $x,y,z,a\in H$:*

(i) $(H,\leq)$، $\wedge$- نیم مشبکه است بطوریکه $x\wedge y=x\odot(x\longrightarrow y)$،

(ii) $x\odot y\leq z$ اگر و تنها اگر $x\leq y\longrightarrow z$.

(iii) $x\odot y\leq x,y$،

(iv) $x\odot(x\longrightarrow y)\leq x,y$،

(v) $x\leq y\longrightarrow x$،

(vi) $1\longrightarrow x=x$،

(vii) $x\longrightarrow 1=1$،

(viii) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $x\odot z\leq y\odot z$،

(ix) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $z\longrightarrow x\leq z\longrightarrow y$،

(x) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $y\longrightarrow z\leq x\longrightarrow z$،

گزاره ۵.۱. [۵] *فرض کنیم H جبر هوپ است. برای هر $x,y\in H$، تعریف می‌کنیم:*

$$x\vee y=((x\longrightarrow y)\longrightarrow y)\wedge((y\longrightarrow x)\longrightarrow x)$$

در این صورت، برای هر $x,y\in H$، شرایط زیر معادلند:
(i) $\vee$، شرکت پذیر است.
(ii) $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ برای هر $x,y,z\in H$،
(iii) $x\leq y$ نتیجه می‌دهد $x\vee z\leq y\vee z$ برای هر $x,y,z\in H$،
(iv) $\vee$، عمل دوتائی سوپریمم (کوچکترین کران بالا) روی H است.

تعریف ۶.۱. جبر هوپ H را $\vee$ـهوپ می‌نامیم اگر $\vee$، عمل دوتائی سوپریمم (کوچکترین کران بالا) روی H باشد.

[2] Double negation property
[3] Idempotent element
[4] nilpotent element
[5] Dense

گزاره ۱.۷. [۵] *فرض کنیم H جبر هوپ و $x,y,z \in H$ و I مجموعه‌ای دلخواه است. در صورت وجود جوین دلخواه، داریم:*
(i) $(x \vee y) \longrightarrow z = (x \longrightarrow z) \wedge (y \longrightarrow z)$،
(ii) $x \odot (\bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I}(x \odot y_i)$،
(iii) $x \wedge (\bigvee_{i\in I} y_i) = \bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i)$.

ملاحظه ۱.۸. [۵، گزاره ۴. ۶] فرض کنیم H یک جبر $\vee$–هوپ است. در این صورت $(H;\vee,\wedge)$ مشبکه توزیع پذیر است.

گزاره ۱.۹. [۲، ۳، ۵] *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار است. در این صورت برای هر $x,y \in H$:*
(i) $x \leq x'' \; x \odot x' = 0 \; x''' = x' \; x' \leq x \longrightarrow y$،
(ii) *اگر $x \leq y$ آنگاه $y' \leq x'$*،
(iii) $x \odot y = 0$ *اگر و تنها اگر* $x \leq y'$.

تعریف ۱.۱۰. فرض کنیم L یک مشبکه باشد.
الف) زیر مجموعه غیر تهی I از L را ایدال نامیم، اگر
(i) برای هر $x,y \in I \; x \vee y \in I$
(ii) برای هر $x \in L$ و $y \in I$ بطوریکه $x \leq y$ آنگاه $x \in I$.
ب) برای هر $x,y \in L$ گوئیم y پوشش x است و به صورت $x \twoheadrightarrow y$ نشان می‌دهیم، اگر
(i) $x < y$،
(ii) اگر $x \leq z < y$ آنگاه $x = z$.
ج) فرض کنیم L دارای کوچکترین عضو 0 باشد. عضو a را اتم [۶] می‌نامیم اگر a پوشش 0 باشد.

تعریف ۱.۱۱. [۵، ۶] فرض کنیم H جبر هوپ است. زیرمجموعه F از H را فیلتر می‌نامیم اگر
$(F1)$ $1 \in F$،
$(F2)$ برای هر $x,y \in F \; x \odot y \in F$
$(F3)$ اگر $x \leq y$ و $x \in F$ آنگاه $y \in F$ برای هر $x,y \in H$.

فیلتر F از H را سره می‌نامیم اگر $F \neq H$. واضح است که H و $\{1\}$ فیلترهای بدیهی H هستند. اگر H جبر هوپ کراندار باشد، آنگاه فیلتر F، سره است اگر و تنها اگر شامل 0 نباشد. فرض کنیم H جبر هوپ باشد و $x \in H$. اشتراک تمام فیلترهای H که شامل x هستند، را با $\langle x \rangle$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\langle x \rangle = \{a \in H : \exists n \in \mathbb{N}, x^n \leq a\} = \{a \in H : \exists n \in \mathbb{N}, x^n \longrightarrow a = 1\}.$$

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. عضو $a \in H$ را مقسوم علیه صفر [۷] نامیم اگر $b \in H \neq 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $a \odot b = 0$. برای هر $x \in H \neq 0$، مجموعه مقسوم علیه های صفر x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_H(x) = \{y \in H : x \odot y = 0\}.$$

با توجه به اینکه برای هر $x \in H \; 0 \in Z_H(x)$، لذا $Z_H(x) \neq \emptyset$. بدیهی است که $Z_H(0) = H$.

مثال ۲.۲. فرض کنیم $H = \{0,a,b,c,d,1\}$. عملهای $\odot$ و $\rightarrow$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	b	b	d	0	a
b	0	b	b	0	0	b
c	0	d	0	c	d	c
d	0	0	0	d	0	d
1	0	a	b	c	d	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	a	c	c	1
b	c	1	1	c	c	1
c	b	a	b	1	a	1
d	a	1	a	1	1	1
1	0	a	b	c	d	1

به راحتی قابل بررسی است که ساختار معرفی شده، جبر هوپ کراندار است. حال داریم $Z_H(a) = \{0,d\}$ و $Z_H(d) = \{0,a,b,d\}$.

[6] Atom
[7] zero divisor

گزاره ۳.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار است. در این صورت برای هر $x,y,z \in H$:*
(i) *اگر $y \in Z_H(x)$، آنگاه برای هر $z \leq y$، $z \in Z_H(x)$ و برای هر $z \leq x$، $y \in Z_H(z)$،*
(ii) *اگر $y \in Z_H(x)$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y^n \in Z_H(x^n)$ و $y^n \in Z_H(x)$،*
(iii) *اگر $x \leq y$، آنگاه $Z_H(y) \subseteq Z_H(x)$،*
(iv) $Z_H(1) = \{0\}$،
(v) *$x \odot y = 0$ اگر و فقط اگر $x \in Z_H(y)$ یا $y \in Z_H(x)$،*
(vi) *$x' \in Z_H(x)$ و $Z_H(x'') \subseteq Z_H(x)$،*
(vii) *اگر $x \wedge y = 0$، آنگاه $y \in Z_H(x)$ و $x \to y \in Z_H(x)$.*
(viii) *اگر $y \in Z_H(x)$، آنگاه $x \leq y'$ و در نتیجه $y \longrightarrow x \leq y \longrightarrow y'$،*
(ix) *$Z_H(x \vee y) = Z_H(x) \cap Z_H(y)$،*
(x) *$Z_H(x \to y) \subseteq Z_H(y) \subseteq Z_H(x \wedge y))$،*
(xi) *اگر $x \in N(H)$، آنگاه $x^{n-1} \in Z_H(x)$، $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$،*
(xii) *اگر H حذف پذیر باشد، آنگاه برای $0 \neq x \in H$، $Z_H(x) = \{0\}$.*

گزاره ۴.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ است و $G \subseteq H$. در این صورت برای هر $x \in G$، $Z_G(x) \subseteq Z_H(x)$.*

گزاره ۵.۲. *فرض کنیم H و G دو جبر هوپ باشند و $f : H \to G$ همریختی هوپ.*
(i) برای هر $x \in H$، اگر $y \in Z_H(x)$، آنگاه $f(y) \in Z_G(f(x))$،
(ii) اگر f یکبیک باشد و $f(y) \in Z_G(f(x))$، آنگاه $y \in Z_H(x)$.

قضیه ۶.۲. *فرض کنیم H جبر $\vee$- هوپ کراندار است. در این صورت برای هر $x \in H$، $Z_H(x)$ ایدال مشبکه H است.*

تعریف ۷.۲. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد و $X \subseteq H$. مجموعه مقسوم علیه های صفر X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_H(X) = \{y \in H : x \odot y = 0, \forall x \in X\}.$$

با توجه به اینکه $0 \in Z_H(X)$، لذا $Z_H(X) \neq \emptyset$.

گزاره ۸.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار و $X \subseteq H$. در این صورت داریم:*
(i) *اگر $X \leq Y$، آنگاه $Z_H(Y) \subseteq Z_H(X)$،*
(ii) *برای هر $x \in X$، $Z_H(X) \subseteq Z_H(x)$،*
(iii) $Z_H(X) = \bigcap_{x \in X} Z_H(x)$،
(iv) $Z_H(Z_H(X)) = X \cup \{0\}$.

قضیه ۹.۲. *فرض کنیم H جبر $\vee$- هوپ کراندار است. در این صورت برای هر $X \subseteq H$، $Z_H(X)$ ایدال مشبکه H است.*

تعریف ۱۰.۲. فرض کنیم H جبر هوپ کراندار است. گوئیم H دارای خاصیت حوزه صحیح [8] یا به اختصار (IDP) است اگر حاصلضرب هر دو عضو ناصفر، ناصفر باشد. به عبارت دیگر برای هر $x,y \in H$، بطوریکه $x \neq 0$ و $y \neq 0$، آنگاه $x \odot y \neq 0$.

نتیجه ۱۱.۲. *هر جبر هوپ کراندار، دارای (IDP) است اگر و فقط اگر برای هر $0 \neq x \in H$، $Z_H(x) = \{0\}$.*

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار متناهی با (IDP) باشد. در این صورت H فقط و فقط دارای یک اتم خودتوان است.*

اثبات. بدیهی است که H حداقل دارای یک اتم است. فرض کنیم دارای ۲ اتم باشد. برای تعداد بالاتر نیز مشابه خواهد بود. فرض کنیم a و b دو اتم متفاوت H باشند. در این صورت داریم $a \wedge b = 0$. لذا $a \odot b = 0$. چون H دارای (IDP) است، تناقض است. لذا $a \odot b = a$ یا $a \odot b = b$ که تناقض است. بنابراین $a = b$. همچنین با توجه (IDP)، $a \odot a = a$. لذا $a \in Id(H)$. □

نتیجه ۱۳.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار با (IDP) و دارای اتم منحصر بفرد $a \in H$ باشد. در این صورت*
(i) حاصلضرب هر دو پوشش متفاوت a، برابر با a است.
(ii) هر پوشش a، یا خودتوان است، یا توان های بالاتر از ۱ آن، برابر با a است.

[8] integral domain property

مثال ۱۴.۲. الف) فرض کنیم $I = [0,1]$ بازه‌ی بسته واحد است. عمل‌های $\odot$ و $\longrightarrow$ را روی این بازه به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x, y \in I$،

$$x \odot y = \min(x, y) \quad \text{و} \quad x \longrightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \le y \\ y & \text{اگر } x > y \end{cases}$$

در این صورت $(I; \odot, \longrightarrow, 1)$ = **Goa** جبر هوپ است. این ساختار جبری با عنوان *جبر گودل استاندارد* شناخته می‌شود. جبر **Goa**، دارای (IDP) است.

ب) فرض کنیم $I = [0,1]$ بازه‌ی بسته واحد است. عمل‌های $\odot$ و $\longrightarrow$ را روی این بازه به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x, y \in I$،

$$x \odot y = x \cdot y \quad \text{و} \quad x \longrightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \le y \\ \frac{y}{x} & \text{اگر } x > y \end{cases}$$

در این صورت $(I; \odot, \longrightarrow, 1)$ = **Pra** جبر هوپ است. این ساختار جبری با عنوان *جبر حاصلضربی* شناخته می‌شود. جبر **Pra**، دارای (IDP) است.

ج) فرض کنیم $(H = \{0, a, b, 1\}, \le)$ زنجیر باشد. عمل‌های $\odot$ و $\longrightarrow$ را بر روی H به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\longrightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

به راحتی قابل بررسی است که $(H; \odot, \longrightarrow, 0, 1)$ جبر هوپ کراندار است. جبر H، دارای (IDP) است. همچنین اعضای a و b خودتوان هستند.

د) جبرهای هوپ کراندار حذف پذیر دارای (IDP) هستند.

هـ) جبرهای بول بیش ۲ عضو، فاقد (IDP) هستند.

گزاره ۱۵.۲. *هر زیرجبر جبر هوپ دارای (IDP)، دارای (IDP) است.*

عکس گزاره فوق ممکن است درست نباشد. به عنوان نمونه جبر هوپ $\{1\}$، زیرجبر هوپ هر جبر هوپ است.

قضیه ۱۶.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار باشد. در این صورت H دارای (IDP) است اگر و تنها اگر $D(H) = H - \{0\}$.*

نتیجه ۱۷.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار دارای (IDP) باشد. در این صورت $D(H)$ فیلتر ماکزیمال H است.*

گزاره ۱۸.۲. *فرض کنیم H جبر هوپ کراندار دارای (IDP) و F فیلتر دلخواه H باشد. در این صورت جبر هوپ کراندار $\frac{H}{F}$ دارای (IDP) است.*

گزاره ۱۹.۲. *فرض کنیم H و G دو جبر هوپ کراندار باشند و $f : H \to G$ همریختی یکبیک.*
الف) اگر H دارای (IDP) باشد آنگاه $\mathrm{Im(f)}$ نیز دارای (IDP) است.
ب) اگر G دارای (IDP) باشد آنگاه H نیز دارای (IDP) است.

گزاره ۲۰.۲. *فرض کنیم H و G دو جبر هوپ کراندار باشند و $f : H \to G$ همریختی پوشا. اگر G دارای (IDP) باشد، آنگاه $\frac{H}{Ker_0(f)}$ نیز دارای (IDP) است.*

مراجع

[1] P. Agliano, I.M.A. Ferreirim, F. Montagna, Basic hoops: an algebraic study of continuous t-norms, Studia Logica, 87(1), (2007), 73-98.
[2] B. Bosbach, Komplementare Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, Fund. Math. 64, (1969), 257-287.
[3] B. Bosbach, Komplementare Halbgruppen. Kongruenzen und Quotienten, Fund. Math. 69, (1970), 1-14.
[4] J. R. Buchi and T. M. Owenz, Complemented monoids and hoops, unpublished manuscript.
[5] G. Georgescu, L. Leustean, V. Preoteasa, Pseudo-hoops, MVLSC, 11(1-2), (2005), 153-184.
[6] M. Kondo, Some types of filters in hoops, 41st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, (2011), 50-53, DOI:10.1109/ISMVL.2011.9.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، 202–DE، صص. ۱۱۹–۱۲۳

تجزیه‌وتحلیل پویایی یک مدل ریاضی با ظرفیت مراقبت‌های بهداشتی برای همه‌گیری کووید ـ ۱۹

اکرم سندگلی *[آ]، دکتر راضیه فرخزاد رستمی[ب]، دکتر راحله خاندوزی[آ،ب]

[آ]دانشجو ارشد دانشگاه گنبدکاووس
[ب]دکترای تخصصی آنالیز تابعی

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
ویروس کرونای جدید
کووید۱۹
ظرفیت مراقبت‌های بهداشتی
دوره نهفته
مدل SEIR
تجزیه وتحلیل اثبات محلی و جهانی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34D05
34D08
34D23
32B05
92D25
92D30

چکیده

باتوجه به عدم وجود درمان یا واکسن کامل برای کووید ـ ۱۹، این بیماری در سال ۲۰۲۰ به‌عنوان یک بیماری همه‌گیر توسط سازمان بهداشت جهانی (WHO) [۱] اعلام شد، همچنین چالش بزرگ برای سیستم‌های بهداشتی در سراسر جهان به‌شمار می‌رود. این موضوع اهمیت ویژه‌ای داشت؛ زیرا بسیاری از کشورها با محدودیت‌های منابع و ظرفیت‌های درمانی مواجه بودند. کاهش سرعت شیوع ویروس می‌توانست از فشار بیش‌ازحد بر بیمارستان‌ها و از فروپاشی سیستم مراقبت‌های بهداشتی جلوگیری نماید. هر چند که این کاهش سرعت ممکن بود منجربه طولانی شدن مدت زمان شیوع بیماری شود، اما می‌تواند تعداد کل مرگ و میرها را کاهش دهد. دراین مطالعه، یک مدل اپیدمی جدید تحت عنوان SEIR [۲] بررسی شده است که تأثیر ظرفیت‌های مراقبت‌های بهداشتی را در نظر می‌گیرد و ثبات محلی و جهانی مدل مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفته است. علاوه بر این، این مدل توسط برخی شبیه‌سازی‌های عددی نیز پشتیبانی شده است.

۱. مقدمه

در دنیای امروز، بسیاری از کشورها با تهدیدی مواجه شده‌اند که منبع آن هنوز به‌طور دقیق مشخص نشده است: یک ویروس کرونای جدید. این اپیدمی که ابتدا در شهر ووهان، هوبی چین در اوایل دسامبر ۲۰۱۹ آغاز گردید، به سرعت به بسیاری از کشورهای جهانی سرایت کرده و به‌طور جدی بشریت را تحت تأثیر قرار داده‌است. به‌عنوان مثال، اقدامات مختلفی نظیر منع رفت‌وآمد غیرمجاز، تعطیلی طولانی مدت مدارس، کار از راه دور، الزام به استفاده از ماسک و دستکش در مکان‌های شلوغ و عمومی، ضدعفونی مکان‌های مشترک، ایزوله‌کردن موارد مشکوک، اطلاع‌رسانی از طریق اعلان‌های عمومی انجام شده است. متاسفانه، تلاش‌های شدید مسئولان و دولت‌های بهداشتی در کشورهای مختلف نتوانسته‌اند از شیوع کووید ـ ۱۹ جلوگیری کنند. براساس گزارش‌های سازمان جهانی بهداشت، از زمان شیوع بیماری همه‌گیر، تا ۱۶ ژوئن ۲۰۲۰، تعداد کل موارد تأییدشده به ۷۸۹۰۶۸۷ نفر و تعداد کل فوتی‌ها در سراسر جهان ۴۳۳۴۰۴ نفر رسیده است [۱]. در نتیجه با افزایش روزافزون موارد آلوده، تراکم بیمارستان‌ها (به‌ویژه بخش مراقبت‌های ویژه) ممکن است به سرعت افزایش یابد و مراقبت‌های لازم و کافی برای بیماران ارائه نشود. بنابراین، فراتر رفتن از حداکثر این تراکم در بیمارستان‌ها می‌تواند منجربه نتایج منفی بسیار جدی‌تری شود. دراین راستا، مدل‌سازی ریاضی به‌عنوان یک

*سخنران
پست *الکترونیک :* akramsanadgoli@gmail.com (اکرم سندگلی)، r_farokhzad@gmail.com (دکتر راضیه فرخزاد رستمی)

تکنیک و زمینه مهم مطرح گردیده است. مطالعات مدل‌سازی ریاضی نقش قابل توجهی در تجزیه‌وتحلیل عواملی که ممکن بود بر گسترش آن تأثیر بگذارد، ایفا می‌کنند. مدل‌سازی اپیدمیولوژیک ریاضی به‌منظور بررسی پویایی رفتار اپیدمی ضروری بوده است و بسیاری از ریاضی‌دانان در سراسر جهان که به اپیدمیولوژی ریاضی علاقه‌مند بوده‌اند، اخیرا درتلاش بوده‌اند تا به درک ناشناخته کووید–۱۹ کمک کنند. مراجع [۲، ۴] و [۳] فقط تعداد کمی از آنها بوده است.

این مقاله به بررسی پویایی انتقال کووید–۱۹ پرداخته و مدلی ایجاد گردیده که تأثیر مثبت میزان مشارکت را تجزیه‌وتحلیل می‌کند. یکی از ویژگی متمایزکننده این مدل‌ها، متغیر بودن نرخ بهبودی و مرگ و میر ناشی از بیماری در طول شیوع بوده‌است. این تنوع به این دلیل بود که این نرخ‌ها به سطح دسترسی به فرصت‌های ارائه‌شده توسط سیستم مراقبت‌های بهداشتی برای افراد مبتلا بستگی داشت. در این مطالعه ابتدا تعادل‌های عاری از بیماری و تعادل بومی مدل تعیین‌شده و مقدار R_0 که آستانه بسیار مهمی برای سیر بیماری در مدل‌های اپیدمی ریاضی است، محاسبه شده است. سپس، با توجه به مقدار R_0، پایداری محلی و جهانی این تعادل‌ها به‌ترتیب با استفاده‌از معادله مشخصه مربوطه و با استفاده از روش اصل تغییرناپذیری لاسال– روش مستقیم لیاپانوف، تحلیل گردیده است.

R_0 که به‌عنوان تعداد عفونت‌های ثانویه یا تعداد بازتولید اولیه شناخته شده، میانگین تعداد موارد جدیدی است که یک مورد منفرد منجر شده است. بنابراین R_0 به‌عنوان یک مقدار کلیدی در انقراض یا گسترش بیماری در جمعیت تلقی شده است و گسترش بیماری در یک جمعیت با کاهش R_0 کاهش یافته است. اگر R_0 کاهش یافته باشد، حتی اگر تعداد یکسانی از افراد مبتلا شوند، شیوع بیماری ممکن است طولانی‌تر شود. بااین حال، نباید نادیده گرفت که تعداد موارد جدی در طول زمان افزایش یافته است. با توجه به این که هنوز هیچ واکسن یا داروی خاصی برای کووید–۱۹ در دسترس نبوده است، مدیریت به‌موقع شیوع شرایطی را فراهم کرده که ظرفیت بیمارستان‌ها و مراقبت‌های ویژه تحت فشار قرار نگیرد.

حال فرض بر این است، مدلی بررسی شود که در آن خدمات درمانی ارائه شده توسط مؤسسات بهداشتی در مقابله با کووید–۱۹ در نظر گرفته شده باشد.

۲. مدل و تحلیل کیفی و پایداری آن

۲.۱. *مدل معادلات و نام‌گذاری*

یک مدل اپیدمی SEIR با تأخیر زمانی شامل چهار بخش بوده است: افراد حساس (S) نسبت به بیماری کووید–۱۹، افراد در معرض ویروس (E)، افراد عفونی (I) و افراد بهبودیافته (R). جمعیت کل را با نماد (N) نشان داده شده است.

تمام پارامترهای استفاده‌شده در مدل، ثابت و غیرمنفی هستند. پارامترهای b و d نشان‌دهنده نرخ زاد و ولد و نرخ مرگ طبیعی از تمام محفظه‌ها به‌ترتیب نشان داده شده است. فرض بر این بوده است که همه نوزادان در بخش حساس قرار گرفته و همچنین، β نرخ تماس مؤثر بین افراد حساس و عفونی و γ نرخ پیشرفت افراد در معرض عفونی شدن را نشان داده است. علاوه بر این، σ نرخ انتقال افراد مواجه‌شده‌ای است که به کلاس R عفونی نبوده‌اند. تابع $c(t)$ که در بازه $[0,1]$ ارزش گرفته است، سطح دسترسی به فرصت‌های ارائه‌شده توسط سیستم مراقبت‌های بهداشتی برای افرادی را نشان داده است که در زمان t عفونی شده‌اند. پارامتر α_1 نرخ بازیابی طبیعی برای کلاس عفونی است که حداقل نرخ بازیابی برای مدل محسوب می‌شود. همچنین، $\alpha_2 c(t)$ میزان مشارکت در بهبود را توصیف می‌کند. بنابراین، سیستم مراقبت‌های بهداشتی حداکثر نرخ بازیابی را با مقدار $\alpha_1 + \alpha_2$ تعیین کرده است.

حداقل میزان مرگ و میر ناشی از بیماری با μ_1 نشان داده شده و $\mu_2(1-c(t))$ عاملی است که باعث افزایش مرگ و میر ناشی از بیماری می‌شود. این عامل مربوط به افرادی بوده است که نمی‌توانستند از سیستم بهداشت و درمان بهره‌مند شوند. بنابراین، واضح است که $\mu_1 + \mu_2$ مجموع حداکثر میزان مرگ و میر را نشان دهد.

همانطور که تخمین زده شده، حالتی که $c(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، به این معناست که همه فرصت‌های بیمارستانی تقریبا از بین رفته است. در مقابل، $c(t) = 1$ بیانگر این است که از تمام فرصت‌های بیمارستانی به‌طور کامل استفاده شده است.

علاوه بر این، متغیرهای $N(t), S(t), E(t), I(t), R(t)$ تعداد افراد موجود در بخش‌های مربوطه را در زمان t توصیف می‌کنند. این متغیرها به وضوح غیرمنفی بوده و برای همه $t \geq 0 : N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$. همچنین، τ یک تاخیر زمانی مربوط به دوره نهفته کووید–۱۹ در نظر گرفته شده است. اصطلاح $\tilde{E}(t,\tau)$ تعداد افرادی را توصیف می‌کرد که در معرض ابتلا به ویروس کرونا قرار گرفته بودند و در زمان $t-\tau$ زنده ماندند. این عبارت به‌صورت ریاضی با بیان $\beta S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-d\tau}$ توضیح داده شده و در بخش زیر با جزئیات بیشتری ارائه خواهد شد.

باتوجه به توضیحات و مفروضات فوق، مدلی که تاثیر سطح دسترسی به فرصت‌های ارائه‌شده توسط سیستم مراقبت‌های بهداشتی برای افراد را

در نظر می‌گرفت، با تاخیر زمانی، نشان‌دهنده یک دوره نهفته به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= b - \beta S(t)I(t) - dS(t),\\
\frac{dE}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma \tilde{E}(t,\tau) - \sigma E(t) - dE(t),\\
\frac{dI}{dt} &= \gamma E(t,\tau) - [\mu_1 + \mu_2(1 - c(t))]I(t) - [\alpha_1 + \alpha_2 c(t)]I(t) - dI(t),\\
\frac{dR}{dt} &= [\alpha_1 + \alpha_2 c(t)]I(t) + \sigma E(t) - dR(t),
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن تکامل تراکم در افراد در معرض ابتلا به ویروس به‌صورت زیر بیان شده است:

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma t} + \frac{\sigma}{\sigma \tau}\right) E(t,\tau) = -d\tilde{E}(t,\tau). \tag{۲}$$

با توجه به توضیحات ارائه شده، می‌توان گفت که $\tilde{E}(t,0)$ نمایانگر تعداد افرادی است که در زمان t در معرض ویروس کرونا قرار گرفته‌اند، می‌توان نتیجه گرفت که $\tilde{E}(t,0)$ به $\beta S(t)I(t)$ مربوط می‌شود. باتوجه به معادله (۲) و شرایط مرزی زیر: $E(t,0) = \beta S(t)I(t),$ با حل این معادله، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$E(t,\tau) = \beta S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-d\tau}.$$

بنابراین، معادله (۱) به‌صورت زیر بازیابی شده است:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= b - \beta S(t)I(t) - dS(t),\\
\frac{dE}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma\beta S(t-\tau)e^{-d\tau} - (d+\sigma)E(t),\\
\frac{dI}{dt} &= \gamma\beta S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-d\tau} - [\mu_1 + \mu_2(1 - c(t))]I(t) - [\alpha_1 + \alpha_2 c(t)]I(t) - dI(t),\\
\frac{dR}{dt} &= [\alpha_1 + \alpha_2 c(t)]I(t) + \sigma E(t) - dR(t),
\end{aligned} \tag{۳}$$

۲.۲ . *منطقه ثابت مثبت امکان‌پذیر*

برای تحلیل تغییرات جمعیت در یک مدل اپیدمیولوژیک، فرض می‌کنیم که منطقه‌ای وجود دارد که جمعیت در آن به‌طور مثبت ثابت است. برای مطالعه ریاضی و اپیدمیولوژیک، تمرکز بر روی نتایج مرتبط با مدل مانند وجود یگانگی نقاط تعادل و پایداری سیستم ضروری است.
با جمع کردن تمام معادلات از معادله (۳) میزان تغییر کل جمعیت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}\\
&= b - dN - [\mu_1 + \mu_2(1 - c(t))]I.
\end{aligned} \tag{۴}$$

سپس به‌عنوان مثال:

$$N'(t) + dN \le b.$$

با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل معمولی $N'(t) + dN = b$ و حل آن با استفاده از روش کلاسیک (جداسازی متغیرها)، جواب $N(t) = b/d + ce^{-dt}$ به‌دست می‌آید. بدیهی است که $C = N(0) - b/d$ برای شرط اولیه $t = 0$ تعیین شده و از این رو جمعیت متغیر با زمان از

$$N(t) = N(0)e^{-dt} + \frac{b}{d}(1 - e^{-dt}). \tag{۵}$$

بااستفاده از قضیه مقایسه استاندارد [۸]، سمت راست معادله (۵) راه‌حل حداکثر معادله است. بنابراین برای همه $t \geq ۰$:

$$N(t) \leq N(۰)e^{-\mu t} + \frac{b}{d}(۱ - e^{-dt})$$

به‌خصوص، وقتی $N(۰) \leq \frac{b}{d}$، می‌توان نوشت $N(t) \leq \frac{b}{d}$ برای هر $t > ۰$.

بنابراین برای معادله(۳) منطقه $\Gamma = \left\{(S(t), E(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}^{۴}_{۰} : N(t) \leq \frac{b}{d}\right\}$ مثبت و ثابت است. درنتیجه این ناحیه تمام راه‌حل‌های دستگاه را جذب‌کرد و این ناحیه محدود برای در نظر گرفتن دینامیک مدل (۳) کافی خواهد بود.

پس از این مشخصات در مورد مدل، در زیرنویس‌های بعدی به تحلیل کیفی و پایداری مدل (۳) تمرکز خواهیم کرد. اما قبل از هر چیز، فرض شد که از آنجایی متغیرهای $E(t), R(t)$ در سایر معادلات باقی‌مانده ظاهر نمی‌شوند، تنها می‌توانستیم دینامیک دستگاه دودویی زیر را تجزیه‌وتحلیل کنیم و همین کافی خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - \beta S(t)I(t) - dS(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma\beta S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-d\tau} - [\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t)) + \alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t) + d]I(t) \end{aligned} \tag{۶}$$

البته منطقه Γ محدود و امکان‌پذیر بود که برای بررسی مدل (۶) نیز کافی باشد.

۲ ۳ . *نقاط تعادل و عدد پایه تولید مثل*

دستگاه (۶) همیشه یک نقطه تعادل عاری از بیماری داشت: $P_{۰} = (S_{۰}, I_{۰}) = \left(\frac{b}{d}, ۰\right)$.

علاوه بر این، برای به‌دست آوردن تعادل بومی $P_{*} = (S^{*}, I^{*})$ از (۶)، S^{*} و I^{*} باید معادله جبری زیر را برآورده می‌کرد:

$$\begin{aligned} ۰ &= b - \beta S^{*}I^{*} - dS^{*}, \\ ۰ &= \gamma\beta S^{*}I^{*}e^{-d\tau} - [\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t)) + \alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t) + d]I^{*}. \end{aligned}$$

با حل این معادلات، $P_{*} = (S^{*}, I^{*})$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که

$$S^{*} = \frac{\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t)) + \alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t) + d}{\gamma\beta e^{-d\tau}}$$

$$I^{*} = \frac{\gamma e^{-d\tau}}{\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t)) + \alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t) + d} \times \left(b - \frac{\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t)) + \alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t) + d}{\gamma\beta e^{-d\tau}}\right).$$

بااستفاده از [۵، ۶] و [۷] روش ماتریس نسل بعدی، عدد بازتولید پایه $R_{۰}$ مدل مذکور مشخص شده است.

حال، فرض شده بود $X = (I, S)^{T}$. سپس مدل (۶) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dX}{dt} = \mathcal{F}(X) - \mathcal{V}(X), \tag{۷}$$

به‌طوری‌که

$$\mathcal{F}(X) = \begin{bmatrix} \gamma\beta S(t-\tau)I(t-\tau)e^{-d\tau} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$\mathcal{V}(X) = \begin{bmatrix} [\mu_{۱} + \mu_{۲}(۱ - c(t))]I(t) + [\alpha_{۱} + \alpha_{۲}c(t)]I(t) + dI(t) \\ \beta S(t)I(t) + dS(t) - b, \end{bmatrix}.$$

$X_{۰} = (\frac{b}{d}, ۰)^{T}$ نقطه تعادل عاری از بیماری منحصربه‌فرد مدل (۷) بود.

ماتریس‌های ژاکوبین در نقطه تعادل عاری از بیماری $p_{۰} = (\frac{b}{d}, ۰)$ از $\mathcal{F}(X)$ و $\mathcal{V}(X)$ باتوجه به مشتقات I, S به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$d\mathcal{F}(P_{۰}) = \begin{bmatrix} \gamma\beta S_{۰}e^{-d\tau} & \gamma\beta I_{۰}e^{-d\tau} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

و

$$d\mathcal{V}(P_\circ) = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2(1 - c(t)) + \alpha_1 + \alpha_2 c(t) + d & \circ \\ \beta S_\circ & \beta I_\circ + d \end{bmatrix}.$$

بنابراین $\mathcal{F}$ و $\mathcal{V}$ که به‌ترتیب عبارت‌های آلودگی جدید و شرایط انتقال باقی‌مانده مدل بودند، به‌این عنوان تعیین شده‌اند:

$$F = d.\mathcal{F}_{1\times 1} = \left[\frac{b\beta\gamma e^{-d\tau}}{d}\right]$$

و

$$V = d\mathcal{V}_{1\times 1} = [\mu_1 + \mu_2(1 - c(t)) + \alpha_1 + \alpha_2 c(t) + d].$$

همچنین، چندجمله‌ای مشخصه از

$$FV^{-1} = \left[\frac{b\beta\gamma e^{-d\tau}}{d(\mu_1 + \mu_2(1 - c(t)) + \alpha_1 + \alpha_2 c(t) + d)}\right]$$

است.

$$\det(\lambda I_1 - FV^{-1}) = \lambda - \frac{b\beta\gamma e^{-d\tau}}{d(\mu_1+\mu_2(1-c(t))+\alpha_1+\alpha_2 c(t)+d)}.$$

از [۵، ۶] و [۷] نتیجه‌گیری شد که عدد بازتولید پایه مدل (۶) شعاع طیفی (حداکثر مقدار ویژه) ماتریس نسل بعدی FV^{-1} است. در این مورد،

$$\mathcal{R}_\circ = \frac{b\beta\gamma e^{-d\tau}}{d(\mu_1 + \mu_2(1 - c(t)) + \alpha_1 + \alpha_2 c(t) + d)}. \quad (۸)$$

به هر حال، به‌وضوح مشاهده شد که نقطه تعادل بومی P_* را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P_* = (S^*, I^*) = \left(\frac{b}{d\mathcal{R}_\circ}, \frac{d}{\beta}(\mathcal{R}_\circ - 1)\right).$$

۲.۴. تجزیه‌وتحلیل پایداری مجانبی محلی نقاط تعادل

دراین بخش، با تجزیه‌وتحلیل معادله مشخصه‌ای مربوطه، پایداری‌های محلی نقاط تعادل عاری از بیماری و بومی نشان داده شده است.

قضیه ۱.۲. *اگر $\mathcal{R}_\circ < 1$، سپس تعادل عاری از بیماری $P_\circ$ به‌طور محلی و مجانبی در ناحیه ثابت مثبت پایدار است.*

قضیه ۲.۲. *وقتی $\mathcal{R}_\circ > 1$، تعادل بومی P_* به‌صورت محلی و مجانبی در Γ ثابت مثبت پایدار است.*

۲.۵. تجزیه‌وتحلیل پایداری مجانبی سراسری نقاط تعادل

قضیه ۳.۲. *وقتی $\mathcal{R}_\circ < 1$، نقطه تعادل عاری از بیماری $P_\circ$ معادله (۶) به‌طور مجانبی در سراسر جهان در Γ پایدار است.*

قضیه ۴.۲. *اگر $\mathcal{R}_\circ > 1$، نقطه تعادل آندمیک منحصربه‌فرد P_* معادله (۶) به‌صورت مجانبی در منطقه ثابت مثبت پایدار است.*

مراجع

[1] https://covid19.who.int/,. 16 June 2020.

[2] Ivorra B, Ferrández M.R, Vela-Pérez M, and Ramos A.M. Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (covid-19) considering its particular characteristics: The case of china. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020. doi: ۱۰.۱۰۱۶/j.cnsns.۲۰۲۰.۱۰۵۳۰۳. URL https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105303.

[3] Ndaïrou F, Area I, Nieto J, and Torres DFM. Mathematical modeling of covid-19 transmission dynamics with a case study of wuhan. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020. doi: ۱۰.۱۰۱۶/j.chaos.۲۰۲۰.۱۰۹۸۴۶. URL https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109846.

[4] Khan MA and Atangana A. Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-ncov) with fractional derivative. *Alexandria Engineering Journal*, 2020. URL https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.033.

[5] Diekmann O and Heesterbeek JAP. *Mathematical epidemiology of infectious diseases: Model building, analysis and interpretation*. John Wiley and Sons, 2000.

[6] Diekmann O, Heesterbeek JAP, and Metz JAJ. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio $\mathcal{R}_0$ in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of Mathematical Biology*, 28(4):365–382, 1990.

[7] Driessche PVD and Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180:29–48, 2002.

[8] Lakshmikantham S, Leela S, and Martynyuk AA. *Stability Analysis of Nonlinear Systems*. Marcel Dekker, Inc, New York, 1989. URL https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-27200-9.pdf.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–208، صص. ۱۲۴–۱۳۰

شناسایی برخی از بدفهمی‌های رایج متوسطه دوم تجربی در درس ریاضیات و طرح آموزش مناسب برای آن‌ها

سید جلال لنگری*[،آ]

[آ] گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵ تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
آموزش ریاضیات
بدفهمی‌ها
متوسطه دوم

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97D30
97D40
97M10

چکیده

ریاضیات بر حسب ساختار گسترده‌ای که دارد، بستر مناسبی برای بروز یک سری از بدفهمی‌ها در فرآیند تدریس است، که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می‌شود و می‌تواند باعث سردرگمی و عدم موفقیت دانش‌آموزان در حل مساءل ریاضی گردد. درک مفاهیم ریاضی در افراد، همواره با اشتباهاتی همراه بوده است. یکی از عواملی که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می‌شود، بدفهمی‌هایی هستند که بر اثر یاددهی نامناسب، تفکر غیررسمی، دخالت‌های اولیایا یادآوری ضعیف گذشته ایجاد می‌شوند. ممکن است بدفهمی‌ها، فراگیران را دچار اختلال در یادگیری ریاضیات کرده و منجر به افت تحصیلی، اتلاف بودجه و کاهش میزان پیشرفت تحصیلی آنان شود. آگاهی درست دانش‌آموزان از بدفهمی‌ها و اشتباهاتی که در فرآیند یادگیری و حل مسئله رخ می‌دهد، عاملی تعیین کننده برای رشد عملکرد و پیشرفت ریاضی آنان محسوب می‌شود. یکی از هدف‌های پژوهش حاضر، شناسایی بخشی از بدفهمی‌های رایج ریاضیات متوسطه دوم تجربی و ریاضی است. برای شناسایی آن‌ها، ضمن تجارب تدریس پژوهشگر، از مطالعات کتابخانه‌ای و مصاحبه با معلمین باتجربه و نحوه پاسخ به سؤالات دانش‌آموزان استفاده شده است. تحقیقات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان با بدفهمی‌هایی روبرو هستند و مانعی برای یادگیری جدید محسوب می‌شوند. امیدواریم که این تلاش بتواند به دست‌اندرکاران آموزش ریاضی و تألیف کتب درسی در جهت رسیدن به یادگیری و فهم صحیح دانش‌آموزان کمک مؤثری نماید.

۱. مقدمه

ریاضیات، زبانی دقیق برای توصیف تغییرات، پیوستگی و رفتارهای پیچیده پدیده‌ها است. اما درک نادرست مفاهیم اساسی آن می‌تواند منجر به بدفهمی‌هایی شود که نه تنها یادگیری را دشوار می‌سازد، بلکه مسیر حل مسائل را نیز منحرف می‌کند. از جمله مباحثی که اغلب دچار سوء تفاهم می‌شود، می‌توان به حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن اشاره کرد. بدفهمی، به معنای تصور غلط یا ایده اشتباه، از ریشه‌ی فعل Misconceive به معنای بدفهمیدن، درست نفهمیدن و به اشتباه تصور کردن است. بدفهمی به معنای یک ایده‌ی اشتباه است که از درک نادرست چیزی نتیجه‌گیری شده باشد. بدفهمی‌ها معمولاً زمانی رخ می‌دهند که در حالت خاص، ایده‌هایی در ذهن دانش‌آموز ایجاد می‌شود و سپس دانش‌آموز در حالت کلی این ایده‌ها را به طور نادرست تعمیم می‌دهد [۶] وایت و میشل‌مور (white et al., 2002) توضیح می‌دهند که مفاهیم، طی یک فرایند «انتزاعی» در ذهن شکل می‌گیرند؛ فرایندی که توسط آن، فرد نسبت به نظم و تشابهات موجود در تجارب خود، آگاه می‌شود و می‌تواند این نظم و تشابه بین تجربه‌ها را در موقعیت‌های آتی نیز تشخیص دهد. پس هر مفهوم، توصیف واضحی از تشابهات عمده در همه‌ی موقعیت‌های مختلفی است که از آن‌ها منتزع می‌شود. واژه «بدفهمی» برای بیان موقعیتی به کار می‌رود که در آن، ممکن است عقیده‌ای که دانش‌آموز از یک مفهوم در ذهن

*سید جلال لنگری
پست الکترونیک : jalal.langari@cfu.ac.ir (سید جلال لنگری)

می‌سازد، با عقیده کارشناسان آن علم در تقابل باشد. این موقعیت با جایی که در آن، یک «خطای سهوی» اتفاق می‌افتد، تفاوت دارد، زیرا موجب بروز خطاهای مفهومی نظام‌مند می‌گردد؛ یعنی اشتباهاتی که در موقعیت‌های مشابه نیز اتفاق می‌افتد. بدون تردید شناخت بدفهمی‌ها و ریشه‌های ایجاد آن می‌تواند موجب ارتقای یادگیری گردد. پس ایجاب می‌نماید تا معلمان ریاضی با اتخاذ شیوه‌های مناسب و درگیر ساختن دانش‌آموزان در فعالیت‌های درسی، آنان را توانا سازند [۴].

لازم است معلم، موقعیتی به وجود آورد که دانش‌آموزان بتوانند از طریق آن از فرصت‌های یادگیری استفاده کنند و با بدفهمی‌های هر قسمت کاملاً آشنا شوند و ادراک و مهارت‌های خود را شکل دهند. معلم می‌تواند با ارائه‌ی مثال‌های مناسبی دانش‌آموزان را با بدفهمی‌های آن قسمت آشنا سازد [۳].

دوره متوسطه دوم یکی از دوره‌های مهم در آموزش صحیح مفاهیم و فرایندهای ریاضی در کنار ایجاد باورهای درست فرد نسبت به خود، ریاضی و محیط است، بنابراین آموزش صحیح به گونه‌ای که خود زمینه‌ساز ایجاد بدفهمی دانشی و باوری در دانش‌آموز نشود دارای اهمیت است. از آنجایی که بدفهمی‌ها، منشأ بروز خطا هستند، تأثیرات ناشی از آن‌ها اغلب منفی بوده و منجر به اُفت تحصیلی و کاهش میزان پیشرفت تحصیلی می‌شود. این مشکلات، از سوی دانش‌آموزان و مدرسه، عموماً به خانه و خانواده راه یافته و اضطراب و تشویش را در همه‌ی فضای زندگی می‌پراکند که نتیجه‌اش، آسیب شدید روحی است که به بهداشت روانی جامعه وارد می‌شود.

شناخت بدفهمی‌ها و ریشه‌های ایجاد آن‌ها در حوزه‌های مفهومی و درسطوح مختلف تحصیلی، می‌تواند موجب ارتقای یادگیری گردد. معتقدیم، آموزش بدفهمی‌های شناسایی شده به معلّمین، امری ضروری است و در این صورت احتمالاً شاهد تغییراتی در شیوه‌های یاددهی و در نتیجه، یادگیری خواهیم بود.

« اسمال » در یکی از اسناد برنامه درسی ریاضیات ایالت آنتاریو، کانادا چنین بیان می‌کند: « وقتی معلم با ایده‌ها و مفاهیمی که برای دانش‌آموزان پیچیده هستند و دلایل این پیچیدگی، آشنا باشد، آموزش خود را در سطحی متناسب با سطح رشد دانش‌آموزان ارائه می‌کند و از این طریق دانش‌آموزان را برای ساختن مفاهیم به شکلی صحیح به چالش می‌کشد. این امر موجب می‌شود تا احتمال شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی در دانش‌آموزان کاهش یابد. [۵]

یکی از عواملی که منجر به مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می‌شود بدفهمی‌هایی هستند که بر اثر یاددهی نامناسب یا یادآوری ضعیف مطالب گذشته، ایجاد می‌شوند. لازم به ذکر است، بدفهمی‌ها به طور مستقل وجود ندارد و در یک چارچوب مفهومی خاص، بروز می‌کند. یکی از اهداف کلیدی در اصلاح بدفهمی‌های ریاضیات، تغییرات چارچوب مفهومی دانش‌آموزان از مطالب می‌باشد. همچنین یکی از عوامل بدفهمی‌ها، دخالت اولیا و اعضای خانواده می‌باشد. اگر والدین دخالتی در نحوه مطالعه‌ی فرزندشان دارند لازمه‌اش این است که به کتاب‌های درسی دوره مربوطه، تسلط کافی داشته باشند و زبان تدریس به دانش‌آموز را بدانند تا ایجاد دوگانگی در یادگیری فراگیر نشوند. از طرفی معتقدیم، دخالت صحیح و سؤال و پرسش از طرف والدین باعث تثبیت بیشتر مطالب در ذهن دانش‌آموز گردیده و موجب پیشرفت تحصیلی می‌شود. تلاش برای شناسایی بدفهمی‌ها، گامی در جهت ارتقاء کیفیت آموزش خواهد شد.

بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان و حتی علاقه‌مندان به ریاضیات تصور می‌کنند که حد همواره برابر مقدار تابع است، پیوستگی به معنای وجود حد است و مشتق تنها نرخ تغییر مستقیم یک تابع را بیان می‌کند. در حالی که این مفاهیم عمیق‌تر از آن چیزی هستند که در نگاه اول به نظر می‌رسند. همچنین، کاربردهای مشتق فراتر از محاسبه سرعت لحظه‌ای است. معلم می‌کوشد موقعیتی به وجود آورد که دانش‌آموزان بتوانند از طریق آن از فرصت‌های یادگیری استفاده کنند و با بدفهمی‌های هر قسمت کاملاً آشنا شوند و ادراک و مهارت‌های خود را شکل دهند. معلم می‌تواند با ارائه‌ی مثال‌های مناسبی، دانش‌آموزان را با بدفهمی‌های آن قسمت آشنا سازد. [۳]

در ادامه به بررسی برخی از رایج‌ترین بدفهمی‌ها در این حوزه‌ها خواهیم پرداخت تا نشان دهیم که چگونه یک درک صحیح از این مفاهیم می‌تواند قدرت تحلیل ریاضی را بهبود بخشد و مسیر حل مسائل را شفاف‌تر کند.

۲. برخی از بدفهمی‌های حد و پیوستگی

مفهوم حد یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال است. این مفهوم به سبب پیش‌نیاز بودن برای مفاهیمی همچون پیوستگی، مشتق، انتگرال و سری‌ها، از اهمیتی ویژه در ریاضیات برخوردار است. به طور خلاصه می‌توان گفت که درک دانش‌آموزان از مفهوم حد متکی بر تصور مفهومی آنان است. همچنین دانش‌آموزان در تحقیقات نشان می‌دهند که درک آن‌ها از مفهوم حد محدود به دستورات، روش‌ها و الگوریتم‌هایی است که به آن‌ها آموزش داده شده است.

برخی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در بحث حد عبارتند از:

- برخی تصور می‌کنند که یک تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد یا حد تابع در یک نقطه همواره با مقدار تابع در آن نقطه برابر است. حتی برخی آن را با مفهوم پیوستگی مرتبط دانسته و معتقدند که تابع فقط می‌تواند در نقاطی که پیوسته باشد، حد داشته باشد. (جوردان، ۲۰۰۵)
- برخی تصورات مربوط به مفهوم بی‌نهایت و فرایندهای نامتناهی است. چون دانش‌آموزان قادر به فهم فرایندهای نامحدود نیستند و فقط از فرایندهای معین و محدود برای حل مسائل مربوط به حد استفاده می‌کنند. مثلاً در محاسبه حدهای بی‌نهایت، دانش‌آموز چون درک خوبی از

بی‌نهایت ندارد مانند عدد با آن برخورد کرده و در تابع به عنوان عدد آن را جایگزین می‌کند. (کوتریل و همکاران.۱۹۹۶)

ـگاهی حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x-3}$ را برابر ۶ در نظر می‌گیرند که طرحواره [1] ی ذهنی او از حد در نقطه $x=3$ در حل این مسأله مداخله کرده و باعث ایجاد این اشتباه شده است.

ـبرخی حاصل $\lim_{x\to5}\frac{x^2-4}{x^2-25}$ را برابر ۱ در نظر می‌گیرند، ممکن است طرحواره حدهای بی‌نهایت را به طور نامناسب بازخوانی کرده باشد.

- بعضی از دانش‌آموزان، حدهای $\lim_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to(-1)^+}f(x)$ را متفاوت در نظر گرفته و دچار مشکل می‌شوند. [۱]

- برخی از فراگیران، در محاسبه حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)$ که $\frac{\pi^+}{2}$ را می‌خوانند $\frac{\pi}{2}$ از راست (صحیح هم می‌خوانند)، دایره‌ی مثلثاتی را در نظر گرفته و جایگاه $\frac{\pi}{2}$ را تصور و سمت راست آن را پیدا کرده و به اشتباه محاسبات را در ناحیه‌ی اول انجام می‌دهند.

- بدفهمی لزوماً همواره تفکر نادرست نیست، بلکه تعمیم وضعیتی است که دانش‌آموز در حالت خاص در ذهن خود ساخته و با مفاهیم دیگر در « چارچوب شناختی شخصی » مرتبط نموده است. دانش‌آموز، از حد $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ نتیجه می‌گیرد که در همسایگی $x=0$، دو تابع $\sin x$ و x معادل هم هستند و این موضوع را به محاسبه‌ی حد $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ تعمیم داده و صورت را برابر صفر و نهایتاً به اشتباه، جواب را صفر اعلام می‌کند.

ـاگر بعد از تدریس تابع قدرمطلق و جزء صحیح، کاربردهای آن‌ها را در محاسبه حدهایی چون:

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{|\sin2x|}{x}+\frac{|x|}{\cos x}\right)\quad \lim_{x\to2^+}\frac{x^3-[x^3]}{x^2-[x^2]}\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos2x+[-\sin^2x]}{\sin^2x+[\sin^2x]}$$

را بیان کنیم، از بروز برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان جلوگیری کرده‌ایم.

بدفهمی‌های تابع جزء صحیح: به طور کلّی، دقّت نکردن به استثناها می‌باشد. مثلاً، می‌گوید: توابعی چون $y=[f(x)]$ در نقطه‌ی $x=x_0$ به‌طوری‌که $f(x_0)$ مقدار صحیح باشد ناپیوسته است. وظیفه مدرس، این است که تأکید داشته باشد اگر x_0 نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $f(x)$ باشد، آنگاه $[f(x)]$ در نقطه‌ی $x=x_0$ پیوسته می‌باشد. در این خصوص، می‌توان تابع $y=[x^2]$ را در $x=0$ در نظر گرفت.

برخی از دانش‌آموزان، در شیوه محاسبه حدهای دارای جزء صحیح دچار مشکل می‌شوند و حاصل $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x+2}\right]$ را به اشتباه برابر ۲ در نظر می‌گیرند.

با توجه به بررسی‌های به دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که باورها و بدفهمی‌های ایجاد شده در مورد مفهوم حد در ذهن دانش‌آموزان به چند دسته گوناگون تقسیم می‌شوند. مهمترین آن‌ها عبارتند از: « حد غیرقابل دسترس»، « حد به سادگی با جایگزین کردن مقدار نقطه در تابع بدست می‌آید»، « حد فرآیندی متحرک است» و « حد و مقدار تابع یکی هست». این بدفهمی‌ها در ذهن دانش‌آموزان مانعی برای درک مفهوم حد ایجاد کرده و سبب شده است که آن‌ها درکی مناسب از مفهوم حد نداشته و محدود به روش‌های معمولی و قاعده‌مند باشند.

۳. برخی از بدفهمی‌های مشتق

مشتق بخش مهمی از ریاضیات دوره‌ی دبیرستان می‌باشد و کاربرد زیادی در حل مسائل از جمله انتگرال دارد. اگر به جای یک آموزش مفهومی، به صورت قواعدی صوری و حفظی آموزش داده شود، باعث بروز بدفهمی‌هایی از قبیل موارد ذیل می‌شود:

۱) تعمیم‌های نادرست می‌تواند به درک ماهیت «بدفهمی» کمک کند. بدفهمی لزوماً همواره تفکر نادرست نیست، بلکه تعمیم وضعیتی است که دانش‌آموز در وضعیتی خاص در ذهن خود ساخته و با مفاهیم دیگر در «چارچوب شناختی شخصی» مرتبط نموده است. از این که آموخته اگر $f(x)=x^n$، آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$. موضوع را مثلاً به $f(x)=\sin^n x$ گسترش داده و می‌نویسد: $f'(x)=n\sin^{n-1}x$!.

۲) از اینکه می‌داند مشتق $\sin x$ می‌شود $\cos x$ و مشتق $\cos x$ برابر $-\sin x$ است، حرف مشابهی در خصوص مشتق‌های $\tan x$ و $\cot x$ بیان می‌کند و به اشتباه می‌گوید مشتق $\tan x$ می‌شود $\cot x$ و مشتق $\cot x$ برابر $-\tan x$ است!.

۳) گاهی دیده می‌شود مشتق $f(x)=a^x$ را به سبک مشتق‌گیری از چندجمله‌ای‌ها می‌یابد و می‌نویسد $f'(x)=xa^{x-1}$!.

[1] Schema

۴) برخی از دانش‌آموزان از تعریف مشتق یک طرفه‌ی $f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ به اشتباه، حاصل $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2-h^2)-f(2)}{-h^2}$ را برابر $f'_+(2)$ در نظر می‌گیرند.

۵) برخی از فراگیران، در یافتن مقادیر a و b برای آن که توابع دو ضابطه‌ای از قبیل $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & x>4\\ 4\sqrt{x}+b, & x\le 4\end{cases}$ در $x=4$ مشتق‌پذیر باشد، دچار مشکل می‌شوند و فقط مشتق‌های چپ و راست تابع را در نقطه‌ی $x=4$ برابر هم قرار می‌دهند. تأکید بر این که لازمه‌ی مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن نقطه می‌باشد از اهمیت خاصی برخوردار است. همچنین از مدرسین انتظار می‌رود، تمریناتی از قبیل دو مورد زیر را در طرح درس خودشان بگنجانند تا مانع بدفهمی دانش‌آموزان گردد.

الف) در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+1, & x\ge 1\\ x^2-3x+7, & x<1\end{cases}$، حاصل $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1-h^2)-f(1)}{h^2}$ را بیابید.

ب) در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x>2\\ x^3+2x, & x\le 2\end{cases}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2+h^2)}{h^2}$ را بیابید.

لازم به ذکر است، جواب قسمت «الف»، برابر یک می‌شود، هر چند که حاصل حد خواسته شده در بند «ب» وجود ندارد.

۶) از دانش‌آموز سؤال شد، اگر $f(x)=x^3+4\sqrt{x}$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ را بیابید.

دانش‌آموز جواب داد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$$f'(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(1)=5$$

دانش‌آموز مشتق را به درستی حساب کرده و جایگذاری هم درست انجام داده است. اما درک درستی از تعریف مشتق نداشته و دچار بدفهمی شده است. باید تأکید شود که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

به شرطی که حد اخیر موجود باشد و به هماهنگ بودن hها در صورت و مخرج دقت کند. به عبارت دیگر:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{h}=nf'(a)$$

به شرط وجود حد. بنابراین: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)=2(5)=10$

۷) برخی فراگیران حاصل حد $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$ را به اشتباه برابر $f'_-(a)$ در نظر می‌گیرند. این اشتباه ناشی از آن است که می‌گوید چون $h\to 0^-$ پس مشتق چپ درست است!.

اگر تأکید شود که مهم نیست h به کجا میل می‌کند. بلکه مهم هماهنگی hهای صورت و مخرج است و این هماهنگی به کجا میل می‌کند. دیگر این اشتباه رخ نمی‌دهد. بنابراین:

$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=f'_+(a)$

عین هم و با هم هماهنگ هستند.

به شرطی که حد موجود باشد.

سؤال شد، در تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۳x, & x\geq ۱\\ ۲x+۲, & x<۱\end{cases}$ مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^{-}}\frac{f(۱+h^{۲})-f(۱)}{h^{۲}}$ برابر چند است؟
برخی به اشتباه پاسخ را عدد ۲ به دست آوردند.

۸) اینکه توابع قدرمطلقی در ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق مشتق‌پذیر نمی‌باشند، توسط همکاران تدریس می‌شود. برخی دانش‌آموزان، این موضوع را به تمریناتی از قبیل زیر تعمیم می‌دهند و دچار اشتباه شده و می‌گویند: اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$ باشند، آنگاه تابع $f\circ g$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست (ریاضی ۳ دوازدهم. ۱۳۹۷).
البته معتقدیم، نقش معلم متنوع است و جنبه‌های گوناگونی دارد. یکی از جنبه‌های مهم، جلوگیری از بروز بدفهمی‌ها می‌باشد. جنبه‌ی دیگر، روند یادگیری در دانش‌آموزان را تسهیل می‌کند. [۳]

۹) یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، ساده نکردن توابع می‌باشد. هر وقت عبارت، طولانی و پیچیده بود، به جای این که سعی شود به طور مستقیم مشتق بگیرد، عبارت را تا جایی که امکان دارد ساده کرده و سپس مشتق بگیرد. معتقدیم، برای این قسمت، مدرس تساوی‌های زیر را یادآور شود.

۱) $Log_a a^{\sqrt{۱+\tan^{۲}\sqrt{x}}}=\sqrt{۱+\tan^{۲}\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}\sqrt{x}}}=\frac{۱}{|\cos\sqrt{x}|}$

۲) $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۱}=\sqrt{x}$

۳) $\frac{x+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱}=\sqrt[۳]{x}$

۴) $\frac{۱+\cos^{۳}x}{۱-\cos x+\cos^{۲}x}=۱+\cos x$

بدفهمی‌های نقاط بحرانی:

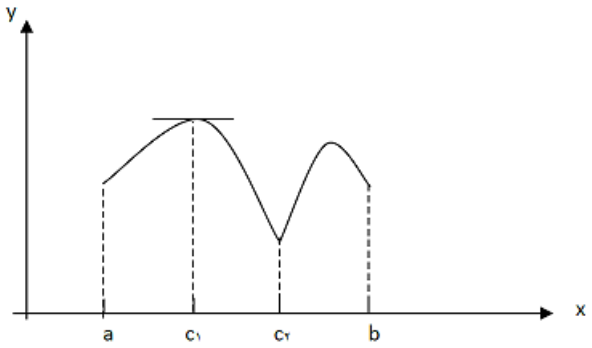
تابع f با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. نقطه‌ی c متعلق به دامنه‌ی f را نقطه بحرانی تابع f می‌گوییم هرگاه: $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.
بعضی از دانش‌آموزان، اینکه نقاط بحرانی باید عضو دامنه باشند، توجه نمی‌کنند و جواب نادرستی ارائه می‌دهند؛ مثلاً برای تابع $f(x)=\tan x$ بی شمار نقطه‌ی بحرانی قائل هستند و دلیل زیر را می‌آورند:
$f'(x)=\frac{۱}{\cos^{۲}x}\neq ۰$، اما از حل $\cos x=۰$ مقادیر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$ را به‌دست آورده و به اشتباه می‌گویند بی‌شمار نقطه بحرانی دارد، غافل از اینکه هیچ یک از این نقاط عضو دامنه‌ی تابع نمی‌باشند [۲]

بدفهمی‌های اکسترمم‌های نسبی:

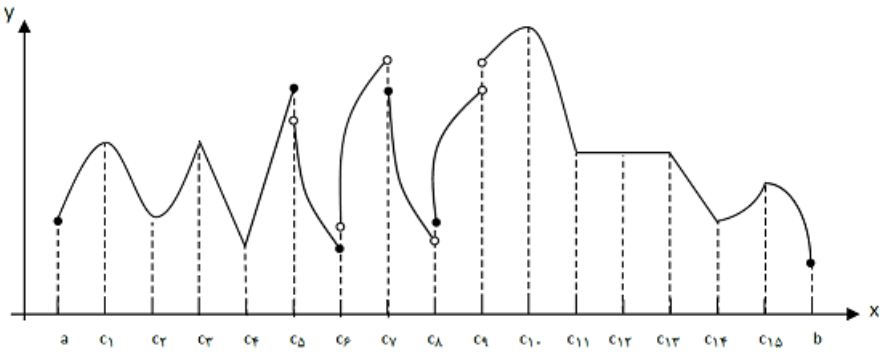
تابع $y=f(x)$ با دامنه $[a,b]$ مفروض است، فرض کنید (e,g) یک بازه شامل c در دامنه‌ی f است به طوری که به ازای هر $x\in(e,g)$، $f(x)\leq f(c)$، در این‌صورت می‌گوییم تابع f در c دارای ماکزیمم نسبی است. در شکل ۱ منحنی نمایش تابع در $c_۱$، ماکزیمم نسبی است، در $c_۲$ مینیمم مطلق است [۱]
معتقدیم، ارائه شکل ۲ بالا برای درک عمیق از اکسترمم‌ها کافی نمی‌باشد و دانش‌آموز دچار بدفهمی می‌شود. برای جلوگیری از بدفهمی ناشی از این قسمت، طرح آموزشی زیر (در شکل ۲) پیشنهاد می‌شود:
حال اگر معلّم، اکسترمم‌های نمودار بالا را در نقاط C_i $(۱\leq i\leq ۱۵)$ مورد بحث قرار دهد و همچنین نقاط بحرانی نمودار تابع را بررسی و به ارتباط بین نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی بپردازد و در خصوص اکسترمم‌های نسبی به مطالب زیر تأکید داشته باشد، از بروز برخی بدفهمی‌ها جلوگیری خواهد شد.
همسایگی باید داشته باشیم، لزومی به پیوستگی نمی‌باشد، لزومی به مشتق‌پذیری نمی‌باشد، دلیلی به منحصر به فرد بودن نیست، منظور از مقدار اکسترمم نسبی یعنی عرض نقطه است، نقاطی چون $c_۷$ و $c_۸$ اکسترمم نسبی نمی‌باشند و هیچ‌گونه ارتباطی بین اکسترمم‌های مطلق و نسبی وجود ندارد مگر تحت شرایطی اضافی از یکی، دیگری را بتوان نتیجه گرفت.

۴. بحث و نتیجه‌گیری:

تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان با بدفهمی‌ها روبرو هستند. این بدفهمی‌ها مانعی برای یادگیری جدید محسوب می‌شود. برخی از این بدفهمی‌ها ریشه در تفکر و ساخت شناختی ذهنی دانش‌آموزان و تجارب فردی او داشته و برخی به عوامل بیرون از ذهن دانش‌آموز وابسته



شکل ۱: اکسترمم‌های نسبی



شکل ۲: اکسترمم‌های نسبی

هستند. معتقدیم که معلم نقش بزرگی در فراهم کردن بروز بدفهمی‌ها و یا مواجهه شدن با آن‌ها دارد. بدفهمی‌های رایج در ریاضی و اشتباهات مفهومی، به میزان قابل توجهی در میان دانش‌آموزان، کم و بیش فراگیر است که از دلایل مهم این بدفهمی‌ها می‌توان به ضعف اطلاعاتی یا پایه‌ای دانش‌آموزان، روش‌های سنتی تدریس، تغییر همه ساله کتب درسی، کتاب‌های کمک آموزشی و ضعف تدریس بعضی از دبیران ریاضی اشاره نمود. با توجه به بدفهمی‌ها، توجه به عواملی مانند تجدیدنظر در روش‌های تدریس ریاضی و توجه به یادگیری هوشمندانه و توجه به فهم رابطه‌ای به جای فهم ابزاری و فراهم کردن فضای کارگروهی در کلاس و ایجاد بحث و تبادل نظر، می‌تواند در کاهش دادن بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان مؤثر باشد. بدون تردید شناسایی و کشف بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد. زیرا آنها می‌توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی‌های دانش‌آموزان تعدیل کنند. لذا تشخیص بدفهمی‌ها، به معلمان کمک خواهد کرد بفهمند چه روشی، کِی و کجا در یادگیری دانش‌آموزان مؤثر است. پس، آ گاهی از فرایندهای ذهنی دانش‌آموزان، به معلمان ریاضی کمک خواهد کرد تا در صدد ایجاد تغییرات مناسب در روش یادگیری و کشف روش‌های بهتر باشند و دانش‌آموزان را با هدف‌های عالی‌تر درس ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن‌ها با دنیای واقعی آشنا سازند. در خاتمه پیشنهاد می‌شود:

۱) هر یک از بدفهمی‌های شناسایی شده در اختیار معلمان قرار بگیرد.
۲) ریشه‌های بروز بدفهمی‌ها شناسایی و راهکارهای مناسب برای جلوگیری از آن‌ها ارائه شود.
۳) معلمین جهت رفع بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان از نمونه‌های ارائه شده استفاده نمایند.
۴) معلمین به محض وقوع بدفهمی با آن مقابله کنند.

مراجع

[۱] احمدی، سید محمدرضا و همکاران (۱۳۹۷). ریاضی۳، دوره دوم متوسطه پایه دوازدهم رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.

[۲] احمدی، سید محمدرضا و همکاران (۱۴۰۲). حسابان ۲، دوره دوم متوسطه پایه دوازدهم رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
[۳] بخشعلی‌زاده، شهرناز (۱۳۹۲). شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی ریاضی. طرح پژوهشی.
[۴] گویا، زهرا. حسام، عبدالله (۱۳۸۸). طرحواره‌های ذهنی: توجیه‌گر بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان، فصلنامه روانشناسی کاربردی، ۱ (۲)، ۱۷۷.
[5] Small, M. (2009). Making math meaningful to Canadian students, K-8. Toronto. No: Nelson Education.
[6] Soygur, M. (2008). Misconceptions of students in algebra lessons: an investigation of the issue in the middle schools of the TRNC.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، RP–209، صص. ۱۳۱–۱۳۴

نرخ انتروپی متقابل رنی بین دو زنجیر مارکف و مارکف پنهان با تقریب بسط تیلور

زهره نیکوروش*

گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
انتروپی متقابل رنی
زنجیر مارکف پنهان
بسط تیلور

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
60J10
94A17

چکیده

انتروپی متقابل رنی بین دو توزیع احتمال متغیرهای تصادفی، تعمیمی از انتروپی متقابل شانون است که به ویژه در مبحث پردازش تصویر کاربردهای فراوان دارد. از جمله مواردی دیگری که در این مبحث اهمیت دارد، زنجیر های مارکف و مارکف پنهان هستند. در این مقاله سعی شده رابطه ای قابل محاسبه برای نرخ انتروپی متقابل رنی بین یک زنجیر مارکف و زنجیر مارکف پنهان متناظر آن، که در یک کانال با اغتشاش دودویی ایجاد می شود، به وسیله بسط تیلور (مرتبه اول) به دست آید.

۱. مقدمه

در مباحث مربوط به نظریه اطلاع، یک زنجیر مارکف پنهان، مشاهدات مربوط به زنجیر مارکفی است که از یک کانال تصادفی بدون حافظه می گذرد. در حالت کلی چگالی انتقال این کانالها به زنجیری غیر قابل مشاهده بستگی دارد [۴]
مدلهای مارکف پنهان برای اولین بار توسط بوم و پتری[۲] معرفی شدند. آنها این مدلها را توابعی احتمالی از زنجیرهای مارکف می دانستند. به عبارتی آنها دنباله مشاهداتی بودند که به طور تصادفی از یک زنجیر مارکف تولید شده اند. در فاصله سالهای ۱۹۶۹–۱۹۶۶ این دو تن، خواص آماری مدلهای مارکف پنهان مانای ارگودیک با فضای حالت متناهیی را مورد بحث و بررسی قرار دادند. همچنین ایشان قضیه ارگودیک را برای همگرایی تقریبا حتمی انتروپی نسبی دو مدل مارکف پنهان، توسعه دادند[۳].
فرض کنید $\{X_n\}_{n\geq 1}$ یک زنجیر مارکف همگن روی فضای حالت $S = \{0,1\}$ با ماتریس احتمال انتقال P باشد. همچنین دنباله متغیرهای دودویی مستقل و هم توزیع $\{E_n\}_{n\geq 1}$ با تابع احتمال $p(E_n = 1) = \epsilon$ روی S و البته مستقل از X_nها، را دنباله اغتشاش یک کانال تصادفی در نظر بگیرید. حال اگر قرار دهیم،

$$Z_k = X_k \oplus E_k, \qquad k \geq 1, \tag{1}$$

که $\oplus$ جمع به پیمانه ۲ است، فرآیند $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ یک زنجبر مارکف پنهان دودویی خواهد بود.
این مقاله مشتمل بر چهار بخش است. در بخش ۲ به بیان تعاریف مورد نیاز در مبحث انتروپی متقابل رنی می‌پردازیم. بخش ۳ شامل محاسبات مربوط به مقدار تقریبی انتروپی متقابل رنی به کمک تابعی مشخص خواهد بود. در بخش ۴ نیز نتایج حاصل را به صورت خلاصه بیان کرده و در مورد ادامه روند تحقیق در این موضوع صحبت خواهیم کرد.

*سخنران
پست *الکترونیک :* nikooravesh@birjandut.ac.ir (زهره نیکوروش)

۲. ترخ انتروپی متقابل رنی

از آنجا که موضوع اصلی محاسبه انتروپی متقابل رنی می باشد، در ادامه تعاریف مورد نیاز را به اختصار بیان می کنیم. انتروپی رنی مرتبه α توزیع احتمال گسسته p با تکیه گاه متناهی S به صورت زیر تعریف می شود،

$$H_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\sum_{x\in S} p^\alpha(x), \tag{۲}$$

برای $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ که تعمیمی از انتروپی شانون $H(p)$ می باشد به طوری که،

$$H(p) = \lim_{\alpha\to 1} H_\alpha(p).$$

واگرایی رنی از مرتبه α بین دو توزیع گسسته p و q نیز به صورت زیر می باشد،

$$D_\alpha(p||q) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\sum_{x\in S} p^\alpha(x)q^{1-\alpha}(x),$$

که مقدار حدی آن وقتی $\alpha \to 1$ همان فاصله کولبک لیبر شانون می باشد.
با توجه به دو مفهوم ذکر شده، می توان انتروپی متقابل رنی را به صورت زیر در نظر گرفت،[۶]

$$\hat{H}_\alpha(p:q) = D_\alpha(p||q) + H_\alpha(p), \tag{۳}$$

در واقع قبل از بیان این تعریف، در [۱] تعریف دیگری برای انتروپی متقابل رنی بیان شده که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

$$H_\alpha(p:q) = \frac{1}{1-\alpha}\ln\sum_{x\in S} p(x)q^{\alpha-1}(x), \tag{۴}$$

۳. محاسبه تقریبی ترخ انتروپی متقابل رنی

جکیوئنت و همکارانش [۵] برای به دست آوردن نرخ انتروپی یک زنجیر مارکف پنهان دودویی با کانال متقارن، روش متفاوتی را به کار بردند. آنها تابعی را به صورت یک سری از توانهای تابع احتمال توام متغیرهای تصادفی زنجیر مارکف پنهان، تعریف کردند و با استفاده از بسط تیلور این تابع، رابطه ای را به دست آوردند که نشان می داد نرخ انتروپی زنجیر مارکف پنهان دودویی برابر با مجموع نرخ انتروپی زنجیر مارکف دودویی و جمله ای بر اساس جمله دوم بسط تیلور تابع مذکور است. در ادامه قصد داریم از روشی مشابه برای به دست آوردن نرخ انتروپی متقابل بین یک زنجیر مارکف دودویی و زنجیر مارکف پنهان رابطه (۱) استفاده کنیم.
نرخ انتروپی متقابل رنی بین دو زنجیر $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ و $Z = \{Z_n\}_{n\geq 1}$ به کمک رابطه زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned}\overline{H}_\alpha(X,Y) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\alpha(X_1^n : Y_1^n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-\alpha}\ln\sum_{t_1^n\in S^n} P_X(t_1^n)P_Z^{\alpha-1}(t_1^n).\end{aligned} \tag{۵}$$

از آنجا که در تعریف فوق مجموع روی همه nتایی های مرتب از مجموعه S است، در انجام محاسبات با مشکل مواجه خواهیم شد.
در ادامه تابعی تعریف می کنیم که بتوان به کمک آن $\overline{H}_\alpha(X,Y)$ را تقریب زد. قرار می دهیم،

$$B_n(\alpha,\epsilon) = \sum_{t_1^n\in S^n} p_X(t_1^n)p_Z^{\alpha-1}(t_1^n). \tag{۶}$$

به عبارتی

$$\overline{H}_\alpha(X,Y) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-\alpha}\ln B_n(\alpha,\epsilon). \tag{۷}$$

برای تقریب محاسبه $B_n(\alpha,\epsilon)$ از بسط تیلور مرتبه اول آن استفاده می کنیم. داریم

$$B_n(\alpha,\epsilon) = B_n(\alpha,0) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} B_n(\alpha,\epsilon)|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2). \tag{۸}$$

همچنین داریم،

$$\ln B_n(\alpha,0) = (1-\alpha) H_\alpha(p) \tag{۹}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} B_n(\alpha,\epsilon)|_{\epsilon=0} &= \left[\sum_{t_1^n \in S^n} (\alpha-1) p_X(t_1^n) p_Z^{\alpha-2}(t_1^n) \frac{\partial}{\partial \epsilon} p_Z(t_1^n) \right]_{\epsilon=0} \\ &= (\alpha-1) \sum_{t_1^n \in S^n} p_X^{\alpha-1}(t_1^n) \frac{\partial}{\partial \epsilon} p_Z(t_1^n)|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

توجه کنید که اگر $\epsilon = 0$ آنگاه داریم $p_Z(.) = p_X(.)$

حال کافی است $\frac{\partial}{\partial \epsilon} p_Z(t_1^n)|_{\epsilon=0}$ محاسبه گردد که با توجه به محاسبات [۵] خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} p_Z(t_1^n)|_{\epsilon=0} &= -p_X(t_1^n) + \sum_{i=1}^{n} p_X(t_1^n \oplus e_1) \\ &= -p_X(t_1^n) + \Bigg(p_X(\overline{t_1}) p_X(t_2|\overline{t_1}) \prod_{j=2}^{n-1} p_X(t_{j+1}|t_j) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2} p_X(t_1) \prod_{j=2}^{i-2} p_X(t_{j+1}|t_j).p_X(\overline{t_i}|t_{i-1}).p_X(t_{i+1}|\overline{t_i}) \prod_{j=i+1}^{n-1} p_X(t_{j+1}|t_j) \\ &+ p_X(t_1) \prod_{j=1}^{n-2} p_X(t_{j+1}|t_j).p_X(\overline{t_n}|t_{n-1}) \Bigg) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

در ادامه برای انجام محاسبات نیاز به تعریف چند ماتریس داریم.

تعریف ۱.۳. قرار می دهیم،

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} p_{00}^{\alpha} & p_{01}^{\alpha} \\ p_{10}^{\alpha} & p_{11}^{\alpha} \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

و

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha) &= \begin{bmatrix} p_X^{\alpha}(0) & p_X^{\alpha}(1) \end{bmatrix}, \qquad \overline{\Pi}(\alpha) = \begin{bmatrix} p_X^{\alpha}(1) & p_X^{\alpha}(0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_1(\alpha) &= \begin{bmatrix} p_{00}p_{01}^{\alpha-1} & p_{01}p_{00}^{\alpha-1} \\ p_{10}p_{11}^{\alpha-1} & p_{11}p_{10}^{\alpha-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} p_{00}p_{10}^{\alpha-1} & p_{01}p_{11}^{\alpha-1} \\ p_{10}p_{00}^{\alpha-1} & p_{11}p_{01}^{\alpha-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

حال به کمک روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) می توان رابطه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} B_n(\alpha,\epsilon)|_{\epsilon=0} &= (\alpha-1)[(\overline{\Pi}(\alpha)\mathbf{Q}_2(\alpha) - \Pi(\alpha)\mathbf{P}(\alpha))\mathbf{P}^{n-2}(\alpha) \\ &+ \Pi(\alpha) \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{P}^{i-1}(\alpha)(\mathbf{Q}_1(\alpha)\mathbf{Q}_2(\alpha) - \mathbf{P}^2(\alpha))\mathbf{P}^{n-i-2}(\alpha) \\ &+ \Pi(\alpha)\mathbf{P}^{n-2}(\alpha)(\mathbf{Q}_1(\alpha) - \mathbf{P}(\alpha))]1^t. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

اکنون می توان برای nهای مشخص و به کار بردن روابط (۸) و (۹) مقدار تقریبی برای $\overline{H}_\alpha(X,Y)$ محاسبه کرد.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله سعی شد رابطه ای قابل محاسبه برای نرخ انتروپی متقابل رنی بین یک زنجیر مارکف و زنجیر مارکف پنهان متناظر آن که در یک کانال با اغتشاش دودویی ایجاد می شود، به وسیله بسط تیلور (مرتبه اول) به دست آید. برای رسیدن به این هدف از بسط تیلور مرتبه اول تابع $B_n(\alpha,\epsilon)$ استفاده کردیم. دلیل استفاده از این تابع این بود که با مشتق گیری لازم از آن توانستیم به کمک چند ماتریس دودویی، احتمالهای مربوط به زنجیر مارکف پنهان را بر اساس مقدار ϵ و مقادیر احتمال مربوط به زنجیر مارکف اولیه به دست آوریم. هر چند شاید تا این مرحله از کار رابطه به دست آمده کاربردی به نظر نرسد ولی قصد داریم در ادامه تحقیق با کمک قضیه پرون – فروبنیوس در مورد ماتریسهای احتمال، روابط قابل محاسبه مناسبتری به دست آوریم.

مراجع

[1] F. J. Valverde Albacete and C. Pelaez Moreno. The case for shifting the renyi entropy. *Entropy*, 21:1–21, 2019.

[2] L. E. Baum and T. Petrie. Statistical inference for probabilistie function of finite state markov chains. *Ann. Math. Statist*, 37:1554–1563, 1966.

[3] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, and N. Weiss. A maximization technique occuring in the statistical analysis of probabilitistic function of markov chains. *Ann. Math. Statist*, 41:164–171, 1970.

[4] R. G. Gallager. *Information Theory and Reliable Communication*. Wiley, NewYork, 1968.

[5] P. Jacquent, G. Seroussi, and W. Szpankowski. On the entropy of a hidden markov process. *J. Theoretical Opmuter Science*, 395:203–219, 2008.

[6] A. Sarraf and Y. Nie. Rgan: Renyi generative ádversarial network,. *SN Computer Science*, 2(1), 2021.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، SP–211، صص. ۱۳۵–۱۳۹

روش پیش‌بینی هوش مصنوعی یکپارچه سازی داده کاوی و تحلیل آماری

سیمین منصوری بروجنی[*،آ]، ایوب طاهری[ب]

[آ]دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[ب]دانشکده فنی و مهندسی، گروه کامپیوتر، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
هوش مصنوعی
تحلیل آماری
ترکیب و آمیختگی
روش پیش‌بینی

چکیده

در علم روش‌های پیش‌بینی هوش مصنوعی، داده‌کاوی و تحلیل آماری دو فناوری ضروری هستند. پایه و اساس این فناوری، تحلیل و پردازش داده‌ها و انتخاب مدل‌ها و پارامترهای مناسب برای حل مسائل عملی است. در این مقاله، بعد داده‌های ورودی سری‌های زمانی به عنوان موضوع پژوهش در نظر گرفته شده است. بر اساس دو جنبه سری‌های زمانی تک متغیره و چند متغیره، تحلیل و بررسی روش پیش‌بینی هوش مصنوعی با تلفیق داده‌کاوی و تحلیل آماری انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در مورد مدل‌های آماری تک متغیره، روش برآورد پارامتر هوش مصنوعی، دقت پیش‌بینی به طور قابل توجهی بهبود نمی‌یابد و انحراف بین مقدار برآورد شده و مقدار واقعی نیز زیاد است. در حالی که در سطح مدل‌های آماری چند متغیره روش برآورد پارامتر هوش مصنوعی، نه تنها دقت پیش‌بینی به طور کامل بهبود می‌یابد، بلکه شباهت بین مقدار برآورد شده و مقدار واقعی نیز بیشتر می‌شود.

۱. مقدمه

در تلفیق داده‌کاوی و تحلیل آماری، استفاده از روش‌های پیش‌بینی هوشمند مناسب برای استخراج و پالایش اطلاعات درونی، کلید اصلی کشف قوانین درونی داده‌هاست [۱] . تحلیل آماری مستقیماً با آمار و پارامترهای آماری مرتبط است و برای دقت و اعتبار نتایج پیش‌بینی هوشمند، حیاتی است [۲] . از دیدگاه داده‌کاوی، ایده اصلی ، کشف محتوای اطلاعاتی با ارزش منظم از داده‌های تصادفی انبوه از طریق کاربرد تحلیل داده‌های بزرگ است. تحلیل خوشه‌بندی، تحلیل رگرسیون و قوانین وابستگی، الگوریتم‌های اصلی و متداول داده‌کاوی هستند [۳] . پیش‌بینی هوش مصنوعی با استفاده از داده‌کاوی و تحلیل آماری، مدلی برای تحلیل و پیش‌بینی داده‌ها می‌سازد تا بتواند با استفاده از قوانین ذاتی داده‌های تاریخی، روندهای آینده را پیش‌بینی کند.

۲. مدل آماری پیش‌بینی هوشمند، برآورد پارامترها مبتنی بر تحلیل داده‌ها

۲ .۱ . *مدل آماری تک متغیره مبتنی بر برآورد هوشمند پارامترها*

در مدل آماری تک متغیره برآورد هوشمند پارامترها، روش‌های اصلی برآورد شامل آزمون T و آزمون F هستند که تحلیل آماری داده‌ها را گسترش می‌دهند و پیش‌بینی توزیع احتمال را از طریق ارزیابی توزیع دو پارامتری تکمیل می‌کنند [۴] . آماره ازمون T در معادله (۱) تعریف شده است.

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{m}}}; S = \sqrt{\frac{mS_1^2 + mS_2^2}{m + m - 2}} \qquad (1)$$

[*]سخنران
پست *الکترونیک :* s_mansouri@pnu.ac.ir (سیمین منصوری بروجنی)، ay.taheri@pnu.ac.ir (ایوب طاهری)

در معادله (۱)، X نشان‌دهنده سری زمانی، X_1 و X_2 زیر دنباله‌های آن، $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ به ترتیب میانگین زیر دنباله‌ها، m تعداد نمونه‌ها و S واریانس سری زمانی را می‌باشد. هنگامی که زیر دنباله از توزیع نرمال پیروی کند و اختلاف میانگین‌ها از مقدار داده شده بیشتر باشد، به این معنی است که زیر دنباله اختلاف آماری معنی‌داری دارد. علاوه بر این، آماره آزمون F در معادله (۲) نشان داده شده است.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}; S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_i)^2 \qquad (۲)$$

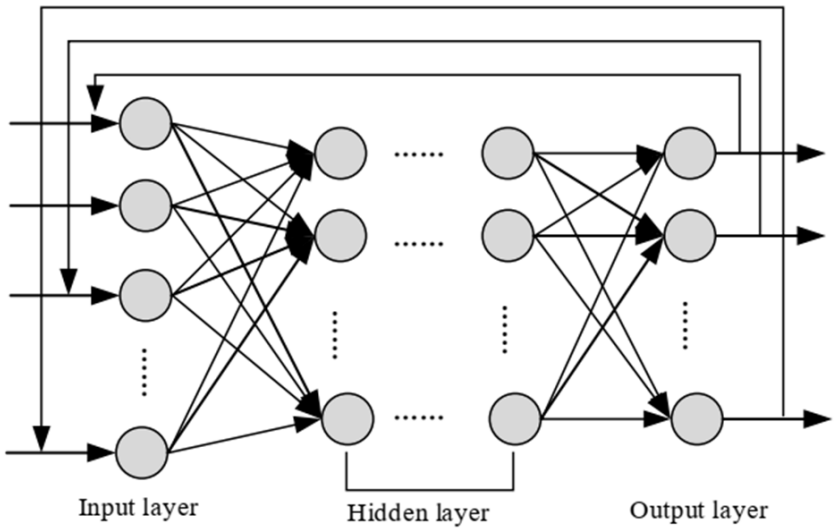
علاوه بر این، این مطالعه از روش‌های مختلف توزیع دو پارامتری برای انجام پیش‌بینی هوش مصنوعی استفاده می‌کند[۵].

۲.۲ . *مدل آماری چند متغیره مبتنی بر برآورد هوشمند پارامترها*

دنیای واقعی از تعامل عوامل مختلف با یکدیگر تشکیل شده است[۶]. بنابراین، برای یافتن قوانین ذاتی از داده‌های انبوه، به تحلیل همبستگی چند متغیره نیاز است و سپس پیش‌بینی مؤثر و علمی انجام می‌شود[۷]. ضریب همبستگی پیرسون و قانون وابستگی آپریوری، روش‌های اصلی برای تحلیل چند متغیره پیش‌بینی هوشمند هستند. ایده اصلی، تعیین همبستگی قوی بین چند متغیر و استفاده از این متغیر مستقل با همبستگی قوی به عنوان مجموعه ورودی برای تحقق پیش‌بینی علمی متغیر وابسته است[۸]. ضریب همبستگی پیرسون در معادله (۳) بیان شده است.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (۳)$$

در معادله (۳)، $\bar{X}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین دو متغیر و n تعداد نمونه‌ها را نشان می‌دهند. هنگامی که $|r| > ۰/۸$ ، همبستگی خطی قوی بین آن‌ها وجود دارد. اگر $|r| < ۰/۳$ ، همبستگی خطی ضعیفی بین آن‌ها وجود دارد. محدودیت ضریب همبستگی پیرسون این است که فقط می‌تواند تحلیل خطی بین چند متغیر را انجام دهد [۹، ۱۰]. با توجه به این موضوع، در این مطالعه از الگوریتم قانون وابستگی داده‌کاوی Apriori استفاده شده و با شبکه عصبی تابع پایه شعاعی برای مدل‌سازی و پیش‌بینی ترکیب شده است[۱۱، ۱۲]. مدل ساختاری شبکه عصبی تابع پایه شعاعی (RBF) در شکل (۱) نشان داده شده است.

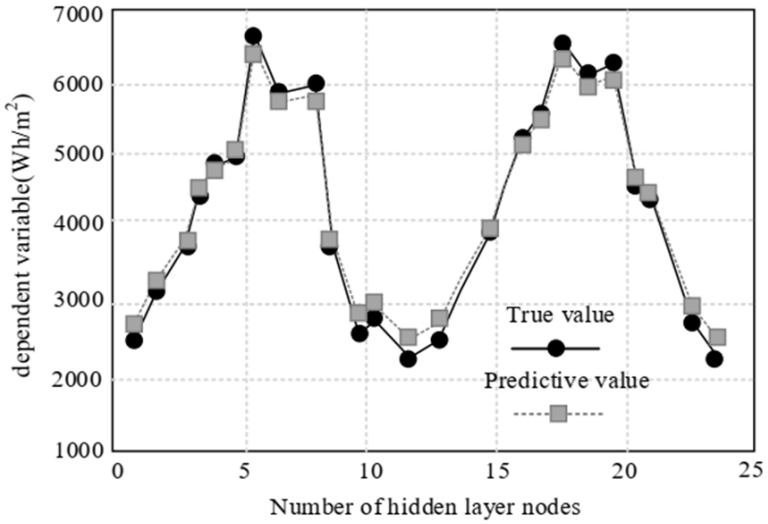


شکل ۱: مدل ساختاری شبکه عصبی تابع پایه شعاعی

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، شبکه عصبی RBF می‌تواند همگرایی هر تابع غیرخطی را کامل کند و به راحتی در دام حداقل موضعی گرفتار نمی‌شود. تعداد گره‌های لایه پنهان شبکه عصبی RBF به تجربیات وابسته نیست، بنابراین سرعت یادگیری بالایی دارد و می‌تواند به طور مؤثری با تجزیه و تحلیل داده‌های جدید سازگار شود.

۳. نتایج تجربی برآورد پارامتر پیش‌بینی هوشمند مبتنی بر تحلیل داده

به منظور تأیید مدل آماری پیشنهادی برای برآورد پارامتر پیش‌بینی هوشمند مبتنی بر داده‌کاوی و تحلیل آماری، این مطالعه تحلیل تجربی را بر اساس ۱۲ گروه از داده‌های آزمایشی عوامل مرتبط با شرایط جوی انجام می‌دهد. این ۱۲ گروه از عوامل مرتبط با شرایط جوی شامل پوشش ابر کل، پوشش ابر، بارش، آئروسل، حداکثر دما، حداقل دما، دمای متوسط ۲۴ ساعته، دمای متوسط روزانه، رطوبت نسبی، درجه گرمایش، درجه سرمایش و سرعت باد هستند. داده‌های تجربی شامل مجموعه آموزشی و مجموعه آزمایشی می‌باشد و ۱۲ گروه از عوامل جوی به عنوان متغیرهای ورودی برای انجام پیش‌بینی هوشمند داده‌های تجربی استفاده می‌شوند. مقایسه بین مقدار پیش‌بینی شده و مقدار واقعی مدل پیش‌بینی هوشمند در شکل (۲) نشان داده شده است. همان طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، مقدار پیش‌بینی‌شده مدل پیش‌بینی هوشمند به



شکل ۲: مقایسه بین مقدار پیش‌بینی‌شده و مقدار واقعی مدل پیش‌بینی هوشمند

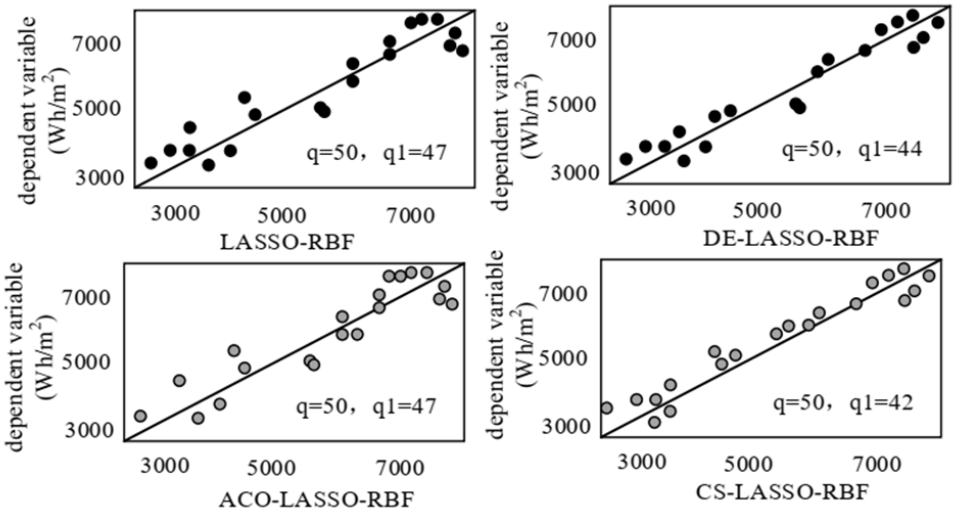
مقدار واقعی نسبتاً نزدیک است. این نشان دهنده دقت بالای مدل پیش‌بینی است که ترکیبی از داده‌کاوی و تحلیل آماری می‌باشد. در عین حال، مدل پیش‌بینی ساخته شده در این مطالعه نه تنها می‌تواند با انتخاب تعداد بهینه گره‌های لایه پنهان، مدل را ساده کند، بلکه دقت پیش‌بینی خوبی نیز دارد. هم چنین، این مطالعه مقادیر پیش‌بینی شده و واقعی چندین مدل شبکه عصبی تابع پایه شعاعی را مقایسه و تحلیل می‌کند که در شکل (۳) نشان داده شده است. همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، با مقایسه و تحلیل مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر واقعی چندین مدل شبکه عصبی RBF ، مشخص می‌شود که با افزایش تعداد گره‌های لایه پنهان، دقت پیش‌بینی چهار مدل شبکه عصبی RBF نیز افزایش می‌یابد. به ویژه، اثرات پیش‌بینی سه مدل بهینه‌سازی شده دیگر شبکه عصبی پایه شعاعی به‌طور مؤثری نسبت به مدل سنتی شبکه عصبی RBF و مدل متداول LASSO-RBF بهبود یافته است.

۴. نتیجه‌گیری

کاوش داده‌ها و تحلیل آماری دو فناوری ضروری در علم پیش‌بینی هوشمند هستند. هسته و جوهره کاوش داده‌ها و تحلیل آماری حل مسائل عملی از طریق تحلیل و پردازش داده‌ها و انتخاب مدل‌ها و پارامترهای مناسب است. این مطالعه به بُعد داده‌های ورودی سری زمانی به عنوان موضوع تحقیق پرداخته است. بر اساس دو جنبه سری زمانی تک متغیره و چند متغیره، روش پیش‌بینی هوش مصنوعی که ترکیبی از کاوش داده‌ها و تحلیل آماری است، تحلیل و بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیش‌بینی مبتنی بر ادغام کاوش داده‌ها و تحلیل آماری دارای دقت بالای برازش و دقت پیش‌بینی است و مدل با انتخاب بهینه‌ترین تعداد گره‌های لایه پنهان ساده‌سازی شده است.

مراجع

[1] Park J. Can artificial intelligence prediction algorithms exceed statistical predictions [J]. Korean Circulation Journal, 2019, 49(7):e74.
[2] Chen W, Sun Z, X Zhao, et al. Performance evaluation and comparison of bivariate statistical-based artificial intelligence algorithms for spatial prediction of landslides[J]. International Journal of Geo-Information, 2020, 9(12):696.



شکل ۳: مقایسه مقدار پیش‌بینی‌شده و مقدار واقعی چندین مدل شبکه عصبی تابع پایه شعاعی

[3] Muliono R, Muhathir, Khairina N , et al. Analysis of frequent itemsets mining algorithm againts models of different datasets[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2019, 1361(1):012036 (8pp).
[4] Sirichanya C, Kraisak K. Semantic data mining in the information age: A systematic review[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2021:1-37.
[5] Mustak M, Salminen J, Wirtz J. Artificial intelligence in marketing: Topic modeling, scientometric analysis, and research agenda[J]. Post-Print, 2021.
[6] Hossain T M, Watada J, Aziz I A, et al. Lithology prediction using well logs: A granular computing approach [J]. International journal of innovative computing, information and control: IJICIC, 2021, 17(1):225-244.
[7] Katsuki M, Kakizawa Y, Nishikawa A, et al. Easily created prediction model using deep learning software (Prediction One, Sony Network Communications Inc.) for subarachnoid hemorrhage outcomes from small dataset at admission[J]. Surgical Neurology International, 2020, 11:374.
[8] Wang J, Qu H. Analysis of regression prediction model of competitive sports based on SVM and artificial intelligence[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2020, 39(4):5859-5869.
[9] Asim M , Ahmad S , Shuaib M , et al. Adaptation of artificial intelligence in big data mining and its impact: A Study[J]. Solid State Technology, 2020, 63(5):2322.
[10] Mannering F L , Bhat C , V Shankar, et al. Big data, traditional data and the tradeoffs between prediction and causality in highway-safety analysis[J]. Analytic Methods in Accident Research, 2020, 25:100113.
[11] Choi K S . Integrating Artificial Intelligence Into Healthcare Research[J]. Hu li za zhi The journal of nursing, 2020, 67(5):12-18.
[12] Jia L , Li L . Research on core strength training of aerobics based on artificial intelligence and sensor network[J]. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 2020, 2020(1):1-16.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–215، صص. ۱۴۰–۱۴۸

بررسی جامع فرصت‌ها و چالش‌های بهبود یادگیری ریاضی با استفاده از هوش مصنوعی

آسیه ابراهیم زاده*[آ]، فهیمه کلاهدوز[ب]

[آ]گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران
[ب]وه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها:
هوش مصنوعی
آموزش ریاضی
فناوری آموزشی
فرصت‌های آموزشی
چالش‌های فناوری

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97B10
00A35

چکیده

انقلاب صنعتی ۴.۰ به طور اساسی چشم‌انداز آموزشی را دگرگون کرده است. پیشرفت‌های سریع فناوری، به ویژه هوش مصنوعی، نیاز به تغییرات اساسی در برنامه‌های درسی را ایجاد کرده است. ریاضیات، به عنوان پایه علوم، در تلاش‌ها برای ادغام هوش مصنوعی در فرآیند یادگیری نقش محوری دارد. این پژوهش با هدف بررسی عمیق تأثیر استفاده از هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات بر ظرفیت یادگیری دانش‌آموزان انجام شده است. از طریق یک مطالعه جامع بر مبنای منابع علمی مختلف و مقالات گوگل اسکالر، این تحقیق جنبه‌های مختلف مرتبط با کاربرد هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات را تحلیل می‌کند. این تحلیل شامل بررسی روندهای پیاده‌سازی هوش مصنوعی، ارزیابی اثربخشی روش‌های مختلف آن، شناسایی عوامل مؤثر بر موفقیت اجرا و بررسی تأثیرات مثبت و منفی هوش مصنوعی بر فرآیند یادگیری است. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات پتانسیل بالایی برای افزایش انگیزه یادگیری دانش‌آموزان، شخصی‌سازی یادگیری و تعمیق درک مفاهیم دارد. با این حال، چالش‌هایی نیز شناسایی شده‌اند، از جمله نابرابری در دسترسی به فناوری، نیاز به توسعه روش‌های آموزشی مناسب، و احتمال جایگزینی نقش معلمان توسط هوش مصنوعی. بر اساس این یافته‌ها، این پژوهش نتیجه می‌گیرد که ادغام هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات نیازمند برنامه‌ریزی دقیق و همکاری قوی بین معلمان، توسعه‌دهندگان فناوری و سیاست‌گذاران است. پیامدهای این تحقیق شامل اهمیت توسعه برنامه‌های درسی انعطاف‌پذیر، آموزش مستمر معلمان، و فراهم‌سازی زیرساخت‌های فناورانه کافی است.

۱. مقدمه

انقلاب صنعتی ۴.۰ به طور اساسی چشم‌انداز جهان را دگرگون کرده و عصری جدید را رقم زده است که با پیشرفت‌های سریع در فناوری دیجیتال مشخص می‌شود. یکی از برجسته‌ترین و مهم‌ترین فناوری‌ها در این دوره، هوش مصنوعی است. توانایی هوش مصنوعی در پردازش داده‌ها در مقیاس وسیع، یادگیری از الگوها و اتخاذ تصمیمات هوشمند، فرصت‌های جدیدی را در حوزه‌های مختلف از جمله آموزش ایجاد کرده است [۳۳]، [۱۷]، [۱] و [۶]. در زمینه یادگیری، هوش مصنوعی پتانسیل عظیمی برای ایجاد تحول در نحوه یادگیری ما دارد. این فناوری امکان شخصی‌سازی عمیق فرآیند یادگیری را فراهم می‌کند، به‌گونه‌ای که هر دانش‌آموز می‌تواند محتوای آموزشی متناسب با سبک یادگیری، سرعت و سطح درک خود را دریافت کند. علاوه بر این، هوش مصنوعی می‌تواند بازخوردی سریع و دقیق ارائه دهد تا دانش‌آموزان به راحتی نقاط ضعف خود را شناسایی و برای بهبود آن‌ها اقدام کنند [۱۸] و [۸].

*سخنران
پست الکترونیک: a.ebrahimzadeh@cfu.ac.ir (آسیه ابراهیم زاده)، f.kolahdouz@cfu.ac.ir (فهیمه کلاهدوز)

ریاضیات، به عنوان یکی از علوم پایه و اساسی که بسیاری از دانش‌آموزان آن را دشوار می‌دانند، یکی از جذاب‌ترین زمینه‌ها برای کاربرد هوش مصنوعی است. پیچیدگی مفاهیم ریاضی و تفاوت سبک‌های یادگیری دانش‌آموزان، نیاز به رویکردی انعطاف‌پذیرتر و تطبیق‌پذیرتر در آموزش دارد. هوش مصنوعی می‌تواند به عنوان یک معلم خصوصی عمل کند که همواره در دسترس دانش‌آموزان است تا به درک مفاهیم دشوار کمک کند، تمرین‌های اضافی ارائه دهد و به سؤالات در زمان واقعی پاسخ دهد [۱۵]، [۲۵] و [۲۶].

کاربرد هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات مزایای بالقوه متعددی دارد که می‌تواند تجربه آموزشی دانش‌آموزان را متحول کند. یکی از مهم‌ترین مزایا، شخصی‌سازی یادگیری است. هوش مصنوعی می‌تواند پیشرفت هر دانش‌آموز را تجزیه و تحلیل کرده و محتوای آموزشی را متناسب با نیازهای فردی او تنظیم کند، به طوری که یادگیری متناسب با سرعت و توانایی‌های دانش‌آموز انجام شود. این رویکرد شخصی‌سازی‌شده، یادگیری را مؤثرتر و جذاب‌تر می‌کند، زیرا دانش‌آموزان با محتوایی تعامل دارند که متناسب با نیازهای خاص آن‌ها طراحی شده است. علاوه بر این، ارائه بازخورد سریع و دقیق توسط هوش مصنوعی، می‌تواند به طور قابل توجهی انگیزه دانش‌آموزان را افزایش دهد. دریافت بازخورد فوری درباره عملکرد، نه تنها به درک بهتر اشتباهات کمک می‌کند، بلکه حس موفقیت را در دانش‌آموزان تقویت کرده و آن‌ها را به یادگیری فعال و با اعتمادبه‌نفس‌تر ترغیب می‌کند [۱۵]، [۳۴]، [۳۵]، [۹] و [۳۱].

یکی دیگر از مزایای مهم ادغام هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات، توسعه مهارت‌های تفکر انتقادی است. ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی می‌توانند برای ایجاد وظایف پیچیده و چالش‌برانگیز طراحی شوند که دانش‌آموزان را به تفکر انتقادی و خلاقانه برای حل مسائل ریاضی تشویق کنند. این وظایف، دانش‌آموزان را فراتر از حفظ کردن فرمول‌ها و انجام محاسبات ساده سوق داده و آن‌ها را به بررسی راهبردهای مختلف حل مسئله ترغیب می‌کند [۹] و [۳۱]. . علاوه بر این، هوش مصنوعی پتانسیل بهبود دسترسی به آموزش را دارد، به ویژه برای دانش‌آموزان دارای نیازهای ویژه. به عنوان مثال، هوش مصنوعی می‌تواند پشتیبانی‌های سفارشی برای دانش‌آموزان دارای اختلالات یادگیری ارائه دهد و روش‌های جایگزینی را برای درک و دسترسی به مطالب آموزشی فراهم کند. این افزایش دسترسی، اطمینان می‌دهد که همه دانش‌آموزان، بدون در نظر گرفتن توانایی‌هایشان، فرصت مشارکت در فرآیند یادگیری را دارند و از این طریق، فراگیری و عدالت آموزشی را تقویت می‌کند.

با این حال، در کنار این پتانسیل بزرگ، چالش‌هایی نیز باید برطرف شوند. یکی از مهم‌ترین چالش‌ها، شکاف دیجیتالی است که همچنان در بسیاری از کشورها وجود دارد و می‌تواند مانع دسترسی دانش‌آموزان به فناوری‌های هوش مصنوعی شود. علاوه بر این، نگرانی‌هایی در مورد جایگزینی نقش معلمان توسط هوش مصنوعی نیز باید در نظر گرفته شود.

برای به حداکثر رساندن پتانسیل هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات، لازم است تعادلی میان استفاده از پیشرفت‌های فناورانه و رسیدگی به چالش‌های ذاتی آن برقرار شود. در حالی که هوش مصنوعی می‌تواند تجربیات یادگیری و دسترسی به آموزش را به طور قابل توجهی افزایش دهد، نباید عنصر انسانی غیرقابل جایگزین که معلمان به کلاس درس می‌آورند را نادیده بگیرد. معلمان نقش حیاتی در راهنمایی، الهام‌بخشی و درک نیازهای عاطفی و اجتماعی دانش‌آموزان ایفا می‌کنند که هوش مصنوعی در این زمینه‌ها هنوز محدودیت دارد. با ترکیب نقاط قوت هوش مصنوعی و قابلیت‌های منحصربه‌فرد معلمان، می‌توان محیطی جامع‌تر برای یادگیری ایجاد کرد که نه تنها مهارت‌های تفکر انتقادی و حل مسئله را ارتقا دهد، بلکه رشد شخصی و عاطفی دانش‌آموزان را نیز پرورش دهد. این رویکرد ترکیبی، اطمینان می‌دهد که فناوری به عنوان ابزاری برای حمایت و غنی‌سازی آموزش به کار گرفته می‌شود، نه اینکه تعامل انسانی ضروری برای تدریس و یادگیری مؤثر را تحت‌الشعاع قرار دهد [۳۱].

این پژوهش با هدف بررسی عمیق تأثیر استفاده از هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات بر ظرفیت یادگیری دانش‌آموزان انجام شده است. از طریق یک مطالعه جامع بر اساس منابع علمی مختلف، این تحقیق به تحلیل جنبه‌های مختلف مرتبط با کاربرد هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات می‌پردازد؛ از جمله روندهای کاربرد آن، اثربخشی رویکردهای مختلف، چالش‌ها و پیامدهای آن. از این رو، امید است که این پژوهش بتواند به توسعه راهبردهای یادگیری ریاضی مؤثرتر و کارآمدتر در عصر دیجیتال کمک کند.

۲. روش شناسی

این پژوهش بر اساس یک مطالعه جامع بر روی متون علمی موجود استوار است که شامل بررسی گسترده منابع علمی، از جمله مقالات داوری‌شده، انتشارات علمی، مقالات ارائه‌شده در کنفرانس‌ها و سایر مطالب پژوهشی است. هدف اصلی این مرور ادبیات، گردآوری، ارزیابی و تلفیق دانش و یافته‌های موجود در مورد کاربرد هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات است. با بررسی سیستماتیک این منابع، این مطالعه در پی شناسایی روندهای کنونی، چارچوب‌های نظری، روش‌شناسی‌ها و نتایج مرتبط با ادغام هوش مصنوعی در محیط‌های یادگیری ریاضیات است. این رویکرد، درک جامعی از نحوه استفاده از هوش مصنوعی برای بهبود آموزش ریاضیات و چالش‌های احتمالی مرتبط با اجرای آن را تضمین می‌کند.

فرآیند پژوهش شامل چندین مرحله کلیدی است که با شناسایی متون علمی مرتبط آغاز می‌شود. برای این منظور، طیف وسیعی از پایگاه‌های داده و مجلات علمی مورد جستجو قرار می‌گیرند و از کلمات کلیدی و عبارات خاص مرتبط با هوش مصنوعی و آموزش ریاضیات استفاده می‌شود. پس از شناسایی منابع مرتبط، این منابع با دقت مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند تا اطلاعات مهمی درباره استفاده از فناوری‌های هوش مصنوعی، میزان اثربخشی آن‌ها در تدریس و یادگیری ریاضیات، و روش‌های مختلفی که در مطالعات گوناگون به کار گرفته شده است، استخراج شود.

علاوه بر این، تحلیل انجام‌شده شامل ارزیابی انتقادی روش‌شناسی‌های استفاده‌شده در این مطالعات و بررسی نتایج آن‌ها نیز می‌شود. پس از مراحل شناسایی و تحلیل، پژوهش به مرحله تلفیق یافته‌ها می‌رسد که در آن، بینش‌های به‌دست‌آمده از منابع مختلف با یکدیگر ترکیب می‌شوند

تا یک دیدگاه جامع ارائه شود. این تلفیق نه تنها مزایای بالقوه استفاده از هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات را برجسته می‌کند، بلکه خلأهای موجود در تحقیقات کنونی را نیز آشکار ساخته و مسیر را برای مطالعات آینده در این حوزه هموار می‌سازد.

۳. نتایج و بحث

۳. ۱. درک هوش مصنوعی

هوش مصنوعی شاخه‌ای تخصصی از علوم کامپیوتر است که به توسعه سیستم‌های هوشمندی اختصاص دارد که قادر به شبیه‌سازی فرآیندهای فکری و رفتارهای انسانی هستند. این سیستم‌ها برای انجام وظایف پیچیده با سطح بالایی از کارایی و اثربخشی طراحی شده‌اند و عملکردهای شناختی مانند یادگیری، استدلال و حل مسئله را تقلید می‌کنند.

به گفته گارثیا–سانچز و همکاران[۱۹]، پیشرفت‌های سریع فناوری به طور قابل توجهی جنبه‌های مختلف زندگی بشر را متحول کرده است و منجر به نوآوری‌هایی شده است که هم عملکرد و هم تعامل سیستم‌های روزمره را بهبود می‌بخشد. تمرکز کنونی در حوزه فناوری، بهره‌گیری از هوش ذاتی در موجودات زنده و غیرزنده است، به گونه‌ای که این هوش در سیستم‌هایی تعبیه شود که قابلیت ارزیابی علمی و آزمون‌پذیری داشته باشند. این رویکرد نه تنها به دنبال بهبود کاربرد عملی سیستم‌های هوش مصنوعی است، بلکه اطمینان از قابلیت اطمینان و سازگاری آن‌ها در کاربردهای دنیای واقعی را نیز تضمین می‌کند. با ادغام هوش مصنوعی در حوزه‌های مختلف، هدف ایجاد سیستم‌های تطبیق‌پذیر و خودمختار است که بتوانند به طیف وسیعی از سناریوها پاسخ دهند و در نهایت کیفیت تعاملات انسان–کامپیوتر را بهبود بخشیده و قابلیت‌های راه‌حل‌های فناورانه را گسترش دهند.

حنیلا و الغفارو[۲۱]هوش مصنوعی را به عنوان سیستمی توصیف می‌کنند که از طریق تحقیقات و نوآوری‌های دقیق توسعه یافته است و بر اساس ماشین‌ها و کامپیوترها مدل‌سازی شده است. این سیستم‌ها می‌توانند هوشی هم‌سطح یا حتی فراتر از هوش انسان از خود نشان دهند. ویژگی‌های کلیدی این سیستم‌ها شامل قابلیت‌های تطبیق‌پذیر، فرآیندهای تصمیم‌گیری، عملکردهای شناختی و توانایی یادگیری از تجربیات است. سیستم‌های هوش مصنوعی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که وظایفی را که به طور سنتی نیاز به مداخله انسانی دارند، انجام دهند، و این ویژگی آن‌ها را برای طیف وسیعی از صنایع به ابزاری حیاتی تبدیل کرده است.

تأثیر آموزش در استفاده از هوش مصنوعی بسیار گسترده است و از درک بهتر فناوری آغاز می‌شود. آموزش هوش مصنوعی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مفاهیم پایه‌ای این فناوری و فناوری‌های مرتبط مانند یادگیری ماشین و تحلیل داده را درک کنند. این دانش بنیادی به دانش‌آموزان امکان درک عمیق‌تری از نحوه عملکرد این فناوری‌ها و کاربردهای بالقوه آن‌ها در زمینه‌های مختلف، از جمله بهداشت و درمان تا امور مالی را می‌دهد. درک این مفاهیم به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا کاربردهای عملی این فناوری را در حل مشکلات دنیای واقعی ببینند.

آموزش هوش مصنوعی همچنین نقش مهمی در بهبود مهارت‌های فنی دانش‌آموزان ایفا می‌کند. در دنیای دیجیتال امروزی، تسلط بر مهارت‌های فنی ضروری است. آموزش هوش مصنوعی، دانش‌آموزان را با مهارت‌های ارزشمندی در حوزه‌های محاسبات، برنامه‌نویسی و تحلیل آماری تجهیز می‌کند. آن‌ها یاد می‌گیرند که چگونه از زبان‌های برنامه‌نویسی مرتبط با هوش مصنوعی، مانند پایتون، استفاده کنند که برای توسعه برنامه‌های کاربردی هوش مصنوعی ضروری است. این مهارت‌های فنی نه تنها دانش‌آموزان را برای محیط‌های تکنولوژیکی فعلی آماده می‌کند، بلکه آن‌ها را قادر می‌سازد تا در آینده نیز در پیشرفت‌های این حوزه مشارکت داشته باشند.

آموزش هوش مصنوعی همچنین خلاقیت دانش‌آموزان را تقویت می‌کند. با درک قابلیت‌ها و محدودیت‌های هوش مصنوعی، دانش‌آموزان به کاوش در راه‌حل‌ها و پروژه‌های نوآورانه تشویق می‌شوند. آن‌ها می‌توانند برنامه‌ها، ابزارها یا نرم‌افزارهای جدیدی طراحی کنند که از پتانسیل هوش مصنوعی بهره‌مند شوند و به این ترتیب تفکر خلاق و توانایی حل مسئله خود را تقویت کنند. این اکتشافات خلاقانه برای نوآوری ضروری است و منجر به توسعه فناوری‌های جدیدی می‌شود که می‌توانند برای جامعه سودمند باشند.

یکی دیگر از تأثیرات مهم آموزش هوش مصنوعی، آشنا کردن دانش‌آموزان با فرصت‌های شغلی در حوزه فناوری است. آشنایی با هوش مصنوعی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مسیرهای شغلی مختلف در زمینه‌های مرتبط با فناوری را شناسایی کنند. این آگاهی می‌تواند آن‌ها را به ادامه تحصیل در این حوزه‌ها ترغیب کند و مسیرهای شغلی در صنایعی مانند رباتیک، علم داده و توسعه نرم‌افزار را برای آن‌ها باز کند. با درک چشم‌اندازهای گسترده شغلی مرتبط با هوش مصنوعی، دانش‌آموزان می‌توانند تصمیمات آگاهانه‌تری درباره آینده حرفه‌ای خود بگیرند.

مفاهیم کلیدی در هوش مصنوعی عبارت است از:

۱ یادگیری ماشین این شاخه از هوش مصنوعی بر توسعه سیستم‌هایی تمرکز دارد که می‌توانند از داده‌ها یاد بگیرند و از این دانش برای انجام وظایف یا پیش‌بینی‌ها استفاده کنند. هرچه داده‌های بیشتری در دسترس باشد، نتایج تولیدشده توسط این سیستم دقیق‌تر خواهد بود. عملکرد این سیستم‌ها با پردازش داده‌های بیشتر، بهبود می‌یابد.

۲ یادگیری عمیق زیرمجموعه‌ای از یادگیری ماشین است که از شبکه‌های عصبی مصنوعی چندلایه‌ای استفاده می‌کند و امکان پردازش داده‌های پیچیده مانند تصاویر، صداها و متون را به صورت دقیق و مؤثر فراهم می‌آورد.

۳ شبکه عصبی مصنوعی الهام‌گرفته از ساختار مغز انسان، شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) یک سیستم محاسباتی متشکل از گره‌هایی هستند که به هم متصل شده‌اند و دارای مقادیر وزنی هستند که قدرت این اتصالات را تعیین می‌کنند. این شبکه‌ها قادر به یادگیری و پردازش اطلاعات همانند مغز انسان هستند.

۴ مفهوم پردازش زبان طبیعی بر توسعه سیستم‌هایی تمرکز دارد که می‌توانند زبان انسانی را درک کرده و بازتولید کنند. پردازش زبان طبیعی امکان تعامل طبیعی بین هوش مصنوعی و کاربران انسانی را فراهم می‌کند، مانند دستیارهای مجازی و چت‌بات‌ها.

۵ هوش مصنوعی برای یادگیری و بهبود قابلیت‌های خود به حجم عظیمی از داده‌ها نیاز دارد. کلان‌داده منبعی غنی از اطلاعات برای آموزش مدل‌های هوش مصنوعی و افزایش دقت آن‌ها فراهم می‌کند.

۴. اثربخشی اجرای هوش مصنوعی در آموزش

استفاده از هوش مصنوعی در سیستم‌های یادگیری فردی تأثیر مثبت قابل توجهی بر آموزش ریاضیات داشته است. هوش مصنوعی قادر است سرعت یادگیری را بر اساس درک هر دانش‌آموز تنظیم کند و در نتیجه یک فرآیند یادگیری شخصی‌سازی‌شده و بهینه ایجاد کند. کاربرد هوش مصنوعی نشان داده است که توانایی دانش‌آموزان را در درک و حل مسائل مختلف به‌طور جامع گسترش می‌دهد. بنابراین، ادغام فناوری در آموزش ریاضیات نه تنها فرآیند یادگیری را تسریع می‌کند، بلکه فضایی مناسب برای تسلط بر مهارت‌های ریاضی ایجاد می‌نماید [۴۲]. علاوه بر مزایایی که برای دانش‌آموزان دارد، هوش مصنوعی به عنوان یک دستیار برای معلمان نیز عمل می‌کند. معلمان می‌توانند از هوش مصنوعی برای توسعه نوآوری‌های آموزشی، بهبود درک مفاهیم ریاضی و کمک به مدیریت مؤثر و کارآمد سوابق آموزشی استفاده کنند [۱۶] . با کمک هوش مصنوعی، معلمان زمان بیشتری برای تمرکز بر تعامل با دانش‌آموزان و پیشرفت آن‌ها دارند، که این امر به ایجاد فرآیند آموزشی باکیفیت‌تر منجر می‌شود. اجرای هوش مصنوعی در آموزش ریاضیات آغازگر عصر جدیدی در آموزش است، جایی که فناوری به ابزاری قدرتمند برای هدایت دانش‌آموزان به سمت درکی عمیق‌تر و جامع‌تر تبدیل می‌شود.

اجرای هوش مصنوعی در حوزه آموزش روش‌های جدید و نوآورانه‌ای را برای یادگیری ارائه خواهد داد. هوش مصنوعی که در فیلم‌های انیمیشنی به عنوان ماشین‌های هوشمند شناخته می‌شود، قادر است وظایفی شبیه به انسان انجام دهد، مانند تجزیه و تحلیل، حل مسائل و حتی کنترل ربات‌ها [۴۱]. این توانایی می‌تواند به بهبود فرآیند تدریس و یادگیری کمک کند. گریس و همکاران [۲۳] بیان می‌کنند که هوش مصنوعی می‌تواند با ارائه تجربیات یادگیری شخصی‌سازی‌شده، تدریس هوشمند و فناوری‌های غوطه‌ور، آموزش را متحول کند. همچنین، هوش مصنوعی می‌تواند برای تولید خودکار محتوا مانند مقالات، پست‌های شبکه‌های اجتماعی و ویدئوها استفاده شود. با این حال، هوش مصنوعی باید به شیوه‌ای مسئولانه و فراگیر مورد استفاده قرار گیرد. این فناوری نه تنها می‌تواند یادگیری را شخصی‌سازی کند، بلکه مهارت‌های تفکر انتقادی و حل مسئله را که برای موفقیت آینده دانش‌آموزان ضروری هستند، توسعه می‌دهد. فوزان و همکاران[۱۴] بیان می‌کنند که سیستم هوش مصنوعی از طریق نوآوری در سیستم‌های یادگیری با هوش مصنوعی، تجربه‌ای شخصی‌سازی‌شده ارائه می‌دهد که کیفیت یادگیری را بهبود می‌بخشد و به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا متمرکزتر و دقیق‌تر یاد بگیرند. برای یافتن روش‌های آموزشی بهینه، هوش مصنوعی می‌تواند به آموزش فردی پرداخته و مناطق مشکل‌ساز را شناسایی کند. هوش مصنوعی قادر است مفاهیمی را که دانش‌آموزان در درک آن‌ها مشکل دارند، تشخیص دهد. اجرای هوش مصنوعی در آموزش، به ویژه در آموزش ریاضیات، در سال‌های اخیر نتایج امیدوارکننده‌ای نشان داده است. در اینجا برخی از نمونه‌های موفقیت را مشاهده می‌کنید:

۱ افزایش شخصی‌سازی یادگیری: هوش مصنوعی قادر است داده‌های هر دانش‌آموز را تجزیه و تحلیل کند، از جمله الگوهای یادگیری، نقاط قوت و ضعف آن‌ها. بر اساس این داده‌ها، هوش مصنوعی می‌تواند یادگیری را برای هر دانش‌آموز شخصی‌سازی کند و به آن‌ها کمک کند تا به پتانسیل خود برسند و بر حوزه‌هایی که نیاز به رشد دارند، تمرکز کنند.

۲ افزایش تعامل و انگیزه دانش‌آموزان: استفاده از بازی‌های آموزشی مبتنی بر هوش مصنوعی و شبیه‌سازی‌ها در آموزش ریاضیات، در افزایش انگیزه و بهبود نتایج یادگیری دانش‌آموزان مؤثر بوده است. این روش می‌تواند تعامل و انگیزه دانش‌آموزان را تقویت کرده و آن‌ها را به یادگیری بیشتر تشویق کند.

۳ ارائه بازخورد فوری و در لحظه: سیستم هوش مصنوعی به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا به‌سرعت بازخورد دقیق در مورد عملکرد خود در مسائل ریاضی دریافت کنند. این امر به آن‌ها کمک می‌کند تا اشتباهات خود را سریع‌تر درک کرده و از آن‌ها درس بگیرند.

۴ کمک به معلمان در شناسایی و حمایت از دانش‌آموزان ضعیف‌تر: سیستم‌های هوش مصنوعی می‌توانند داده‌های عملکرد دانش‌آموزان را تحلیل کنند تا دانش‌آموزانی را که با مشکلاتی مواجه هستند شناسایی کنند. معلمان می‌توانند توجه و حمایت بیشتری را برای این دانش‌آموزان فراهم کنند.

۵ اتوماسیون وظایف اداری: سیستم‌های هوش مصنوعی می‌توانند وظایف اداری مانند نمره‌دهی، برنامه‌ریزی و پیگیری پیشرفت دانش‌آموزان را خودکار کنند. این امر باعث کاهش بار اداری معلمان شده و به آن‌ها اجازه می‌دهد تا بر تعاملات عمیق‌تر با دانش‌آموزان تمرکز کرده و آموزش باکیفیت‌تری ارائه دهند.

فرآیند یادگیری که یادگیری فعال‌تر را تقویت می‌کند، یکی از نقش‌های کلیدی فناوری هوش مصنوعی است. این امر به این دلیل است که مرکز فرآیند یادگیری به طور کامل بر روی دانش‌آموزان متمرکز است. دانش‌آموزان بر اساس اهداف و نیازهای خود فعالیت‌های یادگیری را انجام

می‌دهند. علاوه بر یادگیری فعال، حضور سیستم هوش مصنوعی، فرآیند یادگیری را جذاب‌تر می‌کند [۱۱]،این امر به دلیل تجربیات متنوعی است که دانش‌آموزان هنگام استفاده از ابزارهای آموزشی دیجیتال به دست می‌آورند. در حالی که معلمان در گذشته به روش‌های سنتی تدریس متکی بودند، اکنون از معلمان هوش مصنوعی برای اجرای فرآیند یادگیری به روش‌های جدید استفاده می‌شود.
نمونه‌هایی از کاربرد هوش مصنوعی در آموزش شامل استفاده از چندین برنامه و وب‌سایت آموزشی است، از جمله:

۱ کلاس با دو معلم: در این روش، دو معلم در کلاس حضور دارند؛ یکی معلم کلاس و دیگری معلمی مبتنی بر هوش مصنوعی [۲۲].

۲ برنامه گزارش‌دهی دیجیتال: این یک برنامه آنلاین برای گزارش نتایج یادگیری است که توسط مدارس تحت نظارت وزارت آموزش و پرورش اندونزی توسعه یافته است [۲۴].

۳ پلتفرم خانه یادگیری: یک وب‌سایت که شامل محتوای آموزشی از مقاطع ابتدایی تا دبیرستان است. ویژگی‌های این پلتفرم شامل منابع آموزشی، کتاب‌های الکترونیکی، بانک سؤالات، آزمایشگاه‌های مجازی، نقشه‌های فرهنگی و بسیاری موارد دیگر است.

با وجود پتانسیل عظیم هوش مصنوعی برای بهبود بخش‌های مختلف در اندونزی، اجرای آن همچنان با موانعی مانند **کمبود تخصص نیروی کار در استفاده از هوش مصنوعی و کمبود سرمایه برای توسعه زیرساخت‌های آن روبرو است. این امر باعث شده است که اندونزی از نظر جذب فناوری، در مقایسه با سایر کشورهای منطقه آسیا–اقیانوسیه عقب بماند [۱۰].

۵. تأثیر مثبت هوش مصنوعی در آموزش

در حوزه آموزش، هوش مصنوعی نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. در ارتباط با دانش‌آموزان، هوش مصنوعی یادگیری را مؤثرتر می‌کند، به عنوان مثال از طریق چت جی پی تی. بر اساس پژوهش ریفکی [۳۶] که نظرسنجی پوپولیکس را بررسی کرد، نتایج نشان داد که چت جی پی تی در صدر فهرست پرکاربردترین برنامه‌های هوش مصنوعی قرار دارد. در چت جی پی تی می‌توان به هر سؤالی پاسخ دریافت کرد که این امر برای دانش‌آموزان در یافتن پاسخ پرسش‌هایشان بسیار مفید است. علاوه بر این، چت جی پی تی می‌تواند در یافتن منابع تکمیلی، نوشتن مقالات، شعر، جملات ادبی و غیره به دانش‌آموزان کمک کند. این ویژگی باعث افزایش تعداد کاربران این ابزار شده است.
هوش مصنوعی همچنین می‌تواند نیازهای دانش‌آموزان را شناسایی کند، از جمله مشکلاتی که در یادگیری با آن مواجه هستند. بسیاری از برنامه‌های آموزشی از سیستم‌های هوش مصنوعی استفاده می‌کنند، مانند برنامه دولینگو برای یادگیری زبان خارجی. در دولینگو سیستم‌هایی مانند محدودیت تعداد اشتباهات، یادگیری بر اساس فصل‌های آموزشی، تکرار مطالب، آموزش مبتنی بر بازی، محتوای چندرسانه‌ای تعاملی و انتخاب گسترده زبان‌ها برای یادگیری وجود دارد. وقتی کاربر اشتباه کند، دولینگو همان سؤال را در پایان جلسه تکرار می‌کند (بازخورد)، که برای اصلاح اشتباه و ارزیابی یادگیری مفید است. این نشان می‌دهد که هوش مصنوعی قادر است اشتباهات را تجزیه و تحلیل کرده، بهبود بخشد و مشکلات یادگیری را بررسی کند.
علاوه بر دانش‌آموزان، هوش مصنوعی تأثیرات مثبتی بر معلمان نیز دارد. یکی از این تأثیرات مثبت در زمینه مدیریت اداری است. وظایف معلمان فقط به تدریس محدود نمی‌شود، بلکه شامل امور اداری نیز هست. سیستم‌های هوش مصنوعی می‌توانند وظایف اداری مانند تنظیم برنامه‌ها، مدیریت داده‌های دانش‌آموزان و ثبت حضور و غیاب را خودکار کنند [۳۷]،[۳۸]. این امر به معلمان کمک می‌کند تا زمان بیشتری برای تمرکز بر تدریس داشته باشند.
این تأثیر مثبت در آموزش ریاضیات نیز قابل مشاهده است. ریاضیات به عنوان یک درس دشوار و ترسناک شناخته می‌شود. با استفاده از هوش مصنوعی به‌طور هدفمند، می‌توان آموزش ریاضی را به یک تجربه لذت‌بخش تبدیل کرد. برای اجرای سیستم هوش مصنوعی، معلمان باید ابتدا آن را توسعه داده و سپس در کلاس به کار گیرند، به عنوان مثال، با تهیه ویدئوهای آموزشی تعاملی در قالب محتوای چندرسانه‌ای که یادگیری ریاضیات را جذاب‌تر می‌کند.

۱.۵ . *تأثیر منفی هوش مصنوعی در آموزش*

سیستم‌های هوش مصنوعی بسیاری از نیازهای آموزشی کاربران را تسهیل می‌کنند. حضور هوش مصنوعی در حوزه آموزش فرصت‌های جدیدی را برای دانش‌آموزان، کادر آموزشی و پژوهشگران فراهم کرده است تا تحقیقات خود را به‌صورت مؤثرتر و ساده‌تر انجام دهند [۳۹]،[۴۳]،[۱۶].
به عنوان مثال، در تحقیقات ریاضی، هوش مصنوعی به ابزاری قدرتمند تبدیل شده است، به ویژه برای تحلیل داده‌های آماری پیچیده. سرعت و دقت این فناوری به پژوهشگران کمک می‌کند تا الگوها و روندهایی را کشف کنند که با روش‌های سنتی به‌سختی قابل شناسایی هستند.
با کمک فناوری، دانش‌آموزان می‌توانند مفاهیم پیچیده ریاضی را بهتر درک کرده و توسعه دهند[۴۰]،[۳۰]،[۲]. بر اساس گفته فال، در عصر دیجیتال، چت‌بات‌ها به عنوان یک پدیده جدید ظهور کرده‌اند که امکان تعامل متنی تعاملی را برای دریافت اطلاعات فراهم می‌کنند. کاربران می‌توانند سؤالات خود را مطرح کرده و پاسخ‌های سریعی دریافت کنند. برای دانش‌آموزان، چت‌بات‌ها می‌توانند به عنوان راهنمای مجازی عمل کنند که به درک مفاهیم و تقویت یادگیری مستقل کمک می‌کند.
با این حال، استفاده از هوش مصنوعی در ایجاد محتوای علمی بدون رعایت اصول بازنویسی و نقل قول می‌تواند منجر به سرقت علمی شود. در این زمینه، چت‌بات‌ها در صورت استفاده بیش از حد، می‌توانند به یک جنبه منفی از هوش مصنوعی تبدیل شوند [۲۹]،[۲۸]. بنابراین، با وجود

پتانسیل بالای فناوری هوش مصنوعی در آموزش، کاربرد اخلاقی و مسئولانه آن ضروری است تا از سوءاستفاده‌ها و پیامدهای منفی جلوگیری شود.
حضور چت‌بات‌ها و سایر فناوری‌های هوش مصنوعی در آموزش، دسترسی آسان به اطلاعات و یادگیری را بهبود بخشیده است [۲۸]،[۳]. اما این راحتی می‌تواند وابستگی بیش از حد ایجاد کند، که ممکن است منجر به کاهش توانایی تفکر انتقادی و حل مسئله مستقل در دانش‌آموزان شود.
شواهدی از علاقه زیاد مردم به هوش مصنوعی، افزایش چشمگیر محبوبیت چت جی پی تی است. تنها دو ماه پس از راه‌اندازی، چت جی پی تی به ۱۰۰ میلیون کاربر فعال رسید. این امر نشان می‌دهد که هوش مصنوعی نه‌تنها مورد توجه بلکه به شدت مورد نیاز مردم، از جمله در حوزه آموزش استپ [۳۲]. در زمینه آموزش ریاضیات، چت جی پی تی فرآیند یادگیری را با کمک به درک مفاهیم پیچیده به‌صورت تعاملی و جذاب تسهیل می‌کند.
با این حال، هوش مصنوعی علاوه بر مزایای مثبت، در صورت استفاده نادرست، می‌تواند اثرات منفی نیز داشته باشد. استفاده نامناسب از هوش مصنوعی در فرآیند یادگیری می‌تواند وابستگی بیش از حد ایجاد کرده و منجر به کاهش توانایی تفکر انتقادی دانش‌آموزان شود. بنابراین، نظارت و هدایت صحیح در ادغام هوش مصنوعی در سیستم‌های آموزشی برای استفاده بهینه و اخلاقی از این فناوری ضروری است. برخی از اثرات منفی هوش مصنوعی در آموزش شامل موارد زیر است:

۱ وابستگی بیش از حد به هوش مصنوعی: هنگام انجام تکالیف، برخی دانش‌آموزان به گوگل یا سایر ابزارهای هوش مصنوعی متکی می‌شوند تا پاسخ‌ها را به‌سرعت پیدا کنند. این وابستگی، باعث کاهش توانایی تفکر مستقل و حل مسائل ریاضی به‌صورت خودجوش می‌شود.

۲ کاهش تعامل و همکاری: استفاده بیش از حد از هوش مصنوعی می‌تواند تعامل مستقیم بین معلمان و دانش‌آموزان را کاهش دهد، درحالی‌که این تعامل برای ایجاد ارتباطات اجتماعی و دریافت حمایت‌های آموزشی بسیار ضروری است.

۳ شکاف دیجیتالی: عدم دسترسی برابر به فناوری هوش مصنوعی، نابرابری‌های آموزشی را تشدید می‌کند. دانش‌آموزانی که از لحاظ اقتصادی ضعیف‌تر هستند، ممکن است نتوانند از مزایای این فناوری بهره‌مند شوند و در نتیجه، درک مفاهیم ریاضی برای آن‌ها دشوارتر شود.

۴ محدودیت در توضیح مفاهیم پیچیده: سیستم‌های هوش مصنوعی همیشه قادر به ارائه توضیحات عمیق و کامل در مورد مفاهیم ریاضی پیچیده نیستند. درحالی‌که نقش معلم در ارائه مثال‌ها، پاسخ به سؤالات و توضیح دقیق مفاهیم ضروری است.

۵ کاهش علاقه و انگیزه یادگیری: اتکا بیش از حد به هوش مصنوعی ممکن است یادگیری را برای دانش‌آموزان کم‌اهمیت جلوه دهد. اگر دانش‌آموزان احساس کنند که نیازی به تلاش ندارند، ممکن است انگیزه و علاقه خود را نسبت به یادگیری، به‌ویژه در دروسی مانند ریاضیات که نیاز به تمرین مستمر دارد، از دست بدهند.

آجی [۳۲] بیان می‌کند که با وجود مزایای هوش مصنوعی برای معلمان و دانش‌آموزان، استفاده بیش از حد از آن می‌تواند پیامدهای منفی جدی مانند وابستگی، کاهش تفکر انتقادی و کاهش استقلال یادگیری داشته باشد.

۲.۵ . *پتانسیل هوش مصنوعی در آموزش*

پتانسیل هوش مصنوعی در آموزش قابل توجه است و می‌تواند کیفیت یادگیری را بهبود بخشد. با این حال، مدیریت صحیح استفاده از هوش مصنوعی برای جلوگیری از پیامدهای منفی امری ضروری است. با یک رویکرد متعادل و جامع، می‌توان از هوش مصنوعی برای ایجاد محیطی مؤثرتر و لذت‌بخش‌تر برای یادگیری دانش‌آموزان بهره برد. این رویکرد بر اهمیت حفظ تعادل بین استفاده از فناوری و توسعه مهارت‌های اساسی دانش‌آموزان در تفکر انتقادی و خلاقانه تأکید دارد.
معلمان نقش کلیدی در طراحی فعالیت‌هایی دارند که دانش‌آموزان را به تفکر انتقادی و خلاقانه ترغیب کند. به عنوان مثال، معلمان می‌توانند پروژه‌هایی تعیین کنند که در آن دانش‌آموزان داده‌ها را جمع‌آوری کرده، آن‌ها را با استفاده از هوش مصنوعی تحلیل کرده و سپس یافته‌های خود را به‌صورت شفاهی یا کتبی ارائه دهند. به این ترتیب، دانش‌آموزان نه‌تنها نحوه استفاده از هوش مصنوعی را می‌آموزند، بلکه مهارت‌های سطح بالایی مانند ارتباط، همکاری و حل مسئله را نیز توسعه می‌دهند. این رویکرد تضمین می‌کند که فناوری به عنوان ابزاری برای غنی‌سازی یادگیری استفاده شود، نه جایگزینی برای توانایی‌های شناختی اساسی دانش‌آموزان.

۶. تلاش‌ها برای کاهش اثرات منفی هوش مصنوعی

کاربرد هوش مصنوعی مزایای بسیاری در حوزه‌های مختلف، از جمله آموزش، به همراه دارد. با این حال، از سوی دیگر، این فناوری دارای پتانسیل منفی نیز هست که باید مورد توجه قرار گیرد و برای کاهش آن اقدام شود. در ادامه، چندین راهکار کاهش اثرات منفی هوش مصنوعی در آموزش ارائه شده است:

۱ تدوین دستورالعمل‌ها و مقررات – تنظیم راهنمایی‌های مشخص در مورد استفاده از هوش مصنوعی در آموزش، از جمله استانداردهای اخلاقی، حفظ حریم خصوصی داده‌ها و مسئولیت‌پذیری.
– اطمینان از اینکه مقررات و دستورالعمل‌ها با اصول حقوق بشر و عدالت اجتماعی همخوانی داشته باشد.
– در فرآیند تهیه مقررات، مشارکت ذینفعان مختلف از جمله دانشگاهیان، معلمان، والدین و دانش‌آموزان ضروری است.

۲ افزایش سواد هوش مصنوعی –ارتقای سطح آگاهی در زمینه هوش مصنوعی برای تمامی افراد در بخش آموزش، از جمله معلمان، دانش‌آموزان، والدین و جامعه.
– ارائه دوره‌های آموزشی و کارگاه‌ها درباره هوش مصنوعی، از جمله نحوه استفاده مسئولانه، اخلاقی و مؤثر از آن.
– افزایش آگاهی در مورد تأثیرات منفی بالقوه هوش مصنوعی و روش‌های جلوگیری از آن.

۳ تضمین عدالت و فراگیری – اطمینان از دسترسی عادلانه و برابر به فناوری هوش مصنوعی برای همه دانش‌آموزان، بدون توجه به وضعیت اقتصادی، جنسیت یا توانایی‌های آن‌ها.
– توسعه سیستم‌های هوش مصنوعی فراگیر و بدون سوگیری تا هیچ گروهی متضرر نشود.
– در نظر گرفتن نیازها و تنوع دانش‌آموزان در طراحی و اجرای سیستم‌های هوش مصنوعی.

۴ بیشینه‌سازی مزایای هوش مصنوعی
– تمرکز بر استفاده از هوش مصنوعی در زمینه‌هایی که می‌توانند کیفیت آموزش را بهبود بخشند (یادگیری شخصی‌سازی‌شده، ارزیابی‌های عینی‌تر، و حمایت از دانش‌آموزان دارای نیازهای ویژه).
– بهره‌گیری از هوش مصنوعی برای کاهش بار وظایف اداری معلمانو تمرکز بیشتر آن‌ها بر تعاملات آموزشی، توسعه روش‌های تدریس و ترکیب فناوری با روش‌های سنتی برای ایجاد یک تجربه یادگیری جامع و مؤثر.

۵ نظارت و ارزیابی تأثیر هوش مصنوعی – نظارت و ارزیابی مداوم تأثیرات استفاده از هوش مصنوعی در بخش آموزش.
– شناسایی ریسک‌ها و مشکلات احتمالی ناشی از استفاده از هوش مصنوعی.
– اعمال اصلاحات لازم برای بهینه‌سازی بهره‌گیری از هوش مصنوعی در آموزش.

۶ ایجاد همکاری و گفتگو
– تشویق همکاری بین ذینفعان مختلف در بخش آموزش (مانند دانشگاهیان، متخصصان آموزشی، توسعه‌دهندگان فناوری، دولت و جامعه مدنی).
– برقراری گفت‌وگوی باز و سازنده درباره نحوه استفاده از هوش مصنوعی در آموزش.
– به اشتراک‌گذاری دانش و تجربیات در زمینه بهترین روش‌های کاهش اثرات منفی هوش مصنوعی.

برخی پژوهشگران معتقدند که برای مقابله با اثرات منفی بالقوه هوش مصنوعی، مجموعه‌ای از اقدامات پیشگیرانه لازم است که تعادل بین پیشرفت فناوری و ارزش‌های سنتی آموزشی را حفظ کند [۴۵]، [۴۶]، [۵]، [۲۷].

۷. نتیجه گیری

در عصر هوش مصنوعی، معلمان باید بر توسعه روش‌های آموزشی تمرکز کنند که انسان را در مرکز یادگیری قرار دهد. هوش مصنوعی می‌تواند به عنوان ابزاری نوآورانه برای حمایت از فرآیند تدریس و یادگیری استفاده شود. این امر از طریق اجرای استراتژی‌های آموزشی مناسب مانند یادگیری مبتنی بر پروژه محقق می‌شود. حفظ محرمانگی اطلاعات شخصی و داده‌های دانش‌آموزان یک مسئولیت کلیدی برای سیاست‌گذاران است. آن‌ها باید مقررات سختگیرانه‌ای تنظیم کرده و بهترین روش‌ها را برای جمع‌آوری، ذخیره‌سازی و استفاده از داده‌های دانش‌آموزان اجرا کنند. فناوری هوش مصنوعی افق‌های جدیدی را در آموزش باز می‌کند و فرصت‌های متعددی را برای بهبود کیفیت یادگیری ارائه می‌دهد.با این حال، برای استفاده بهینه از هوش مصنوعی، معلمان باید آموزش کافی دریافت کنند. این آموزش‌ها باید شامل درک عمیق از هوش مصنوعی، نحوه ادغام آن در یادگیری، اخلاق و مسئولیت‌پذیری در استفاده از آن باشد. ارزیابی مداوم استفاده از هوش مصنوعی برای تعیین تأثیر آن بر یادگیری بسیار مهم است. این نظارت با هدف بررسی بهبود عملکرد دانش‌آموزان، افزایش علاقه به یادگیری و تغییر در شیوه یادگیری آن‌ها انجام می‌شود. اطلاعات حاصل از این ارزیابی‌ها می‌تواند برای بهبود سیستم‌های هوش مصنوعی و افزایش کارایی آن‌ها مورد استفاده قرار گیرد. استفاده از هوش مصنوعی در محیط مدرسه می‌تواند ابزاری حمایتی مؤثر برای بهبود کیفیت تدریس و یادگیری باشد. با این حال، برای حفظ یکپارچگی علمی، شفافیت و تدوین دستورالعمل‌های مشخص در استفاده از آن ضروری است. مدارس باید دستورالعمل‌های روشنی درباره موارد مجاز استفاده از هوش مصنوعی تدوین کنند. معلمان و دانش‌آموزان باید درباره نحوه استفاده از هوش مصنوعی، محدودیت‌های آن و دلایل این محدودیت‌ها، گفت‌وگوی صادقانه و شفاف داشته باشند. دانش‌آموزان باید صادقانه از هوش مصنوعی استفاده کنند و درک کنند که این

فناوری ابزاری برای تسهیل یادگیری است، نه جایگزینی برای تلاش آموزشی آن‌ها [۴]. استفاده از فناوری هوش مصنوعی در آموزش به سرعت در حال گسترش است و فرصت‌های متعددی را برای بهبود فرآیند یادگیری فراهم می‌کند. با پیروی از دستورالعمل‌های صحیح، مدارس می‌توانند محیط‌های آموزشی مثبت و کارآمدی ایجاد کنند که در آن هوش مصنوعی به جای تسهیل تقلب، از یادگیری پشتیبانی کند. اجرای صحیح فناوری هوش مصنوعی، تجربه یادگیری دانش‌آموزان را غنی‌تر کرده و روش‌های آموزشی نوآورانه متعددی را تسهیل خواهد کرد.

مراجع

[1] Alam, A. (2021, November). Possibilities and apprehensions in the landscape of artificial intelligence in education. In 2021 International Conference on Computational Intelligence and Computing Applications (ICCICA) (pp. 1-8). IEEE. 2021, 2021, doi: 10.1109/ICCICA52458.2021.9697272.

[2] Agnesa, T., Desmayanasari, D., Nuraida, E. M., Sahanata, M., & Ghoer, F. R. (2023). Technology Transformation in Education: Mathematics Learning Media in the Digitalization Era. JTEV (Jurnal Teknik Elektro dan Vokasional), 9(2), 167-173.

[3] Agnesa, T., Desmayanasari, D., Nuraida, E. M., Sahanata, M., & Ghoer, F. R. (2023). Technology Transformation in Education: Mathematics Learning Media in the Digitalization Era. JTEV (Jurnal Teknik Elektro dan Vokasional), 9(2), 167-173.

[4] Apriadi, R. T., & Sihotang, H. (2023). Transformasi Mendalam Pendidikan Melalui Kecerdasan Buatan: Dampak Positif bagi Siswa dalam Era Digital. Jurnal Pendidikan Tambusai, 7(3), 31742-31748.

[5] Ahmad, S. F., Han, H., Alam, M. M., Rehmat, M., Irshad, M., Arraño-Muñoz, M., & Ariza-Montes, A. (2023). Impact of artificial intelligence on human loss in decision making, laziness and safety in education. Humanities and Social Sciences Communications, 10(1), 1-14.

[6] Bozkurt, A., Karadeniz, A., Baneres, D., Guerrero-Roldán, A. E., & Rodríguez, M. E. (2021). Artificial intelligence and reflections from educational landscape: A review of AI Studies in half a century. Sustainability, 13(2), 800.

[7] Berendt, B., Littlejohn, A., & Blakemore, M. (2020). AI in education: Learner choice and fundamental rights. Learning, Media and Technology, 45(3), 312-324.

[8] Bešlić, A., Bešlić, J., & Kamber Hamzić, D. (2024, April). Artificial Intelligence in Elementary Math Education: Analyzing Impact on Students Achievements. In International Conference on Digital Transformation in Education and Artificial Intelligence Application (pp. 27-40). Cham: Springer Nature Switzerland.

[9] Bešlić, A., Bešlić, J., & Kamber Hamzić, D. (2024, April). Artificial Intelligence in Elementary Math Education: Analyzing Impact on Students Achievements. In International Conference on Digital Transformation in Education and Artificial Intelligence Application (pp. 27-40). Cham: Springer Nature Switzerland.

[10] Basnett, Y., Aji, P., Indrananto, C., & Allen, E. (2020). Innovate Indonesia: Unlocking Growth through Technological Transformation. Ministry of Finance Republic of Indonesia.

[11] Chassignol, M., Khoroshavin, A., Klimova, A., & Bilyatdinova, A. (2018). Artificial Intelligence trends in education: a narrative overview. Procedia computer science, 136, 16-24.

[12] Cope, B., Kalantzis, M., & Searsmith, D. (2021). Artificial intelligence for education: Knowledge and its assessment in AI-enabled learning ecologies. Educational philosophy and theory, 53(12), 1229-1245.

[13] Cox, A. M. (2021). Exploring the impact of Artificial Intelligence and robots on higher education through literature-based design fictions. International Journal of Educational Technology in Higher Education, 18(1), 3.

[14] Djunaedi, D., Hanasi, R. A., Susilawati, S., Fikri, M., Simatupang, S., Fauzan, F., & Syahrul, M. (2024). Application Of Artificial Intelligence In Learning And Teaching Activities In The Village. Journal Of Human And Education (JAHE), 4(4), 401-407.

[15] Fissore, C., Floris, F., Fradiante, V., Marchisio Conte, M., & Sacchet, M. (2024). From Theory to Training: Exploring Teachers' Attitudes Towards Artificial Intelligence in Education. In Proceedings of the 16th International Conference on Computer Supported Education (Vol. 2, pp. 118-127). SCITEPRESS–Science and Technology Publications.

[16] Fitria, T. N. (2021, December). Artificial intelligence (AI) in education: Using AI tools for teaching and learning process. In Prosiding seminar nasional & call for paper STIE AAS (pp. 134-147).

[17] Khang, A., Muthmainnah, M., Seraj, P. M. I., Al Yakin, A., & Obaid, A. J. (2023). AI-Aided teaching model in education 5.0. In Handbook of Research on AI-Based Technologies and Applications in the Era of the Metaverse (pp. 83-104). IGI Global.

[18] Gandolfi, A. (2024). GPT-4 in Education: Evaluating Aptness, Reliability, and Loss of Coherence in Solving Calculus Problems and Grading Submissions. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 1-31.

[19] García-Sánchez, E. R., Candia-García, F., & Vargas-Martínez, H. S. (2023, February). A Techno-Pedagogical Framework for STEM Education Using Disruptive Innovations. In International Congress on Information and Communication Technology (pp. 161-170). Singapore: Springer Nature Singapore.

[20] Guan, C., Mou, J., & Jiang, Z. (2020). Artificial intelligence innovation in education: A twenty-year data-driven historical analysis. International Journal of Innovation Studies, 4(4), 134-147.

[21] Hanila, S., & Alghaffaru, M. A. (2023). Pelatihan Penggunaan Artificial Intelligence (AI) Terhadap Perkembangan Teknologi Pada Pembelajaran Siswa Sma 10 Sukarami Kota Bengkulu. Jurnal Dehasen Mengabdi, 2(2), 221-226.

[22] Gentile, M., Città, G., Perna, S., & Allegra, M. (2023, March). Do we still need teachers? Navigating the paradigm shift of the teacher's role in the AI era. In Frontiers in Education (Vol. 8, p. 1161777). Frontiers Media SA.

[23] Grace, K., Stewart, H., Sandkühler, J. F., Thomas, S., Weinstein-Raun, B., & Brauner, J. (2024). Thousands of AI authors on the future of AI. arXiv preprint arXiv:2401.02843.

[24] Gilang, B. S. (2021). Implementasi Aplikasi Raport Digital untuk Pelaporan Evaluasi Hasil Belajar di Mi Muhammadiyah Pasir Lor Kecamatan Karanglewas Kabupaten Banyumas (Doctoral dissertation, IAIN PURWOKERTO).

[25] Jančařík, A., Michal, J., & Novotná, J. (2023). Using AI Chatbot for Math Tutoring. Journal of Education Culture and Society, 14(2), 285-296.

[26] Jančařík, A., Novotná, J., & Michal, J. (2022, October). Artificial Intelligence Assistant for Mathematics Education. In Proceedings of the 21st European Conference on e-Learning-ECEL 2022 (pp. 143-148).

[27] Jindal, A., & Sharma, A. (2024). The Impact of Artificial Intelligence on Society.
[28] Kooli, C. (2023). Chatbots in education and research: A critical examination of ethical implications and solutions. Sustainability, 15(7), 5614.
[29] Labadze, L., Grigolia, M., & Machaidze, L. (2023). Role of AI chatbots in education: systematic literature review. International Journal of Educational Technology in Higher Education, 20(1), 56.
[30] Maharjan, M., Dahal, N., & Pant, B. P. (2022). ICTs into mathematical instructions for meaningful teaching and learning. Advances in Mobile Learning Educational Research, 2(2), 341-350.
[31] Nagaraj, B. K., Kalaivani, A., Begum, S., Akila, S., & Sachdev, H. K. (2023). The emerging role of artificial intelligence in stem higher education: A critical review. International Research Journal of Multidisciplinary Technovation, 5(5), 1-19.
[32] Nugroho, L. A. (2024). Exploring Research Trends of ChatGPT in Education Through Bibliometric Analysis. Scholaria: Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan, 14(2), 98-106.
[33] Strzelecki, A. (2024). To use or not to use ChatGPT in higher education? A study of students' acceptance and use of technology. Interactive learning environments, 32(9), 5142-5155.
[34] Voskoglou, M. G., & Salem, A. B. M. (2020). Benefits and limitations of the artificial with respect to the traditional learning of mathematics. Mathematics, 8(4), 611.
[35] Lourenço, J., Milczarski, P., Lucas, C., Paulo, J., & Morais, J. (2024, March). Mathematics Course Lecturing: AI Platform as an Enabler. In Future of Information and Communication Conference (pp. 23-29). Cham: Springer Nature Switzerland.
[36] Rifky, S. (2024). Dampak penggunaan artificial intelligence bagi pendidikan tinggi. Indonesian Journal of Multidisciplinary on Social and Technology, 2(1), 37-42.
[37] Rahmatya, M. D., & Wicaksono, M. F. (2023). Online Attendance with Python Face Recognition and Django Framework. Sistemasi: Jurnal Sistem Informasi, 12(3), 703-714.
[38] Sunaryono, D., Siswantoro, J., & Anggoro, R. (2021). An android based course attendance system using face recognition. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 33(3), 304-312.
[39] Tran, T. Educational Innovation in Vietnam.
[40] Thurm, D., & Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: A multidimensional analysis of teacher beliefs. Educational Studies in Mathematics, 109(1), 41-63.
[41] Valavanidis, A. (2023). Artificial Intelligence (AI) Applications. Department of Chemistry, National and Kapodistrian University of Athens, University Campus Zografou, 15784.
[42] Wahyuni, Y. (2021). Integration of digital technology in mathematics learning. International Journal Of Humanities Education and Social Sciences, 1(3).
[43] Wu, Y. (2024). Is early childhood education prepared for artificial intelligence?: A global and us policy framework literature review. Open Journal of Social Sciences, 12(8), 127-143.
[44] Zahara, S. L., Azkia, Z. U., & Chusni, M. M. (2023). Implementasi Teknologi Artificial Intelligence (AI) dalam Bidang Pendidikan. Jurnal Penelitian Sains Dan Pendidikan (JPSP), 3(1), 15-20.
[45] Zouhaier, S. (2023). The impact of Artificial intelligence on higher education: An empirical study. European Journal of Educational Sciences, 10(1), 17-33.
[46] Zhao, B. (2023). Analysis on the negative impact of AI development on employment and its countermeasures. In SHS web of conferences (Vol. 154, p. 03022). EDP Sciences.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–217، صص. ۱۴۹–۱۵۵

ارائه مدل برای تدریس و یادگیری ریاضی

سید جلال لنگری*،آ

آگروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵ تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
آموزش ریاضیات
درک مفهومی
تسلط رویه‌ای
صلاحیت استراتژیک
استدلال

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97D30
97D40
97M10

چکیده

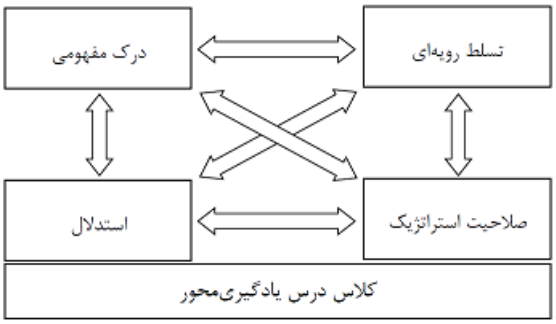
چارچوب ریاضیاتی که در این مقاله همراه با مثال‌هایی از آن ارائه شده، در حقیقت یک رویکرد چند بُعدی است که برای تدریس و یادگیری ریاضی به کار گرفته می‌شود. ابعاد این چارچوب عبارتند از: درک مفهومی، تسلط رویه‌ای، صلاحیت استراتژیک و استدلال. مفاهیم ریاضی «ایده‌های بزرگ» ریاضیات هستند، مانند مفاهیم اعداد و عملگرها، مفاهیم اندازه‌گیری (مانند طول، حجم، ظرفیت)، مفاهیم جبری (به عنوان مثال متغیر، تابع، معکوس) و غیره. دانش در مورد مفاهیم، فراگیران را قادر می‌سازد تا این ایده‌ها را به کار گیرند و در صورت لزوم، الگوریتم‌های مناسب را برای انجام رویه‌های ریاضی و نیز توجیه کردن تفکر ریاضی خود شناسایی کنند. درک مفهومی، به فراگیران این توانایی را می‌دهد که ریاضیات را به عنوان یک شبکه متصل از مفاهیم ببینند. آن‌ها باید بتوانند ضمن این‌که روابط بین مفاهیم مختلف را توضیح می‌دهند، بین آن‌ها و رویه‌های مرتبط، پیوند برقرار کنند. دانشِ مفهومی، فراگیران را قادر می‌سازد تا ایده‌ها را بکار گیرند و تفکر خود را توجیه نمایند. شیوه‌های تدریس و استدلال‌هایی که معلم و دانش‌آموزان برای حل مسائل آورده‌اند بسیار جالب و آموزنده است. بنابراین می‌توانیم این سبک تدریس و استدلال را در کلاس‌های درس ارائه دهیم تا هم بتوانیم معلمی موفق باشیم و هم دانش‌آموزانی خلاق پرورش دهیم.

۱. مقدمه

دانش مفهومی، آگاهی و دانش درباره مفاهیم، روابط و الگوهاست. دانش مفهومی فراگیران را قادر به درک ریاضیات می‌کند. فراگیرانی که درک کاملی از دانش مفهومی دارند، وقتی از آنها خواسته می‌شود کار خود را توجیه کنند، نمی‌گویند، «معلم من به من گفت که این کار را انجام دهم»، بلکه می‌توانند استدلال کار خود را توضیح دهند. دانش‌آموزان و دانشجویانی که دانش مفهومی دارند، قادر به مقایسه، ارتباط و استنباط هستند و میتوانند بین ایدهها ارتباط برقرار کنند. تفکر در سطح بالاتر برای دانش مفهومی ضروری است [۳]. این نوع از دانش، زمانی رخ می‌دهد که مسائل حل، تحقیقات انجام شوند و سؤالات مورد تأمل قرار گیرند. معانی و پیوند و ارتباط بین ایده‌ها، هنگامی که فراگیران با مطالب عینی، تصویری و نمادین کار می‌کنند، گسترش می‌یابند، مخصوصاً زمانی که آنها روی آنچه انجام داده‌اند تأمل می‌کنند و با دیگران ارتباط برقرار می‌نمایند. با این حال، فراگیران اغلب به معلمانی نیاز دارند که با تفکر و استراتژی خاص، آنها را به سمت و سوی پیشرفت در انجام کارهای خاص و ایده‌های انتزاعی‌تر سوق دهند [۴]. هر چه فراگیران بیشتر در معرض چنین روش‌های کاری قرار گیرند، شانس اینکه به افرادی ماهر و توانمند در حل مسئله ریاضی تبدیل شوند، بیشترمی‌شود. این که هرگاه مفهوم جدیدی به فراگیران معرفی می‌شود، معلم ابتدا باید درسی را برای توسعه مفهومی آن برنامه‌ریزی کند، بسیار مهم است. به همین دلیل است که این فرآیند مسئولیت‌های آموزشی قابل توجهی را به عهدهٔ معلم می‌گذارد. لذا کلیهٔ دروس مقدماتی باید با دقت برنامه‌ریزی شوند. دانش‌آموزان نیز می‌توانند با به اشتراک گذاشتن روش‌های تفکر خود در فضای کلاس فعال باشند و معلم باید از این ایده‌ها برای ایجاد چالش و یادگیری دانش‌آموزان و همچنین ساختن و پیوند دادن ایده‌ها از طریق

*سید جلال لنگری
پست *الکترونیک :* jalal.langari@cfu.ac.ir (سید جلال لنگری)

بحث و تأمل استفاده کند. معلمان ممکن است به منظور کمک به فراگیران و ساخت زمینه‌های علمی آن‌ها، از روش‌های آزموده و تجربه شدهٔ مناسب بهره ببرند و دستاوردهای جدیدی خارج از تجربیات مدرسه برای آنها فراهم سازند. اگرچه درک مفهومی یک درک ضمنی یا صریح از روابط متقابل بین قطعات دانش است، دانش رویه‌ای به عنوان توالی اقداماتی دیده می‌شود که برای حل یک مسئله انجام می‌گیرد [۵]. این دو نوع دانش به‌طور مستقل از هم رشد نمی‌کنند. درک مفهومی اغلب پیش از مهارت رویه‌ای رخ می‌دهد و غالباً به رویه‌ای منجر می‌شود که فراگیران از آن استفاده می‌کنند. معلمی که هنگام تدریس مفاهیم از اهمیت درک مفهومی آگاهی داشته باشد، مهارت‌های رویه‌ای را پیش از درک مفهومی تدریس نمی‌کند زیرا لازمست که دانش‌آموزان ابتدا به مفاهیم مربوطه تسلط پیدا کنند. دانش رویه‌ای در واقع شناخت نمادها و توانایی پیروی از قوانین برای انجام ریاضیات است. به عبارت دیگر به معنای داشتن مهارت‌های ریاضی و انجام اقدامات در مراحل و متوالی به شکل صحیح است. تخصص ریاضی در واقع شامل دانش مفهومی و رویه‌ای است و آگاهی از این است که رویه‌ها بر اصول ریاضی استوار هستند. دانش مفهومی و رویه‌ای ضمن حمایت و پشتیبانی از یکدیگر، برای دستیابی به توانمندی و مهارت در ریاضی همکاری می‌کنند. رویه‌های مرتبط با دانش مفهومی باعث انعطاف‌پذیری در تفکر ریاضی می‌شود و فراگیران را قادر می‌سازد در هنگام بروز مسائل جدید هر دو نوع دانش خود را گسترش دهند. اگر کودکان روش‌هایی را بدون درک کافی فرا گیرند، دانش آنها ممکن است به سرانجامی مبهم و بی‌معنی ختم شود [۶]. تحقیقات نشان داده که افزایش دانش مفهومی دانش‌آموزان منجر به توانایی تولید رویه‌های شخصی می‌شود. دانش مفهومی و رویه‌ای با هم رابطه متقابل دارند، اما همانطور که گفته شد، دانش مفهومی نقش اساسی و بنیادی‌تری در توسعه دانش رویه‌ای نسبت به رابطه معکوس دارد. درک مفهومی منجر به ایجاد رویه‌های انعطاف‌پذیر می‌شود و دانش رویه‌ای می‌تواند به درک مفهومی منجر گردد. به همین ترتیب، آموزش مفهومی (آموزش متمرکز بر توسعه درک مفهومی)، آموزش مؤثر روش‌های انعطاف‌پذیر را امکان‌پذیر می‌سازد و پس از آن، رویه‌ها نیز تعامل تقویت شده با درک مفهومی در آموزش شخصی را فعال می‌کنند [۷]. علاوه‌بر این، فراگیران باید بتوانند در مورد به کارگیری یا تدوین استراتژی‌های خود برای حل برخی از مسائل، تصمیمات معقولی بگیرند. یعنی، از آنجا که برای حل یک مسئله ریاضی، غالباً بیش از یک راه‌حل وجود دارد، مهم است که فراگیران به روش‌های ثابت و تجویز شده برای حل مسائل، وابستگی همیشگی نداشته باشند. دیگر اینکه به منظور رشد استدلال، باید مهارت‌هایی را به دانش‌آموزان و دانشجویان یاد بدهیم که به‌طور طبیعی در اختیار ندارند، زیرا ریاضیات نه تنها صرفاً مجموعه‌ای از رویه‌ها و حقایق جدا از هم نیست بلکه شامل شبکه‌ای از مفاهیم و روابط به هم پیوسته است. اگر ریاضیات به عنوان شیوه‌ها و روش‌های جدا از هم و بی ارتباط به علاقمندان و دانشجویان آموزش داده شود، احتمالاً آنها ریاضیات را بی‌معنی می‌دانند. به معنای دیگر، فرصت توسعه مهارت‌های تفکر در مرتبه بالاتر را از دست می‌دهند. بنابراین دانش‌آموزان و دانشجویان باید تشویق شوند تا مباحث را به هم ارتباط دهند و شیوه‌های اندیشیدن در موضوع و شیوه تفکر «من از قبل چه می‌دانم؟ چه کسی می‌تواند در اینجا به من کمک کند؟» را توسعه دهند. آنها باید فشار بر روی حافظه خود را کاهش دهند و توانایی استدلال خود را تقویت کنند. شکل ۱ نشان دهنده مدل چارچوب تدریس ریاضیات است. درک مفهومی، به فراگیران این توانایی



شکل ۱: مدل چارچوب تدریس ریاضیات

را می‌دهد که ریاضیات را به عنوان یک شبکه متصل از مفاهیم ببینند. آن‌ها باید بتوانند ضمن اینکه روابط بین مفاهیم مختلف را توضیح می‌دهند، بین آن‌ها و رویه‌های مرتبط، پیوند برقرار کنند. دانش مفهومی، فراگیران را قادر می‌سازد تا ایده‌ها را بکار گیرند و تفکر خود را توجیه نمایند.

تسلط رویه‌ای فرآیندهایی هستند که از طریق آن‌ها ریاضیات انجام می‌شود. فراگیران باید رویه‌های ریاضی را به صورت دقیق و کارآمد انجام دهند. همچنین باید بدانند یک رویه خاص چه موقع به کار می‌آید.

فراگیران باید بتوانند استراتژی‌های مناسب را شناسایی و از آن‌ها استفاده کنند و راهکارهای خود را برای حل مسائل ریاضی ترسیم نمایند.

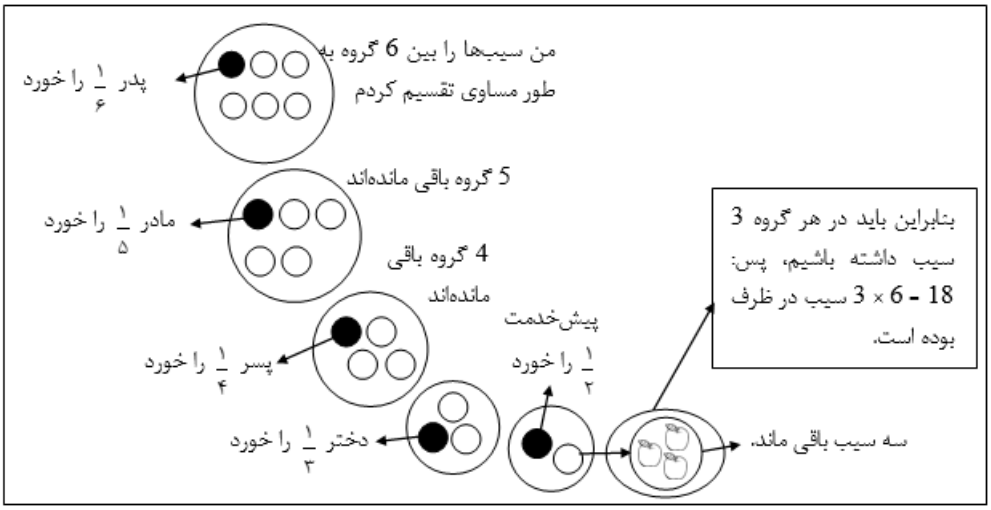
استدلال شامل توجیه و توضیح ایده‌های ریاضی و ارتباط آن‌ها با استفاده از زبان و نمادهای ریاضی است و دو استدلال استقرایی و استنتاجی را شامل می‌شود.

نویسنده معتقد است این مدل تدریس باید در کلاس درس یادگیری‌محور اتفاق بیفتد. کلاس یادگیری‌محور، روی یادگیری تمرکز دارد. این کلاس جایی است که معلم با استفاده از هر استراتژی آموزشی و یادگیری که او فکر می‌کند برای آموزش یک درس خاص مناسب است؛ تجربه یادگیری

را برای کمک به فراگیران طراحی می‌کند. فراگیران در یک کلاس ریاضیات یادگیری‌محور، باید با فرصت‌های زیر مواجه شوند:
ریاضیات را حس کنند، به زبان ریاضیات صحبت کنند، در رویه‌های ضروری ریاضی تسلط کافی پیدا کنند، بازنمایی‌ها را با هم ارتباط دهند و تفکر خود را توجیه نمایند.
معلمان در کلاس درس یادگیری‌محور، باید موارد زیر را انجام دهند:
از ارزیابی برای یادگیری استفاده کنند، توضیحات روشنی در مورد مفاهیم و رویه‌ها ارائه دهند، خطاها و سوء برداشت‌های فراگیران را رفع نمایند، بین موضوعات مختلف ارتباط برقرار کنند، فرصت‌هایی برای یادگیری فعال فراهم سازند، وظایفی را انتخاب و طراحی کنند که بر ایده‌های کلیدی ریاضی و روش‌های کار ریاضی تأکید دارند و فراگیران را تشویق نمایند که به زبان ریاضیات صحبت کنند و نمادهای ریاضی را دقیق به کار ببرند.
مثال زیر برای نشان دادن راهبردهای شخصی فراگیران در مورد کسرها است.

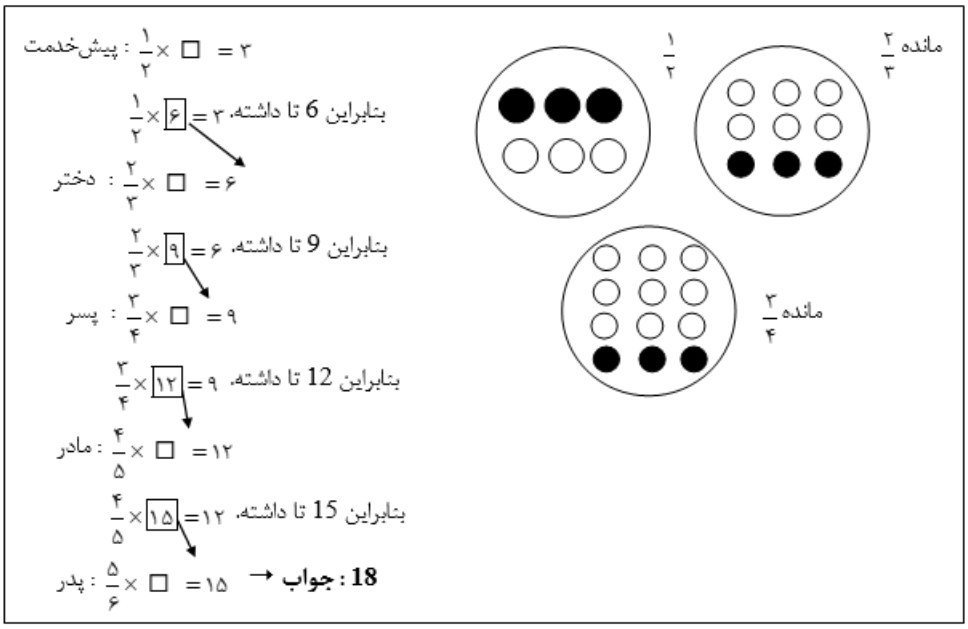
یک ظرف دارای چند سیب روی میز اتاق غذاخوری وجود داشت. در نیمه‌شب، پدر احساس گرسنگی کرد، به اتاق غذاخوری رفت و $\frac{۱}{۶}$ سیب‌ها رو خورد. پس از مدتی، مادر از خواب بلند شد و $\frac{۱}{۵}$ باقی‌مانده سیب‌ها را خورد. پسر خانواده نیز گرسنه شد، پایین رفت و $\frac{۱}{۴}$ باقی‌مانده سیب‌ها رو خورد. دختر خانواده هم $\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده سیب‌ها رو خورد. پیش‌خدمت خانه همه این‌ها را دید و نهایتاً $\frac{۱}{۲}$ از سیب‌های مانده را خورد. ۳ سیب در طرف باقی ماند. قبل از اینکه همه شروع به خوردن سیب‌ها کنند، چند سیب در ظرف بوده است؟

فراگیر ۱: مریم از یک رویکرد تصویری استفاده کرد. او با بخش پدر شروع کرد و برای این کار ۶ گروه (نشان داده شده با دایره‌های کوچک) ساخت که پدر یک ششم از آن‌ها را خورد. ۵ گروه باقی‌مانده بود که از این تعداد یک پنجم خورده شد و به همین ترتیب. او رویه خود را ادامه داد تا زمانی که پیش‌خدمت نیمی از دو گروه را خورد و یک گروه را روی میز گذاشت. پس از آن مریم تعداد سیب‌های باقی مانده بر روی میز را در اندازه گروه ضرب کرد و از این کار برای مشخص کردن تعداد کل سیب‌ها استفاده نمود شکل ۲.



شکل ۲: فراگیر ۱

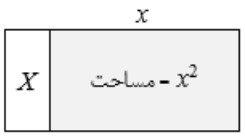
فراگیر ۲: علی با بخش پیش‌خدمت شروع کرد و تا زمان رسیدن به بخش پدر رویه خود را ادامه داد. علی از بخش کسری که هر بار شناخته شده بود (باقی‌مانده) استفاده کرد تا کل موجودی سیب را تشخیص دهد. با شروع از پیش‌خدمت، او می‌دانست که پیش‌خدمت نیمی از سیب‌ها را خورده است و ۳ سیب باقیمانده، یعنی او باید نیمی از ۶ سیب را خورده باشد. او این رویه را ادامه داد تا به بخش پدر رسید شکل ۳.



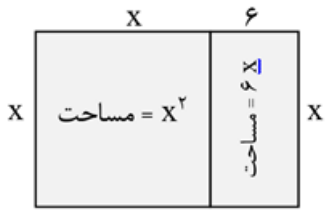
شکل ۳: فراگیر ۲

در مثال فوق مریم و علی برای حل مسئله از نقاط ورودی مختلف استفاده کرده‌اند، یعنی با استفاده از استراتژی‌های مختلف، بسیاری از مسائل به چندین روش متفاوت قابل حل هستند. معلم‌ها باید به فراگیران اجازه دهند از استراتژی‌های خاص خود استفاده کنند و تصور نکنند که راهبردی که معلم ارائه کرده تنها راه ممکن، یا حتی بهترین روش است. معلمان باید فرهنگی در کلاس ایجاد کنند که دانش‌آموزان را ترغیب کند تا در مورد درک خود از مسئله و راهکارهای حل آن صحبت کنند و برای ابراز تفکر خود تلاش نمایند. معلم‌ها باید از دانش‌آموزان و علاقمندان برای توسعه زبان ریاضی مناسب (چه کلامی و چه نمادین) حمایت کنند. ریاضیات شبکه‌ای از ایده‌ها و مفاهیم مختلف و روابط بین آن‌ها است. درک مفهومی شامل درک صحیحی از این مفاهیم و همچنین روابط بین مفاهیم مختلف است. فراگیران گاهی اوقات کاری را انجام می‌دهند که «دستکاری نمادین بداهه» خوانده می‌شود [۸]. آن‌ها واقعاً دلیل و نتیجه آن را نمی‌دانند. به عنوان یک مثال خوب، زمانی که می‌خواهیم «یک مربع را کامل کنند» دستورالعمل «بداهه»، اضافه کردن مجذور نیمی از ضریب x است. در ادامه دلیل انجام این کار و چگونگی درک مفهومی از این فرآیند را نشان می‌دهیم.

چه چیزی باید به عبارت $x^۲+۶x$ اضافه شود تا آن را به یک مربع کامل تبدیل کند؟ [۱] این کار را به روش رسم شکل نشان می‌دهیم و می‌دانیم که یک مربع با طول ضلع x مساحت $x^۲$ را به همراه دارد.



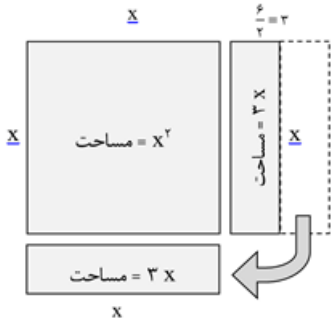
مشکل ما این است که اگر عبارتی مانند $x^۲+۶x$ داشته باشیم، دیگر مربع نیست بلکه این مستطیلی با مساحت $x^۲+۶x=x(x+۶)$ است. بنابراین طول اضلاع کناری مستطیل x و $x+۶$ است. ما می‌توانیم عبارت را به کمک شکل و به شرح زیر نشان دهیم:



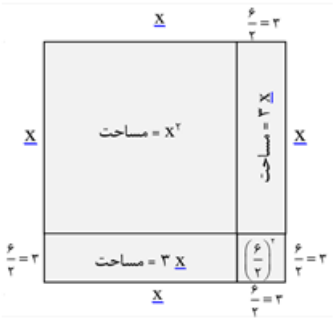
بنابراین یک شکل جدید (یک مستطیل) داریم که از دو شکل ساخته شده است:

یک مربع با مساحت $x \times x = x^2$ و یک مستطیل با مساحت $6 \times x = 6x$

می‌خواهیم بررسی کنیم که باید چه کار کنیم تا مستطیل به مربع تبدیل شود. می‌توانیم مستطیل کوچک را به دو مستطیل کوچکتر تقسیم کنیم به طوری که مساحت هر کدام $3x$ است. نمودار هم نشان می‌دهد.



با حرکت و چرخش یک نیمه به پایین تقریباً یک مربع ایجاد می‌شود. فقط یک شکاف مربع‌شکلِ کوچک در سمت راست پایین شکل به وجود می‌آید. پس از آن، باید مربع کوچکی را در گوشه سمت راست پایین اضافه کنیم تا شکل بزرگتر به یک مربع کامل تبدیل شود. اکنون باید ابعاد و مساحت این مربع کوچک را بررسی کنیم. شکل مقابل فرایند را نشان می‌دهد.



مساحت مربع کوچک، که برای تکمیل مربع بزرگ لازمش داریم برابر با $\frac{6}{2} \times 3 = 3 \times 3 = 9$ است. بنابراین اگر ۹ را به عبارت $x^2 + 6x$ اضافه کنیم، داریم $x^2 + 6x + 9$ که در بالا نشان داده شده و یک مربع هندسی کامل است. از نظر جبری نیز می‌توانیم این عبارت را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

بنابراین $x^2 + 6x + 9$ یک سه جمله‌ای مربع کامل است. یک رابطه مهم بین ۶، ضریب x و عددی که به آن اضافه می‌کنیم وجود دارد تا عبارت را به یک مربع کامل تبدیل کند. برای «مربع کامل کردن»، عبارتی مانند $x^2 + 6x$ یک مربع کوچک با مساحت $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$ را به آن اضافه

می‌کنیم. بنابراین می‌توان مربع عبارت $x^۲ + ۶x$ را بدون نمودار کامل کرد. می‌توانید مراحل زیر را دنبال کنید:
مرحله ۱: ضریب x را که $۶+$ است در نظر بگیرید.
مرحله ۲: ضریب x را بر ۲ تقسیم نمایید: $\frac{۶}{۲} = ۳$.
مرحله ۳: جواب قبلی را به توان ۲ برسانید: $\left(\frac{۶}{۲}\right)^۲ = ۳^۲ = ۹$.
این مراحل، عبارتی (در اینجا عدد ۹) را به شما می‌دهد که برای ایجاد « مربع کامل کردن» باید به عبارت داده شده اضافه شود، یعنی:
$x^۲ + ۶x + ۹$.
دانش‌آموزان ممکن است مسیرهای مختلفی را به کار گیرند تا به این نتیجه برسند که برای به‌دست آوردن یک مربع کامل، باید مربعِ نیمی از ضریب مؤلفه میانی را اضافه کنند. این نمونه نشان می‌دهد که بازخوردهای عینی از این نتیجه‌گیری، می‌تواند برای تقویت درک مفهومی از آنچه که گاهی فقط به صورت رویه‌ای آموخته می‌شود، کارایی مؤثرتری داشته باشد. این واقعیت که فراگیران مجبور به « بیان کردن مشاهدات خود هستند» درک مفهومی و همچنین تسلط رویه‌ای آن‌ها را آسان می‌کند.
بعضی از دانش‌آموزان درک مفاهیم بصری (مانند مساحت) را دشوار می‌دانند. شاید تجدید نظر در این مفاهیم قبل از اعمال آن‌ها ضروری باشد. مثال نشان داده شده در بالا ممکن است به روش قدرتمندی برای ایجاد ایده اولیه برای « مربع کامل کردن» استفادهَ شود (استفاده از مفاهیم تصویری برای ایجاد درک جبری).
تدریس برای درک، به معنای تدریسی است که فراگیران باید به طور اساسی و پایه‌ای مطالب ریاضی را یاد بگیرند [۸]. فراگیران نباید خوشحال باشند که چیزی را می‌دانند بدون اینکه بدانند از کجا آمده است. تفسیر عبارات درجه دوم با استفاده از مساحت مستطیل‌ها، نباید در تمام آموزش‌های مربوط به « مربع کامل کردن» بیان شود، بلکه معلم‌ها باید حداقل یک بار از این مثال استفاده کنند تا به دانش‌آموزان نشان دهند که عبارت « مربع کامل کردن» از کجا آمده است. زمانی که b (ضریب مؤلفه x) مثبت باشد، قانون همراه با « مربع کامل کردن»، آسان است. همچنین در مواردی که b منفی باشد قابل استفاده است. بنابراین معلم‌ها می‌توانند این تصویر را برای نشان دادن مفهوم در مورد ضرایب مثبت x به کار ببرند و قاعده را برای ضرایب منفی تعمیم دهند.
چه چیزی باید به $x^۲ - ۸x$ تا بتوان آن را به صورت $(x - ۴)^۲$ نوشت؟
میتوانیم رویه‌ی زیر را برای تکمیل مربع $x^۲ - ۸x$ دنبال کنیم:
مرحله ۱: تعیین ضریب عبارت: -۸
مرحله ۲: تقسیم ضریب عبارت بر دو: $\frac{-۸}{۲} = -۴$
مرحله ۳: محاسبه مربع: $\left(\frac{-۸}{۲}\right)^۲ = (-۴)^۲ = ۱۶$
مرحله ۴: اضافه کردن عدد ۱۶ به عبارت $x^۲ - ۸x$ برای رسیدن به عبارت $x^۲ - ۸x + ۱۶ = (x - ۴)^۲$.
ما می‌توانیم $x^۲ - ۸x + ۱۶$ را به صورت $(x - ۴)^۲ = (x - ۴)(x - ۴)$ بنویسیم که آن را «مربع کامل» می‌نامند. این رویکرد محدودیت‌هایی روی عبارت‌های درجه دوم پیچیده‌تر دارد، اما می‌تواند برای کمک به فراگیران برای حرکت از یک توضیح مفهومی به سمت یک رویکرد رویه‌ای مؤثر باشد. « مربع کامل کردن» به صورت جبری در صورتی که فقط به صورت رویه‌ای انجام شود، برای دانش‌آموزان معنای کمی دارد. فایده این نمایش تصویری خاص این است که فراگیران را قادر می‌سازد، ببینند که چگونه می‌توانند این مربع را تجسم کنند و معنای « مربع کامل کردن» همین است. سؤال این است که چرا دانش‌آموزان باید بتوانند این کار را انجام دهند و انجام این کار چه لزومی دارد؟ پاسخ این است که « مربع کامل کردن» اغلب در جبر برای یافتن مقدار مینیمم و ماکزیمم به کار می‌رود. مثلاً در مورد یافتن رأس سهمی، فرمول $y = a(x - p)^۲ + q$ کاربرد دارد. « مربع کامل کردن» باعث می‌شود بتوانند عبارت $ax^۲ + bx + c$ را بصورت $a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ - \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}$ بازنویسی کنند. بنابراین مقدار مینیمم و ماکزیمم برابر با $\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}$ است.
دانش‌آموزان باید بتوانند « مربع کامل کردن» را در معادلات انجام دهند. در مورد معادله $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ معلم‌ها باید توضیح دهند که بچه‌ها برای تغییر شکل معادله، قرینه‌ی ۱ را به دو طرف اضافه کنند: $x^۲ - ۴x = -۱$. دانش‌آموزان می‌توانند مراحل تکمیل شده در بالا را برای انجام مربع کامل دنبال نمایند، اما از آنجا که آنها روی یک معادله کار می‌کنند، باید مقدار $\left(\frac{-۴}{۲}\right)^۲ = ۴$ را به دوطرف معادله اضافه کنند، یعنی:
$x^۲ - ۴x + ۴ = -۱ + ۴$.

مراجع

[۱] لنگری، سید جلال (۱۳۹۹)، آموزش و تدریس ریاضیات با هدف کشف آن، ترجمه، نشر زیلان، بجنورد.
[2] Andrew, R. (2017). Procedural vs conceptual approaches to mathematics- a comparison. Obtained from: http://www.learnimplementshare.com/procedural-vs-conceptual-math-comparison.

[3] Barwell, R., Barton, B., and Setati, M. (2009). Educational Studies in Mathematics, Multilingual Issues in Mathematics Education. 64(2), 113-119.
[4] Kenderov, P. S. (2006). Competitions and Mathematics Education. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, (pp. 1583-1598).
[5] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. Available online at http://standards.nctm.org.
[6] Samson, D. (2007). Patterns of Visualisation. Learning and Teaching Mathematics No. 5.
[7] Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. Learning and Instruction, 14, pp. 469- 484.
[8] Zakaria, E., and Syamaun, M. (2017).The Effect of Realistic Mathematics Education Approach on Students' Achievement And Attitudes Towards Mathematics, Mathematics Education Trends and Research, 1, 32-40. doi: 10.5899/2017/metr-00093.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، CT–228، صص. ۱۵۶–۱۶۲

کاربردهای سیستم غیرخطی واندرپل و حل آن با استفاده از انتگرال‌گیری کلن‌شا

علیرضا عموتقی *[آ]، عادل تدین‌فر[ب]

[آ] دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لنجان، گروه علوم‌پایه، اصفهان، ایران
[ب] شرکت صنایع هواپیماسازی ایران (هسا)، شاهین‌شهر، اصفهان، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
سیستم غیرخطی واندرپل
کنترل بهینه
معادلات واندرپل

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
93B11
65A05
44A99

چکیده

در این مقاله، افزون بر بحث کنترل بهینه‌ی سیستم غیرخطی واندرپل با استفاده از تقریب انتگرال کلن‌شا، مروری اجمالی بر کاربرد این معادلات در علوم مهندسی مانند محیط‌های الاستیک تحریک‌پذیر، مدارات الکتریکی غیرخطی، واکنش‌های شیمیایی و ... خواهیم انداخت.

۱. مقدمه

در این مقاله ابتدا کاربردهای معادلات واندرپل را به‌صورت خلاصه‌وار و تقریباً توصیفی در سایر علوم در یک بخش بیان کرده و سپس با بهره‌گیری از روش هم‌مکانی چبیشف و انتگرال کلن‌شا به حل این معادلات نایل می‌آییم.

۲. کاربرد معادلات واندرپل در سایر علوم

معادلات واندرپل یک سیستم دینامیکی غیرخطی است که در زمینه‌های گوناگون علوم و مهندسی کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرده است. این سیستم یک نمونه‌ی کلاسیک از سیستم‌های دینامیکی غیرخطی بوده که به‌دلیل توانایی در مدل‌سازی رفتارهای پیچیده، مانند چرخه‌های محدود، میرایی غیرخطی و ...، می‌تواند در مشکلات به‌وجودآمده در بهینه‌سازی نیز استفاده شود. این معادلات در سامانه‌هایی که نوسان‌های خودپایدار دارند، در سامانه‌هایی که میرایی آن‌ها غیرخطی بوده و وابسته به دامنه‌ی نوسان است، در پویایی نوسان‌هایی که برآمده از یک پارامتر خاص است و در کل در همه‌ی آن‌چه که سنگ‌بنای آن نوعی پویایی غیرخطی است، استفاده می شود. با کمک این معادلات می‌توان آن دسته از مشکلات بهینه‌سازی پویا را که در آن‌ها با گذشت زمان محدودیت‌ها تغییر می‌کنند، کم‌تر کرد. در ادامه کاربردهای آن را در سایر علوم به‌تفکیک بیان می‌داریم.

مهندسی برق: این معادلات در ابتدا توسط فیزیک‌دان هلندی بالستار واندرپل برای مدل‌سازی اجزای غیرخطی مدارات الکترونیکی مانند دیودها و ترانزیستورها معرفی شد. بعدها نیز از آن در کنترل ربات‌ها به‌هنگام راه رفتن‌های پایدار استفاده کردند. هم‌چنین در تجزیه و تحلیل هاPLL و هم‌گام‌سازی سیگنال‌ها و پردازش آن‌ها به‌منظور فیلتر کردن نویزها و کاهش سروصدا این معادلات به‌کار رفتند. در سیستم‌های خودپایدار از

*عادل تدین‌فر
پست الکترونیک : Amotaghi@iauln.ac.ir (علیرضا عموتقی)، adeltadayyonfar@yahoo.com (عادل تدین‌فر)

این معادلات به‌منظور کمینه کردن اتلاف انرژی و بهینه‌سازی مصرف آن و هماهنگ‌سازی بیش‌تر بین نوسان‌سازها در شبکه‌های برقی استفاده گردید. هم‌چنین بهینه‌سازی روی سیستم‌هایی که وان‌درپل نقش ثبات را در کنترل‌کننده‌ها دارد، مناسب‌تر اعمال می‌شود. در بهینه‌سازی نوسان‌ها در سامانه‌های چندعاملی و بهینه‌سازی توزیع‌شده هنگامی‌که چندین عامل برای بهینه‌سازی یک هدف اصلی فعالیت می‌کنند، این معادلات کاربرد فراوان دارند. افزون بر این موارد، در بیشینه‌سازی میزان انرژی استخراج‌شده از ارتعاشات محیطی مکانیکی و تبدیل آن‌ها به انرژی الکتریکی نیز از وان‌درپل استفاده می‌کنند. در بهینه‌سازی کنترل‌کننده‌های بازخورد و کمینه کردن هزینه‌ها (مانند هزینه‌ی انرژی برای رسیدن به کنترل مطلوب در نظریه‌ی کنترل)، از این معادلات به‌عنوان نوعی استراتژی بهره‌برداری می‌شود ([۱۷] و [۱۸]).

مهندسی مکانیک: در این‌گونه سیستم‌ها برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات و کنترل لرزش‌ها به‌خصوص در مواردی که اصطکاک حالت غیرخطی دارد، معادلات وان‌درپل برای مطالعه سودمند است. هم‌چنین در بحث ناپایداری‌های سیالات، مانند تلاطم در لوله‌ها یا جداسازی لایه‌های مرزی، این معادلات خود را نشان می‌دهند ([۲۳]).

فیزیک: در لیزرهای نیمه‌هادی و شبیه‌سازهایی که برای دستگاه‌های ابررسانا ساخته می‌شود، سیستم وان‌درپل کاربرد فراوان دارد. گاهی نیز سیگنال‌های رادیویی تناوبی و بی‌نظمی موجود در زمان‌بندی آن‌ها در اخترفیزیک، وابسته به حل این معادلات است. هم‌چنین حرکات دوره‌ای مدارات و اجرام آسمانی یکی دیگر از زمینه‌هایی است که رفتارشان را می‌توان با این معادلات نشان داد ([۲۲]).

شیمی: از معادلات وان‌درپل در رآکتورهای شیمیایی برای یافتن میزان پویایی برخی واکنش‌ها استفاده می‌شود ([۲]).

اقتصاد: در مدل‌سازی چرخه‌های اقتصادی، به‌خصوص زمانی‌که بازخوردهای غیرخطی در متغیرهای اقتصادی (مانند تولید ناخالص داخلی، اشتغال و ...) داریم، این معادلات ظاهر می‌شوند ([۷]).

زیست شناسی: از معادلات وان‌درپل در علم پزشکی و زیست‌شناسی به‌عنوان مدلی ساده برای الگوی شلیک نرون‌های عصبی استفاده می‌شود. هم‌چنین رفتار ضربان قلب را می‌توان با کمک این معادلات به‌تر توصیف نمود. از سوی دیگر برخی از ویژگی‌های بیولوژیکی (مانند رشد جمعیت) حالت غیرخطی دارند که وان‌درپل رفتار آن‌ها را به‌خوبی نشان می‌دهد. در بهینه‌سازی وزن‌دهی به شبکه‌های عصبی به‌منظور بهبود عمل‌کرد در کارهایی مانند طبقه‌بندی یا پیش‌بینی‌های انتزاعی و هم‌چنین بهینه‌سازی هم‌بندی در این‌گونه شبکه‌ها به‌منظور دست‌یابی به رفتارهای جمعی مورد نظر، این معادلات استفاده می‌شود. مدل‌سازی سیستم‌های پویای بیولوژیک با کمک وان‌درپل منجر به یافتن درمان‌های مؤثرتری برای بیماری‌هایی نظیر صرع شده است. از دیگر کاربردهای این معادلات می‌توان به بهینه کردن مقاومت اتصالات در شبکه‌های عصبی و تنظیم نوسان‌ها برای رسیدن به هماهنگی بیش‌تر اشاره کرد ([۹] و [۱۱]).

محیط‌های الاستیک تحریک‌پذیر: این محیط‌ها معمولاً با استفاده از مدل وان‌درپل مطالعه می‌شوند [۱۹]. محیط‌های الاستیک تحریک‌پذیر که برآمده از فیزیولوژی و شیمی هستند، همواره مورد توجه‌ی فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان در حوزه‌ی علوم غیرخطی بوده، زیرا ویژگی‌های پیچیده‌ی مکانی و زمانی آن‌ها در بسیاری از حوزه‌ها ظاهر می‌شود. مدل ریاضی محیط الاستیک تحریک‌پذیر به‌صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - (\chi - vt) - \gamma \phi(\frac{\partial \chi}{\partial t}),$$

که $x(x,t)$ نشان‌دهنده‌ی تغییر شکل طولی موضعی وابسته به زمان سطح صفحه‌ی بالایی در چارچوب مرجع استاتیک صفحه‌ی پایینی است. $\phi(\frac{\partial \chi}{\partial t}) = \frac{1}{3}(\frac{\partial \chi}{\partial t})^3 - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ تابع اصطکاک است و بزرگی اصطکاک را اندازه می‌گیرد، c سرعت طولی صوت است و v نشان‌دهنده‌ی سرعت کشش یا سرعت لغزش است [۴].

۳. تعاریف و قضایای مقدماتی

در این زیربخش به تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و انتگرال‌گیری کلن‌شا پرداخته و قضایای مورد نیاز را بیان می‌داریم. هم‌چنین اثبات قضایایی را که در ادامه خواهد آمد، می‌توان در [۳]، [۶]، [۸]، [۱۰]، [۱۵] و [۲۰] یافت.

تعریف ۱.۳. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، $\{T_k(x) \mid k = 0, 1, 2, \cdots\}$، توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتروم–لیوویل منفرد به‌فرم زیر هستند.

$$(\sqrt{1-t^2}T_k'(t))' + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}T_k(t) = 0. \quad (1)$$

از جمله ویژگی‌های این چندجمله‌ها این است که برای هر $k \in N$، در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$T_0(t) = 1, T_1(t) = t, T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t). \quad (2)$$

هم‌چنین نقاط صفر، بیشینه (کمینه)ی چندجمله‌ای‌های چبیشف، به‌ترتیب، عبارتند از $\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ و $\cos(\frac{k\pi}{n})$. برای $t \in [-1,1]$، چندجمله‌ای‌های چبیشف ویژگی‌های زیر را دارا است.

$$|T_k(t)| \le 1, T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k, |T_k'(t)| \le k^2, T_k'(\pm 1) = (\pm 1)^{k+1}k^2. \quad (3)$$

تعریف ۲.۳. انتگرال‌گیری کلن‌شا به‌صورت $\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{j=0}^{N} W_j f(t_j)$ تعریف می‌شود که در آن برای هر i و j، $0 \le j \le N$ و $1 \le i \le N-1$، $t_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$. روابط زیر نیز برقرارند [۵].

$$W_0 = W_N = \begin{cases} \frac{1}{N^2} & N: \text{فرد} \\ \frac{1}{N^2-1} & N: \text{زوج} \end{cases} \quad (۴)$$

$$W_i = \frac{2}{NC_i}\left(1 - \sum_{k=1}^{[\frac{N}{2}]} \frac{2}{C_{2k}(4k^2-1)} \cos\left(\frac{2k\pi i}{N}\right)\right), \quad (۵)$$

$$C_N = C_0 = 2, C_i = 1. \quad (۶)$$

قضیه ۳.۳. *اگر برای هر k، $0 \le k \le N$، $\phi_k(t) = \frac{((-1)^{k+1}(1-t^2)T_N'(t))}{(C_k N^2(t-t_k))}$ و $L_k(t)$ چندجمله‌ای لاگرانژ مرتبه‌ی kـاُم باشد که در آن برای هر i، $1 \le i \le N-1$، روابط $C_0 = C_N = 2$ و $C_i = 1$ برقرار است، آنگاه $\phi_k(t) = L_k(t)$. یعنی $\phi_k(t)$ خاصیت چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را دارا است. هم‌چنین $\phi_k(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.*

$$\phi_k(t) = \frac{2}{NC_k} \sum_{l=0}^{N} \frac{T_l(t_k)T_l(t)}{C_l}. \quad (۷)$$

قضیه ۴.۳. *در $\mathbb{R}$ داریم:*

$$\int_{-1}^{1} |x^N - x| dt \le \sqrt{2}||x^N - x||. \quad (۸)$$

قضیه ۵.۳. *فرض کنید x و u توابع قطعه‌ای پیوسته روی $[-1,1]$ باشند و $g(x,u,t,t_f)$ نسبت به x و u به‌طور موضعی در شرط لیپ‌شیتز صدق کند. در این‌صورت اگر $N \to +\infty$، آنگاه $J^N \to J$.*

۴. بهینه‌سازی سیستم غیرخطی واندرپل با روش هم‌مکانی چبیشف

هدف در این بخش معلوم نمودن بردارهای

$$u(t) = (u_0(t), u_1(t), \cdots, u_{n-1}(t))$$

و

$$x(t) = (x_0(t), x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t))$$

است، تا تابع معیار $J = \int_{-1}^{1} g(x(t), u(t), t, T)dt + h(x(1), T)$ با توجه به محدودیت‌های زیر بهینه (کمینه یا بیشینه) گردد.

$$x(t) = f(x(t), u(t), t, T)\ ,\ x(-1) = a. \quad (۹)$$

معمولاً با محدودیت‌های اشاره‌شده، محدودیت‌های دیگری نیز وجود دارند. در محدودیت بالا، T زمان کمینه شدن است. در صورت نیاز می‌توان t را با یک تبدیل خطی به بازه‌ی $[-1,1]$ انتقال داد. $f = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ یک تابع nـتایی و $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ یک ثابت nـتایی است. معمولاً توابع f، g و h را توابع غیرخطی در نظر می‌گیرند.
$x_i^N(t)$ و $u_i^N(t)$ را، به‌ترتیب، چندجمله‌ای‌های درون‌یاب $x_i(t)$ و $u_i(t)$ در گره‌های چبیشف برای $i = 0,1,\cdots,n-1$ اختیار می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$x_i^N(t) = \sum_{l=0}^{N} a_{il}L_l(t)\ ,\ u_i^N(t) = \sum_{l=0}^{N} b_{il}L_l(t), \quad (۱۰)$$

که برای هر $l = ۰,۱,\cdots,N$، $a_{il} = x_i(t_l)$ و $b_{il} = u_i(t_l)$. در [۳] بیان شده است که $\dot{x}_i^N(t_j) = \sum_{l=۰}^{N} D_{jl}a_{il} = \sum_{l=۰}^{N} \phi_l'(t_j)a_{il}$ که در آن $\phi_l(t) = L_l(t)$ و $\hat{D}$ ماتریسی $n(N+۱)\times n(N+۱)$ برحسب D است که $(N+۱)\times(N+۱)$ بوده و $\hat{a} = [\hat{a}_۰^T, \hat{a}_۱^T, \cdots, \hat{a}_{n-۱}^T]^T$ و برای هر i، $۰ \le i \le n-۱$، $\hat{a}_i = [a_{i۰}, a_{i۱}, \cdots, a_{iN}]^T$. ماتریس‌های D و $\hat{D}$ را به‌فرم زیر تعریف می‌کنیم.

$$D = [D_{jl}]\ ,\ D_{jl} = \begin{cases} \frac{c_j(-۱)^{j+۱}}{c_l(t_j - t_l)} & \text{if } l \neq j \\ \frac{-t_l}{۲(۱-t_l^۲)} & \text{if } ۱ \le l = j \le N-۱ \\ \frac{۲N^۲+۱}{۶} & \text{if } l = j = ۰ \\ -\frac{۲N^۲+۱}{۶} & \text{if } l = j = N \end{cases} \tag{۱۱}$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & D \end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

بردارهای $x(t)$، $u(t)$ و $\dot{x}(t)$، به‌ترتیب، به‌وسیله‌ی بردارهای $x^N(t)$، $u^N(t)$ و $\dot{x}^N(t)$ و رابطه‌ی $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t, T)$ نیز به‌فرم زیر تقریب زده می‌شود.

$$\dot{x}^N(t) = f(\sum_{l=۰}^{N} a_l\phi_l(t), \sum_{l=۰}^{N} b_l\phi_l(t), t, T). \tag{۱۳}$$

رابطه‌ی اخیر در گره‌های چبیشف به معادله‌ی جبری $A_{ij} = f(a_j, b_j, t_j, T) - d_{ij} = ۰$ تبدیل می‌شود که در آن d_{ij}، $i(N+۱)+j$–اُمین مؤلفه‌ی بردار $\hat{D}\hat{a}$ است. در این‌حالت تابع معیار J به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$J^N = \int_{-۱}^{۱} g(\sum_{l=۰}^{N} a_l\phi_l(t), \sum_{l=۰}^{N} b_l\phi_l(t), t, T)dt + h(x(۱), T). \tag{۱۴}$$

با انتگرال‌گیری کلن‌شا می‌توان تقریبی از انتگرال بالا را برآورد کرد [۵].

$$\begin{aligned} \hat{J}^N &= \sum_{j=۰}^{N} W_j g(\sum_{l=۰}^{N} a_l\phi_l(t_j), \sum_{l=۰}^{N} b_l\phi_l(t_j), t_j, T) + h(a_۰, T) \\ &= \sum_{j=۰}^{N} W_j g(a_j, b_j, t_j, T) + h(a_۰, T). \end{aligned} \tag{۱۵}$$

حال که مسأله‌ی بهینه‌سازی پارامتری شده و هدف پیدا کردن $a_l, b_l \in \mathbb{R}^n$ و T است که برای هر i,j $(۰ \le i \le n-۱$ و $۰ \le j \le N)$، عبارت زیر کمینه یا بیشینه گردد.

$$J = \sum_{j=۰}^{N} W_j g(a_j, b_j, t_j, T) + h(a_۰, T)\ ,\ A_{ij} = ۰. \tag{۱۶}$$

اکنون با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ برای حالتی که T آزاد باشد، برای هر i، l و r که $۰ \le i \le n-۱$، $۰ \le l \le N$ و $۰ \le r \le N-۱$، مسأله را بررسی می‌کنیم.

$$L = J + \sum_{j=۰}^{N} \lambda_j A_{ij}\ ,\ A_{ij} = ۰, \tag{۱۷}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_r} = \frac{\partial J}{\partial a_r} + \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial a_r} = 0, \tag{۱۸}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_l} = \frac{\partial J}{\partial b_l} + \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial b_l} = 0, \tag{۱۹}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial J}{\partial T} + \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial T} = 0. \tag{۲۰}$$

۵. انتگرال‌گیری کلن‌شا در سیستم غیرخطی واندرپُل

در مسأله‌ی سیستم غیرخطی واندرپُل به‌منظور کنترل بهینه، بایستی تابع معیار $J = \int_0^5 (X_1^2(\tau) + X_2^2(\tau) + U^2(\tau))d\tau$ را کمینه کنیم تا محدودیت‌های زیر برقرار بمانند.

$$\dot{X}_1(\tau) = X_2(\tau), \tag{۲۱}$$

$$\dot{X}_2(\tau) = k(1 - X_1^2(\tau))X_2(\tau) - X_1(\tau) + U(\tau), \tag{۲۲}$$

$$X_1(0) = 1, \tag{۲۳}$$

$$X_2(0) = 0. \tag{۲۴}$$

حال با قرار دادن $k = 1$ مقاله را ادامه می‌دهیم. تبدیل $\tau = \frac{5}{2(1+t)}$، سیستم را به بازه‌ی $(-1, 1)$ انتقال می‌دهد. بنابراین داریم:

$$J = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t))dt, \tag{۲۵}$$

که $\dot{x}_1(t) = \frac{5}{2}x_2(t)$، $\dot{x}_2(t) = \frac{5}{2}((1 - x_1^2(t))x_2(t) - x_1(t) + u(t))$ و $x_1(-1) = 1$ و $x_2(-1) = 0$. ابتدا چندجمله‌ای‌های درون‌یاب $x_1(t)$، $x_2(t)$ و $u(t)$ را در نقاط t_j، $j = 0, 1, \cdots, N$، به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$x_1^N(t) = \sum_{l=0}^{N} a_l \phi_l(t) \ , \ x_2^N(t) = \sum_{l=0}^{N} c_l \phi_l(t) \ , \ u^N(t) = \sum_{l=0}^{N} b_l \phi_l(t). \tag{۲۶}$$

از رابطه‌ی

$$\phi_k(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j \\ 0 & \text{if } k \neq j \end{cases}$$

می‌توان نتیجه گرفت که برای هر k، $0 \leq k \leq N$، $a_k = x_1^N(t_k)$، $c_k = x_2^N(t_k)$ و $b_k = u^N(t_k)$. هم‌چنین چون $\dot{x}_1^N(t_k) = x_2^N(t_k) = c_k$ و $\sum_{l=0}^{N} D_{kl}a_l$، پس $\sum_{l=0}^{N} D_{kl}a_l = \frac{5}{2}c_k$ که نتیجه می‌دهد $A_k = 0$. افزون بر این

$$\dot{x}_2^N(t_k) = \sum_{l=0}^{N} D_{kl}c_l, \tag{۲۷}$$

$$x_1^N(t_k) = c_k \ , \ x_1^N(t_k) = a_k \ , \ u^N(t_k) = b_k. \quad (۲۸)$$

بنابراین داریم $\sum_{l=0}^{N} D_{kl}c_l = \frac{5}{2}((1-a_k^2)c_k - a_k + b_k)$ و $B_k = 0$. در نهایت به‌دست می‌آوریم:

$$x_1^N(-1) = a_N = 1 \ , \ x_2^N(-1) = c_N = 0. \quad (۲۹)$$

اکنون با استفاده از روابط پیشین و انتگرال‌گیری کلن‌شا می‌توان تابع معیار را به‌صورت زیر تقریب زد.

$$J = \frac{5}{2}\sum_{j=0}^{N} W_j(a_j^2 + b_j^2 + c_j^2). \quad (۳۰)$$

در این‌حالت است که می‌توان کنترل بهینه‌ی واندرپل را با شروط $A_k = B_k = 0$، $x_1(-1) = a_N = 1$ و $x_2(-1) = c_N = 0$ به‌دست آورد.

۶. نتایج اصلی

در این بخش به‌ازای Nهای گوناگون روش‌های مختلف را با روشی که در این مقاله برای حل مسأله بیان شده است، هم‌سنجی نموده‌ایم. در روش‌های سری‌های فوریه، توابع بلاک پالس، بهینه‌سازی برخط و محاسبه‌ی نیوتن در جدول ۱، به‌ترتیب، از مقالات [۲۱]، [۱۲]، [۱] و [۱۴] استفاده کرده‌ایم.

جدول ۱: مقادیر تقریبی J

نوع روش	J
سری‌های فوریه	۲٫۸۶۷۳
توابع بلاک پالس	۲٫۸۶۶۹
بهینه‌سازی برخط	۲٫۹۱۸۴
محاسبه‌ی نیوتن	۲٫۸۹۹۰
$N = 4$	۲٫۸۷۲۴
$N = 5$	۲٫۸۶۵۷
$N = 6$	۲٫۸۹۰۶
$N = 7$	۲٫۸۶۶۳
$N = 8$	۲٫۸۶۵۵
$N = 9$	۲٫۸۶۶۷

مراجع

[1] J.F. Badwin and J.H. Sims-Williams, An Online Control Scheme Using an Analysis and Applications, 22 (1968) 523-536.
[2] A. Bobtsov, A. Pyrkin, N. Nikolaev and O. Slita, Stabilization of a Chaotic Van Der Pole System, IFAC Proceedings Volumes, 41 (2) (2008) 15143–15147.
[3] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New-York (1988).
[4] J. Cartwright, V. Eguiluz, E. Hernandez-Garcia and O. Piro, Dynamics of Elastic Excitable Media, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 9 (1999) 2197–2202.
[5] P.J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration, Academic Press, London, 2nd ed. (1984).
[6] D. Gottlieb, M.Y. Hussaini and S.A. Orszag, Theory and Applications of Spectral Methods for Partial differential Equations, SIAM, Philadelphia (1984).
[7] L. He, L. Yi and P. Tang, Numerical scheme and dynamic analysis for variable-order fractional van der Pol model of nonlinear economic cycle, He et al. Advances in Difference Equations, 195 (2016) 1–11.
[8] L.V. Kantorovich and G.P. Akilov, Functional Analysis, Pergamon Press, New-York (1982).
[9] B.Z. Kaplan, I. Gabay, G. Sarafian and D. Sarafian, Biological applications of the “Filtered” Van der Pol oscillator, J. of the Franklin Institute, 345 (3) (2008) 226–232.
[10] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, United States of America (1978).
[11] M. Kumar and P. Varshney, Numerical Simulation of Van der Pol Equation Using Multiple Scales Modified Lindstedt–Poincare Method, Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 91 (2021) 55–65.
[12] C.W. Merriam III, Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems, McGraw-Hill Inc., New-York (1964).

[13] J. Naprsteka and C. Fischera, Semi-Analytical Stochastic Analysis of the Generalized Van Der Pol System, Appl. and Computational Mechanics, 12 (1) (2018) 1–14.
[14] G.D. Pillo, L. Grippo and F. Lampariello, A Newton Type Computing Technique for Optimal Control Problem, Optimal Control Applications and Methods, 5 (1984) 149-166.
[15] H.L. Royden, Real Analysis, 2nd ed., The McMillan Company Collier-McMillan Limited, London (1968).
[16] L. Salgado and V.J. Pinto, The Van Der Pol Equation: Qualitative and Numerical Study, In XXIII International Symposium of Mathematical Methods Applied to Sciences (2021).
[17] S.H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Second Edition. Boulder CO: Westview Press (2014).
[18] M. Tsatsos, Theoretical and Numerical Study of the Van der Pol equation, Aristotle University of Thessaloniki, School of Sciences, Department of Physics (2006).
[19] B. van der Pol and J. van der Mark, Frequency demultiplication, Nature, 120 (1927) 363–364.
[20] J. Vlassenbroeck and R. Vandoorem, A Chebyshev Technique for Solving Nonlinear Optimal Control Problems, IEEE Trans. Aut. Control, 33 (1988) 333-340.
[21] C.V.Yen, Near Optimal Control of Dynamic Systems by Fourier-Based State Parameterization, Ph. D. Dissertation, Cameron Mellon University (1989).
[22] Z. Zhihong and Y. Shaopu, Application of van der Pol–Duffing oscillator in weak signal detection, Computers and Electrical Engineering, 41 (2015) 1–8.
[23] V. Ph. Zhuravlev, Van der Pol Oscillator. Technical Applications, Mechanics of Solids, 55 (2020) 132–137.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، CE–231، صص. ۱۶۳–۱۶۸

طرح تسهیم راز نهان نگاری شده مبتنی بر توابع درهم ساز

مجید فرهادی سنگدهی*[آ]، محمد امین خورزانی[ب]، منیره شاملو[ب]

[آ]عضو هیات علمی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان
[ب]دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
طرح تسهیم راز
نهان نگاری
توابع درهمساز

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله، ابتدا طرح پیشنهادی که در واقع ترکیب نهان نگاری و توابع همساز با طرح‌های تسهیم راز عنوان یک نوآوری ارائه می‌شود. سپس پیاده سازی‌های نرم افزاری سهم‌های تصویری و بازسازی آنها انجام می‌شود. در ادامه به مقایسه بین طرح پیشنهادی و طرح‌های گذشته می‌پردازیم..

۱. مقدمه

۱.۱. تسهیم راز مبتنی بر نهان نگاری[1]

اشتراک گذاری اطلاعات در اینترنت اشیاء[2] و امنیت این اشتراک گذاری اطلاعات یک انگیزه قوی برای استفاده از طرح‌های تسهیم راز می‌باشد. طرح تسهیم راز باعث می‌شود که راز میان مجموعه‌ای از شرکت‌کنندگان طوری تسهیم شود که تنها زیرمجموعه‌های از پیش تعیین شده بتوانند راز را بازسازی کنند.
در سال ۱۹۷۹ میلادی طرح تسهیم راز آستانه‌ای (t,n) توسط بلاکلی [۱] و شامیر [۵] به طور مستقل پیشنهاد شدند. طرح بلاکلی براساس هندسه متناهی و طرح شامیر بر اساس درون‌یابی لاگرانژ می‌باشد.
در این طرح، واسطه یک راز را در n سهم تصویری قرار می‌دهد و آنها را بین n شرکت‌کننده توزیع می‌کند. هر k شرکت‌کننده احراز اصالت شده می‌توانند راز را با ترکیب سهم‌های تصویری خود به دست آورند. طرح تسهیم راز مبتنی بر نهان نگاری دو مرحله اصلی دارد:

۱. مرحله تسهیم راز
۲. مرحله بازسازی راز

*سخنران
پست الکترونیک : farhadi@du.ac.ir (مجید فرهادی سنگدهی)، mohammadaminkhorzani@gmail.com (محمد امین خورزانی)، shamloomonire@gmail.com (منیره شاملو)

[1]Steganography based secret sharing
[2]Internt of things(TOT)

در مرحله توزیع راز، راز به n سهم دودویی تجزیه می‌شود و این n سهم به یک مولد Gen داده می‌شود تا n سهم تصویری تولید شود. سپس یک کد احراز اصالت دودویی توسط واسطه تولید می‌شود که به سهم‌های تصویری نهان نگاری می‌شود. در مرحله بازسازی راز، این n شرکت‌کنندگان با نهانگشایی سهم‌های تصویری خود، به سهم تصویری و کد احراز اصالت دسترسی پیدا می‌کنند. سهام‌داران با ترکیب k سهم تصویری قادر به تولید راز می‌شوند [۳].

۱.۲. *تسهیم راز مبتنی بر توابع درهم‌ساز*[3]

در این طرح، راز r توسط واسطه بین n شرکت‌کننده $P_1, P_2, \dots, P_n$ به اشتراک گذاشته می‌شود. هر زیرمجموعه مجاز می‌تواند تمام راز را بازسازی کند.

مرحله راه‌اندازی: فرض کنید واسطه می‌خواهد r راز $h_1, h_2, \dots, h_r$ را بین n شرکت‌کننده $P_1, P_2, \dots, P_n$ به اشتراک بگذارد. واسطه به طور تصادفی n سایه $s_1, s_2, \dots, s_n$ تولید می‌کند و این سایه‌ها را از طریق کانال امن به شرکت‌کنندگان ارسال می‌کند. سپس واسطه همه زیرمجموعه‌های مجاز را محاسبه کرده و مقادیر

$$h_{v_i} = H(M_{prtv,i}), \qquad i = 1, 2, \dots, w \quad \text{و} \quad c_{ij} = h_{v_i} \oplus h_j, \quad i = 1, 2, \dots, w, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

را محاسبه می‌کند.

مرحله بازسازی وقتی شرکت‌کنندگان یک زیرمجموعه مجاز $\{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ (کوچکترین مجموعه مجاز) گرد هم جمع می‌شوند، می‌توانند $h_{v_i} = H(M_{prti,i})$ را محاسبه کرده و از تابلوی اعلان عمومی C_{ij} به دست آورند. بنابراین، آن‌ها می‌توانند رازهای $h_1, h_2, \dots, h_r$ را بازسازی کنند [۲].

۱.۳. *نهان‌نگاری تصویر مبتنی بر توابع درهم‌ساز*

این الگوریتم یک الگوریتم جانشانی می‌باشد که فرستنده آن را اجرا می‌کند. هدف این الگوریتم، جانشانی یک پیام متنی رمزگذاری شده در یک تصویر پوششی است. ورودی این الگوریتم شامل دو بخش است:

۱. پیام متنی رمزگذاری شده
۲. تصویر پوشش که قرار است پیام در آن جاسازی شود.

خروجی این الگوریتم نهان نگاری تصویر است که پیام متنی رمزگذاری شده در آن جانشانی شده است.
مراحل اجرای این الگوریتم به شرح زیر است:

ابتدا پیام متنی رمزگذاری شده و تصویر پوشش را می‌خواند.
سپس برای امن‌سازی پیام، از یکی از دو روش رمزنگاری سزار یا ویگنر استفاده می‌کند.
آنگاه به صورت پیکسل به پیکسل تصویر را در نظر می‌گیرد.
برای هر پیکسل، کم‌اهمیت‌ترین بیت آن را با استفاده از یک تابع درهمساز پیدا می‌کند. تابع درهمساز عبارتست از:

$$SB = \text{mod}(SB1, 4) \qquad SB1 = \text{mod}(((i-1) \times \text{height} + j), 13)$$

سپس بیت پیام را با بیت کم‌اهمیت پیکسل جایگزین می‌کند.
در صورتی که مقدار پیکسل افزایش یافته باشد، بیت‌های سمت راست بیت تغییر یافته را با صفر جایگزین می‌کند و اگر مقدار پیکسل کاهش یافته باشد، بیت‌های سمت راست بیت تغییر یافته را با یک جایگزین می‌کند.
در نهایت MSE[4] و PSNR[5] را محاسبه کرده و تصویر نهان نگاری شده را ذخیره می‌کند.
این الگوریتم به صورت پیکسل به پیکسل عمل می‌کند و با استفاده از روش‌های رمزنگاری و جایگزینی بیت‌های کم‌اهمیت، پیام متنی را در تصویر پوشش جاسازی می‌کند.

این الگوریتم همچنین یک الگوریتم جانشانی است که در سمت گیرنده اجرا می‌شود. مراحل اجرای این الگوریتم به شرح زیر است:

ابتدا اندازه پیام متنی (S) را تعیین می‌کند و آن را برابر ۸ قرار می‌دهد.
سپس یک رشته بیتی خالی به نام "بیت‌های استخراج شده" ایجاد می‌کند.

[3] Hash based secret sharing
[4] Mean Squared Error
[5] Peak Signal-to-Noise Ratio

آنگاه تصویر را به صورت پیکسل به پیکسل در نظر می‌گیرد.
برای هر پیکسل، اگر بیت‌های پیام باقی مانده باشد:
۱. کم‌اهمیت‌ترین بیت پیکسل را با استفاده از تابع درهمساز مورد استفاده در سمت فرستنده پیدا می‌کند. این الگوریتم عبارتست از:

$$SB = \mathrm{mod}(SB۱, ۴) \qquad SB۱ = \mathrm{mod}(((i-۱) \times \mathrm{height} + j), ۱۳)$$

۲. بیت کم‌اهمیت پیکسل را در رشته "بیت‌های استخراج شده" ذخیره می‌کند.
۳. تمام بیت‌های استخراج شده را در یک جدول ۸ ستونی قرار می‌دهد.
۴. بیت‌های استخراج شده را به کاراکترها تبدیل می‌کند.
۵. رمزگشایی پیام با استفاده از رمزنگاری سزار یا ویگنر انجام می‌دهد.
۶. پیام رمزگشایی شده را چاپ می‌کند.

این الگوریتم به صورت پیکسل به پیکسل عمل می‌کند و با استفاده از روش‌های رمزنگاری و استخراج بیت‌های کم‌اهمیت، پیام متنی رمزگذاری شده را از تصویر پوشش استخراج می‌کند [۴].

در ادامه این مقاله ابتدا طرح پیشنهادی که در واقع ترکیب نهان نگاری و توابع همساز با طرح‌های تسهیم راز عنوان یک نوآوری ارائه می‌شود. سپس پیاده‌سازی‌های نرم‌افزاری سهم‌های تصویری و بازسازی آنها انجام می‌شود. و در ادامه به مقایسه بین طرح پیشنهادی و طرح‌های گذشته پرداخته می‌شود.

۲. روش پیشنهادی

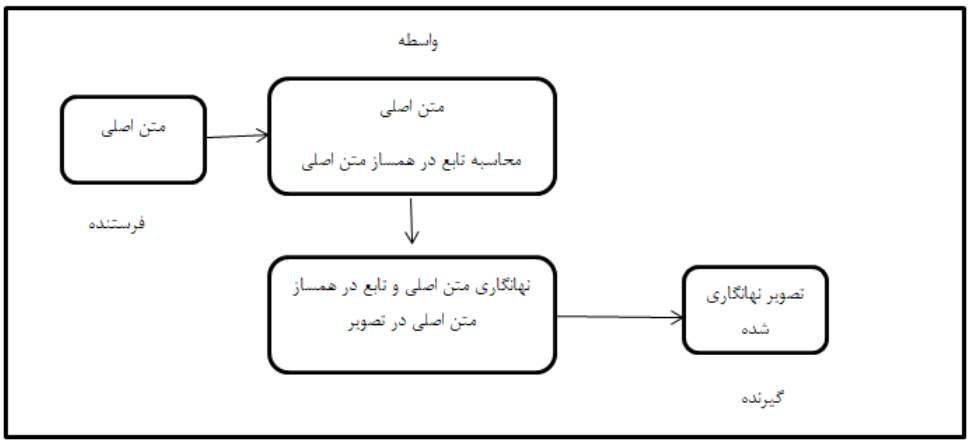
هدف از نگارش این مقاله ترکیب مفاهیم توابع در همساز، نهان نگاری تصویر و تسهیم راز می‌باشد که با استفاده از مزایای هر بخش به یک سیستم تسهیم راز قوی دسترسی پیدا کنیم.

۲.۱. *مراحل اشتراک گذاری راز*

۱. پیامی که فرستنده قصد دارد ارسال کند، در اختیار واسطه قرار می‌دهد.
۲. واسطه r راز را با استفاده از تابع در همساز تولید می‌کند $h_۱, h_۲, \ldots, h_r$.
۳. با استفاده از الگوریتم:

$$SB۱ = \mathrm{mod}(((i-۱) * \mathrm{height} + j), ۱۳), \qquad SB = \mathrm{mod}(SB۱, ۴)$$

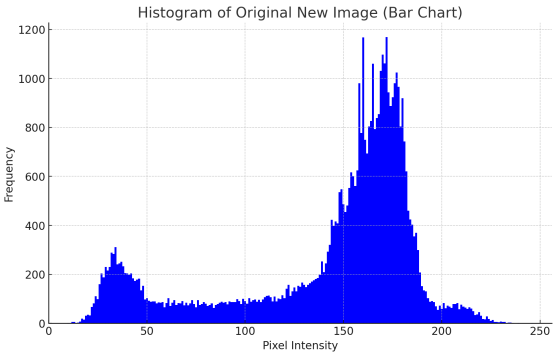
واسطه راز و تابع در همساز آنها را در تصویر با استفاده از الگوریتم نهان‌نگاری پنهان می‌کند.
۴. در نهایت، MSE و PSNR را محاسبه کرده و تصویر نهان‌نگاری شده را ذخیره می‌کند.



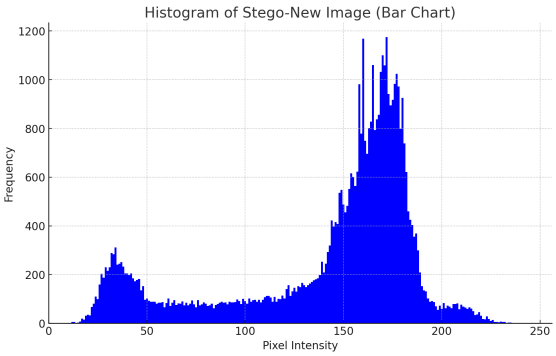
شکل ۱: مرحله اشتراک گذاری راز

جدول ۱: نتایج محاسبه MSE و PSNR

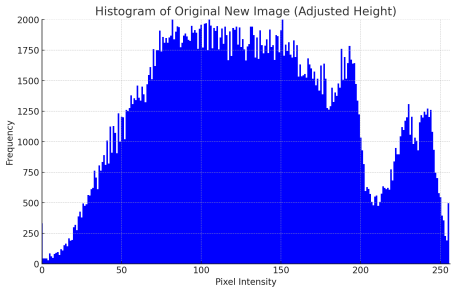
ردیف	PSNR	MSE	تصویر اصلی	تصویر نهان نگاری شده
۱	۷۷٫۸۲	۰٫۰۰۱۰۷	twidthtwidth.	twidthtwidth.
۲	۷۹٫۳۴	۰٫۰۰۰۷۶	twidthtwidth.	twidthtwidth.
۳	۷۹٫۳۱	۰٫۰۰۰۷۴	twidthtwidth.	twidthtwidth.
۴	۸۸٫۰۰	۰٫۰۰۰۱۰	twidthtwidth.	twidthtwidth.



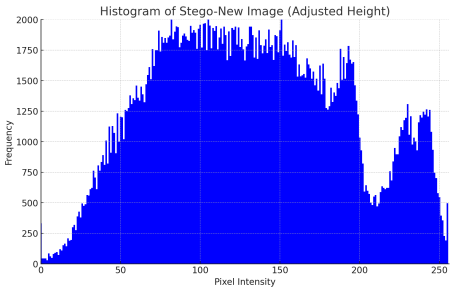
(آ) هیستوگرام تصویر اصلی



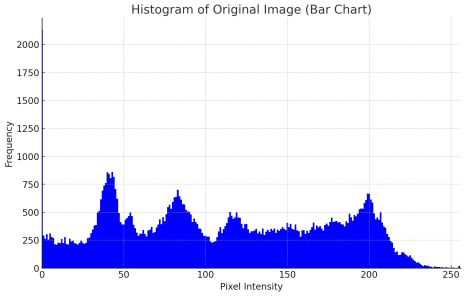
(ب) هیستوگرام تصویر نهان نگاری شده



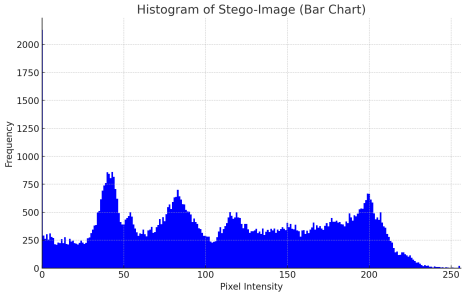
(آ) هیستوگرام تصویر اصلی



(ب) هیستوگرام تصویر نهان نگاری شده



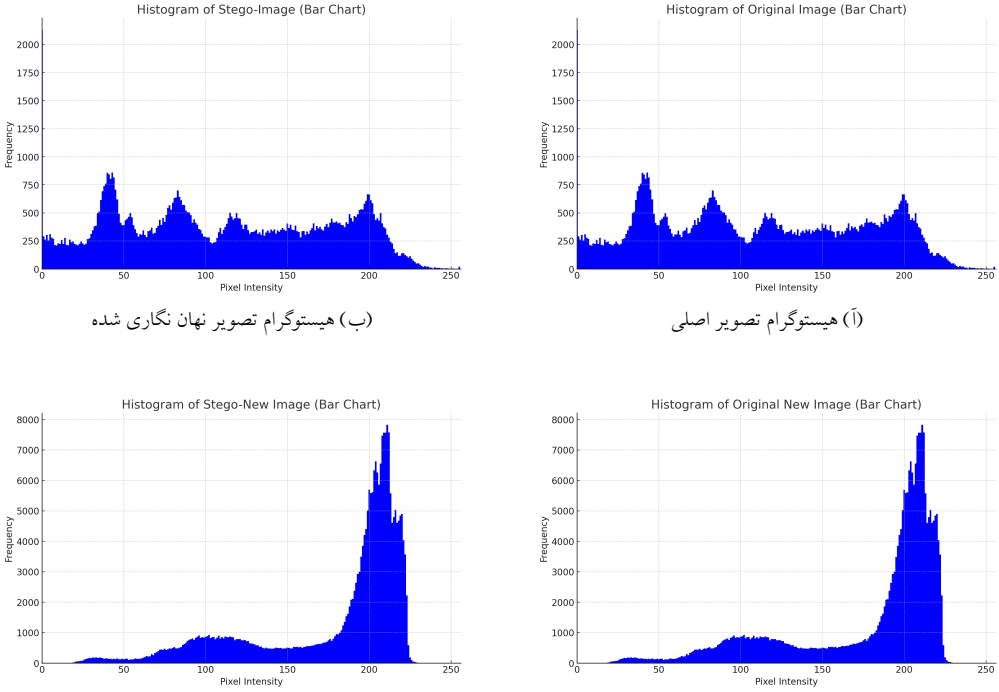
(آ) هیستوگرام تصویر اصلی



(ب) هیستوگرام تصویر نهان نگاری شده

۲.۲ . *مراحل بازسازی راز*

۱. گیرنده با استفاده از الگوریتم‌های نهان‌گشایی تصویر دریافت شده را نهان‌گشایی می‌کند.



(آ) هیستوگرام تصویر اصلی (ب) هیستوگرام تصویر نهان نگاری شده

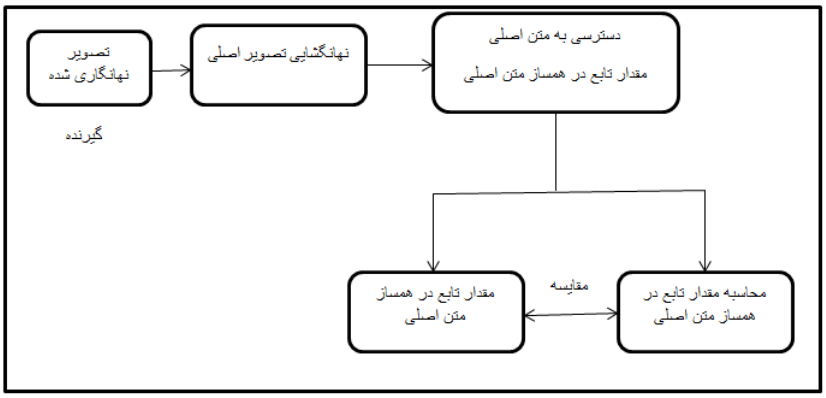
(آ) هیستوگرام تصویر اصلی (ب) هیستوگرام تصویر نهان نگاری شده

شکل ۲: نمودار هیستوگرام

۲. به رازها و مقدار توابع در همساز آنها دسترسی پیدا می‌کند.
۳. با استفاده از تابع در همساز الگوریتم، مقدار در همساز رازها را محاسبه می‌نماید:

$$SB۱ = \mathrm{mod}(((i-۱) \times \mathrm{height} + j), ۱۳), \quad SB = \mathrm{mod}(SB۱, ۴)$$

۴. با مقایسه مقدار در همساز رازها با رازهای ارسال شده، احراز اصالت پیام حاصل می‌شود.
۵. با ترکیب آنها به پیام اصلی دسترسی پیدا می‌کند.



شکل ۳: مراحل بازسازی راز

جدول ۲: مقایسه طرح‌های مختلف تسهیم راز

ویژگی	طرح شامیر [۵]	طرح چام و ژانگ [۳]	طرح فرهادی، مرتضوی، بای‌پور [۶]	طرح تسهیم راز مبتنی بر نهان‌نگاری [۴]	طرح تسهیم راز مبتنی بر نهان‌نگاری در همساز
مقاومت در برابر تقلب شرکت کنندگان	خیر	خیر	بلی	خیر	بلی
مقاومت در برابر تقلب واسطه	خیر	خیر	بلی	خیر	بلی
قابلیت استفاده مجدد از سیستم	خیر	خیر	خیر	خیر	بلی
بدون کانال خصوصی	خیر	خیر	بلی	بلی	بلی

۳. نتیجه‌گیری

با کمک نهان نگاری نیاز به ایجاد کانال خصوصی برای ارتباط بین واسطه و شرکت‌کنندگان رفع می‌شود که در کاهش هزینه ایجاد کانال خصوصی تاثیر بسزایی دارد. از طرفی، با استفاده از توابع در همساز، مسئله تقلب توسط شرکت‌کنندگان و واسطه حل می‌شود. بنابراین، در مجموع یک راه‌حل کم‌هزینه برای دو موضوع اساسی کانال خصوصی و احراز هویت پیدا می‌شود که برای کاربردهایی مانند حوزه اینترنت اشیاء و امنیت آن نقش مهمی دارد.

مراجع

[1] George Robert Blakley. Safeguarding cryptographic keys. in *Managing requirements knowledge, international workshop on*, pages 313–313. IEEE Computer Society, 1979.

[2] Chi Sing Chum and Xiaowen Zhang. Hash function-based secret sharing scheme designs. *Security and communication networks*, 6(5):584–592, 2013.

[3] Kai Gao, Ching-Chun Chang, Ji-Hwei Horng, and Isao Echizen. Steganographic secret sharing via ai-generated photorealistic images. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2022(1):119, 2022.

[4] Zahid Iqbal Nezami, Hamid Ali, Muhammad Asif, Hanan Aljuaid, Isma Hamid, and Zulfiqar Ali. An efficient and secure technique for image steganography using a hash function. *PeerJ Computer Science*, 8:e1157, 2022.

[5] Adi Shamir. How to share a secret. *Communications of the ACM*, 22(11):612–613, 1979.

[۶] فرهادی، بای‌پور، و مرتضوی. طرح تسهیم راز چندگامی چنداستفاده براساس تابع چکیده‌ساز با ساختار دسترسی عمومی. *پدافند الکترونیکی و سایبری*، ۶(۳):۱۰۷–۱۱۵، ۲۰۱۸.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، EM–234، صص. ۱۶۹–۱۷۴

تحلیلی بر روش های حل عددی یک معادله دیفرانسیل جزیی مالی

فرشته گلدوست[آ]

[آ] گروه ریاضی ، واحد بندرانزلی ، دانشگاه آزاد اسلامی بین المللی بندرانزلی، بندرانزلی، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
معادله دیفرانسیل جزیی هستون ۱
روش تکراری وردشی ۲
روش تجزیه آدومین ۳
روش آشفتگی هوموتی۴

چکیده

مدل هستون –کاکس –اینگرسل– راس شکل توسعه یافته ای از مدل بلک شولز– مرتون است که در آن می توان نوسانات قیمت را به صورت تصادفی انتخاب کرد. معادله دیفرانسیل تصادفی هستون می تواند برای مدل سازی شاخص کل بازار سهام نیز استفاده شود. در این مقاله روش هایی برای حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی هستون با شرایط اولیه و مرزی، با روش تکرار متغیر وردشی (VIM) به کار رفته است. راه‌حل‌های عددی به‌دست‌آمده با روش تکرار متغیر با روش‌های تجزیه آدومین (ADM) و روش آشفتگی هوموتوپی (HPM) مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که روش تکرار متغیر وردشی آسان‌تر، سریع تر و پایدارتر از روش تجزیه آدومین است.

۱. مقدمه

عموماً پدیده های طبیعی فیزیکی، مهندسی و حتی مسایل مالی به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی، انتگرالی و یا انتگرو مدل سازی می‌شوند. به دلیل پیچیده بودن روش حل این نوع از معادلات در سال های اخیر محققین معطوف به یافتن روش‌های حل عددی و تحلیلی آن ها شدند. روش تجربه آدومین [۱] به وسیله مهندس آمریکایی ج. آدومین [۲] (۱۹۲۳ – ۱۹۹۶) معرفی گردید. که بر پایه صورت کانونی معادلات و شامل جوابی به صورت سری‌های توانی و عملگری غیر خطی از یک سری چند جمله ای های آدومین می باشد. روش آشفتگی هوموتوپی [۳] هی [۴] (۱۹۹۹) روشی غیر آشفته جایگزین مناسب است که در مواجه با مسائل غیر خطی به کار می رود و برای بسیاری از محققین و دانشمندان روش تکراری وردشی [۵] نیز نقش مهمی در حل این نوع مسائل دارد. این روش توسط ریاضی دان چینی، هی به عنوان یک روش فرایندی مهم برای حل مسائل متعدد گردید. در این مقاله کاربرد حل عددی موارد مطرح شده در ارزیابی آپشن اروپایی مدل تلاطمی هستون –کاکس –اینگرسل– راس [۶] تصادفی مطرح است [۱ – ۳]. که فصل ۲شامل مدل تلاطمی هستون تصادفی، بخش۳ معرفی سه روش عددی ، فصل ۴ شرح چگونگی به کارگیری این روش ها در قیمت گذاری یک آپشن اروپایی [۷] تحت مدل هستون و نتایج عددی است.

*سخنران
پست الکترونیک : f.goldoust1403@gmail.com f.goldoust@iau.ac.ir (فرشته گلدوست)

[1] Adomian Decomposition Method (ADM)
[2] G.Adomian
[3] Homotopy Perturbation Method (HPM)
[4] He
[5] Variational Iterative Method(VIM)
[6] Heston-Cox-Ingersoll-Ross
[7] European Option

۲. مدل تلاطمی هستون تصادفی

فرض کنید که اندازه ریسک ـ خنثی قیمت سهام به صورت زیر تعیین می‌گردد[۴ − ۵].

$$\frac{dS(t)}{dt} = rdt + \sqrt{V(t)}dW_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = (a - b(V(t)))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t)$$

که در آن r، نرخ بهره و پارامترهای a، b، و σ، ثابت های مثبت و $W_1(t)$ و $W_2(t)$، حرکت های براونی تحت اندازه ریسک خنثی با ضریب همبستگی $\rho \in (-1, 1)$، هستند یعنی

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt \quad (2)$$

قیمت ریسک خنثی برای یک خرید توافقی در زمان $t \leq T$،در مدل نوسان تصادفی هستون به صورت زیر است

$$c(t, S(t), V(t)) = E[e^{-r(T-t)}(S(t) - k)^+], 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

معادله دیفرانسیل جزیی برای مقادیر با اختیار اروپایی معادله وابسته به زمان انتقال – انتشار، با مشتق ترکیبی به صورت زیر است

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rs\frac{\partial c}{\partial s} + (a - bv)\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{1}{2}s^2v^2\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + \rho\sigma sv\frac{\partial^2 c}{\partial s\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2v^2\frac{\partial^2 c}{\partial v^2} - rc = 0 \quad (4)$$

در فضای دو بعدی غیر کراندار، با دامنه $v > 0$و $s > 0$، و زمان $0 < t \leq T$، مقادیر $c(s, v, t)$، با زمان $\tau = T - t$، یک اختیار اروپایی است و قیمت سرمایه و نوسان در آن به ترتیب برابر با s و v می باشد. معادله (۴) معمولا با شرایط اولیه و کراندار، تحت مفروضات یک اختیار به کار می رود. شرایط اولیه و مرزی در اختیار خرید اروپایی در این معادله به صورت زیر فرض می شود.

$$c(s, v, t) = max(0, s - k) \quad (5)$$

$$c(0, v, t) = 0$$

که $k > 0$، قیمت اعمال شده است.

۳. روش های عددی

۳.۱ . *روش تکراری وردشی*

معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی عمومی زیر مفروض است[۶]

$$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = 0 \quad (6)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

که در آن

$$L = \frac{\partial}{\partial t}$$

و R، عملگری خطی و $Nu(x,t)$، جمله غیر خطی باشد و R و N، نسبت به t، مشتق جزیی نداشته باشند بنابر روش تکراری وردشی می توان ساختاری تکراری به صورت زیر نوشت

$$U_{n+1}(x,t) = U_n(x,t)\int_0^t \lambda\{LU_n + RU_n + NU_n\}d\tau \quad (7)$$

که λ یک ضریب لاگرانژعمومی [۸] است که می تواند با فرضیه وردشی تعیین گردد و متغیر های RU_n، و NU_n، محدود شده هستند یعنی

$$\delta RU_n = 0, \delta NU_n = 0$$

[8] General Lagrange multiplier

و شرایط پایداری آن ها به صورت زیر بیان می گردد.

$$۱ + \lambda|_{\tau=t} = ۰ \quad (۸)$$

$$\lambda' = ۰$$

پس ضریب لاگرانژ می تواند به صورت

$$\lambda = -۱$$

فرض شود و فرمول تکراری وردشی به صورت زیر بیان می گردد

$$U_{n+۱} = U_n - \int_۰^t \{LU_n + RU_n + NU_n\}d\tau \quad (۹)$$

عبارت دوم سمت راست عبارت تصحیح نام دارد.

۲.۳ . *روش تجزیه آدومین*

$$u - N(u) = f \quad (۱۰)$$

که N عملگری غیر خطی از فضای هیلبرت H به توی H، باشد و f تابع مفروض در فضای H باشد به دنبال $u \in H$، هستیم که در رابطه (۱۰)، صدق کند و هم چنین داشته باشیم

$$u = \sum_{i=۰}^{\infty} u_i \quad (۱۱)$$

و

$$N(u) = \sum_{i=۰}^{\infty} A_n \quad (۱۲)$$

$$u_۰ = f, u_{n+۱} = A_n(u_۰, u_۱, ..., u_n), n = ۰, ۱, ...$$

که A_n ها شامل چند جمله ای هایی از u_n، هستند که چند جمله ای های آدومین نام دارند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$n!A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{i=۰}^{n} \lambda^i u_i)]|_{\lambda=۰}, n = ۰, ۱, ... \quad (۱۳)$$

در روش آدومین، دنباله زیر ساخته می شود

$$S_n = u_۱ + u_۲ + ... + u_n \quad (۱۴)$$

۳.۳ . *روش آشفتگی هوموتوپی*

در این روش جواب به صورت مجموعی از یک سری نامتناهی در نظر گرفته می شود که معمولا به سرعت به جواب دقیق همگرا خواهد بود. برای شرح ایده اولیه این روش معادلات دیفرانسل خطی زیر مفروض است

$$A(u) - f(r) = ۰, r\epsilon\Omega \quad (۱۵)$$

با شرایط مرزی

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = ۰, r\epsilon\Gamma \quad (۱۶)$$

که A یک عملگر دیفرانسیل کلی ، B یک عملگر مرزی ، $f(r)$ عملگر تحلیلی معلوم و Γ مرز دامنه Ω است . عموماً عملگر Aمی تواند به دو عملگر خطی L و غیرخطی N تقسیم گردد. معادله (۱۵) می تواند به صورت زیر بازنویسی شود .

$$L(u)+N(u)-f(r)=۰ \tag{۱۷}$$

که ساختار هوموتوپی

$$H(v,p)=(۱-p)[(L(v)-L(u_۰)]+p[A(u)-f(r)]=۰, r\epsilon\Omega \tag{۱۸}$$

$u_۰$یک تقریب اولیه برای معادله (۱۵) با شرایط مرزی است

۴. روش های حل معادله دیفرانسیل جزئی هستون

در روش تکراری وردشی گسترش یافته در معادله (۴)

$$c_{n+۱}(s,v,t)=c_n(s,v,t)+\int_۰^t \lambda(\tau)[\frac{\partial c}{\partial \tau}-rs\frac{\partial c}{\partial s}-(a-bv)\frac{\partial c}{\partial v} \tag{۱۹}$$

$$-\frac{۱}{۲}s^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial s^۲}-\rho\sigma sv\frac{\partial^۲ c}{\partial s\partial v}-\frac{۱}{۲}\sigma^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial v^۲}+rc]d\tau$$

و برای حل معادله هستون به روش آدومین اگر در معادله (۴) شرط ابتدایی $c(s,v,۰)=max(۰,s-K)$ به کار رود

$$c_{n+۱}(s,v,t)=u_۰(s,v,t)-\int_۰^t [-rs\frac{\partial c}{\partial s}+(a-bv)\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{۱}{۲}s^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial s^۲} \tag{۲۰}$$

$$+\rho\sigma sv\frac{\partial^۲ c}{\partial s\partial v}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial v^۲}-rc]dt$$

و در روش آشفتگی هوموتوپی داریم

$$H(s,v,t)=(۱-p)(L(c)-L(v_۰))+p(\frac{\partial c}{\partial t}-rs\frac{\partial c}{\partial s}-(a-bv)\frac{\partial c}{\partial v} \tag{۲۱}$$

$$-\frac{۱}{۲}s^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial s^۲}-\rho\sigma sv\frac{\partial^۲ c}{\partial s\partial v}-\frac{۱}{۲}\sigma^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial v^۲}+rc)=۰$$

و در نتیجه

$$C=\sum_{n=۰}^{\infty}P^n c_n \tag{۲۲}$$

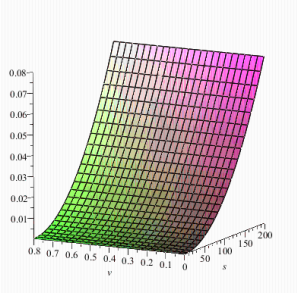
هنگامی که $p\to ۱$، معادله (۲۱) به جواب دقیق همگرا خواهد بود.

۵. نتایج عددی

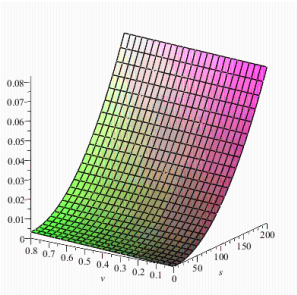
مثال) در این بخش به نتایج عددی مدل هستون با پارامترهای مفروض با روش های ذکر شده می پردازیم

$$\frac{\partial c}{\partial t}+rs\frac{\partial c}{\partial s}+(a-bv)\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{۱}{۲}s^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial s^۲}+\rho\sigma sv\frac{\partial^۲ c}{\partial s\partial v}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲v^۲\frac{\partial^۲ c}{\partial v^۲}-rc=۰ \tag{۲۳}$$

$$T=۱۵, k=۱۰۰, a=۰/۱۶, b=۰/۰۵۵, \sigma=۰/۹, \rho=-۰/۵$$



شکل ۱: قیمت گذاری آپشن اروپایی به روش وردشی



شکل ۲: قیمت گذاری آپشن اروپایی به روش آدومین

جدول ۱: نتایج عددی سه روش بر مدل هستون با پارامترهای معین

C_{VIM}	C_{HPM}	C_{ADM}	$C(s,v,t)$
۲۰۹۵۰۳۸۳۳۲.۰	۴۱۳۲۵۸۳۳۳۳.۰	۴۱۳۲۵۸۳۳۳۳.۰	(۱.۰،۱۰،۱)
۸۲۴۷۴۳۳۷۲۹.۰	۸۱۴۰۶۳۴۶۶۶.۰	۸۱۴۰۶۳۴۶۶۶.۰	(۲.۰،۵۰،۲)
۶E۱۱۴۷۸۱۴۹۷۰.۰	۶E۱۷۳۴۵۱۹۶۸۰.۰	۶E۱۷۳۴۵۱۹۶۸۰.۰	(۳.۰،۷۰،۴)
۷E۱۹۵۰۱۷۵۹۸۳.۰	۷E۱۳۳۵۸۷۷۴۴۰.۰	۷E۱۳۳۵۸۷۷۴۴۰.۰	(۴.۰،۹۰،۶)
۷E۷۷۹۶۵۰۵۶۷۵.۰	۷E۷۴۸۵۸۴۸۷۰۲.۰	۷E۷۴۸۵۸۴۸۷۰۱.۰	(۵.۰،۱۲۰،۸)
۸E۲۳۱۷۳۷۵۱۱۳.۰	۸E۲۹۳۷۳۷۴۸۵۶.۰	۸E۲۹۳۷۳۷۴۸۵۵.۰	(۶.۰،۱۵۰،۱۰)
۹E۲۵۷۶۴۱۴۳۱۴.۰	۹E۲۱۹۸۷۳۳۱۹۷.۰	۹E۲۱۹۸۷۳۳۱۹۸.۰	(۸.۰،۲۰۰،۱۴)

۶. نتیجه گیری

روش های تکراری معرفی شده در مقاله برای حل بخش عمده ای از مسایل غیر خطی، کارآ، آسان و با دقت کافی است، که روش های تجزیه آدومین، آشفتگی هوموتوپی و تکراری وردشی برای کسب جواب تقریبی معادله دیفرانسیل جزیی هستون کاکس اینگرسل راس مورد استفاده قرار گرفت. تکنیک های مورد بحث ، ابزار های قدرتمندی برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی گوناگون است .به طور مثال از مزایای به کارگیری روش تکراری وردشی نسبت به روش تجزیه آدومین صرفه جویی در زمان و سرعت این روش به دلیل پرهیز از محاسبه چند جمله ای های آدومین در هرمرحله است . جدول عددی جواب های تقریبی نیز با به کارگیری پاارمترهای انتخاب شده در مثال مطرح شده مقایسه ای بر روش های به کار رفته می باشد.

مراجع

[1] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics, J, Math. Anal. Appl. 135(1988) 501-544.

[2] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Comput. Math. Appl. Mech. Eng. 178 (1999) 257- 262. iteration method, Q1 Int. J. Numer. Methods Eng. 73 (2008) 1836-1843

[3] S.Abbasbandy andA. Shirzadi, The variational iteration method for a class of eightorder boundary value differential equations, Z. Naturforsch. A 63(a) (2008) 745-751.

[4] S. L. Heston, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Rev. Finan. Stud. 6 (1993) 327- 343.
[5] S. E. Shreve, Stochastic Calculus for finance II. Springer, New York, 2004.
[6] E. Babolian, J. Biazar, Solution of a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind, Far East J. Math. Sci. 2 (6) (2000) 935–945.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–242، صص. ۱۷۵–۱۷۷

فرایند یاددهی و یادگیری در آموزش ریاضی

محمدرضا یاسمیان*[آ]، مریم مسعودی آرانی[ج]، سید محسن جدی آرانی[آ،ج]

[آ]گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران
[ب]گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران
[ج]گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :

آموزش ریاضی، روش‌های تعاملی
روش‌های نوین، ارزیابی مؤثر

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97C70
97D40
97D30

چکیده

ریاضی یکی از مهمترین شاخه‌های علوم پایه است که در بسیاری از رشته‌های دیگر کاربرد فراوان دارد و خیلی از رشته‌های علوم مهندسی، اقتصاد، حسابداری و مدیریت بدون ریاضی هویت پیدا نمی‌کنند ولی موضوع درک غیر صحیح از ریاضی و روش‌های آموزش نادرست، مشکلی را ایجاد کرده است و درعلاقه دانشجویان هم به این درس پایه تاثیر منفی گذاشته است.
روشهای سنتی تدریس ریاضی نیز در این امر بی‌تاثیر نیست این پژوهش به دنبال یافتن راه حل مناسب برای این مشکل است و به ارائه روش‌هایی جهت تدریس ریاضی پرداخته می‌شود.

۱. مقدمه

تدریس ریاضیات بدون ارائه کاربرد مفهومی ندارد و برای دانشجو جذابیت ایجاد نخواهد کرد و به دانشجویان باید آموخته شود که ریاضیات تنها حفظ فرمول و قواعدی شبیه مشتق و انتگرال نیست [3].
باید تأکید کرد که نرم‌افزارهای موجود در ریاضی، رشته‌های متفاوت مهندسی، حسابداری و حتی ماشین‌حساب جدای از مفاهیم ریاضی نیست به عبارتی دیگر وجود هوش مصنوعی و با بیان بهتر زبان‌های متفاوت برنامه نویسی در کامپیوتر و نتیجه آن نرم افزارهای موجود نه تنها به کاربرد ریاضی لطمه نمی‌زند بلکه برای تکمیل کردن این نرم افزارها باید به شاخه‌های متفاوت ریاضی تسلط داشت.
استاد ریاضی باید درکلاس، خود را مکلف بداند که دانشجویان را تشویق به کنجکاوی کند و این امر اتفاق نخواهد افتاد مگر اینکه با استفاده از مثال‌های واقعی وکاربردی ارتباط ریاضی با زندگی واقعی را روشن سازد.
آموزش ریاضی نیاز به تنوع دارد و با استفاده از روش‌های تعاملی به درک عمیق مسئله کمک کرد و باید دقت داشت ارائه سر فصل‌ها برای نسل جدید باید به گونه‌ای باشد که دانشجو در کلاس احساس کند ریاضی حفظ فرمول نیست. در این مقاله به بررسی اصول روش‌های نوین در آموزش ریاضی پرداخته می‌شود [5].

۲. گام های مؤثر در آموزش ریاضی

اولین گام در تدریس ریاضی، این است که در جلسات اول و دوم کلاس به دانشجو اطمینان داده شود که ریاضی فقط برای افراد باهوش نیست و تا این تغییر نگرش در کلاس اتفاق نیفتد آموزش ریاضی مفهومی پیدا نخواهد کرد. حال برای تغییر این نگرش استاد ریاضی باید در جلسه

*سخنران
پست الکترونیک : myasamian@yahoo.com (محمدرضا یاسمیان)، masoudiar@gmail.com (مریم مسعودی آرانی)، mohsenjaddi@gmail.com (سید محسن جدی آرانی)

اول در هر درس بداند ریاضی را برای چه رشته‌ای از علوم مهندسی یا رشته‌های انسانی قرار است تدریس کند و جلسه اول فقط به بیان مثال‌های کاربردی از مفاهیم ریاضی در رشته مربوطه بپردازد و سعی کند دانشجویان را در حل مثال‌های کاربردی که مطرح می‌کند درگیر کند [1]. به طور مثال به کاربرد مشتق در طراحی کانال‌های عبوری کشتی در دریاهای آزاد بپردازد یا در رشته‌های اقتصاد، حسابداری و مدیریت از کاربرد مشتق در نقطه تعادل یا سر به سر، ماکزیمم سود یا مینیمم هزینه را مطرح کند و در رشته عمران کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت را مطرح کند یا در محاسبه مرکز ثقل مفهوم انتگرال چندگانه را ارائه کند. بنابراین اگر استاد ریاضی بدون توجه به رشته دانشجویان در کلاس شروع به تدریس کند و به سطح علمی قبلی دانشجو توجه نداشته باشد و درسی به نام ریاضی عمومی (۱) را برای تمامی رشته‌ها به طور یکسان و با مدل سخنرانی ارائه کند نه تنها آموزش ریاضی به طور صحیح اتفاق نخواهد افتاد بلکه تا پایان ترم فقط سرفصل‌های دیکته شده را تدریس خواهد کرد و هیچ گونه یادگیری اتفاق نخواهد افتاد.

دومین گام در تدریس ریاضی موفق، بحث روانشناسی آموزش ریاضی است. در جلسات اول، استادی در تدریس ریاضی موفق خواهد بود که بتواند با اضطراب دانشجویان کلاس تا پایان ترم مقابله کند. دانشجو باید اطمینان پیدا کند استاد، توانایی انتقال مفهوم ریاضی را دارد و در جلسه اول دانشجو درک کند که استاد توانایی تدریس و تسلط به موضوع را دارد. دانشجو باید به این نتیجه برسد که با این مدل تدریس استاد، توانایی کسب نمره خوب یا حداقل نمره پاسی را دارد [3]. استادی که در جلسه اول صحبت از سخت گیری می کند نمی تواند دانشجو را جذب کند و در نتیجه نه تنها آموزش ریاضی اتفاق نخواهد افتاد بلکه دانشجو را از کلاس رانده و هیچ تعاملی در کلاس اتفاق نخواهد افتاد. استاد ریاضی باید بداند در کلاس صحبت از تعداد بالای افتاده‌های ترم قبل کمکی نخواهد گرفت.

با کاهش استرس، استاد ریاضی می‌تواند مفاهیم را ارائه کند و جلب توجه کند. هر نوع بیانی از استاد ریاضی که در دانشجو اضطراب ایجاد کند لطمه‌ای برای آموزش ریاضی خواهد بود.

سومین گام که برای تدریس ریاضی لازم است تکرار مفاهیم اصلی جلسات قبل است. در شروع هر جلسه فقط چند دقیقه عنوان‌های گفته شده جلسه قبل را مطرح کرده و در صورت امکان مثال حل شود این امر به تقویت مهارت حل مسئله کمک خواهد کرد و این روش در آموزش ریاضی به نحوه آموزش موثر در ریاضی معروف است [4].

چهارمین گام در تدریس ریاضی این است ، استاد ریاضی در جلسه اول سطح علمی دانشجو را در نظر بگیرد. دانشجویی که در یک دانشگاهی تحصیل می کند که در رتبه‌های برتر کنکور در کلاس هستند تا دانشگاهی که دانشجویان آن بر اساس سوابق تحصیلی و بدون آزمون جذب شده اند تفاوت در روش تدریس را می‌طلبد. این مفهوم یکی از معضلات بزرگ اساتید ریاضی است که نمی توانند خود را با شرایط موجود وفق دهند و به طور عامیانه این مشکل را مشکل دانشجو می داند و دانشجو را مکلف می‌داند خودش را با کلاس وفق دهد. بنابراین استادی که از توانایی‌های دانشجوی خود بی‌اطلاع است آموزش ریاضی صحیح اتفاق نخواهد افتاد و فقط به تعداد افتاده‌های درس در دانشگاه افتخار خواهد کرد. باید توجه کرد که میزان استعداد و علاقه همه دانشجویان یکسان نیست و هنر معلم در این است که بتواند دانشجوی ضعیف را به دانشجوی متوسط و دانشجوی متوسط را به دانشجوی قوی تبدیل کند و استادی موفق خواهد بود که احترام به تفاوت‌های اجتماعی، فرهنگی و توانایی‌های فردی را فراموش نکند.

پنجمین گام ارزیابی درس است. ارزیابی‌ها باید به فرم کوئیز، میان‌ترم و پایان‌ترم اجرا شود و بارم بندی‌های منطقی در هر مورد انتخاب گردد. کشورهای صنعتی پیشرفته ثابت کرده‌اند که موفقیت در آموزش ریاضی فقط به تدریس منتهی نمی‌شود بلکه ارزیابی شبیه به کوئیز و پروژه به مراتب یادگیری را افزایش داده و ایجاد علاقه کرده و دانشجو را مکلف خواهد کرد تا مفاهیم تدریس شده را به طور مستمر مطالعه کند و نتیجه مطلوب حاصل شود [2]. نکته دومی که اساتید باید به آن توجه کنند این است که امتحان علاوه بر ارزیابی دانشجو ازیادگیری مفاهیم تدریس شده، امتحانی برای خود استاد خواهد بود که آیا توانایی داشته است مفاهیم را آموزش دهد؟ نکته نهایی در امتحان، این است که باید اساتید توجه داشته باشند مطرح کردن سوال‌های سخت جایگاهی در جلسه آزمون با وقت محدود، ندارند و جای طرح این نوع سؤالات در تکلیفی است که می‌تواند به دانشجو داده شود تا در فرصت کافی فکر و حل کند و به استاد تحویل دهد. در نتیجه استادی که در بحث نمره فقط به نمره میان ترم و پایان ترم اکتفا کند به غیر از دل زدگی از ریاضی نتیجه دیگری حاصل نخواهد کرد.

گام ششم و آخر اینکه استاد باید در ورود به کلاس دارای پیشینه خوب باشد. دانشجو از اینکه این درس را با این استاد انتخاب کرده است احساس رضایت و خشنودی داشته باشد و از همان جلسه اول از قضاوت‌هایی که در مورد این استاد شنیده است دچار استرس نشده باشد و از روی اجبار این استاد را انتخاب نکند. اساتیدی که در ترم‌های قبل دارای تعداد افتاده‌های زیاد وسخت‌گیری‌های غیر منطقی هستند، نمی‌توانند در کلاس درس موفق باشند و استادی موفق خواهد بود که در نتیجه تعامل با دانشجویان به بازخورد دانشجو هم توجهی داشته باشند.

نتیجه اصلی

معلمی یک هنر است. به عبارتی دیگر هر فردی که دکتری ریاضی دارد لزوما معلم ریاضی نیست. استاد ریاضی بودن به مفهوم شغل و کسب درآمد نیست بلکه یک حرفه است که علاوه بر مشخصه علم ریاضی باید شاخصه‌هایی از قبیل خوش اخلاقی، فن بیان، تاثیر گذاری، توانایی ایجاد انگیزه و امید، نظم، خلاقیت، الگو بودن، همدلی و احترام را نیز داشته باشد. بنابراین معلمی فقط و فقط انتقال دانش نیست بلکه ترکیبی از شاخص های گفته شده است. در نتیجه استاد باید سعی کند در ضمن داشتن جدیت و ملزم کردن دانشجو به رعایت احترام و عبور نکردن از خط قرمزها به دانشجویان امروزی اطمینان دهد که همواره به عنوان راهنما در کنارش خواهد بود و علاوه بر تدریس ریاضی به عنوان یک مشاور در رسیدن دانشجو به اهدافش و ایجاد شغل مناسب کمک خواهد کرد. در نهایت استاد موفق، استادی است که دانشجو حتی بعد از فارغ

التحصیلی روی کمک و مشاوره‌های او حساب باز کند و لازمه رسیدن به چنین مرحله‌ای فقط و فقط این است که استاد علاوه بر علم تخصصی که دارد مطالعه‌ای در زمینه کتاب‌های اجتماعی، فرهنگی، روش‌های موفقیت و غیره هم داشته باشد.

مراجع

[1] Bakri M Awaji, Rasha Hashim Abdel-Hamid, Ibrahim Alhussain Khalil, Rully Charitas Indra Prahmana, et al. Mathematics teachers' practices in light of the effective teaching practices. *Infinity Journal*, 14(1):1–20, 2025.

[2] Riyan Hidayat and Zanaton H Iksan. The effect of realistic mathematic education on students' conceptual understanding of linear progamming. *Creative Education*, 6(22):2438–2445, 2015.

[3] Steve Leinwand, Daniel J Brahier, DeAnn Huinker, Robert Quinlyn Berry, Frederick L Dillon, Matthew R Larson, Miriam A Leiva, Wayne Gary Martin, and Margaret Schwan Smith. *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics, 2014.

[4] Najihah Mustaffa, Zaleha Ismail, Zaidatun Tasir, and MNHM Said. The impacts of implementing problem-based learning (pbl) in mathematics: A review of literature. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*, 6(12):490–503, 2016.

[5] John A Van de Walle, LouAnn H Lovin, Karen S Karp, and Jennifer M Bay-Williams. *Teaching student-centered mathematics: developmentally appropriate instruction for grades pre-K-2 (volume I)*, volume 1. Pearson, 2017.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، IS–245، صص. ۱۷۸–۱۸۱

برآورد پارامتر توزیع X لیندلی در حضور داده های سانسور هیبرید

نسرین بلوچ رودباری*[آ]

[آ] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵ ، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
توزیع لیندلی ، درستنمایی ماکسیمم، توزیع پسین ، سانسور هیبرید.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله برآورد کلاسیک و بیزی توزیع X لیندلی (XLD) را با در نظر گرفتن طرح سانسور هیبرید مطالعه می کنیم. برآورد کلاسیک را با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی و برآورد بیزی پارامتر توزیع X لیندلی را با توجه به تابع زیان مربع خطا در حضور داده های سانسور هیبرید بدست می آوریم. در نهایت با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو نتایج تحقیق را ارائه می دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی یک پارامتری توزیع لیندلی با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^{۲}(۱+x)e^{-\theta x}}{۱+\theta} & x,\theta>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases} \qquad (۱)$$

که اولین بارتوسط لیندلی[۱] تعریف شد. زقدودی وهمکاران [۲] برای نخستین بار توزیع X لیندلی که تلفیقی از توزیع نمایی و توزیع لیندلی است را ارائه دادند. ایده این مقاله براساس تلفیق خاصی از توزیع نمایی و لیندلی به منظور ساختن توزیع X لیندلی (XLD) است. انگیزه تلفیق دو توزیع معروف و ساختن این توزیع جدید ، ساختن یک توزیع کاربردی یک پارامتری با فرمول های میانگین ، واریانس ، کارایی ، چولگی و کشیدگی و شاخص های پراکندگی ساده تر است و ممکن است در بسیاری از موارد به سرعت تقریب زده شوند. ازین توزیع در تحلیل ابولا، کرونا و ویروس نیپا و برازش های بسنده استفاده می شود. آلوتایبی و همکاران [۳] استنباط کلاسیک و بیزی پارامترهای توزیع X لیندلی را با استفاده از هیبرید پیشرونده نوع دوم با کاربردهایی در مهندسی شیمی ارائه دادند. قابلیت اطمینان و توابع نرخ خطر را مریم و همکاران [۴] بر ای توزیع X لیندلی توانی در کاربردهایی از کوید ۱۹ بررسی کردند. در حوزه آنالیز بقا، خوجا وهمکاران [۵] توزیع X لیندلی بریده شده را با تاکید برآورد پارامتر تحت داده های سانسور شده معرفی کردند . یک رویکرد دوگانه، ترکیبی از ماکسیمم درستنمایی سنتی و تکنیک بیزی، برای برآورد پارامترهای مدل استفاده شد. احسن الحق و همکاران [۶] توزیع X لیندلی پواسن را برای داده های شمارشی در قابلیت اطمینان پیشنهاد کردند. مطیری و همکاران [۷] توزیع X لیندلی را به منظور بررسی رابطه بین گشتاورهای بریده شده و توابع نرخ خطر شکست معکوس و توابع نرخ خطر ، بررسی کردند. در ادامه تحقیقات ، نویسندگان زیادی توزیع X لیندلی را با توزیع های دیگر تلفیق کردند

*سخنران
پست الکترونیک : n_roodbary@pnu.ac.ir (نسرین بلوچ رودباری)

.([۸]،[۹]،[۱۰]،[۱۱]،[۱۲]،[۱۳]) . با بررسی های انجام شده هیچکدام از نویسندگان توزیع X لیندلی را در حضور داده های سانسور شده ی هیبرید بررسی نکرده اند . لذا در این مقاله ما برآورد پارامترهای این توزیع را تحت داده های سانسور شده ی هیبرید نوع با مدلی که کوندو و پرادان [۱۴] ارائه داده اند، بدست می آوریم.
سازماندهی مقاله بدین صورت می باشد. دربخش۲ ، مدل را تحت فرض داده های سانسور شده ی هیبرید توصیف می کنیم. در بخش۳ برآورد پارامتر با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم و در بخش ۴ ، برآورد بیزی پارامتر مجهول را با توجه به تابع زیان مربع خطا بدست می آوریم. مطالعات شبیه سازی و نتیجه گیری در بخش ۵ ارائه شده است.

۲. متدولوژی

فرض کنیدX دارای توزیع X لیندلی با پارامتر θ باشد. در این صورت تابع چگالی X و تابع توزیع آن به صورت است:

$$f_{XL}(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^{۲}(۲+\theta+x)e^{-\theta x}}{(۱+\theta)^{۲}} & x,\theta>۰\\ ۰ & o,w\end{cases} \qquad (۲)$$

$$F_{XL}(x;\theta)=۱-\left(۱+\frac{\theta x}{(۱+\theta)^{۲}}\right)e^{-\theta x} \quad x>۰,\theta>۰ \qquad (۳)$$

فرض کنید n مولفه تحت شرایط یکسان در یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. طول عمر هر مولفه متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. آزمایش زمانی متوقف می شود که تعداد از پیش انتخاب شده ی R بعد از مولفه ی n ام شکست بخورد یا به زمان از پیش تعیین شده ی T، در این آزمایش برسد. فرض کنید که مولفه های شکست خورده جایگزین نشده و در طول آزمایش حداقل یک شکست مشاهده شود. بنابراین، تحت این طرح سانسور یکی از دو مدل زیر را داریم:

I: case $\{x_{۱:n}<\cdots<x_{R:n}\}$ اگر $x_{R:n}<T$
II: case $\{x_{۱:n}<\cdots<x_{d:n}\}$ اگر $۱\le d<R, x_{d:n}<T<x_{d+۱:n}$

که $x_{۱:n}<\cdots<x_{n:n}$ نشان دهنده‌ی زمان‌های شکست مرتب شده‌ی مشاهده شده از مولفه‌های آزمایش هستند.برای نمایش شماتیک طرح سانسور هیبرید می توان به کوندو و پرادان [۱۴] اشاره کرد. ممکن است که ما مشاهده $x_{d+۱:n}$ را نبینیم اما $x_{d:n}<T<x_{d+۱:n}$ به معنی اینست که شکست d ام قبل از T رخ داده و هیچ شکستی بین $x_{d:n}$ و T رخ نداده است.
براساس داده های مشاهده شده، تابع درستنمایی دو مورد ارائه شده، بصورت زیر می باشد:
تابع درستنمایی حالت اول:

$$l(x\mid\theta)=\frac{\theta^{۲R}}{(۱+\theta)^{۲R}}\prod_{i=۱}^{R}(۲+\theta+x_{i:n})\,e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{R}x_{i:n}+(n-R)x_{R:n}\right\}}\left(۱+\frac{\theta x_{R:n}}{(۱+\theta)^{۲}}\right)^{n-R} \qquad (۴)$$

تابع درستنمایی حالت دوم:

$$l(x\mid\theta)=\frac{\theta^{۲d}}{(۱+\theta)^{۲d}}\prod_{i=۱}^{d}(۲+\theta+x_{i:n})\,e^{-\theta i\sum_{i=۱}^{d}x_{i:n}+(n-d)T}\left(۱+\frac{\theta T}{(۱+\theta)^{۲}}\right)^{n-d} \qquad (۵)$$

که $x=x_{۱:n}\dots x_{n:n}$.
با ترکیب حالت اول و حالت دوم ، تابع درستنمایی نهایی بصورت زیر تعریف می شود:

$$l=l(x\mid\theta)=\frac{\theta^{۲r}}{(۱+\theta)^{۲r}}\prod_{i=۱}^{r}(۲+\theta+x_{i:n})\,e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{r}x_{i:n}+(n-r)c\right\}}\left(۱+\frac{\theta c}{(۱+\theta)^{۲}}\right)^{n-r} \qquad (۶)$$

که در آن $r=\begin{cases}R & \text{caseI}\\ d & \text{II case}\end{cases}$ و $c=\begin{cases}x_{R:n} & \text{caseI}\\ T & \text{case }II\end{cases}$.

۳. برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE)

لگاریتم تابع درستنمایی برای معادله (۶) برابر است با:

$$\log(l) = ۲r\log(\theta) - ۲n\log(۱+\theta) + (n-r)\log\left((۱+\theta)^{۲} + \theta c\right) + \sum_{i=۱}^{r}\log\left(۲+\theta+x_{i:n}\right) - \theta\left\{\sum_{i=۱}^{r} x_{i:n} + (n-r)c\right\} \quad (۷)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log l}{\partial\theta} = \frac{۲r}{\theta} - \frac{۲n}{۱+\theta} + \frac{(n-r)(۲(۱+\theta)+c)}{(۱+\theta)^{۲}+\theta c} - \sum_{i=۱}^{r} x_{i:n} - (n-r)c \quad (۸)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{۲}\log l}{\partial\theta^{۲}} = -\frac{۲r}{\theta^{۲}} + \frac{۲n}{(۱+\theta)^{۲}} - \frac{۲(n-r)\left((۱+\theta)^{۲}+c(\theta+۲+c)\right)}{\left((۱+\theta)^{۲}+\theta c\right)^{۲}} < ۰ \quad (۹)$$

در نتیجه جواب معادله (۸) برآورد ماکسیمم درستنمایی است. برای به دست اوردن برآورد درستنمایی ماکسیمم $(MLE)\theta$ که آن را با $\hat{\theta}_{MLE}$ نشان می دهیم ، می توان مستقیما از حل معادله (۸) با توجه به θ بدست آورد یا معادله غیرخطی $\frac{d\ln L(x_i;\theta)}{d\theta}$ را حل نمود .البته با استفاده از روش های تحلیلی نمی توان برآورد درستنمایی را بدست آورد لذا از روش های عددی تکراری مثل الگوریتم نیوتن رافسون استفاده می کنیم.

۴. برآورد بیز

در بسیاری از موقعیت های عملی، رفتار پارامترهای مدل های مختلف طول عمر را نمی توان به عنوان یک ثابت معلوم در طول دوره ، در نظر گرفت. بنابراین، منطقی به نظر می رسد که پارامترهای مدل های طول عمر را متغیر تصادفی در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن این واقعیت، فرض کنید توزیع پیشین θ گاما با هایپرپارامترهای b, a باشد ، که آن را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(\theta) \propto \theta^{a-۱}e^{-b\theta} \quad \theta > ۰ \cdot a \cdot b > ۰ \quad (۱۰)$$

که b, a هایپرپارامترهای توزیع پیشین هستند و فرض می کنیم هر دو اعداد حقیقی معلوم مثبت هستند.

در برآورد بیزی، موضوع مهم انتخاب تابع زیان $L(\hat{\theta},\theta)$ است که $\hat{\theta}$ براورد θ براساس داده ها است. تابع زیان مربع خطا معمول ترین تابع زیان متقارن است که بطور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است.

تابع زیان مربع خطا (SELF)

تابع زیان مربع خطا با $L(\hat{\theta},\theta) = (\hat{\theta}-\theta)^{۲}$ تعریف می شود. توابع زیان متقارن بطور یکسان کم برآورد یا بیش برآورد می کنند.

با توجه به (۶) و (۱۰) ، چگالی توام مشاهدات نمونه و θ می شوذ:

$$\pi(x;\theta) \propto \frac{\theta^{۲r+a-۱}}{(۱+\theta)^{۲n}}\prod_{i=۱}^{r}(۲+\theta+x_i)\,e^{-\theta\left\{\sum_{i=۱}^{n}x_i+(n-r)c+b\right\}}\left(۱+\frac{\theta c}{(۱+\theta)^{۲}}\right)^{n-r} \quad (۱۱)$$

بنابراین، چگالی پسین θ به شرط x برابر است با:

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{l(x \mid \theta)g(\theta \mid a\cdot b)}{\int_{۰}^{\infty} l(x \mid \theta)g(\theta \mid a\cdot b)d\theta} \quad (۱۲)$$

و برآورد بیز هر تابعی از θ مثل $h(\theta)$ تحت تابع زیان مربع خطا برابر است با:

$$\widehat{h(\theta_{BS})} = E(h(\theta) \mid x) = \frac{\int_{۰}^{\infty} h(\theta)l(x;\theta)d\theta}{\int_{۰}^{\infty} l(x;\theta)d\theta} \quad (۱۳)$$

با روش های عددی برآورد بیزی به راحتی بدست خواهد آمد.

۵. مطالعات شبیه سازی

قضیه ۱.۵. *برای هر* $\theta > ۰$ ، $Q_X(u)$ *تابع* X *لیندلی بصورت زیر است :*

$$Q_X(u) = x_u = -\frac{(۱+\theta)^۲}{\theta} - \frac{۱}{\theta} W_{-۱}\left[\frac{(۱+\theta)^۲}{\exp(۱+\theta)^۲}(u-۱)\right], u \in [۰,۱] \quad (۱۴)$$

که $W_{-۱}$ *شاخه منفی لامبرت است .*

معادله $F(X) = U$ دارای توزیع یکنواخت ۰ و ۱ است. [۲]

در این زیر بخش، رفتار برآوردگر ML و برآورد بیزی را برای $n = ۴۰$ ، $n = ۳۰$ بررسی می کنیم . مطالعه شبیه سازی زیر با $N = ۵۰۰۰$ بار تکرار $(\theta; n)$ که $n = ۳۰$ و ۴۰و $\theta = ۰/۵$ انتخاب شده اند، ارائه شده است.

نتیجه شبیه سازی در جدول ۱ و ۲ ارائه شده است. مشاهدات زیر از مطالعه شبیه سازی حاصل شده است:

۱. در هر دو برآورد کلاسیک و بیزی ، با افزایش R وقتی که n, T ثابت هستند ، برآورد پارامتر به مقدار واقعی پارامتر نزدیک تر می شود.
۲. انحراف استاندارد برآورد با افزایش R کاهش یافته است و بنابراین برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی کاراتر شده اند.
۳. طول فواصل اطمینان HPD و CL کوتاهتر شده است.

جدول ۱: برآوردهای کلاسیک و بیزی θ با انحراف استاندارد (SE) آن ها و فواصل HPD٪۹۵ با طول فواصل برای متغیر $n = ۳۰$ ، $R, T = ۱۰$

برآورد / طرح	$R = ۲۰$	$R = ۲۵$	$R = ۳۰$
M L برآورد [S E]	$\hat{\theta} = ۰,۶۵۰۴[۰,۱۰۵۹]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۲۹۷[۰,۰۷۴۷۴]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۰۴۹[۰,۰۶۵۱]$
CL{width }	$\theta \in (۰,۴۵۴۷ : ۰,۸۷۸۵)\{۰,۴۲۳\}$	$\theta \in (۰,۳۷۴۸۰۰,۶۵۴۳)\{۰,۲۷۹\}$	$\theta \in (۰,۳۶۵۰,۰,۶۳۷۷)\{۰,۲۷۲\}$
gamma Bayes estimate	$\hat{\theta} = ۰,۶۱۷۶[۰,۰۸۷۲]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۰۹۵[۰,۰۶۶۲]$	$\hat{\theta} = ۰,۴۹۵۵[۰,۰۶۲۱]$
PHD { width }	$\theta \in (۰,۴۴۷۶,۰,۷۸۳۷)\{۰,۳۳۶۱\}$	$\theta \in (۰,۳۷۸۱,۰,۶۳۶۳)\{۰,۲۵۸۱\}$	$\theta \in (۰,۳۷۶۱,۰,۶۲۱۵)\{۰,۲۴۵۴\}$

جدول ۲: برآوردهای کلاسیک و بیزی θ با انحراف استاندارد (SE) آن ها و فواصل HPD٪۹۵ با طول فواصل برای متغیر $n = ۴۰$ ، $R, T = ۱۰$

برآورد / طرح	$R = ۲۰$	$R = ۲۵$	$R = ۳۰$
M L برآورد [S E]	$\hat{\theta} = ۰,۶۲۶۳[۰,۰۹۷۴]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۲۴۱[۰,۰۶۳۱]$	$\hat{\theta} = ۰,۴۹۶۸[۰,۰۵۷۴]$
C L{ width }	$\theta \in (۰,۴۵۵۷۰۰,۷۸۵۶)\{۰,۳۲۹۹\}$	$\theta \in (۰,۳۹۶۸۰۰,۶۵۹۰)\{۰,۲۶۲۲\}$	$\theta \in (۰,۳۷۳۴۰۰,۵۹۵۸)\{۰,۲۲۲۳\}$
gamma Bayes estimat	$\hat{\theta} = ۰,۵۸۷۸[۰,۰۷۵۴۱]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۱۹۹[۰,۰۶۱۹]$	$\hat{\theta} = ۰,۵۰۱۱[۰,۰۵۱۲]$
PHD { width }	$\theta \in (۰,۴۵۰۴۰۰,۷۳۸۲)\{۰,۲۸۷۸\}$	$\theta \in (۰,۳۸۹۵۰۰,۶۳۴۹)\{۰,۲۴۵۴\}$	$\theta \in (۰,۳۷۹۴۰۰,۵۸۵۷)\{۰,۲۰۶۳\}$

پیشنهادات

با توجه به اینکه توزیع X لیندلی توزیع جدیدی است که اخیرا مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است و با توجه به مقاله فوق ، پیشنهاد می کنم که پارامترهای تنش مقاومت توزیع X لیندلی در حضور داده های سانسور شده و با توجه به نمونه گیری مجموعه رتبه دار بررسی گردد.

مراجع

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، EM–246، صص. ۱۸۲–۱۸۵

قوانین بقای معادله غیرخطی باکستین ـ هاویسون

محمدحسین سیفی*[آ]، الهام دسترنج[ب]

[آ]دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
[ب]دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
معادله دیفرانسیل غیرخطی
قوانین بقا
اختیار معامله

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
35L65
91G20

چکیده

قیمت گذاری اختیار معامله به عنوان ابزار مشتقه اهمیت بسیار زیادی دارد. زیرا قیمت گذاری نادرست باعث ایجاد آربیتراژ در بازار می شود. با اهمیت یافتن مدل های قیمت گذاری اختیار معامله و ویژگی های آن، پژوهشگران معادلات مختلفی برای قیمت گذاری معرفی کردند. در این پژوهش پس از ارائه مدل غیرخطی باکستین ـ هاویسون، قوانین بقا به روش مستقیم بیان و محاسبه شده است. قانون بقا نشان دهنده یک ویژگی ثابت بین جواب های این مدل است. با محاسبه قوانین بقای این مدل غیرخطی یک شار برای آن بدست آمد که به دنبال آن یک قانون بقا برای مدل باکستین ـ هاویسون استخراج شده است.

۱. مقدمه

مشخص نبودن آینده بازارهای مالی باعث ایجاد ریسک در انجام معاملات می‌شود. به طور مثال کشاورزان نگران کاهش قیمت محصولات خود در آینده و مصرف‌کنندگان نگران افزایش قیمت آن‌ها هستند. به همین دلیل دو طرف معامله به دنبال استفاده از ابزارهایی هستند که ریسک معامله را کاهش دهند و معامله‌گران را در برابر نوسانات قیمت و اتفاقات آینده مصون کنند. مهندسین مالی به منظور کاهش ریسک معاملات و جلوگیری از زیان طرفین، قراردادهای مشتقه آتی را معرفی کردند. مشتقه‌های آتی به قراردادهایی گفته می‌شوند که ارکان معامله مانند نوع کالا، قیمت و زمان معامله در لحظه انعقاد قرارداد مشخص می‌شوند اما معامله در آینده انجام می‌شود. یکی از مهمترین قراردادهای آتی قرارداد اختیار معامله[۱] است. این قرارداد با هدف پوشش ریسک معاملات طراحی شده است [۱، ۵].
معامله در بازارهای مالی یک بازی مجموع صفر است [۳]. به عبارتی مجموع سود و زیان ایجاد شده در بازار برابر صفر است. یعنی سود یک طرف به معنای زیان طرف مقابل معامله است. اختیار معامله برای کاهش ریسک به وجود آمده است و نه کسب سود بدون ریسک [۷]. گاهی اوقات معامله‌گران سود بدون ریسک کسب می‌کنند این درحالی است که قیمت‌گذاری مناسب قیمت‌گذاری است که در بازار فرصت‌های آربیتراژی به وجود نیاورد. انتخاب قیمت مناسب برای اختیار معامله یکی از مهمترین ارکان انعقاد قرارداد اختیار معامله است. به همین دلیل قیمت‌گذاری اختیار معامله اهمیت بسیار زیادی دارد. ارائه مدل بلک ـ شولز تحولی در بازارهای مالی ایجاد کرد. اما وجود فرض‌هایی به دور از واقعیت، باعث شدند که کارآیی این مدل در بازار پس از چند سال از بین برود. برای رفع ناکارآمدی این مدل، مدل‌های جدیدی ارائه شده‌اند که به واقعیت بازار نزدیک‌تر هستند. این مدل‌ها را می‌توان به دسته‌های مختلفی تقسیم کرد. بعضی از مدل‌ها با الگوبرداری از مدل بلک ـ شولز هزینه‌های معاملاتی را در قیمت‌گذاری لحاظ کردند. برخی دیگر نرخ بهره را ثابت فرض نکردند و مدل‌هایی تلاطم بازار را تصادفی درنظر گرفتند.
باکستین[۲] و هاویسون[۳] با توسعه مدل بلک ـ شولز استاندارد، مدل خود را معرفی کردند [۲]. این مدل که با در نظر گرفتن هزینه های معاملاتی،

*سخنران
پست الکترونیک : Mohammad.H.Seifi@shahroodut.ac.ir (محمدحسین سیفی)، Elham.Dastranj@shahroodut.ac.ir (الهام دسترنج)

[1] Option
[2] David Bakstein
[3] Sam Howison

غیرخطی شده است به صورت معادله دیفرانسیل جزئی زیر تعریف می شود.

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{۱}{۲}x^{۲}\widetilde{\sigma}^{۲}\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}+rx\frac{\partial H}{\partial x}-rH=۰, \tag{۱}$$

که در آن

$$\widetilde{\sigma}^{۲}=\sigma^{۲}\left[۱+۲\rho x\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}+\left(\rho x\,(۱-\alpha)\,\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\right)^{۲}\right], \tag{۲}$$

$\rho\in\mathbb{R}$ هزینه معاملاتی و α تعداد سهام معامله شده است. با جایگذاری (۲) در (۱) مدل باکستین ـ هاویسون به صورت زیر است.

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}x^{۲}\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\left(۱+۲\rho x\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\right)+\frac{۱}{۲}\rho^{۲}\,(۱-\alpha)^{۲}\,\sigma^{۲}x^{۴}\left[\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\right]^{۳}+rx\frac{\partial H}{\partial x}-rH=۰. \tag{۳}$$

همچنین با فرض معامله یک سهام در هر قرارداد اختیار معامله ($\alpha=۱$)، معادله باکستین ـ هاویسون به معادله زیر تبدیل می شود [۶].

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}x^{۲}\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\left(۱+۲\rho x\frac{\partial^{۲}H}{\partial x^{۲}}\right)+rx\frac{\partial H}{\partial x}-rH=۰. \tag{۴}$$

برخی از معادلات دیفرانسیل دارای قوانین بقا هستند. قوانین بقا بیانگر ویژگی است که در معادله ثابت باقی می‌ماند. قوانین بقا به روش‌های مختلفی محاسبه می‌شوند یکی از روش‌ها، روش مستقیم[۴] است که در آن قانون بقا به صورت یک عبارت دیورژانسی تعریف می‌شود. روش دیگر روش فرمال لاگرانژ[۵] است. در این روش به ازای هر تقارن یک قانون برای معادله دیفرانسیل تعریف می‌شود.

۲. قوانین بقا به روش مستقیم

قانون بقای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یک عبارت دیورژانسی است که روی همه‌ی جواب‌های دستگاه ثابت است. هر عبارت دیورژانسی غیربدیهی که یک قانون موضعی از دستگاه معادلات دیفرانسیل را نتیجه می‌دهد، از ضرایب موضعی وابسته به متغیرهای مستقل، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته به دست می‌آید. در روش مستقیم برای یافتن نمایش‌های دیورژانسی متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در دستگاه معادلات دیفرانسیل و ضرایب تابعی، با توابعی دلخواه جایگزین می‌شوند. این کار نمایش‌های دیورژانسی را روی تمامی جواب‌های دستگاه صفر می‌کند [۸].

تعریف ۱.۲. [۴] یک قانون بقا برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\Delta^{f}(x^{i},u^{\beta},u^{\beta}_{i},u^{\beta}_{ij},\dots)=۰,\quad ۱\leqslant f\leqslant l, \tag{۵}$$

یک عبارت دیورژانسی به شکل

$$D_{i}\Phi^{i}[u]=\sum_{j=۱}^{n}D_{j}\Phi^{j}[u]=۰, \tag{۶}$$

است که باید روی تمامی جواب‌های دستگاه (۵) صادق باشد. در عبارت بالا $\Phi^{i}[u]$ شار[۶] قانون بقا نام دارد که برابر است با

$$\Phi^{i}[u]=\Phi^{i}(x,u,\partial u,\dots,\partial^{r}u). \tag{۷}$$

بیشترین مرتبه مشتق که در شار دیده می‌شود، مرتبه قانون بقا گویند.

[4] Direct method
[5] Formal Lagrange method
[6] Fluxes

قضیه ۲.۲. [۹] *مجموعه‌ای از ضرایب به فرم*

$$\{\Lambda_\nu[U]\}_{\nu=1}^{N} = \{\Lambda_\nu(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)\}_{\nu=1}^{N}, \tag{۸}$$

که در آن $U(x)$ تابعی دلخواه است، یک عبارت دیورژانسی تولید می‌کنند به شرط آنکه

$$\Lambda_\nu[U]R^\nu[U] \equiv D_i\Phi^i[U]. \tag{۹}$$

مجموعه ضرایب (۸) با مرتبه دلخواه s، یک قانون بقا برای دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$R(x^i, u) = \Delta^f(x^i, u^\beta, u^\beta_i, u^\beta_{ij}, \dots) = 0, \quad 1 \leqslant f \leqslant l, \tag{۱۰}$$

نتیجه می‌دهد اگر برای هر تابع دلخواه $U(x)$ داشته باشیم

$$E_{U^\beta}[\Lambda_\nu(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)R^\nu(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)] \equiv 0, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant m, \tag{۱۱}$$

که در آن $E_{U^\beta}[.]$ عمگر اویلر ـلاگرانژ نسبت به U^β است و برای $1 \leqslant \beta \leqslant m$، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_{U^\beta} = \frac{\partial}{\partial U^\beta} - D_i\frac{\partial}{\partial U^\beta_i} + \dots + (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial U^\beta_{i_1 \dots i_s}} + \dots. \tag{۱۲}$$

این عملگر عبارت دیورژانسی $D_i\Phi^i[U]$ را صفر می‌کند.

۳. قانون بقای معادله باکستین ـهاویسون

قوانین بقای معادله باکستین ـهاویسون (۴) از مرتبه s به صورت

$$D_t\Psi[u] + D_x\Phi^x[u] \equiv \Lambda(x, t, U, \partial U, \dots, \partial^s U)R[u], \tag{۱۳}$$

است که در آن

$$R[u] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 + 2\rho x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru. \tag{۱۴}$$

برای یافتن ضریب Λ باید عملگر اویلر ـلاگرانژ (۱۲)، بر سمت راست معادله (۱۳) اعمال شود. با اعمال این عملگر داریم

$$\begin{aligned}
&\Lambda_u\left(u_t + \frac{x^2\sigma^2 u_{xx}(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + rxu_x - ru\right) - 2\Lambda r - \Lambda_x rx - \Lambda_u rxu_x - \Lambda_t - \Lambda_u u_t \\
&+ \Lambda_{xx}\left(\frac{x^2\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + \rho\sigma^2 x^3 u_{xx}\right) + 2\Lambda_x\left(x\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1) + 4x^2\sigma^2\rho u_{xx}\right) \\
&+ \Lambda\left(\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1) + 10x\sigma^2\rho u_{xx}\right) + \Lambda_{xu}u_x\left(\frac{x^2\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + \rho\sigma^2 x^3 u_{xx}\right) \\
&+ \Lambda_u u_x\left(x\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1) + 4x^2\sigma^2\rho u_{xx}\right) + 2\Lambda_x x^3\sigma^2\rho u_{xxx} + 6\Lambda x^2\sigma^2\rho u_{xxx} \\
&+ u_x\left(\Lambda_{xu}\left(\frac{x^2\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + \rho\sigma^2 x^3 u_{xx}\right) + \Lambda_u\left(x\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1) + 4x^2\sigma^2\rho u_{xx}\right)\right. \\
&\left.+ \Lambda_{uu}u_x\left(\frac{x^2\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + \rho\sigma^2 x^3 u_{xx}\right) + 2\Lambda_u x^3\sigma^2\rho u_{xxx}\right) \\
&+ \Lambda_u u_{xx}\left(\frac{x^2\sigma^2(2\rho x u_{xx} + 1)}{2} + \rho\sigma^2 x^3 u_{xx}\right) \\
&+ u_{xxx}\left(2\Lambda_x x^3\sigma^2\rho + 6\Lambda x^2\sigma^2\rho + 2\Lambda_u x^3\sigma^2\rho u_x\right) + 2\Lambda x^3\sigma^2\rho u_{xxxx} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با حل معادله بالا تنها مقداری که برای ضریب Λ پیدا می‌شود صفر است. بنابراین تنها یک قانون بقا برای معادله باکستین ـهاویسون خواهیم داشت که به صورت زیر است.

$$D_t u - D_x x u_t = 0. \tag{۱۶}$$

۴. نتایج

در این پژوهش پس از ارائه مدل غیرخطی باکستین ـهاویسون، قانون بقا که نشان دهنده یک ویژگی ثابت بین جواب های این مدل است محاسبه شده است. با محاسبه قوانین بقای این مدل غیرخطی به روش مستقیم یک شار و یک قانون بقا برای مدل باکستین ـهاویسون بدست آمده است.

مراجع

[۱] سیفی، محمدحسین ، دسترنج، الهام ، عبدالباقی عطاآبادی، عبدالمجید و لامعی، ساناز . . خطای قیمت‌گذاری اختیار معامله: شواهدی از بازارهای غیرخطی مبتنی بر شبکه‌های عصبی احتمالی و پرسپترون چندلایه. مدیریت دارایی و تامین مالی، ۱۱(۴)، ۴۷-۶۴، ۱۴۰۲.

[2] Bakstein D. and Howison S., A non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives, Oxford Center for Industrial and Applied Mathematics, Oxford, 1-52, 2003.

[3] Björk, T., Arbitrage theory in continuous time, Oxford University Press, 2009.

[4] Bluman G. W., Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer, 2010.

[5] Cuthbertson K. and Nitzsche D., Financial engineering: derivatives and risk management, John Wiley & Sons, 2001.

[6] Esekon, J. E. Analytic solution of a nonlinear Black-Scholes equation, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 82 (4), 547-555, 2013.

[7] Hull J. C., Fundamentals of futures and options markets, Pearson, 2017.

[8] Olver P. J., Applications of Lie groups to differential equations (107). Springer Science & Business Media, 1993.

[9] Zhang Z. Y. Conservation laws of partial differential equations: Symmetry, adjoint symmetry and nonlinear self-adjointness, Computers & Mathematics with Applications, 74(12), 3129-3140, 2017.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–247، صص. ۱۸۶–۱۹۱

نامساوی لاونر–هاینز و عکس آن از نقطه نظر چشم‌انداز آنتروپی عملگری نسبی

مریم فضل الهی علمداری *،آ

آ استادیار گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
آنتروپی عملگری نسبی
نامساوی لاونر–هاینز
چشم‌انداز

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
47A63
46L05
46L60

چکیده

آنتروپی عملگری نسبی خواصی مشابه میانگین عملگری دارد. در این مقاله، نامساوی لاونر–هاینز و عکس آن را برای توابع یکنوای عملگری و ضربی–جمعی اثبات کرده و آن را د ر آنتروپی عملگری نسبی به‌کار می‌بریم. در ادامه روابط معادلی ازجمله نامساوی‌هایی برای برخی آنتروپی‌های عملگری نسبی را از نقطه‌نظر چشم‌انداز، تعیین خواهیم نمود.

۱. مقدمه

نامســـــاوی لاونر–هاینز ابزار بنیادی برای بحث نامساوی‌های عملگری می‌باشد. این نامساوی به این معنی است که برای $0 \leq \alpha \leq 1$، تابع توان $f(t) = t^{\alpha}$ در بازه $[0, \infty)$ یکنوای عملگری است. لاونر این نامساوی را در [۶] برای ماتریس‌ها اثبات نمود. هاینز در [۵] این نامساوی را برای عملگرهای مثبت روی یک فضای هیلبرت با بعد دلخواه اثبات کرد و کاتو در [۷] برهان نظری عملگری را به‌طور کامل ثابت نمود. یوچی یاما در [۱۳] معکوس نامساوی لاونر–هاینز را ثابت کرده و آن را برای میانگین عملگری به‌کار برد. او نشان داد که برای هر $\lambda > 0$ ،$A \leq B$ اگر و تنها اگر

$$(A + \lambda)^{\alpha} \leq (B + \lambda)^{\alpha}.$$

علاوه براین، روابط هم‌ارز ی بین نامساوی‌هایی برای میانگین هندسی و حسابی به‌عنوان توسیع‌هایی از معکوس نامساوی لاونر–هاینز در [۱۴] ارائه شده است. در سال ۲۰۱۷ نیکوفر و شامحمدی عکس نامساوی لاونر–هاینز را از نقطه‌نظر چشم‌انداز و چشم‌انداز تعمیم‌یافته توابع یکنوای عملگری و ضربی بررسی نمودند [۱۱].

فوجی [۳] آنتروپی عملگری نسبی را با تعمیم نظریه کوبو–آندو معرفی کرد. این تعریف از نظریه کوبو–آندو در مورد میانگین عملگری نتیجه می‌شود. آنتروپی عملگری نسبی ، خواصی مانند میانگین‌ها و آنتروپی‌های عملگری دارد [۳]. فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ جابجایی مثبت با مقادیر ویژه در I، A خودالحاق و B مثبت اکید و f محدب عملگری باشد. افروس در [۱] تابع چشم‌انداز ماتریس‌های A و B را به‌صورت

$$\mathcal{P}_f(A, B) = Bf(\frac{A}{B})$$

*سخنران
پست الکترونیک : m_fazlolahi@pnu.ac.ir (مریم فضل الهی علمداری)

تعریف کرد. افروس با استفاده از تابع چشم‌انداز ماتریسی، نتیجه‌ای را که لیب و روسکای مطرح کرده بودند را به روش ساده‌تری اثبات نمود [۱]. نیکوفر و همکاران در [۱۲] نتایج اصلی [۱] را تعمیم دادند و شرایط لازم و ضروری برای مشترک محدب بودن توابع چشم‌انداز را ارائه نمودند و توابع چشم‌انداز را روی ماتریس‌های ناجابجایی مثبت تعمیم دادند.
چشم‌انداز ناجابجایی تابع پیوسته یک متغیره f در [۱۲] به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{P}_f(A,B) = B^{1/2} f(B^{-1/2} A B^{-1/2}) B^{1/2}$$

که A عملگر خودالحاق و B عملگر مثبت وارون‌پذیر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با طیف در بازه بسته می‌باشد.
نیکوفر و همکاران در [۱۲] چشم‌انداز تعمیم‌یافته ناجابجایی دومتغیره وابسته به f و h را به‌صورت زیر تعریف کردند:

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A,B) = h(B)^{1/2} f(h(B)^{-1/2} A h(B)^{-1/2}) h(B)^{1/2}$$

که A عملگر خودالحاق و B عملگر مثبت وارون پذیر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با طیف در بازه بسته I می‌باشد. فوجی [۳] آنتروپی عملگری نسبی را با تعمیم نظریه کوبو ـ آندو معرفی کرد. این تعریف از نظریه کوبو ـ آندو در مورد میانگین عملگری نتیجه می‌شود.
آنتروپی عملگری نسبی ، خواصی مانند میانگین‌ها و آنتروپی‌های عملگری دارد [۳].

۲. نتایج اصلی

فرض کنید A و B دو عملگر خودالحاق کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. ترتیب جزئی $A \leq B$، به این معنی است که برای هر $x \in \mathcal{H}$ رابطه $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$ برقرار است. مجموعه عملگرهای مثبت معکوس پذیر را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ نشان می‌دهیم. در سراسر این مباحث A، B، C و D نشان دهنده عملگرهای مثبت معکوس پذیر هستند. تابع f را ضربی ـ جمعی نامیم اگر $f(ts) = f(t) + f(s)$.
برای هر تابع $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$، ترانهاده $\tilde{f}$ از تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{f}(x) = x f(x^{-1}), \quad x > 0.$$

لم ۱.۲. [۱۱] *فرض کنیم $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته و $\tilde{f}$ ترانهاده تابع f باشد. دراین‌صورت برای هر $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ داریم:*

$$\mathcal{P}_{\tilde{f}}(A,B) = \mathcal{P}_f(B,A).$$

قضیه ۲.۲. [۱۱] *اگر $A \leq B$، $C \leq D$ و f یکنوای عملگری باشد، آنگاه*

$$\mathcal{P}_f(A,C) \leq \mathcal{P}_f(B,D).$$

نتیجه ۳.۲. [۱۱] *فرض کنیم که $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. دراین‌صورت $\mathcal{P}_f$ متقارن است اگر و تنها اگر $f = \tilde{f}$.*

قضیه ۴.۲. [۱۳] *فرض کنیم $f(t)$ یک تابع یکنوای عملگری غیرثابت در همسایگی $t = a$ باشد. دراین‌صورت $A \leq B$ است اگر و تنها اگر دنباله $\{t_n\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $t_n \to 0$ و*

$$f(a + t_n A) \leq f(a + t_n B).$$

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع یکنوای عملگری غیر ثابت و ضربی ـ جمعی و $A, B \geq 0$ باشند. گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(i) $A \leq B$،

(ii) *برای هر* $\lambda \geq 0$، $A + \lambda \leq B + \lambda$،

(iii) *برای هر* $\lambda \geq 0$، $f(A + \lambda) \leq f(B + \lambda)$،

(iv) *برای دنباله* $\{\lambda_n\}$ *که* $\lambda_n > 0$ *و وقتی* $n \to \infty$، $\lambda_n \to \infty$ *داریم:* $f(A + \lambda_n) \leq f(B + \lambda_n)$،

(v) *برای دنباله* $\{t_n\}$ *که* $t_n > 0$ *و وقتی* $n \to \infty$، $t_n \to 0$، *داریم:* $f(t_n A + 1) \leq f(t_n B + 1)$.

اثبات . اثبات (i) ⇐ (ii)، (ii) ⇐ (iii) و (iii) ⇐ (iv) بدیهی می‌باشند. برای اثبات (iv) ⇐ (v) داریم:

$$f(\lambda_n(\frac{A}{\lambda_n}+۱)) \leq f(\lambda_n(\frac{B}{\lambda_n}+۱)).$$

چون f تابع ضربی ـ جمعی است، داریم:

$$f(\frac{A}{\lambda_n}+۱) \leq f(\frac{B}{\lambda_n}+۱).$$

با قرار دادن $t_n := \frac{۱}{\lambda_n}$ قسمت (v) را به‌دست می‌آوریم. به‌وسیله قضیه ۴.۲ ، (v) ⇐ (i) نیز اثبات می‌شود. □

لم ۶.۲. *فرض کنید $f : (۰,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع ضربی ـ جمعی باشد . دراین‌صورت*

(i) برای هر $t,s > ۰$، $\tilde{f}(ts) = t\tilde{f}(s) + s\tilde{f}(t)$.

(ii) $f(۱) = \tilde{f}(۱) = ۰$.

لم ۷.۲. *فرض کنید $f : (۰,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع ضربی ـ جمعی و $A,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ باشند . دراین‌صورت*

(i) برای هر $s > ۰$، $\mathcal{P}_f(sA,B) = f(s)B + \mathcal{P}_f(A,B)$

(ii) برای هر $t > ۰$، $\mathcal{P}_f(A,tB) = \tilde{f}(t)B + t\mathcal{P}_f(A,B)$

(iii) برای هر $\lambda,\mu > ۰$، $\mathcal{P}_f(A+\lambda,B+\mu) = \tilde{f}(\mu)(\frac{B}{\mu}+۱) + \mu\mathcal{P}_f(A+\lambda,\frac{B}{\mu}+۱)$

(iv) برای هر $\lambda,\mu > ۰$، $\mathcal{P}_f(A+\lambda,B+\mu) = f(\lambda)(B+\mu) + \mathcal{P}_f(\frac{A}{\lambda}+۱,B+\mu)$.

قضیه ۸.۲. *فرض کنید $f : (۰,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ یکنوای عملگری نامنفی و ضربی ـ جمعی باشد . گزاره‌های زیر برای هر $A,B,C,D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ معادل می‌باشند .*

(i) $A \leq B$ و $C \leq D$،

(ii) برای هر $\lambda,\mu > ۰$ با $\lambda \neq \mu$،

$$\mathcal{P}_f(\lambda^{-۱},\mu^{-۱})C + \mu^{-۱}\mathcal{P}_f(A+\lambda,C+\mu) \leq \mathcal{P}_f(\lambda^{-۱},\mu^{-۱})D + \mu^{-۱}\mathcal{P}_f(B+\lambda,D+\mu),$$

(iii) برای هر $s,t > ۰$ با $s \neq t$،

$$\mathcal{P}_f(sA+۱,tC+۱) \leq \mathcal{P}_f(sB+۱,tD+۱).$$

نتیجه ۹.۲. *فرض کنید $f : (۰,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ نامنفی، یکنوای عملگری و ضربی ـ جمعی باشد . گزاره‌های زیر برای هر $A,B,C,D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ معادل می‌باشند .*

(i) برای هر $\lambda > ۰$، $\mathcal{P}_f(A+\lambda,C+\lambda) \leq \mathcal{P}_f(B+\lambda,D+\lambda)$

(ii) برای هر $s > ۰$، $\mathcal{P}_f(sA+۱,sC+۱) \leq \mathcal{P}_f(sB+۱,sD+۱)$.

اثبات . قرار دهید $t = s$ و همین طور $\lambda = \frac{۱}{s}$ با به‌کارگیری

$$sf(s) + \tilde{f}(s) = sf(s) + sf(s^{-۱}) = sf(۱) = ۰$$

نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید. □

فوجی و کامی [۲] آنتروپی عملگری نسبی عملگرهای مثبت معکوس پذیر A و B را به‌صورت

$$S(A,B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

معرفی کردند.
در حقیقت، آنتروپی عملگری نسبی، چشم‌انداز تابع $f(t) = \log t$ می‌باشد یعنی

$$S(A,B) = \mathcal{P}_f(B,A).$$

قضیه ۸.۲ را برای آنتروپی عملگری نسبی به کار می‌بریم.

نتیجه ۱۰.۲. *برای هر $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ با $A \leq C$ و $B \leq D$ گزاره‌های زیر معادل می‌باشند.*

(i) $A \leq B$ و $C \leq D$،

(ii) *برای هر* $\lambda, \mu > 0$ *با* $\lambda < \mu$، $S(A+\lambda, C+\mu) \leq S(B+\lambda, D+\mu)$،

(iii) *برای هر* $r, t > 0$ *با* $r < t$، $S(rA+1, tC+1) \leq S(rB+1, tD+1)$.

۳. توسیع نامساوی لاونر–هاینز به چشم‌انداز تعمیم‌یافته تابع ضربی–جمعی

فرض کنید در این بخش $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ و $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ دو تابع پیوسته باشند.

لم ۱.۳. *فرض کنید f ضربی–جمعی، h ضربی و $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$. دراین‌صورت برای هر $\lambda, \mu > 0$ داریم:*

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A+\lambda, B+\mu) = \tilde{f}(h(\mu)) h(\frac{B}{\mu} + 1) + h(\mu) \mathcal{P}_{f\Delta h}(A+\lambda, \frac{B}{\mu} + 1).$$

لم ۲.۳. *فرض کنید f ضربی–جمعی و $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$. برای هر $\lambda, \mu > 0$*

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(A+\lambda, B+\mu) = f(\lambda) h(B+\mu) + \mathcal{P}_{f\Delta h}(\frac{A}{\lambda} + 1, B+\mu).$$

قضیه ۳.۳. *فرض کنید f تابع نامنفی، یکنوای عملگری و ضربی–جمعی باشد. اگر h یکنوای عملگری و ضربی باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برای هر $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ معادل می‌باشند.*

(i) $A \leq B$ و $C \leq D$،

(ii) *برای هر* $\lambda, \mu > 0$ *با* $\lambda \neq h(\mu)$،

$$\mathcal{P}_{f\Delta h}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) h(C+\mu) + h(\mu^{-1}) \mathcal{P}_{f\Delta h}(A+\lambda, C+\mu) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) h(D+\mu) + h(\mu^{-1}) \mathcal{P}_{f\Delta h}(B+\lambda, D+\mu)$$

(iii) *برای هر* $s, t > 0$ *با* $s \neq h(t)$، $\mathcal{P}_{f\Delta h}(sA+1, tC+1) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(sB+1, tD+1)$.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید f تابعی نامنفی، یکنوای عملگری و ضربی–جمعی باشد. اگر h یکنوای عملگری و ضربی باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برای هر $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ معادل می‌باشند.*

(i) *برای هر* $\mu > 0$، $\mathcal{P}_{f\Delta h}(A+h(\mu), C+\mu) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(B+h(\mu), D+\mu)$،

(ii) *برای هر* $t > 0$، $\mathcal{P}_{f\Delta h}(h(t)A+1, tC+1) \leq \mathcal{P}_{f\Delta h}(h(t)B+1, tD+1)$.

اثبات. با فرض $s = h(t)$ و $\mu = \frac{1}{t}$ نتیجه به‌دست می‌آید. □

آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته برای عملگرهای مثبت وارون پذیر A,B و $q \in \mathbb{R}$ در [۴] توسط فوروتا به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$S_q(A|B) = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^q(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}.$$

وی با کاربرد مفهوم آنتروپی عملگری نسبی تعمیم‌یافته، توسیع پارامتریک نامساوی عملگری شانون و عکس آن را به‌دست آورد . توجه کنید که برای $q = 0$، این مطلب به

$$S_0(A|B) = S(A|B)$$

کاهش می‌یابد. آنتروپی عملگری نسبی پارامتری $S_\alpha(A|B)$ چشم‌انداز تابع $t^\alpha \log t$ است به این مفهوم که

$$S_\alpha(A|B) = \mathcal{P}_{t^\alpha \log t}(A|B).$$

در [۸] مفهوم $(\alpha,\beta)-$ آنتروپی عملگری نسبی (آنتروپی عملگری نسبی دو پارامتری) را برای عملگرهای مثبت وارون پذیر A,B و اعداد حقیقی α,β به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$S_{\alpha,\beta}(A,B) := A^{\frac{\beta}{2}}(A^{-\frac{\beta}{2}}BA^{-\frac{\beta}{2}})^\alpha(\log A^{-\frac{\beta}{2}}BA^{-\frac{\beta}{2}})A^{\frac{\beta}{2}}.$$

در [۹، ۱۰] کران‌های بالا و پایین $(\alpha,\beta)-$ آنتروپی عملگری نسبی را بر طبق میانگین $(\alpha,\beta)-$ هندسی عملگری معرفی شده را تحقیق کرده‌ایم. به‌ویژه داریم:

$$S_{\alpha,1}(A|B) = S_\alpha(A|B)$$

و

$$S_{0,1}(A|B) = S(A|B).$$

قابل ذکر است که $(\alpha,\beta)-$ آنتروپی عملگری نسبی، چشم‌انداز تعمیم‌یافته از توابع $f(t) = t^\alpha \log t$ و $h(t) = t^\beta$ با $0 < \beta < 1$ می‌باشد یعنی

$$S_{\alpha,\beta}(A,B) = \mathcal{P}_{f\Delta h}(B,A).$$

قضیه ۳.۳ را برای $(\alpha,\beta)-$ آنتروپی عملگری نسبی، به کار می‌بریم.

نتیجه ۵.۳. *برای $A,B,C,D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{++}$ با $I \le A \le C$ و $I \le B \le D$ و $0 < \beta < 1$ گزاره‌های زیر معادل می‌باشند.*

(i) $A \le B$ و $C \le D$،

(ii) برای هر $\lambda,\mu > 0$ *با* $1 \le \lambda < \mu$، $S_{0,\beta}(A+\lambda, C+\mu) \le S_{0,\beta}(B+\lambda, D+\mu)$،

(iii) برای هر $r,t > 0$ *با* $r < t \le 1$، $S_{0,\beta}(rA+1, tC+1) \le S_{0,\beta}(rB+1, tD+1)$.

اثبات. فرض کنید $h(x) = x^\beta$، $x > 0$، $0 < \beta < 1$ و

$$g(x) = \begin{cases} \log x, & x \ge 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

توابع g و h در شرایط قضیه ۳.۳ صدق می‌کنند. همچنین داریم:

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(C+\mu, A+\lambda) = \begin{cases} S_{0,\beta}(A+\lambda, C+\mu), & (A+\lambda)^\beta \le C+\mu, \\ 0, & C+\mu < (A+\lambda)^\beta, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(tC+1, rA+1) = \begin{cases} S_{0,\beta}(rA+1, tC+1), & (rA+1)^\beta \le tC+1, \\ 0, & tC+1 < (rA+1)^\beta, \end{cases}$$

و

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(\mu^{-1}, \lambda^{-1}) = \begin{cases} S_{0,\beta}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}), & \mu \le \lambda^\beta, \\ 0, & \lambda^\beta < \mu. \end{cases}$$

چون $A \leq C$ و $\lambda < \mu$ لذا $A + \lambda \leq C + \mu$. علاوه بر این، چون $I \leq A + \lambda$ آنگاه برای $0 < \beta < 1$ و $\lambda > 0$ داریم: $(A+\lambda)^\beta \leq A + \lambda$. در نتیجه $(A + \lambda)^\beta \leq C + \mu$ و لذا

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(C + \mu, A + \lambda) = S_{0,\beta}(A + \lambda, C + \mu).$$

استدلال مشابه نشان می‌دهد که برای $B \leq D$ و $\mu < \lambda$،

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(D + \mu, B + \lambda) = S_{0,\beta}(B + \lambda, D + \mu).$$

علاوه بر این، چون $I \leq rA + 1$ و $r < t$، آنگاه برای $0 < \beta < 1$، داریم:

$$(rA + 1)^\beta \leq rA + 1 \leq tC + 1.$$

بنابراین

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(tC + 1, rA + 1) = S_{0,\beta}(rA + 1, tC + 1)$$

و به‌طور مشابه برای $B \leq D$ و $\mu < \lambda$،

$$\mathcal{P}_{g\Delta h}(tD + 1, rB + 1) = S_{0,\beta}(rB + 1, tD + 1).$$

توجه کنید که برای $0 < \beta < 1$ و $\lambda \geq 1$، $\lambda^\beta \leq \lambda$ و بنابراین، برای $0 < \lambda \leq 1$ داریم: $\lambda^\beta < \mu$. لذا خواهیم داشت: $\mathcal{P}_{g\Delta h}(\mu^{-1}, \lambda^{-1}) = 0$.
بر اساس قضیه ۳.۳ و این مشاهدات می‌توان نتیجه را به‌دست آورد. □

مراجع

[1] Effros, E. G. *A matrix convexity approach to some celebrated quantum inequalities*. Proc. Nat. Acad. Sci. U S A, **106(4)**, 1006–1008,2009.
[2] Fujii, J. I., Kamei, E. Relative operator entropy in noncommutative information theory. Math. Japonica, **34**, 341–348, 1989.
[3] Fujii, J. I. Operator means and the relative operator entropy. Operator Theory: Advances and Applications, **59**, 161–172, 1992.
[4] Furuta, T. Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators. Linear Algebra Appl., **381**, 219-□235, 2004.
[5] Heinz E. *Beitrage zur Storungstheorie der Spektralzerlegung*. Math. Ann., **123**, 415–438, 1951.
[6] Loewner, C. *Uber monotone Matrix funktionen*. Math. Z., **38**, 177–216, 1934.
[7] Kato, T. *Notes on some inequalities for linear operators*. Math. Ann., **125**, 208-212, 1952.
[8] Nikoufar, I. Convexity of parameter extensions of some relative operator entropies with a perspective approach. Glasgow Math. J., **62 (3)**62 (3), 737–744, 2019.
[9] Nikoufar, I. *On operator inequalities of some relative operator entropies*. Adv. Math., **259**, 376–383, 2014.
[10] Nikoufar, I. Improved operator inequalities of some relative operative entropies. Positivity, **24**, 241–251, 2020.
[11] Nikoufar, I., Shamohammadi, M. The converse of the Loewner–Heinz inequality via perspective. Linear Multilinear Alg., **66(2)**, 243–249, 2018.
[12] Ebadian, A., Nikoufar, I., Eshagi Gordji, M. *Perspectives of matrix convex functions*. Proc. Natl. Acad. Sci. U S A, **108(18)**, 7313–7314, 2011.
[13] Uchiyama, M. *A converse of the Loewner-Heinz inequality, geometric mean and spectral order*. Proc. Edinb. Math. Soc., **57**, 565–571, 2014.
[14] Uchiyama, M., Yamazaki, T. *A converse of Loewner–Heinz inequality and applications to operator means*. J. Math. Anal. Appl., **413**, 422–429, 2014.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–257، صص. ۱۹۲–۱۹۷

ساختن ابرگروه های چندمتقارن مرتبه کوچک

سعید میروکیلی *[آ]، حسین نراقی[ب]، حسن نراقی[ج]

[آ]دانشیار گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
[ب]استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران ، ایران
[ج]استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد ،واحد آشتیان، آشتیان اراک ، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
شمارش
ابرگروه
متقارن

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
20N20

چکیده

ابرگروه‌های چند متقارن یک ابرساختار جبری با خواصی شبیه گروه‌ها هستند. یک ایده مهم در ساختن ابرگروه‌ها از روی گروه‌ها استفاده می‌شود. ایده دی سالوو و همکاران در ساختن KH ـابرگروه‌ها به ما این امکان را می‌دهد که ابرگروه‌های چند متقارن را رده‌بندی و بسازیم. در این مقاله با استفاده از این تکنیک، ابرگروه‌های چند متقارن از مرتبه کمتر از ۶ را بررسی و ساخته‌ایم.

۱. مقدمه

در آغاز تاریخچه کوتاهی از شمارش ابرگروه‌ها بیان می‌کنیم. نظریه ابرگروه‌ها در سال ۱۹۳۴، توسط مارتی در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی معرفی شد . در این کنگره مارتی برای اولین بار مفهوم ابرگروه را به عنوان تعمیم گروه معرفی کرد. از آن زمان به بعد نظریه ابرساختارهای جبری در سرتاسر جهان گسترش یافت. محققین بسیاری از جمله بایون[1] ،لایگروس[2] با کمک محاسبات کامپیوتری رده های خاصی از ابرساختارها را شمارش کرده اند [۱، ۲، ۱۷]. دی سالوو[3]، دواز و ... در شمارش تحلیلی ابر ساختارها و کاربرد هایشان فعال بوده اند [۴، ۹–۱۲]. روش دی سالوو و همکاران در شمارش K_Hـابرگروه‌ها این ایده را به ما می‌دهد که از این روش در شمردن ابرگروه‌های چندمتقارن کمک بگیریم. در این بخش، مقدمه‌ای کوتاه از تعاریف و نتایج مورد نیاز برای مطالعه ابرگروه‌ها ارائه می‌دهیم که در مقاله استفاده خواهند شد.

۲. ابرگروه‌ها

این بخش تعاریف مقدماتی آورده شده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی H است. به هر تابع $\circ : H \times H \longrightarrow P^*(H)$ یک ابرعمل روی H می‌گویند.

*سخنران
پست الکترونیک : saeedmirvakili@yazd.ac.ir (سعید میروکیلی)، ho.naraghi@pnu.ac.ir (حسین نراقی)، hassannaraghi1376@gmail.com (حسن نراقی)

[1]Bayon
[2]Lygeros
[3]De Salvo

اگر $\circ$ یک ابرعمل روی H باشد، آنگاه $(H,\circ)$ را یک ابرگروه‌وار می‌نامیم.
همچنین اگر A و B دو زیرمجموعه غیرتهی از H باشند، آنگاه این ابرعمل را برای این زیرمجموعه‌ها به طور طبیعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} (a \circ b)$$

تعریف ۲.۲. ابرگروه‌وار $(H,\circ)$ را یک نیم‌ابرگروه نامیم هرگاه H در قانون شرکت‌پذیری صدق کند. یعنی برای هر $x,y,z \in H$ داشته باشیم $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

تعریف ۳.۲. نیم‌ابرگروه $(H,\circ)$ را یک ابرگروه نامیم هرگاه H در قانون زیر که به آن قانون بازتولیدشده گویند، صدق کند:

$$\forall a \in H,\ a \circ H = H \circ a = H.$$

با توجه به مفاهیم فوق ابرگروه‌وار $(H,\circ)$ را یک ابرگروه نامیم هرگاه در دو قانون شرکت‌پذیری و بازتولیدشده صدق کند.

ملاحظه ۴.۲. قانون بازتولیدشده با عبارت زیر معادل است:

$$\forall a,b \in H,\ \exists x,y \in H;\ a \in x \circ b \cap b \circ y$$

زیرا $a \circ H = H \circ a = H = H \circ b = b \circ H$.

در ادامه چند مثال از ابرگروه‌ها بیان می‌کنیم.

مثال ۵.۲. فرض کنید H یک مجموعه ناتهی است. ابرعمل $\circ$ را روی H به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall (x,y) \in H^2, x \circ y := H$$

در این صورت ابرگروه $(H,\circ)$ را ابرگروه کلی می‌گوییم.

۳. ابرگروه‌های چندمتقارن

میتاس در [۱۳] نمونه خاصی از ابرگروه‌های منظم را معرفی کرد. یاتراس این ابرساختار را ابرگروه چندمتقارن نامگذاری کرد. در این بخش به معرفی و بررسی این ابرگروه‌ها می‌پردازیم. در این بخش از مراجع [۱۸] استفاده شده است.
در ابتدا تعریف ابرگروه‌های پلی‌متقارن را در زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. مجموعه غیرتهی H را ابرگروه چندمتقارن نامند هرگاه ابرعمل $+ : H \times H \longrightarrow P^*(H)$ که در آن $P^*(H)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های غیرتهی H است، در اصول زیر صدق کند:

(۱) $+$ شرکت‌پذیر است، یعنی برای هر $x,y,z \in H$ داشته باشیم $x + (y + z) = (x + y) + z$

(۲) $+$ جابجایی است، یعنی برای هر $x,y \in H$ $x + y = y + x$،

(۳) عنصر $\circ \in H$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in H$، $x \in \circ + x$

(۴) برای هر $x \in H$ عنصر $x' \in H$ موجود است به‌طوری‌که $\circ \in x + x'$ (x' را عنصر متقارن یا معکوس x و مجموعه $S(x) = \{x' \mid \circ \in x + x'\}$ را مجموعه متقارن x نامند)،

(۵) برای هر $x,y,z \in H$ $x' \in S(x)$ $y' \in S(y)$ و $z' \in S(z)$، از $x \in y + z$ نتیجه می‌شود $x' \in y' + z'$.

بدیهی است به ازای هر $x \in H$ داریم: $x' \in S(x)$ و $x \in S(x')$.

نتیجه ۲.۳. (۱) $\circ \in S(\circ)$، در نتیجه $\circ = \circ + \circ$.

(۲) *به ازای هر* $x \in H$ *داریم:* $\circ \in \circ + x \Longrightarrow x = \circ$.

(۳) $\circ$ *منحصر به فرد است.*

قضیه ۳.۳. *اگر H یک ابرگروه چندمتقارن باشد، آنگاه یک ابرگروه است .*

لم ۴.۳. *به ازای هر $x,y,z,w \in H$ داریم :*

$$(x+y)\cap(z+w)\neq\phi \Longrightarrow x+y=z+w,$$

بنابراین $z\in x+y \Longrightarrow x+y=\circ+z$ و $x+y\neq z+w \Longrightarrow (x+y)\cap(z+w)=\phi$.

قضیه ۵.۳. *خانواده $C(x)=\circ+x$ وقتی x در H تغییر می‌کند، یک افراز از H را تشکیل می‌دهد . داریم :*

$$C(x+y)=\circ+x+y=(\circ+x)+(\circ+y).$$

به علاوه، برای هر $x,y\in H$، $x+y$ یک کلاس از افراز است و مجموعه $G=\{C(x)|x\in H\}$ تشکیل یک گروه آبلی با عمل $C(x)+C(y)=C(x+y)$ می‌دهد .

در اینجا به مجموعه‌ای از خواص ابرگروه‌های چندمتقارن اشاره می‌کنیم، که به آسانی از نتایج پیشین حاصل می‌شود:

(۱) $\circ\in x+y\Longrightarrow x+y=C(\circ)=\circ$. زیرا $\circ\in x+y\Longrightarrow x+y=\circ$.

(۲) طبق خاصیت برگشت‌پذیری H داریم:

$$(x+y)\cap(z+w)\neq\phi\Longrightarrow(z+x')\cap(y+w')\neq\phi,$$

زیرا

$$\begin{aligned}(x+y)\cap(z+w)\neq\phi &\Longrightarrow (x+y)=(z+w)\\ &\Longrightarrow x+y+x'+w'=z+w+x'+w'\\ &\Longrightarrow y+w'=z+x'\\ &\Longrightarrow (z+x')\cap(y+w')\neq\phi.\end{aligned}$$

(۳) $x+y=x+z\Longrightarrow y\equiv z(\circ)$.

(۴) اگر $y+\circ=y$، آنگاه $x+y=x+z$ نتیجه می‌دهد $y=z$.

(۵) اگر حداقل یک $x\in H$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به ازای هر $y,z\in H$، $x+y=x+z$ نتیجه دهد $y=z$، آنگاه ابرگروه چندمتقارن $(H,+)$ گروه آبلی است.

(۶) بدیهی است به ازای هر $x'\in S(x)$ و $x',x''\in S(x)$ $C(x')=C(x'')=S(x)$ است. به شکل مشابه به ازای هر $x^*,x^{**}\in S(x')$ داریم $C(x^*)=C(x^{**})=S(x')$. بنابراین به ازای هر $x'\in S(x)$ و $x^*\in S(x')$ به‌طوری‌که $\circ+x'=x'$ و $\circ+x^*=x^*$، داریم $S(x)=x'$ و $S(x')=x^*$. دلیل اینکه $C(x')=S(x)$ این است که:

$$\begin{aligned}u\in C(x') &\Longrightarrow u\in x'+\circ\\ &\Longrightarrow u+x\subseteq x+x'+\circ=\circ+\circ=\circ\\ &\Longrightarrow u+x\subseteq\circ\\ &\Longrightarrow u\in S(x).\end{aligned}$$

برعکس

$$\begin{aligned}u\in S(x) &\Longrightarrow u+x=\circ\\ &\Longrightarrow u+x+x'=\circ+x'\\ &\Longrightarrow u+\circ=\circ+x'\\ &\Longrightarrow u\in C(x').\end{aligned}$$

(۷) $x\equiv y\ (\circ)\Leftrightarrow x'\equiv y'\ (\circ)$. زیرا

$$\begin{aligned}x\equiv y\ (\circ) &\Longrightarrow \circ+x=\circ+y\\ &\Longrightarrow \circ+x+x'+y'=\circ+y+x'+y'\\ &\Longrightarrow \circ+y'=\circ+x'\\ &\Longrightarrow x'\equiv y'\ (\circ).\end{aligned}$$

حالت برعکس نیز به طور مشابه برقرار است. همچنین از این خاصیت نتیجه می‌گیریم که $S(C(x))=C(S(x))$.

(۸) $S(x+y)=S(x)+S(y)=x'+y'$. زیرا به ازای هر $z\in x+y$ داریم $x+y=C(z)$ و لذا

$$S(x+y)=S(C(z))=C(S(z))=C(z')=x'+y'=S(x)+S(y).$$

(۹) به طور کلی به ازای هر $i=۱,\dots,n$ و $x_i^*\in C(x_i)$ داریم:

$$C(x_۱+\dots+x_n)=C(x_۱)+\dots+C(x_n)=x_۱^*+\dots x_n^*,$$

همچنین

$$S(x_۱+\dots+x_n)=S(x_۱)+\dots+S(x_n)=x_۱'+\dots x_n',$$

حال گروه کاهش‌یافته $G=H/(۰)$ از H را در نظر بگیرید. به ازای هر کلاس هم‌ارزی C به پیمانه ۰ از H، عنصر x_C (نماینده کلاس هم‌ارزی) را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $\bar{G}$ مجموعه‌ای از این عناصر باشد. بنابراین نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$f:G\longrightarrow\bar{G}$$
$$f(C)=x_C\in\bar{G}$$

بدیهی است که این نگاشت یک‌به‌یک است. با استفاده از این نگاشت عملیات زیر را نسبت به $\bar{G}$ در نظر می‌گیریم:

$$x\perp y=f[C(x)+C(y)]\ \ \forall x,y\in\bar{G}$$

عملیاتی که در بالا تعریف شد، جابجایی و شرکت‌پذیر است. به عبارت دیگر از آنجا که $C(۰)=\{۰\}$ بنابراین $۰\in\bar{G}$ و $C(۰)+C(x)=C(۰+x)=C(x)$، آنگاه به ازای هر $x\in\bar{G}$ داریم $x=x\perp ۰$. بنابراین اگر x' یک عنصر متمایز از کلاس $S(x)$ باشد و $x\in\bar{G}$، آنگاه داریم:

$$S(x)=C(x'),$$

بنابراین

$$x\perp x'=f[C(x)+C(x')]=f[C(۰)]=۰,$$

در نتیجه به ازای هر $x,y\in\bar{G}$ داریم:

$$f[C(x)+C(y)]=f(C(x))\perp f(C(y)).$$

لذا در نهایت قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۶.۳. *به ازای هر ابرگروه چندمتقارن $(H,+)$، یک زیرمجموعه $\bar{G}$ از H با ساختار گروه‌های آبلی (با عنصر همانی صفر از ابرگروه) متناظر با گروه کاهش‌یافته $H/(۰)$ وجود دارد. گروه $(\bar{G},\perp)$ را گروه منتخب از $(H,+)$ می‌نامیم.*

ملاحظه ۷.۳. **(۱)** اگر یک کلاس هم‌ارزی به پیمانه ۰ از H بیش از یک عنصر داشته باشد، آنگاه بیش از یک گروه منتخب از H، با همان صفر H خواهیم داشت. ازآنجا که این گروه‌ها با گروه کاهش‌یافته $H/۰$ یکریخت هستند، بین خود آن‌ها نیز یکریختی وجود دارد.

(۲) بدیهی است هر گروه منتخب $\bar{G}$ وقتی که H ابرگروه محض است، زیرمجموعه محض از H است.

(۳) همان‌طور که در بالا ذکر شد از یک ابرگروه چندمتقارن، گروه‌های آبلی بیشتری می‌توان به دست آورد به‌طوری‌که به جای نگاشت f، نگاشت $g:G\longrightarrow H$ را که نگاشتی یک‌به‌یک به H است در نظر بگیریم، اما الزامی نیست که به ازای $C\in G$ نتیجه شود $g(C)\in C$ و بنابراین الزامی نیست که $g(C(۰))=۰$. اگر $g(C(۰))=e$. در این صورت این عنصر، عنصر همانی $g(G)$ است.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید E یک مجموعه و G زیرمجموعه‌ای با ساختار گروه آبلی است. همچنین فرض کنید ۰ عنصر همانی و $-x$ عنصر معکوس به ازای هر $x\in G$ است. اگر:*

(۱) *افراز R از E و نگاشت یک‌به‌یک از مجموعه خارج‌قسمتی E/R روی G وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به ازای هر $x\in G$، $f^{-۱}(x)=C_R(x)$ ($C_R(x)$ کلاس هم‌ارزی از E به پیمانه R و شامل عنصر x است) و*

(۲) $C_R(۰)=\{۰\}$،

آنگاه ابرعمل $x\oplus y=f^{-۱}[f(C_R(x))+f(C_R(y))]$ که از طریق گروه G روی E تعریف می‌شود، به E ساختار یک ابرگروه چندمتقارن می‌دهد، به‌طوری‌که گروه کاهش‌یافته $E/(۰)$ بر E/R منطبق می‌شود.

۴. شمارش ابرگروه‌های چندمتقارن با مرتبه کوچک

در این بخش به شمارش ابرگروه‌های چندمتقارن از مرتبه کمتر از ۶ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. *هر ابرگروه چندمتقارن $(H,+)$ از مرتبه دو، یک گروه است و $H \cong \mathbb{Z}_2$.*

توجه کنید که ۲۰ H_v–گروه مرتبه ۲ و ۸ ابرگروه مرتبه ۲ در حد یکریختی وجود دارند.

قضیه ۲.۴. *برای هر ابرگروه چندمتقارن $(H,+)$ با $|H| \geq 2$، داریم $|H/(0)| \geq 2$.*

قضیه ۳.۴. *فرض کنید $(H,+)$ ابرگروه چندمتقارن و $x_1 \in C(x)$ و $y_1 \in C(y)$. در این صورت برای هر $z \in C(x)+C(y)$ داریم $x_1+y_1 = x+y = C(z)$.*

قضیه ۴.۴. *تعداد ابرگروه‌های چندمتقارن از مرتبه ۳ در حد یکریختی، ۲ عدد است که جداول کیلی آنها در زیر آورده شده است:*

$+$	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۲	۰
۲	۲	۰	۱

$+$	۰	۱	۲
۰	۰	۱,۲	۱,۲
۱	۱,۲	۰	۰
۲	۱,۲	۰	۰

بایون و لایگروس در [۱] نشان دادند که تعداد ۱,۰۲۶,۴۶۲ H_v–گروه داریم. همچنین تسیتوراسو ماساروس در [۱۷] نشان دادند که به تعداد ۲۳,۱۹۲ ابرگروه مرتبه ۳ وجود دارد.

قضیه ۵.۴. *تعداد ابرگروه‌های چندمتقارن از مرتبه ۴ در حد یکریختی، ۴ عدد است که جداول کیلی آن‌ها در زیر آورده شده است:*

T_1 :

$+$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۰	۳	۲
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۲	۱	۰

T_2 :

$+$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۰	۱	۲

T_3 :

$+$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱,۲,۳	۱,۲,۳	۱,۲,۳
۱	۱,۲,۳	۰	۰	۰
۲	۱,۲,۳	۰	۰	۰
۳	۱,۲,۳	۰	۰	۰

T_4 :

$+$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲,۳	۲,۳
۱	۱	۲,۳	۰	۰
۲	۲,۳	۰	۱	۱
۳	۲,۳	۰	۱	۱

بایون و لایگروس [۲] نشان دادند که تعداد ابرگروه‌های آبلی مرتبه ۴ برابر با ۱۰,۶۱۴,۳۶۲ و تعداد H_v–گروه‌های آبلی مرتبه ۴ برابر با ۸,۰۲۸,۲۹۹,۹۰۵ است (در حد یکریختی).

قضیه ۶.۴. *در حد یکریختی تعداد ۷ نیم‌ابرگروه چندمتقارن از مرتبه ۵ وجود دارد.*

مراجع

[1] R. Bayon, N. Lygeros, *Les hypergroupes et H_v-groupes d'ordre 3*, submitted to Bulletin of the Greek Mathematical Society.
[2] R. Bayon, N. Lygeros, *Number of abelian H_v-groups of order n*, N. J. A. Sloane, editor, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A108089, 2005.
[3] R. Bayon, N. Lygeros, *Les hypergroupes abéliens d'ordre 4, Eléments structurels de la théorie des hyperstructures*, Colloque de l'Université de Thrace, Mars (2005).
[4] B. Davvaz, *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific, 2013.
[5] B. Davvaz, V. Leoreanu, *Hyperring Theory and Applications*, International Academic Press, Palm Harbor, U.S.A, 2007.
[6] B. Davvaz, V. Leoreanu, *Hypergroup theory*, World Scientific, 2022.
[7] B. Davvaz, *Semihypergroup theory*, Elsevier, 2016.
[8] B. Davvaz, T. Vougiouklis, *A walk through weak hyperstructures; H_v-structure*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019.
[9] M. De Salvo, *I K_H ipergruppi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **XXXI** (1982) 113—122.
[10] M. De Salvo, *Gli $(H;G)$-ipergruppi*, Riv. Mat. Univ. Parma., **(4) 10** (1984) 207—216.

[11] M. De Salvo, *Similitued and isomorphism in K_H hypergroups*, Proceeding of Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures an Applications, Xanthy, Greece, (1990) 87—96.
[12] M. De Salvo, *On the number of K_H hypergroups*, Riv. Di Mat. Pura Ed Appl., **12** (1992) 7—25.
[13] J. Mittas, *Hypergroupes et hyperanneaux polysymetriques*, *C.R. Acad. Sci. Paris* , **271** (1970) 290—293.
[14] J. Mittas, *Hypergroupes canoniques*, Mathematika Balkanica, t. **2** (1972) 165—179.
[15] J. Mittas, *Hypergroupes polysymmetriques canoniques,* Atti del Convegno su ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, Udine, (1985) 1—25.
[16] J. Mittas, S. Ioulidis, *Sur les hypergroupes polysymetrique commutatifs*, Rend. U.M.I. di Trieste, V.XVIII, (1985) 125—135.
[17] Ch. Tsitouras, Ch. G. Massouros, *On enumeration of hypergroups of order 3*, Computers and Mathematics with Applications, **59** (2010) 519—523.
[18] C. N. Yatras, *M-polysymmetrical hypergroups, Rivista Mat. Pura Appl.*, **11** (1992), 81—92.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، DE–260، صص. ۱۹۸–۲۰۳

وجود جواب‌های تناوبی دسته ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم و کاربرد آن در مدل ریاضی سیستم‌های ترمزگیری خودروهای سنگین

مرتضی بیات*،آ

آدانشیار گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم،
جواب تناوبی،
نظریه درجه لری–شاودر،
سیستم‌های ترمزگیری خودروهای سنگین.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34C25
47N20

چکیده

در این مقاله، وجود جواب‌های تناوبی دسته ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم بررسی می‌شود که به صورت زیر داده شده‌اند:

$$\dddot{x} + f(t,x,\dot{x})\ddot{x} + g(t,\dot{x}) + h(t,x) = p(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

که در آن $h : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $p : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابع پیوسته و T–تناوبی هستند.
برای بررسی وجود جواب‌های تناوبی، از نظریه درجه لری–شاودر استفاده می‌کنیم. این روش بر اساس تحلیل عملگرهای فشرده و پیوسته است و وجود جواب‌های تناوبی را تضمین می‌کند. نتایج به‌دست‌آمده به‌ویژه در تحلیل پایداری سیستم‌های مکانیکی مانند سیستم‌های ترمز خودروهای سنگین مفید هستند.

۱. مقدمه

در این بخش، معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dddot{x} + f(t,x,\dot{x})\ddot{x} + g(t,\dot{x}) + h(t,x) = p(t,x,\dot{x},\ddot{x}), \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ و $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ و توابع $h : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $p : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و T–تناوبی هستند، به این معنی که:

$$\begin{aligned} f(t+T,x,\dot{x},\ddot{x}) &= f(t,x,\dot{x},\ddot{x}),\\ g(t+T,x,\dot{x}) &= g(t,x,\dot{x}), \qquad (\exists T>0)\\ h(t+T,x) &= h(t,x),\\ p(t+T,x,\dot{x},\ddot{x}) &= p(t,x,\dot{x},\ddot{x}). \end{aligned}$$

در اینجا، وجود یک جواب تناوبی برای (۱) بررسی می‌شود.

*مرتضی بیات
پست الکترونیک : baayyaatt@gmail.com (مرتضی بیات)

در سال ۲۰۱۷، تونج و اردور [۱۱] معادله دیفرانسیل مرتبه سوم زیر را در نظر گرفتند:

$$\dddot{x} + f(\dot{x})\ddot{x} + g(\dot{x}) + h(x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \tag{۲}$$

که در آن f, g, h و p توابع پیوسته هستند و p یک تابع T–تناوبی است. در سال ۱۹۷۴، رایسیگ و همکارانش [۷] معادلات دیفرانسیل مرتبه سوم زیر را مورد بررسی قرار دادند:

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + h(x) = p(t), \tag{۳}$$
$$\dddot{x} + a\ddot{x} + g(\dot{x}) + cx = p(t), \tag{۴}$$
$$\dddot{x} + f(\ddot{x}) + b\dot{x} + cx = p(t), \tag{۵}$$

که در آن a، b و c اعداد ثابت حقیقی هستند. رایسیگ و همکارانش [۷] وجود جواب‌های تناوبی برای معادلات (۳)–(۵) را با استفاده از نظریه درجه لری–شودر بررسی کردند. سپس در سال ۱۹۹۱، آندرس و همکارانش [۲] وجود جواب‌های تناوبی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه سوم زیر را مطالعه کردند:

$$\dddot{x} + L(t, x) = a(\ddot{x}),$$
$$\dddot{x} + L(t, x) = b(\dot{x}),$$
$$\dddot{x} + L(t, x) = c(x),$$

که در آن تابع $L(t, x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$L(t, x) = f(t)\ddot{x} + g(t)\dot{x} + h(x) + p(t) + q(t, x, \dot{x}, \ddot{x}).$$

آن‌ها از روش استاندارد لری–شاودر برای اثبات نتایج استفاده کردند [۲].
سپس در سال ۱۹۹۶، آندرس [۳] وجود جواب‌های تناوبی برای معادلات (۳)–(۵) را مطالعه کرد. نتایج در [۳] با استفاده از روش دوم لیاپانوف به دست آمدند. علاوه بر این، در مقاله ۱۹۹۹ هوانگ [۵]، نتایج [۱]–[۳]، [۷] به معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم زیر تعمیم داد:

$$\dddot{x} + f(\ddot{x}) + g(\dot{x}) + h(x) = p(t). \tag{۶}$$

همچنین، تونج [۹] از نظریه درجه لری–شاودر برای بررسی وجود جواب‌های تناوبی برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه سوم زیر استفاده کرد:

$$\dddot{x} + c_1(t)\ddot{x} + c_2(t)\dot{x} + f(t, x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \tag{۷}$$

برای سایر کارهای مرتبط با وجود جواب‌های تناوبی، کلاسی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم ارائه شده است و خوانندگان را به مقالات [۸]، [۴]–[۱۳] ارجاع می‌دهیم.

قضیه A. معادله (۳)، (۴) یا (۵) حداقل یک جواب تناوبی با دوره تناوب T دارد اگر به ترتیب فرضیات (A_1)، (A_2) و (A_3) را برآورده کنند:

(A_1) نابرابری زیر برقرار است:

$$b < \frac{4\pi^2}{T^2},$$

و یک ثابت $R > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$[h(x) - \bar{p}]x < 0,$$

یا

$$[h(x) - \bar{p}]x > 0,$$

برای $|x| > R$، که در آن $\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$،

(A_2) $ac < 0$،

(A_3) $b < \frac{4\pi^2}{T^2}$ و $c \neq 0$.

اکنون معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه سوم با ضرایب ثابت a، b و c را در نظر بگیرید:

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = p(t). \quad (۸)$$

با استفاده از روش‌های شناخته‌شده، می‌توان نشان داد که برای بررسی وجود جواب T–تناوبی برای معادله‌ی (۸)، باید معادله‌ی همگن زیر را در نظر گرفت:

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = ۰. \quad (۹)$$

این معادله نباید جواب T–تناوبی غیربدیهی داشته باشد. معادله‌ی مشخصه‌ی مربوطه به صورت زیر است:

$$r^۳ + ar^۲ + br + c = ۰.$$

فرض اساسی برای اینکه معادله‌ی (۹) جواب T–تناوبی غیربدیهی نداشته باشد، این است که:

$$r \neq \frac{۲k\pi i}{T^۲},$$

که در آن k یک عدد صحیح است. با توجه به معادله‌ی (۹)، می‌دانیم که:

$$\frac{c}{a} = \frac{۴k^۲\pi^۲}{T^۲},$$

و

$$b = \frac{۴k^۲\pi^۲}{T^۲}.$$

بنابراین، اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{c}{a} \neq \frac{۴k^۲\pi^۲}{T^۲} \quad (H_۱)$$
$$b \neq \frac{۴k^۲\pi^۲}{T^۲} \quad (H_۲)$$

آنگاه معادله‌ی (۹) جواب T–تناوبی غیربدیهی خواهد داشت. در نتیجه، این شرایط تضمین می‌کنند که معادله‌ی (۸) جواب T–تناوبی دارد.
برای دستیابی به نتایج اصلی این مقاله، از قضیه‌ی استاندارد لری–شاودر (رایسیگ و همکاران، [۷]، قضیه‌ی ۳۸.۱) استفاده می‌کنیم:

قضیه B. فرض کنید

$$L(t,x) = f(t)\ddot{x} + g(t)\dot{x} + h(x) + p(t) + q(t,x,\dot{x},\ddot{x}).$$

اگر تمام جواب‌های T–تناوبی خانواده‌ی یک‌پارامتری معادلات

$$\ddot{x} + \lambda L(t,x) + (۱ - \lambda)ex = \lambda W(x,\dot{x},\ddot{x}), \quad \lambda \in (۰,۱),$$

به همراه مشتقات اول و دوم آن‌ها، به‌طور یکنواخت و مستقل از λ کراندار باشند، و همچنین معادله‌ی خطی حاصل از معادله‌ی دیفرانسیل فوق برای $\lambda = ۰$ هیچ جواب T–تناوبی غیربدیهی نداشته باشد، آنگاه معادله‌ی اصلی (برای $\lambda = ۱$) یک جواب T–تناوبی خواهد داشت.
هدف اصلی این کار بررسی وجود جواب‌های T–تناوبی برای معادله‌ی (۳) است. برای این منظور، از نظریه‌ی درجه‌ی لری–شاودر استفاده می‌کنیم تا یک شرط کافی برای وجود جواب‌های T–تناوبی معادله‌ی (۳) ارائه دهیم.

۲. وجود جواب‌های تناوبی

لم‌های زیر برای اثبات نتیجه‌ی اصلی ما ضروری هستند:

لم ۱.۲ ([۱۱]). *فرض کنید $\xi(t) \in C^۱$ و $\dot{\xi}(t) \in L^۲[۰,T]$، و $M_۱$ و $M_۲$ ثابت‌های مثبت باشند. اگر*

$$\int_۰^T |\xi(t)|^۲\, dt \leq M_۱, \quad \int_۰^T |\dot{\xi}(t)|^۲\, dt \leq M_۲,$$

آنگاه ثابتی $M > ۰$ (فقط وابسته به $M_۱$ و $M_۲$) وجود دارد به طوری که $|\xi(t)| \leq M$ برای همه‌ی $t \in [۰,T]$.

لم ۲.۲ ([۱۱]). *فرض کنید* $\xi(t) \in C^{۲}$ *یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب* T *باشد. آنگاه*

$$\int_{۰}^{T} (\dot{\xi}(t))^{۲}\, dt \leq \frac{T^{۲}}{۴\pi^{۲}} \int_{۰}^{T} (\ddot{\xi}(t))^{۲}\, dt.$$

قضیه زیر وجود جواب‌های تناوبی با دوره‌ی تناوب T برای معادله‌ی (۱) را اثبات می‌کند.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید ثابت‌های* a, c (با $a \neq ۰, c \neq ۰$) *و ثابت‌های مثبت* m، M *و* M' *وجود داشته باشند به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند:*

$$|cx - h(t,x)| \leq M \quad (A_{۱})،$$

$$a(a - f(t,y,z)) \leq ۰ \quad (A_{۲})،$$

$$\frac{c}{a} < \frac{۴\pi^{۲}}{T^{۲}} \quad (A_{۳})،$$

$$|p(t,x,\dot{x},\ddot{x})| \leq |\theta(t)| \leq m \quad (A_{۴})،$$

$$|g(t,\dot{x})| \leq M' \quad (A_{۵})،$$

که در آن $\theta(t)$ *یک تابع پیوسته برای تمام* $t \in [۰,T]$ *است. آنگاه، معادله‌ی* (۱) *حداقل یک جواب تناوبی با دوره‌ی تناوب* T *دارد.*

نتیجه‌ی اصلی دوم مربوط به وجود و یکتایی جواب‌ها برای معادله‌ی (۱) است.

قضیه ۴.۲. *علاوه بر فرض‌های* $(A_{۱})$ *و* $(A_{۵})$ *قضیه‌ی* ۳.۲ *(به جز فرض‌های* $(A_{۲})$، $(A_{۳})$ *و* $(A_{۵})$*)، فرض می‌کنیم که ثابت‌های مثبت* b، c *(با* $c \neq ۰$*)*، α، β *و* M *وجود دارند به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند:*

$$|by - g(t,y)| \leq \alpha|y| + \beta \quad (B_{۱})،$$

$$b < \frac{۴\pi^{۲}}{T^{۲}} \quad (B_{۲}).$$

در این صورت، ثابتی مانند $\alpha_{۰} > ۰$ *وجود دارد، به‌طوری که اگر* $\alpha < \alpha_{۰}$ *باشد، معادله‌ی* (۱) *حداقل یک جواب* T*ـتناوبی دارد.*

مثال ۵.۲. معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dddot{x} + \left(۲ + e^{-tx\dot{x}^{۲}}\right)\ddot{x} + \sin(t\dot{x}) + \left(۲x - e^{-tx^{۲}}\right) = \sin(۲t), \qquad (۱۰)$$

که حالت خاصی از معادله‌ی (۱) است. با مقایسه‌ی معادله‌ی (۱۰) با معادله‌ی (۱)، داریم:

$$\begin{aligned} &f(t,x,\dot{x}) = ۲ + e^{-tx\dot{x}^{۲}},\\ &g(t,\dot{x}) = \sin(t\dot{x}),\\ &h(t,x) = ۲x - e^{-tx^{۲}},\\ &p(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = \sin(۲t). \end{aligned}$$

معادله‌ی (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + ۲x = \sin(۲t) + f_{۱}(t,x,\dot{x})\ddot{x} + g_{۱}(t,\dot{x}) + h_{۱}(t,x)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &a = ۱, \quad c = ۲,\\ &f_{۱}(t,x,\dot{x}) = a - f(t,x,\dot{x}) = ۱ - (۲ + e^{-tx\dot{x}^{۲}}) = -(۱ + e^{-tx\dot{x}^{۲}}),\\ &g_{۱}(t,\dot{x}) = -g(t,\dot{x}) = -\sin(t\dot{x}),\\ &h_{۱}(t,x) = cx - h(t,x) = ۲x - (۲x - e^{-tx^{۲}}) = e^{-tx^{۲}}. \end{aligned}$$

بنابراین، می‌توان دید که:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + ۲x = \sin(۲t) - (۱ + e^{-tx\dot{x}^۲})\ddot{x} - \sin(t\dot{x}) + e^{-tx^۲}.$$

به‌وضوح داریم:

$$|cx - h(t,x)| = e^{-tx^۲} \leq ۱ = M, \quad M > ۰$$

$$a\big(a - f(t,x,\dot{x})\big) = -\big(۱ + e^{-tx\dot{x}^۲}\big) < ۰$$

$$\frac{c}{a} = ۲ < \frac{۴\pi^۲}{T^۲},$$

که در آن $T = \pi$.
بنابراین، تمام فرض‌های قضیه‌ی ۳.۲ برقرار هستند. در نتیجه، می‌توان نتیجه گرفت که معادله‌ی (۱۰) حداقل یک جواب Tـتناوبی دارد.

۳. مدل ریاضی برای ترمزگیری خودروهای سنگین

در این بخش، به بررسی یک مدل ریاضی برای ترمزگیری یک چرخ از خودروهای سنگین می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل حرکت چرخ، نیروی ترمزگیری و اصطکاک جاده به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} M_p\ddot{x} = -K_۱(x - y) - K_۲(x - z) \\ C(\dot{z} - \dot{y}) = K_۲(x - z) \end{cases} \tag{۱۱}$$

در اینجا M_p جرم کل سیستم ترمزگیری است، x تغییر در حرکت چرخ پس از ترمزگیری را نشان می‌دهد، y نیروی خارجی (اصطکاک) وارد شده توسط جاده بر چرخ است، و z تغییر در نیروی فنر پس از ترمزگیری را نشان می‌دهد [۶]. در کتاب‌های کلاسیک، معمولاً فرض می‌شود که $K_۱, K_۲$ و C ثابت هستند، و بنابراین معادلات به عنوان معادلات دیفرانسیل خطی در نظر گرفته شده و حل می‌شوند. برای این منظور، با حذف z از بین دو معادله، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\dddot{x} + \frac{K_۲}{C}\ddot{x} + \frac{K_۱ + K_۲}{M_p}\dot{x} + \frac{K_۱K_۲}{CM_p}x = \frac{K_۱ + K_۲}{M_p}\dot{y} + \frac{K_۱K_۲}{CM_p}y \tag{۱۲}$$

معادله (۱۲)، تحت فرض ثابت بودن $K_۱, K_۲$ و C، یک معادله خطی است. از آنجا که y به عنوان یک تابع تناوبی در نظر گرفته می‌شود، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\dddot{x} + \frac{K_۲}{C}\ddot{x} + \frac{K_۱ + K_۲}{M_p}\dot{x} + \frac{K_۱K_۲}{CM_p}x = \sum_{k=۰}^{\infty} \left(a_k \cos(kTt) + b_k \sin(kTt)\right).$$

با بسط x به صورت سری فوریه

$$x = \sum_{k=۰}^{\infty} \left(A_k \cos(kTt) + B_k \sin(kTt)\right),$$

و برابر قرار دادن ضرایب، جواب تناوبی معادله به دست می‌آید. با این حال، اغلب برای به دست آوردن یک جواب تقریبی، از یک یا دو جمله سری فوریه استفاده می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم که $K_۱, K_۲$ و C ثابت نیستند، بنابراین سیستم (۱۱) به مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی تبدیل می‌شود. حال با حذف z از بین معادلات، مانند حالت قبل اما بدون فرض ثابت بودن ضرایب، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\frac{M_p}{K_۲}\dddot{x} + \frac{K_۱}{K_۲}(\ddot{x} - \ddot{y}) + \dot{x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{M_p}{C}\right)\ddot{x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{K_۱}{C}\right)(x - y) \\ &= -\frac{M_p}{C}\ddot{x} - \frac{K_۱}{C}(x - y) + \dot{y}, \end{aligned}$$

یا

$$\dddot{x}+\left[\frac{K_2}{C}+\frac{K_2}{M_p}\frac{d}{dt}\left(\frac{M_p}{C}\right)\right]\ddot{x}+\frac{K_1+K_2}{M_p}\dot{x}+\frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C}+\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{C}\right)\right]x$$
$$=\frac{K_1+K_2}{M_p}\dot{y}+\frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C}+\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{C}\right)\right]y,$$

که در آن y و $\dot{y}$ توابعی از t هستند. حال فرض می‌کنیم

$$f(t,x,\dot{x})=\frac{K_2}{C}+\frac{K_2}{M_p}\frac{d}{dt}\left(\frac{M_p}{C}\right)$$
$$g(t,\dot{x})=\frac{K_1+K_2}{M_p}$$
$$h(t,x)=\frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C}+\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{C}\right)\right]x$$
$$p(t,x,\dot{x},\ddot{x})=\frac{K_1+K_2}{M_p}\dot{y}+\frac{K_2}{M_p}\left[\frac{K_1}{C}+\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{C}\right)\right]y.$$

که در نهایت معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$\dddot{x}+f(t,x,\dot{x})\ddot{x}+g(t,\dot{x})+h(t,x)=p(t,x,\dot{x},\ddot{x}). \qquad (۱۳)$$

اگر f، g، h و p در شرایط قضیه ۳.۲ صدق کنند، وجود یک جواب تناوبی تضمین می‌شود.
شایان ذکر است که وجود یک جواب تناوبی نشان‌دهنده عملکرد صحیح سیستم ترمزگیری خودروهای سنگین است. اگر جواب تناوبی وجود نداشته باشد، ترمز پس از یک بار استفاده به طور کامل از کار می‌افتد [۶].

مراجع

[1] U.A. Afuwape, P. Omari and F. Zanolini, Nonlinear perturbations of differential operators with nontrivial kernel and applications to third-order periodic boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **143**(1): 35–56 (1989).

[2] J. Andres and V. Vlček, Periodic solutions of the third order parametric differential equations involving large nonlinearities, *Mathematica Slovaca* **41**(4): 337–349 (1991).

[3] J. Andres, Existence, uniqueness, and instability of large-period harmonics to the third-order nonlinear ordinary differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **199** (2): 445–457 (1996).

[4] Y.Q. Guo and X.T. Du, Periodic solutions of third-order functional differential equations, *Journal of Mathematical Study*, **36** (1): 37–42 (2003).

[5] X. Huang, On the existence of periodic solutions for the third-order nonlinear ordinary differential equations, *Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities. Series B*, **14**(2): 125-130 (1999).

[6] H.B. Pacejka, Non-linearities in road vehicle dynamics vehicle system, *Dynamics*, **15**: 237-254 (1986).

[7] R. Reissig, G. Sansone and R. Conti, Non-linear Differential Equations of Higher Order. *Noordhoff International Publishing*, Leyden (in German) (1974).

[8] , H.O. Tejumola, On the existence of periodic solutions of some third-order nonlinear differential equations with elay, *Special issue in honour of Professor James O. C. Ezeilo. Journal of Nigerian Mathematical Society*, **11**(3): 19–28 (1992).

[9] C. Tunç, On existence of periodic solution to certain nonlinear third order differential equations, *Proyecciones*, **28** (2): 125–132 (2009).

[10] C. Tunç, On the existence of periodic solutions of functional differential equations of third order, *Applied and Computational Mathematics*, **15** (2): 189-199 (2016).

[11] C. Tunç and S. Erdur, On the Existence of Periodic Solutions to Certain Non-linear Differential Equations of Third Order, *Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences: A. Physical and Computational Sciences*, **45**(2): 207–218 (2017).

[12] V. Vlcek, Note on existence of periodic solutions to the third-order nonlinear differential equation, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, **29** (1): 165-195 (1990).

[13] Z. Zhang, Z. Wang and J. Yu, On the existence of periodic solutions of third order functional differential equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, **43** (3): 461–469 (2000).

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، RP–262، صص. ۲۰۴–۲۰۵

محاسبه پارامترهای انتروپی تعمیم یافته در گرافهای جهت دار وزن دار

زهره نیکوروش*

گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
انتروپی شانون
انتروپی‌های تعمیم یافته
گراف جهت دار

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
60J10
94A17

چکیده

انتروپی شانون بر چهار اصل استوار است که نقض هر یک می‌تواند باعث ایجاد روابط جدید و انتروپی‌های متنوع شود. در سیستم‌های غیر ارگودیک اصل جداپذیری یا اصل چهارم شانون منطبق نیست. با حذف این اصل انتروپی‌های تعمیم یافته‌ای به دست آمده است که ثابت شده با تعریف دو پارامتر (c,d) می توان کلاس‌های هم ارزی انتروپی‌ها را به صورت منحصر به فرد تعریف کرد. حال قصد داریم مقادیر این پارامترها را برای گراف‌های ساده و همبند جهت‌دار بیابیم و نتیجه را با حالت قبل مقایسه کنیم.

۱. بخش اصلی

محققان نشان دادند که همه انتروپی های تعمیم یافته به شکل زیر هستند ،[۱]

$$S_{c,d} \propto \sum_{i=1}^{W} \Gamma(d+1, 1-c\log p_i), \tag{1}$$

با قرار دادن N به عنوان حجم فضای حالت یک فرآیند تصادفی، می‌توان تعداد پیکربندی‌های سیستم (ریز وضعیت‌ها) را به صورت تابع $W(N)$ از آن در نظر گرفت. هانل و تورنر [۲] نشان دادند برای محاسبه پارامترهای (c,d) می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$\frac{1}{1-c} = \lim_{N\to\infty} N\frac{W'(N)}{W(N)}, \quad d = \lim_{N\to\infty} \log W(N)\left(\frac{W(N)}{NW'(N)} + c - 1\right). \tag{2}$$

مقاله‌ای برای قدم زدن تصادفی در گراف‌های ساده و بدون جهت در دو حالت بدون حلقه و با حلقه، دو پارامتر مذکور را محاسبه کرده‌ایم[۳]. برای گرافهای جهت دار و وزن دار نیز می توان با استفاده از قضیه پرون فروبنیوس مقدار های حدی را برای توانهای ماتریس مجاورت گراف به دست آورد.

*سخنران
پست الکترونیک : nikooravesh@birjandut.ac.ir (زهره نیکوروش)

مراجع

[1] R. Hanel and S. Thurner. A comprehensive classification of complex statistical systems and an axiomatic derivation of their entropy and distribution functions. *Europhys. Lett.*, 93, 2011.
[2] R. Hanel and S. Thurner. When do generalized entropies apply? how phase space volume determines entropy. *Europhys. Lett.*, 96, 2011.
[3] Z. Nikooravesh. Generalized entropy for random walks in regular networks and graphs as a super diffusion. *Bulletin of the Transilvania University of Bracsov, Series III: Mathematics and Computer Scienc*, 2(64)(1):197–208, 2022.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–263، صص. ۲۰۶–۲۱۳

تأثیر همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان پایه دهم رشته تجربی در درس ریاضی

یونس کریمی‌فردین‌پور [آ]، سمیه حیدری [ب]

[آ] دکتری تخصصی، گروه ریاضی، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران .
[ب] دانشجوی دکتری تخصصی، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران .

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
همتاسنجی ۱
یادگیری خودتنظیمی ۲
باورهای انگیزشی ۳

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97D60
97C30
97C30

چکیده

در سال‌های اخیر، تأثیر همتاسنجی بر ایجاد انگیزه، تقویت خودکارآمدی و توسعه مهارت‌های یادگیری خودراهبری در دانش‌آموزان مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. با این حال، پژوهشی مشخص در زمینه بررسی تأثیر همتاسنجی بر تقویت مهارت‌های خودتنظیمی در دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم انجام نشده است. هدف این پژوهش، بررسی تأثیر همتاسنجی بر توسعه مهارت‌های خودتنظیمی در دانش‌آموزان پایه دهم رشته تجربی در درس ریاضی می‌باشد. این پژوهش به روش شبه‌آزمایشی با استفاده از طرح پیش‌آزمون–پس‌آزمون و گروه گواه انجام شده است. جامعه آماری پژوهش شامل کلیه دانش‌آموزان پایه دهم رشته تجربی شهرستان کلاله در سال تحصیلی ۱۴۰۴–۱۴۰۳ بوده که تعداد آن‌ها ۳۱۵ نفر می‌باشد. از این تعداد، ۶۰ نفر به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب و در دو گروه کنترل و آزمایش قرار گرفتند. ابزار اندازه‌گیری مورد استفاده، پرسش‌نامه راهبردهای یادگیری خودتنظیمی پینتریچ و دی‌گروت است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که همتاسنجی تأثیر مثبت و معناداری بر راهبردهای شناختی، فراشناختی و یادگیری خودتنظیمی دانش‌آموزان دارد. با این حال، این شیوه ارزیابی بر باورهای انگیزشی دانش‌آموزان تأثیر معناداری نداشته است. یافته‌های این پژوهش حاکی از آن است که همتاسنجی به عنوان یک روش ارزشیابی تکوینی، می‌تواند در تقویت مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

۱. مقدمه

با توجه به اینکه دانش‌آموزان به عنوان آینده‌سازان این کشور، نقش بی‌بدیلی در جامعه ایفا می‌کنند، این نسل نوجوان و پویای امروز، ستون‌های فردای کشور خواهند بود که با انگیزه، استعداد و تلاش خود، چشم‌اندازی نوین برای آینده ترسیم می‌کنند. اهمیت و ارزش دانش‌آموزان، نه تنها در یادگیری و آموزش مهارت‌های علمی و حرفه‌ای، بلکه در پرورش روحی و اخلاقی آن‌ها نهفته است. بنابراین، بهبود و تقویت نظام آموزشی و حمایت از دانش‌آموزان، سرمایه‌گذاری‌ای است که به آینده‌ای درخشان‌تر و پرامیدتر منتهی خواهد شد. در چشم‌انداز پیش رو در آموزش و پرورش، نیاز به رویکردهای نوین در تدریس و ارزیابی اهمیت ویژه‌ای یافته است. روش‌های سنتی آزمون‌ها در ریاضیات سال‌هاست که به جای پرورش مهارت‌های تفکر خلاق و انتقادی برای حل مسائل پیچیده دنیای واقعی، به حفظ طوطی‌وار مطالب درسی تأکید داشته‌اند که این شیوه به شدت مورد نقد قرار گرفته است [۱۱].

در دنیای آموزشی حاضر، توسعه مهارت‌های خودتنظیمی [۱] در دانش‌آموزان به عنوان یکی از مهم‌ترین اهداف آموزشی در نظر گرفته می‌شود. این مهارت‌ها به ویژه در درس ریاضی که نیازمند تفکر تحلیلی، حل مسئله و درک عمیق مفاهیم انتزاعی است، از اهمیت بالایی برخوردارند.

پست الکترونیک : fardin81f@gmail.com (یونس کریمی‌فردین‌پور)، somaie_math2008@yahoo.com (سمیه حیدری)

[1] Self-regulation skills

خودتنظیمی فرآیندی فعال است که از طریق آن فراگیران اهدافی را برای یادگیری انتخاب کرده و سعی می‌کنند که شناخت، انگیزه و رفتار خود را کنترل، تنظیم و نظارت نمایند [۲۱]. خودتنظیمی امری اکتسابی است که در یادگیری موثر بوده [۷] و علاوه بر این، می‌توان آن را مهارت تحصیلی قابل آموزش در نظر گرفت که منجر به پیشرفت تحصیلی می‌شود [۲۱].

همچنین، خودتنظیمی بر پایه نظریه اجتماعی ـ فرهنگی ویگوتسکی بنا شده است. ویگوتسکی معتقد است که توانایی‌های شناختی و خودتنظیمی از طریق تعاملات اجتماعی و فرهنگی در افراد شکل می‌گیرد [۸]. بندورا (۱۹۹۴) خودتنظیمی را به عنوان تأثیری که فرد بر انگیزه‌ها، فرآیندهای شناختی، حالت‌های احساسی و الگوهای رفتاری خود دارد، تعریف می‌کند. به عبارتی، یادگیری خودتنظیمی[۲] فرآیندی است که در آن فرد به طور فعال برنامه‌ریزی، نظارت و ارزیابی عملکرد تحصیلی خود را انجام می‌دهد [۷]. این فرآیند شامل تنظیم اهداف، مدیریت زمان، انتخاب استراتژی‌های یادگیری مناسب و ارزیابی پیشرفت است. یادگیری خودتنظیمی به فرد کمک می‌کند تا فرآیند یادگیری خود را بهبود ببخشد و به نتایج بهتری دست یابد [۱۸].

[2] Self-regulated learning

مهارت‌های خودتنظیمی به توانایی فرد در کنترل و مدیریت افکار، احساسات و رفتارهای خود به صورت آگاهانه و هدفمند اشاره دارد. این مهارت‌ها شامل خودتنظیمی شناختی، عاطفی و رفتاری می‌شوند. مهارت‌های خودتنظیمی به شخص کمک می‌کند تا چالش‌ها و استرس‌های مختلفی که با آن‌ها روبرو می‌شود را حل کرده و به اهداف خود برسد [۱۴]. در نتیجه، می‌توان بیان کرد که یادگیری خودتنظیمی بخشی از مهارت‌های خودتنظیمی است که به طور ویژه در حوزه‌های یادگیری و تحصیلی کاربرد دارد.

با این حال، دانش‌آموزان دوره متوسطه دوم، به طور کامل به این مهارت‌ها دست نیافته‌اند و معلم می‌تواند به عنوان یک حامی و مسئول، فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم آورد تا زمینه توسعه مهارت‌های خودتنظیمی ایجاد شود [۷]. در این پژوهش، شیوه‌ای از ارزیابی مطرح شده و تأثیر آن بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان مورد بررسی قرار می‌گیرد. همتاسنجی یا ارزیابی همتایان[۳]، به فرآیندی اشاره دارد که در آن دانش‌آموزان فعالیت‌ها و تکالیف همسالان خود را بررسی و نقد می‌کنند. این نوع ارزیابی با هدف ارائه بازخوردی مفید و سازنده به کار می‌رود و به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مهارت‌های ارزیابی و نقد سازنده را تقویت کنند و از بازخورد همسالان خود برای بهبود عملکرد تحصیلی خویش بهره‌مند شوند. علاوه بر این، دانش‌آموزان در این رویکرد به‌صورت فعال در فرآیند یادگیری و ارزیابی مشارکت می‌کنند [۱] و [۱۵].

اگرچه روش‌ها و مزایای این شیوه ارزیابی توسط دکتر جورج ژاردین[۴]، استاد دانشگاه گلاسگو [۵]، در قرن هجدهم مطرح شد، اما در سال‌های اخیر به عنوان یک روش ارزیابی تکوینی مورد توجه ویژه قرار گرفته است. این شیوه ارزیابی می‌تواند در حوزه‌های مختلف درسی، از جمله تکالیف کتبی، ارائه‌های شفاهی، عملکرد در آزمون‌ها و سایر رفتارهای یادگیرندگان، به‌صورت رو در رو یا ناشناس اجرا شود. معلمان با اهداف مختلفی مانند کاهش زمان ارزیابی، توسعه توانایی‌های شناختی و فراشناختی، و افزایش مشارکت دانش‌آموزان از این روش در کلاس‌های درس یا محیط‌های یادگیری برخط استفاده می‌کنند [۱۶].

طبق پژوهش لو چنگ و همکاران[۶] (۲۰۲۲)، ارزیابی همتایان فواید بسیاری دارد، اما به دلیل بازخوردهای سطحی، مقاومت دانش‌آموزان در برابر تفکر انتقادی و بی‌اعتمادی نسبت به ارزیابی همسالان، ممکن است تأثیرات منفی نیز به همراه داشته باشد. این چالش‌ها به ویژه در درس ریاضی که نیازمند دقت و تحلیل دقیق است، بیشتر نمایان می‌شوند. بنابراین، لازم است قوانین و مقرراتی برای ارزیابی همتایان همراه با نظارت مستمر در نظر گرفته شود تا دانش‌آموزان در فضایی مملو از اعتماد و تفکر انتقادی، مفاهیم ریاضی را بهتر درک کرده و در برنامه‌ریزی و طراحی فرصت‌های یادگیری بهتر عمل کنند [۴].

به طور کلی، دانش‌آموزانی که در فرآیند یادگیری خود به‌صورت فراشناختی، انگیزشی و رفتاری فعال هستند، به عنوان یادگیرندگان خودتنظیم شناخته می‌شوند. این دانش‌آموزان به‌صورت شخصی تلاش‌ها و اقدامات خود را برای کسب دانش و مهارت‌ها آغاز و هدایت می‌کنند، بدون اینکه به معلمان، والدین یا دیگر عوامل آموزشی متکی باشند[۱۸]. یادگیرندگان خودتنظیم با آگاهی از نقاط قوت و ضعف خود، از طریق اهداف شخصی و استراتژی‌های کاری به موفقیت‌های تحصیلی و شغلی دست می‌یابند. این یادگیرندگان با نظارت بر رفتارهای خود و ارزیابی اثربخشی آن‌ها، انگیزه و روش‌های یادگیری خود را بهبود می‌بخشند. خودتنظیمی نه تنها موفقیت تحصیلی را افزایش می‌دهد، بلکه به یادگیری مادام‌العمر و توسعه مهارت‌های غیررسمی نیز کمک می‌کند[۲۰].

با وجود تحقیقات گسترده در زمینه مفاهیم همتاسنجی و یادگیری خودتنظیمی، پژوهش‌های کمی به بررسی تأثیر همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی پرداخته‌اند. این پژوهش درصدد است تا با بررسی این رابطه، گامی در جهت بهبود فرآیندهای یادگیری و ارزیابی در نظام آموزشی بردارد. در ادامه، پژوهش‌های مرتبط با تأثیر همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی بررسی می‌شود.

باقری و همکاران[۲]، در مطالعه‌ای بر روی دانشجویان علوم تربیتی دانشگاه اراک نشان دادند که آموزش همراه با ارزیابی همتایان باعث افزایش مهارت‌های یادگیری خودراهبری، شامل خرده‌مقیاس‌های خودمدیریتی، لذت از یادگیری و کنترل یادگیری می‌شود. آن‌ها تأکید کردند که برای اجرای موفق این شیوه، استفاده از پلتفرم‌های آموزش الکترونیکی مناسب، معیارهای ارزیابی دقیق و راهنمایی مناسب یادگیرندگان به عنوان ارزیاب ضروری است.

زیمرمن[۷][۲۰]، در مطالعه‌ای بر روی یادگیری خودتنظیمی بیان می‌کند که این مهارت با استفاده از راهبردهای آموزشی متنوع قابل تقویت است. پژوهش‌های مختلف نشان می‌دهند که استفاده از همتاسنجی به عنوان یک ابزار آموزشی می‌تواند به بهبود عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان، به‌ویژه در درس ریاضی، کمک کند. در همین راستا، گرونولد و همکاران[۸] [۶]، در پژوهشی بر روی دانشجویان مهندسی در بلژیک نشان دادند که ارزیابی همتایان اثرات مثبت بلندمدتی بر یادگیری مادام‌العمر و توسعه مهارت‌های خودارزیابی دارد.

استفان بروتوس ماگدا[۹][۳]، در مطالعه‌ای بر روی دانشجویان بازرگانی، تأثیر سیستم ارزیابی مبتنی بر وب را بررسی کرد و نشان داد که ارزیابی همتایان با بازخورد کمی و کیفی می‌تواند مهارت‌های مهمی را در آموزش سطوح بالاتر تقویت کند. این پژوهش تأکید کرد که ارزیابی همتایان به دانش‌آموزان امکان خودارزیابی و توسعه دانش خود را می‌دهد و باعث افزایش اعتماد به نفس و تفکر انتقادی می‌شود.

حاتمی[۷]، نیز در مطالعه‌ای نشان داد که یادگیری مشارکتی و فعالیت‌های خودسنجی باعث ارتقای مهارت‌های خودتنظیمی در دانش‌آموزان، به‌ویژه در دوره‌های هندسه، می‌شود. وی تأکید کرد که این روش‌ها مشارکت فعال دانش‌آموزان را افزایش داده و کیفیت یادگیری را بهبود می‌بخشند.

---

[3] Peer Assessment
[4] Georg Jardine
[5] Glasgow
[6] Lu Cheng et al.
[7] Barry J. Zimmerman.
[8] Wouter Groeneveld et al.
[9] Stephane Brutus Magda B. L. Donia.

العبد الطیف[۱]، ارزیابی را از اساسی‌ترین بخش‌های آموزش دانسته و جایگزینی ارزیابی سنتی با روش‌هایی مانند خودارزیابی و هم‌اارزیابی را پیشنهاد کرد. وی بیان کرد که این روش‌ها مشارکت فعال یادگیرندگان را افزایش داده و با تقویت مهارت‌های تأمل و تفکر انتقادی، کیفیت یادگیری را بهبود می‌بخشند.
نیلیما[۱۰][۱۱]، در مقاله‌ای با عنوان "رویکرد جدید امتحانی برای خلاقیت و مهارت‌های حل مسئله در ریاضیات"، تأکید کرد که شیوه‌های ارزیابی سنتی معمولاً بر حفظ مطالب درسی تمرکز دارند و دانش‌آموزان را درگیر کشف مفاهیم ریاضی و ارتباط آن‌ها با مسائل دنیای واقعی نمی‌کنند. وی ارزیابی همتایان به صورت ناشناس را به عنوان ابزاری برای کاهش سوگیری و افزایش درک دانش‌آموزان از نحوه تفکر همسالان خود معرفی کرد. این روش به توسعه مهارت‌های ضروری مانند خلاقیت، درک ریاضی، توانایی حل مسئله، یادگیری مشارکتی و خودارزیابی کمک می‌کند. اورتگا و کوریا گوروسپه[۱۱][۱۲]، در یک مرور سیستماتیک با عنوان "ارزیابی همتایان برای ترویج یادگیری خودتنظیمی با فناوری در آموزش عالی"، به بررسی ۱۵ مقاله مرتبط پرداختند. آن‌ها نشان دادند که ارزیابی همتایان در کلاس‌های درس مجازی، به‌ویژه زمانی که به صورت ناشناس و با بازخورد فوری انجام شود، می‌تواند یادگیری خودتنظیمی را از طریق راهبردهای فراشناختی و بازتاب انتقادی بهبود بخشد.
بررسی تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که همتاسنجی به عنوان یک راهبرد آموزشی تأثیرات مثبتی بر یادگیری خودتنظیمی دارد. با این حال، تحقیقات موجود به‌طور خاص به بررسی تأثیر این روش بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان در درس ریاضی نپرداخته‌اند. بنابراین، پژوهش حاضر به بررسی تأثیر همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان پایه دهم تجربی در درس ریاضی می‌پردازد تا شکاف‌های موجود در تحقیقات پیشین را پوشش داده و به ارائه دیدگاه‌های جدید و علمی در زمینه آموزش و یادگیری کمک کند. امید است که نتایج این پژوهش به بهبود روش‌های تدریس، ارزیابی و ارتقای توانمندی‌های تحصیلی دانش‌آموزان منجر شود.
با توجه به اهمیت و ضرورت نقش متغیرهای مطرح‌شده، بویژه همتاسنجی و مهارت‌های خودتنظیمی در میزان یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی، این پژوهش در پی پاسخگویی به این سوال است: همتاسنجی چه تأثیری بر مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان دارد؟

۲. روش پژوهش

پژوهش حاضر از نظر هدف، کاربردی و از نظر ماهیت، نیمه‌آزمایشی است که از طرح پیش‌آزمون–پس‌آزمون همراه با گروه گواه استفاده شده است. جامعه آماری این پژوهش شامل تمامی دانش‌آموزان پایه دهم رشته تجربی شهرستان کلاله در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳ به تعداد ۳۱۵ نفر بود. از این جامعه، ۶۰ دانش‌آموز به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند که ۳۰ نفر در گروه آزمایش و ۳۰ نفر در گروه کنترل قرار گرفتند.
در ابتدای اجرای طرح، یک جلسه توجیهی برای دانش‌آموزان گروه آزمایش برگزار شد. در این جلسه، درباره نحوه اجرای طرح، زمان‌بندی، چگونگی تحلیل نتایج آزمون‌ها توسط همتایان و اهداف همتاسنجی توضیحات لازم ارائه شد. گروه آزمایش به مدت شش جلسه از همتاسنجی به عنوان روش ارزشیابی تکوینی استفاده کردند، در حالی که گروه کنترل با روش سنتی ارزیابی شدند.
اجرای همتاسنجی در گروه آزمایش به دو شیوه انجام شد:

۱. **ارزیابی تکالیف و فعالیت‌های ریاضی:** دانش‌آموزان تکالیف و فعالیت‌های ریاضی همکلاسی‌های خود را ارزیابی کرده و بازخورد ارائه دادند.
۲. **تحلیل آزمون‌های همتایان:** در سه جلسه از شش جلسه، هر جلسه به مدت ۴۵ دقیقه، یکی از اعضای هر گروه به عنوان طراح آزمون انتخاب شد. این فرد آزمونی از مباحث تدریس شده طراحی کرد و از سایر هم‌گروهی‌ها آزمون گرفت. پس از برگزاری آزمون، طراحان سوالات در کلاس درس به تحلیل پاسخ‌های هم‌گروهی‌ها پرداختند و نقاط قوت و ضعف آن‌ها را با نظارت دبیر بیان کردند. دانش‌آموزان نیز نتایج و بازخوردها را بازبینی کردند. این فرآیند به آن‌ها کمک کرد تا مهارت و درک بهتری از موضوعات درس ریاضی پیدا کنند.

برای بررسی تأثیر این طرح، از پرسش‌نامه راهبردهای یادگیری خودتنظیمی پینتریچ و دی‌گروت (MSLQ)[۱۲]، استفاده شد. این پرسش‌نامه بر اساس نظریه‌های یادگیری خودتنظیمی طراحی شده و شامل ۴۷ گویه بسته‌پاسخ بر اساس طیف پنج‌درجه‌ای لیکرت است و شامل بخش‌های زیر است:

۲.۱. *باورهای انگیزشی*

باورهای انگیزشی به باورها و نگرش‌های فرد نسبت به یادگیری و انگیزه‌های درونی او اشاره دارد. این باورها شامل عواملی مانند خودکارآمدی، ارزش تکلیف و جهت‌گیری هدف می‌شود [۱۳].

۲.۲. *یادگیری خودتنظیمی*

یادگیری خودتنظیمی به توانایی فرد در برنامه‌ریزی، نظارت و کنترل فرآیند یادگیری خود اشاره دارد. این مفهوم شامل سه بخش اصلی است:

[10] Jonny Nilimaa
[11] Beatriz Ortega-Ruiperez and Jose Miguel Correa-Gorospe.
[12] Motivated Strategies for Learning Questionnaire

راهبردهای شناختی. راهبردهای شناختی به روش‌هایی اطلاق می‌شود که فرد برای پردازش و یادگیری اطلاعات استفاده می‌کند. این راهبردها شامل تکرار، بسطدهی و سازمان‌دهی اطلاعات می‌شود [۱۷].

راهبردهای فراشناختی. راهبردهای فراشناختی شامل روش‌هایی است که فرد برای نظارت و کنترل فرآیند یادگیری خود استفاده می‌کند. این راهبردها شامل برنامه‌ریزی، نظارت و ارزیابی یادگیری می‌شود [۵].

مدیریت منابع. مدیریت منابع به روش‌هایی اشاره دارد که فرد برای مدیریت زمان، محیط و منابع دیگر در فرآیند یادگیری استفاده می‌کند. این شامل مدیریت زمان، تنظیم محیط یادگیری و استفاده از منابع کمکی می‌شود [۱۹].

در این پژوهش، مدیریت منابع به عنوان بخشی از راهبردهای فراشناختی در نظر گرفته شده است. این تصمیم بر اساس این استدلال است که مدیریت منابع (مانند مدیریت زمان، تنظیم محیط یادگیری و استفاده از منابع کمکی) مستلزم نظارت و کنترل فعال فرآیندهای یادگیری است، که از ویژگی‌های اصلی راهبردهای فراشناختی محسوب می‌شود [۱۹].

از منظر نظری، راهبردهای فراشناختی نه تنها شامل برنامه‌ریزی و نظارت بر فرآیندهای شناختی می‌شوند، بلکه شامل تنظیم و بهینه‌سازی شرایط بیرونی (مانند محیط یادگیری و منابع) نیز هستند [۵]. به عبارت دیگر، مدیریت منابع به عنوان یک جزء کلیدی از فراشناخت در نظر گرفته می‌شود، زیرا فرد باید به طور فعال محیط و منابع خود را ارزیابی کند و آن‌ها را برای دستیابی به اهداف یادگیری تنظیم نماید.

همچنین، پژوهش‌های پیشین نشان داده‌اند که مدیریت منابع به شدت با راهبردهای فراشناختی مرتبط است. برای مثال، مدیریت زمان و تنظیم محیط یادگیری نیازمند خودنظارتی و خودارزیابی است، که از مؤلفه‌های اصلی فراشناخت هستند [۱۳]. بنابراین، ادغام مدیریت منابع در بخش راهبردهای فراشناختی نه تنها از نظر نظری توجیه‌پذیر است، بلکه از نظر عملی نیز با یافته‌های پژوهشی همسو می‌باشد.

در ایران، پایایی این پرسش‌نامه توسط زارعکار در سال ۱۳۹۴ با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ بررسی شد. مقادیر آلفا برای خرده‌مقیاس‌های خودکارآمدی، ارزش‌گذاری درونی، اضطراب امتحان، استفاده از راهبردهای شناختی و فراشناختی به ترتیب ۰/۸۵، ۰/۸۶، ۰/۷۷، ۰/۸۴ و ۰/۷۸ به دست آمد. همچنین، زارعکار برای بررسی روایی این پرسش‌نامه از روش روایی محتوایی و تحلیل عاملی استفاده کرد و سه عامل راهبردهای شناختی سطح پایین، راهبردهای شناختی سطح بالا و خودنظم‌دهی فراشناختی را استخراج کرد [۲۲].

۳. یافته‌ها

تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از نرم افزار SPSS26 انجام گرفت. در جدول ۱، میانگین و انحراف استاندارد متغیرهای پژوهش در مراحل پیش‌آزمون و پس‌آزمون به تفکیک دو گروه آزمایش و گواه ارائه شده است.

جدول ۱: میانگین و انحراف استاندارد متغیرهای پژوهش

متغیر	نوع آزمون	آزمایش (همتاسنجی)		کنترل	
		میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
راهبردهای شناختی	پیش‌آزمون	۴۶/۶	۵/۰۶	۴۸/۱۳	۵/۱۴
	پس‌آزمون	۵۲/۰۶	۳/۵۷	۴۷/۳۶	۴/۶۶
راهبردهای فراشناختی	پیش‌آزمون	۳۰/۲۳	۲/۲۳	۳۱/۰۶	۳/۰۳
	پس‌آزمون	۳۳/۲	۲/۹	۳۱/۴۳	۳/۲۱
باورهای انگیزشی	پیش‌آزمون	۸۹/۷۳	۱۰/۴۰	۹۰/۵	۸/۰۴
	پس‌آزمون	۱۰۷/۵	۷/۸۵	۱۰۰	۹/۶۷
یادگیری خودتنظیمی	پیش‌آزمون	۱۶۲/۷	۱۴/۱۲	۱۶۷/۹	۱۲/۹۸
	پس‌آزمون	۱۸۸/۲	۱۱/۶۷	۱۷۴/۶	۱۵/۱۸

قبل از اجرای تحلیل واریانس، پیش‌فرض‌های آزمون‌های پارامتریک مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس نتایج آزمون شاپیرو–ویلک، پیش‌فرض نرمال‌بودن توزیع داده‌ها در متغیرهای راهبردهای شناختی و فراشناختی، باورهای انگیزشی و یادگیری خودتنظیمی تأیید شد. همچنین، پیش‌فرض همگنی واریانس‌ها با استفاده از آزمون لوین ارزیابی شد. نتایج نشان داد که این پیش‌فرض معنادار نیست، به‌طوری‌که همگنی واریانس‌ها در متغیر راهبردهای شناختی ($f = ۰/۶۶$ و $p = ۰/۴۱$)، راهبردهای فراشناختی ($f = ۰/۳۹$ و $p = ۰/۴۱$)، باورهای انگیزشی ($f = ۰/۴۹$ و $p = ۰/۴۸$) و یادگیری خودتنظیمی هیجانی ($f = ۰/۴۷$ و $p = ۰/۴۹$) رعایت شده است.

جدول ۲: نتایج آزمون لوین، بررسی برابری واریانسها

متغیرها	آماره F	درجه آزادی اول	درجه آزادی دوم	سطح معناداری
راهبردهای شناختی	۰/۶۶۲	۱	۵۸	۰/۴۱۹
راهبردهای فراشناختی	۰/۳۹۲	۱	۵۸	۰/۴۱۵
باورهای انگیزشی	۰/۴۹۵	۱	۵۸	۰/۴۸۵
یادگیری خودتنظیمی	۰/۴۷۶	۱	۵۸	۰/۴۹۳

بررسی نتایج همگنی شیب رگرسیونی نشان داد که سطح معناداری همه متغیرها بزرگتر از ۰/۰۵ است ($p > ۰/۰۵$)، بنابراین مفروضه همگنی شیب رگرسیونی برقرار است. همچنین، نتایج آزمون مقایسه گروه‌ها نشان داد که تفاوت نمره‌های پیش‌آزمون گروه‌های آزمایش و گواه در متغیرهای وابسته (راهبردهای شناختی، فراشناختی، یادگیری خودتنظیمی و باورهای انگیزشی) معنادار نبوده است ($p > ۰/۰۵$). بنابراین، مفروضه‌های تحلیل کواریانس چند متغیره (مانکوا) برقرار است:

جدول ۳: نتایج آزمون تحلیل کواریانس (مانکوا) برای بررسی تاثیر همتاسنجی بر متغیرهای پژوهش

آزمون	مقدار	آماره F	درجه آزادی گروه	درجه آزادی خطا	سطح معناداری	مجذور اتا
آزمون اثرپیلائی	۰/۴۶۳	۱۰/۹۷	۴	۵۱	۰/۰۰۰	۰/۴۶۳
آزمون لامبدای ویلکز	۰/۵۷۷	۱۰/۹۷	۴	۵۱	۰/۰۰۰	۰/۴۶۳
آزمون اثر هتلینگ	۰/۸۶۱	۱۰/۹۷	۴	۵۱	۰/۰۰۰	۰/۴۶۳
آزمون بزرگ‌ترین ریشه روی	۰/۸۶۱	۱۰/۹۷	۴	۵۱	۰/۰۰۰	۰/۴۶۳

مطابق جدول ۳، چون در سطح اطمینان ۹۵% و خطای اندازه‌گیری ۰/۰۵، سطح معناداری همه آزمون‌ها کوچکتر از ۰/۰۵ محاسبه شد. بنابراین، فرض صفر رد و فرضیه پژوهش تایید شد. این نتیجه نشان می‌دهد بین دو گروه حداقل در یکی از متغیرهای مورد آزمون تفاوت معناداری وجود دارد. به عبارت دیگر، همتاسنجی بر راهبردهای شناختی، فراشناختی، یادگیری خودتنظیمی و باورهای انگیزشی در گروه آزمایش در مقایسه با گروه گواه تأثیر مثبت دارد. میزان تأثیر همتاسنجی با توجه به مجذور ضریب اتا (۰/۴۶۳) محاسبه شد.

جدول ۴: نتایج اثرات بین گروهی روی میانگین نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون دو گروه برای بررسی تاثیر همتاسنجی بر متغیرهای پژوهش

متغیر وابسته	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	آماره F	سطح معناداری	مجذور اتا
راهبردهای شناختی	۳۳۹/۹	۱	۶۷/۹۸	۳/۷	۰/۰۰۶	۰/۲۲۵
راهبردهای فراشناختی	۱۲۹/۹۵	۱	۲۵/۹۹	۳/۰۴	۰/۰۱۷	۰/۲۲۰
باورهای انگیزشی	۹۱۴/۲۱	۱	۱۸۲/۸۴	۲/۲۲	۰/۰۶۵	۰/۱۷۰
یادگیری خودتنظیمی	۲۹۳۴/۸۲	۱	۵۸۶/۹۶	۳/۰۲	۰/۰۱۸	۰/۲۱۹

مطابق جدول ۴، سطح معناداری برای همه متغیرها کوچکتر از ۰/۰۵ محاسبه شد ($p < ۰/۰۵$)، بنابراین، فرض صفر رد و فرضیه پژوهش تایید می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که همتاسنجی بر راهبردهای شناختی، فراشناختی و یادگیری خودتنظیمی در گروه آزمایش در مقایسه با گروه گواه تأثیر مثبت دارد و البته، همتاسنجی بر راهبردهای شناختی تأثیر بیشتری دارد. همچنین، نتایج نشان داد همتاسنجی بر باورهای انگیزشی دانش‌آموزان تأثیر معناداری ندارد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر تأثیر همتاسنجی را به عنوان شیوه‌ای نوین از ارزشیابی تکوینی بر راهبردهای شناختی، فراشناختی و باورهای انگیزشی دانش‌آموزان در درس ریاضی بررسی کرده است. در این طرح، یک گروه از دانش‌آموزان با روش ارزیابی سنتی و گروه دیگر با روش همتاسنجی مورد ارزیابی قرار گرفتند. همتاسنجی در سه جلسه آموزشی از مجموع شش جلسه، هر جلسه به مدت ۴۵ دقیقه اجرا شد. برای سنجش تأثیرات این روش، از پرسش‌نامه یادگیری خودتنظیمی (MSLQ) استفاده گردید. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که همتاسنجی تأثیر مثبت و معناداری بر ارتقای راهبردهای شناختی و فراشناختی دارد. با این حال، این روش بر باورهای انگیزشی دانش‌آموزان تأثیر معناداری نداشته است. به عبارت دیگر، همتاسنجی به تنهایی نتوانسته است باورهای انگیزشی دانش‌آموزان را تقویت کند. آنیتا موهو[13]، در مقاله‌ای با عنوان "نقش دانش‌آموزان در ایجاد

[13] Anita Muho.

بازخورد انگیزشی" بیان کرده است که خودارزیابی و همتاسنجی، ابزارهای موثری در ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای یادگیری هستند. این ابزارها دانش‌آموزان را با ملاک‌ها و معیارهای موفقیت آشنا می‌کنند تا بتوانند شکاف‌های موجود در یادگیری خود را شناسایی و برطرف کنند و علاوه بر این، این روش‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا نقش فعال‌تری در فرآیند یادگیری، تدریس و ارزشیابی ایفا کنند و احساس قوی‌تری نسبت به خود به عنوان یادگیرنده داشته باشند[۱۰]. منتزر و همکاران[۱۴]، نیز در مطالعه‌ای نشان داده‌اند که خودارزیابی و همتاسنجی، ابزارهای موثری در افزایش انگیزش دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری هستند[۹]. با این حال،با توجه به یافته‌های پژوهش حاضر، می‌توان برخی از دلایل عدم تأثیر همتاسنجی بر تقویت باورهای انگیزشی را اینگونه تبیین کرد: ارزیابی دانش‌آموزان توسط همسالان، به دلیل تفاوت در سطح تفکر انتقادی و توانایی‌های تحلیلی آن‌ها، ممکن است نتواند به طور کامل نقش موثری در تقویت باورهای انگیزشی ایفا کند. در واقع، اگر این شیوه ارزیابی با خودارزیابی تلفیق شود، می‌تواند به عنوان ابزاری موثرتر در تقویت انگیزه و باورهای انگیزشی دانش‌آموزان عمل کند. با توجه به نتایج پژوهش، همتاسنجی به عنوان یک روش ارزشیابی تکوینی می‌تواند در بهبود راهبردهای شناختی و فراشناختی دانش‌آموزان در درس ریاضی موثر باشد. اما برای تقویت باورهای انگیزشی، نیاز به ترکیب این روش با خودارزیابی و ارائه بازخوردهای انگیزشی هدفمند است. این رویکرد می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا در فرآیند یادگیری مشارکت فعال‌تری داشته باشند و انگیزه درونی خود را افزایش دهند.

با وجود نتایج به‌دست‌آمده، پژوهش حاضر با برخی محدودیت‌ها روبرو است که تعمیم یافته‌ها را با احتیاط همراه می‌سازد. نخست، محدودیت زمانی اجرای پژوهش، امکان بررسی اثرات بلندمدت همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی را فراهم نکرده است. دوم، نمونه‌گیری این پژوهش منحصر به دانش‌آموزان پایه دهم رشته علوم تجربی در شهرستان کلاله بوده است، بنابراین تعمیم نتایج به دانش‌آموزان مقاطع تحصیلی دیگر، رشته‌های متفاوت و سایر مناطق جغرافیایی نیازمند احتیاط است. همچنین، ابزار گردآوری داده‌ها در این پژوهش صرفاً پرسش‌نامه خودگزارش‌دهی بوده است که ممکن است تحت تأثیر سوگیری‌هایی مانند تمایل به ارائه خودِ مطلوب یا گرایش به موافقت یا مخالفت سیستماتیک با پرسش‌ها قرار گرفته باشد. این محدودیت‌ها لزوم انجام پژوهش‌های گسترده‌تر با ابزارهای متنوع‌تر و نمونه‌های بزرگ‌تر را آشکار می‌سازد.

با توجه به یافته‌های این پژوهش، پیشنهاد می‌شود مطالعات آینده در سایر استان‌ها و با در نظر گرفتن رشته‌های تحصیلی مختلف در مقاطع گوناگون انجام شود. همچنین، اجرای این طرح در دروس دیگر علاوه بر ریاضی و نیز در مقطع متوسطه اول می‌تواند به تعمیم‌پذیری بیشتر نتایج کمک کند. از سوی دیگر، با توجه به تأثیر مثبت همتاسنجی بر مهارت‌های خودتنظیمی، پیشنهاد می‌شود معلمان در الگوهای نوین تدریس، از این روش به عنوان ابزاری مؤثر در ارزشیابی تکوینی استفاده کنند. برگزاری جلسات آموزشی و توجیهی برای دانش‌آموزان نیز می‌تواند توانایی آن‌ها را در ارزیابی همتایان بهبود بخشد و از تأثیرات منفی احتمالی بر باورهای انگیزشی جلوگیری کند. علاوه بر این، اگر همتایان با توجه به تفاوت‌های فردی و بدون سوگیری به نقد و تحلیل پاسخ‌ها بپردازند، می‌توانند انگیزه و علاقه دانش‌آموزان را به چالش‌های درسی و یادگیری مطالب افزایش دهند.

در نهایت، این پژوهش نشان می‌دهد که همتاسنجی می‌تواند به عنوان یک روش ارزشیابی تکوینی مؤثر در تقویت مهارت‌های خودتنظیمی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد. با این حال، برای دستیابی به نتایج جامع‌تر و قابلیت تعمیم بیشتر، انجام پژوهش‌های گسترده‌تر در زمینه‌های مختلف آموزشی ضروری است.

سپاس‌گزاری

بدین وسیله نویسندگان پژوهش حاضر، از کلیه دانش‌آموزانی که به عنوان گروه کنترل و آزمایش در این مطالعه همکاری و شرکت داشته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[1] A. M. Al-Abdullatif. Alternative assessment approaches and quality product design within web-based learning environments. *International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies*, 15(3):60–74, 2020. doi: ۱۰.۴۰۱۸/IJWLTT.۲۰۲۰۰۷۰۱.oa۱.

[2] M. Bagheri, F. Sahraeei, and M. Khanmohammadi. Effect of web-based peer assessment on students' self-directed learning skills. *Technology of Education Journal*, 18(1):55–66, 2024.

[3] S. Brutus and M. B. L. Donia. Improving the effectiveness of students in groups with a centralized peer evaluation system. *Academy of Management Learning and Education*, 9(4):652–662, 2010.

[4] L. Cheng, Y. Li, Y. Su, and L. Gao. Effect of regulation scripts for dialogic peer assessment on feedback quality, critical thinking and climate of trust. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, pages 1–13, 2022. doi: ۱۰.۱۰۸۰/۰۲۶۰۲۹۳۸.۲۰۲۲.۲۰۹۲۰۶۸.

[5] J. H. Flavell. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10): 906–911, 1979. doi: ۱۰.۱۰۳۷/۰۰۰۳-۰۶۶X.۳۴.۱۰.۹۰۶.

[6] W. Groeneveld, J. Vennekens, and K. Aerts. Engaging software engineering students in grading:the effects of peer assessment on self-evaluation, motivation, and study time. *Proceedings of the 48th SEFI Conference*, pages 799–809, 2020. doi: ۱۰.۴۸۵۵۰/arXiv.۲۰۱۲.۰۳۵۲۱.

[7] A. Hatami. The effect of collaborative learning and selfassessment on self-regulation. *Educational Research and Reviews*, 10(15):2164–2167, 2015. doi: ۱۰.۵۸۹۷/ERR۲۰۱۵.۲۳۴۹.

[14] Mentzer et al.

[8] S. Mcleod. Vygotsky's theory of cognitive development. *Simply Psychology*, 2024.
[9] N. Mentzer, D. Laux, A. Zissimopoulos, K. Andrew, and R. Richards. Peer evaluation of team member effectiveness as a formative educational intervention. *Journal of Technology Education*, 28(2):53–82, 2017. doi: ۱۰.۲۱۰۶۱/jte.v۲۸i۲.a.۴.
[10] A. Muho. Students' role in making feedback motivating. *Journal of Educational and Social Research*, 3(7):46–52, 2013. doi: ۱۰.۵۹۰۱/jesr.۲۰۱۳.v۳n۷p۴۶.
[11] J. Nilimaa. New examination approach for real-world creativity and problem-solving skills in mathematics. *Trends in Higher Education*, 2 (3):477–495, 2023. doi: ۱۰.۳۳۹۰/higheredu۲۰۳۰۰۲۸.
[12] B. Ortega-Ruiperez and J. M. Correa-Gorospe. Peer assessment to promote self-regulated learning with technology in higher education: Systematic review for improving course design. *Frontiers in Education*, 9:1–11, 2024. doi: ۱۰.۳۳۸۹/feduc.۲۰۲۴.۱۳۷۶۵۰۵.
[13] P. R. Pintrich. The role of goal orientation in self-regulated learning. *Handbook of self-regulation*, pages 451–502, 2000.
[14] P. R. Pintrich and A. Zusho. The development of academic self-regulation: The role of cognitive and motivational factors. *Educational Psychology*, pages 249–284, 2002. doi: ۱۰.۱۰۱۶/B۹۷۸-۰۱۲۷۵۰۰۵۳-۹/۵۰۰۱۲-۷.
[15] K. J. Topping. Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research*, 68(3):249–276, 2009. doi: ۱۰.۳۱۰۲/۰۰۳۴۶۵۴۳۰۶۸۰۰۳۲۴۹.
[16] K. J. Topping. Peer assessment. *Theory Into Practice*, 48(1):20–27, 2009. doi: ۱۰.۱۰۸۰/۰۰۴۰۵۸۴۰۸۰۲۵۷۷۵۶۹.
[17] C. E. Weinstein and R. E. Mayer. The teaching of learning strategies. *Handbook of Research on Teaching*, 5(32):315–327, 1987.
[18] B. J. Zimmerman. A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, 81(3):329–339, 1989.
[19] B. J. Zimmerman. Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. *Handbook of self-regulation*, 25(1):13–39, 2000.
[20] B. J. Zimmerman. Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory Into Practice*, 41(2):64–70, 2002. doi: ۱۰.۱۲۰۷/s۱۵۴۳۰۴۲۱tip۴۱۰۲_۲.
[۲۱] افسانه احمدی. بررسی رابطه خودتنظیمی یادگیری بر انگیزش پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان. پژوهش *و مطالعات علوم اسلامی*، ۲(۱۷):۴۹–۵۹، ۱۳۹۹.
[۲۲] محمدنقی زارعکار. بررسی پایایی و روایی پرسش‌نامه راهبردهای یادگیری خودتنظیمی (mslq) در دانش‌آموزان ایرانی. *مجله روان‌شناسی تربیتی*، ۱۲(۳):۴۵–۶۰، ۱۳۹۴.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–268، صص. ۱۲۱۴–۱۲۱۷

مسائل بهینه سازی چند هدفه با رابطه فازی محدودیت های معادله

نرجس امیری*[آ]، سید هادی ناصری[آ]، داود درویشی سلوکلایی[ب]

[آ]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران
[ب]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
قابلیت اطمینان شبکه
برنامه ریزی خطی چندهدفه
اعداد فازی
الگوریتم ژنتیک

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
90C29
90C30
68W50

چکیده

مسئله تخصیص اجزای بهینه در یک شبکه جریان با شکست گره در حضور قابلیت اطمینان سیستم و محدودیت‌های کل زمان در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از توابع عضویت فازی، مسئله را به صورت بهینه سازی خطی فازی فرموله شده است. الگوریتم بهینه سازی ژنتیک با بهینه سازی فازی برای حل مسئله ارائه شده پیشنهاد شده است. رویکرد پیشنهادی در یافتن جواب بهینه‌ای که با افزایش قابلیت اطمینان و به حداقل رساندن زمان عملکرد بهتری نشان داده است.

۱. مقدمه

لین و همکاران [۵] قابلیت اطمینان شبکه را به عنوان احتمال اینکه یک شبکه جریان تصادفی بتواند مقدار مشخصی از جریان را از منبع به مقصد مورد نظر با موفقیت انتقال دهد تعریف کردند. مسئله تخصیص اجزا برای تحقیق در مورد تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان یک سیستم قطعی است و یکی از مشکلات مهم در این زمینه است. به منظور به حداکثر رساندن قابلیت اطمینان و بهبود عملکرد سیستم، یافتن یک تخصیص بهینه اجزا مهم است. چندین تخصیص ممکن است به چندین مقدار قابلیت اطمینان سیستم منجر شود. معمولاً هنگامی که شرایط بالاترین مؤلفه های قابل اعتماد را دارا هستند، سیستم نیز قابل اعتمادتر است. بسیاری از محققان بر روی تخصیص بهینه اجزا برای شبکه جریان تصادفی مطالعاتی را انجام داده اند تا قابلیت اطمینان شبکه را در حضور انواع مختلف محدودیت ها با استفاده از الگوریتم های مختلف به حداکثر برسانند. لین و یه [۶] رویکرد دو مرحله ای را برای حل تخصیص بهینه اجزا چند هدفه با توجه به هزینه تخصیص و قابلیت اطمینان برای شبکه جریان تصادفی پیشنهاد کردند. چن [۱] روشی را برای به دست آوردن تخصیص دقیق بهینه دو منبع در شبکه های کامپیوتری چندحالته برای مسئله پیشنهاد کرد. برای هر گره و یال، حداقل تخصیص ظرفیت جستجو می‌شود تا شبکه حتی زمانی که گره‌ها و یال‌ها در معرض خرابی هستند، کار کند. حسن و عبده [۴] تخصیص بهینه اجزا چندهدفه را با توجه به محدودیت زمان و یک الگوریتم ژنتیک مبتنی بر الگوریتم NSGA-II برای جستجوی اجزای بهینه که قابلیت اطمینان شبکه را به حداکثر می‌رساند و زمان کل را به حداقل می‌رساند، مورد مطالعه قرار دادند. حمدی و همکاران [۳] یک رویکرد مبتنی بر الگوریتم ژنتیک با بهینه‌سازی فازی برای حل مسائل تخصیص بهینه اجزا به منظور به حداکثر رساندن شبکه قابلیت اطمینان و به حداقل رساندن زمان و هزینه پیشنهاد دادند. بسیاری از محققان در مورد مدل سازی مسئله برنامه ریزی خطی فازی و توابع عضویت، دسته بندی برنامه ریزی خطی فازی در مسائل مختلف و توسعه جواب های به دست آمده، بحث کردند. اخیراً از برنامه ریزی خطی فازی برای حل

*نرجس امیری
پست *الکترونیک :* narges.amirii.97@gmail.com (نرجس امیری)، nhadi57@gmail.com (سید هادی ناصری)، d_darvishi@pnu.ac.ir (داود درویشی سلوکلایی)

مسائل مختلف استفاده می شود [۲] . چانگ و همکاران [۷] از یک تکنیک برنامه ریزی خطی چندهدفه فازی با اجزای موجود با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی با بالاترین تطابق استفاده کردند. در این پژوهش، حل تخصیص بهینه اجزا برای یک شبکه جریان تصادفی با قابلیت اطمینان سیستم و محدودیت‌های زمان مورد توجه قرار گرفته است.
ترتیب مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ نمادهای مورد نیاز را نشان می دهد. بخش ۳ فرمول مسئله را ارائه کرد . بخش ۴ فرمول خطی فازی مساله معرفی شده نشان می دهد. بخش ۵ رویکرد پیشنهادی بر اساس GA چند هدفه در برنامه ریزی فازی خطی برای نشان دادن قابلیت استفاده را روشن می کند و بخش آخر نتیجه گیری را ارائه می دهد.

۲. مدل سازی مساله

برنامه‌ریزی ریاضی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه برای به حداکثر رساندن قابلیت اطمینان سیستم یک شبکه جریان و به حداقل رساندن زمان به شرح زیر است:

$$\text{Maximize} \quad R_{d,T}(P) \tag{۱}$$
$$\text{Minimize} \quad S_۱(P) \tag{۲}$$
$$\text{s.t} \quad p_e = k, \quad k \in \{۱, ۲, \dots, vc\}, \quad e = ۱, ۲, \dots, v, ۱ \le i \le n, \quad n+q \le i \le v \tag{۳}$$
$$p_e \neq p_h, \quad e \neq h \tag{۴}$$
$$L_j \le T, \quad j = ۱, ۲, \dots, np \tag{۵}$$
$$L_j = \sum_{e=۱}^{v} (p_e), \quad p_e \in mp_j \tag{۶}$$
$$S_۱(p) = \sum_{e=۱}^{v} (p_e) \tag{۷}$$

محدودیت های (۳) و (۴) تاکید می کنند که هر پیوند باید یک جزء داده شده باشد و هر جزء را می توان حداکثر به یک لینک اختصاص داد. تمام تخصیص اجزای امکان پذیر با استفاده از محدودیت های (۳) و (۴) تولید می شوند. محدودیت (۵) تایید می کند که زمان هدایت مسیر $MP_j(L_j)$ کمتر از محدودیت زمانی T، خواهد بود.

۳. برنامه ریزی خطی فازی

برای تبدیل فرمول ریاضی ارائه شده در بخش قبلی به مدل برنامه‌ریزی خطی فازی، آن را با $S_۱^{obj}$ و R_{obj} تعریف خواهیم کرد.
به طوری که $S_۱(P) \ge S_۱^{obj}$ و $R \le R_{obj}$ حقیقی هستند. از فرمول زیر در تحقیق برای یافتن جواب بهینه استفاده خواهیم کرد.

$$\mu(R) = \begin{cases} ۱ & R > R_{obj} \\ ۱ - \frac{R_{obj} - R}{P_۰} & \mathrm{R}_{obj} - p_۰ \le R \le \mathrm{R}_{obj} \\ ۰ & R < R_۰ \end{cases} \tag{۸}$$

و

$$\mu(S_۱) = \begin{cases} ۱ & S_۱(p) < S_۱^{obj} \\ ۱ - \frac{S_۱(p) - S_۱^{obj}}{P_۱} & S_۱^{obj} \le S_۱(p) \le S_۱^{obj} + p_۱ \\ ۰ & S_۱(p) < S_۱^{۰} \end{cases} \tag{۹}$$

که در آن $P_۱ = S_۱^{۰} - S_۱^{obj}$ و $P_۰ = R_{obj} - R_۰$ خواهد بود. بنابراین، تابع عضویت فضای تصمیم گیری S برابر $\mu_s(p)$ است و به صورت زیر ارائه شده است:

$$Max\ \mu_s(p) = Max\{۰, \min[\mu(R), \mu(S_۱)]\} \tag{۹}$$

۴. الگوریتم ژنتیک

کروموزوم P با معادله $p = (p_1, p_2, ..., p_v)$ نشان داده می شود که در آن $p_1, p_2, ..., p_v$ اعداد تصادفی بین ۱ و vc هستند. در الگوریتم های زیر مراحل الگوریتم ژنتیک آورده شده است.

Result: جمعیت اولیه

مرحله ۱: تولید کروموزوم P به صورت تصادفی به شکل $p = (p_1, p_2, ..., p_v)$؛

مرحله ۲: محاسبه روند $S_1(p)$؛

مرحله ۳: بدست آوردن $\mu_s(p)$ بر اساس معادله؛

مرحله ۴: **if** $\mu_s(p) < \alpha$ **then**

  نادیده بگیرید و به مرحله ۱ برگردید؛

end

مرحله ۵: مرحله ۱ تا ۳ را برای تولید کروموزوم S تکرار کنید؛

Algorithm ۱: تولید جمعیت اولیه

جواب دقیق تابع عضویت فازی $\mu_s(p)$ تابع تناسب F از الگوریتم ژنتیک در نظر گرفته می شود.

Result: کروموزوم های S

مرحله ۱: بدست آوردن $pr(gn) = \frac{\mu_s(p)}{\sum_{gn=1}^{s} \mu_s(p)+\varepsilon}$ که در آن ε عدد صحیح مثبت کوچک است. ؛

مرحله ۲: عدد تصادفی r را در $[0, 1]$ انتخاب کنید؛

مرحله ۳: **if** $r < pr(1)$ **then**

  اولین کروموزوم را بگیرید؛

end

else

  کروموزوم gn_{th} را بگیرید $2 \le gn \le S$؛

end

مرحله ۴: مراحل ۲ و ۳ را S بار تکرار کنید و کروموزوم های S را پیدا کنید؛

Algorithm ۲: فرآیند انتخاب بر اساس روش انتخاب چرخ رولت

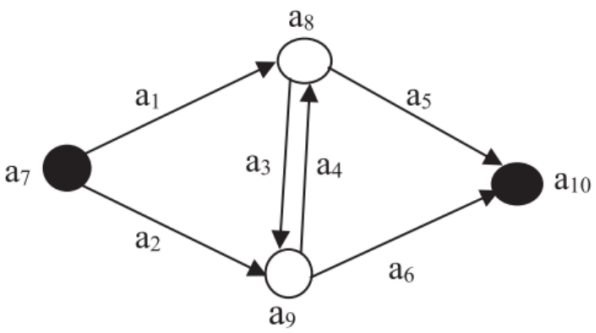
Result: نسل جدید

مرحله ۱: انتخاب دو کروموزوم مرتبط با استراتژی انتخاب؛

مرحله ۲: به طور تصادفی یک جزء از یکی از دو کروموزوم را انتخاب کنید تا اجزای مربوط به نسل را تشکیل دهید؛

مرحله ۳: مرحله ۲ را تکرار کنید تا اجزای نسل کاملاً پر شوند؛

Algorithm ۳: عملیات متقاطع



شکل ۱: گراف جریان

Result: نسل جهش یافته
مرحله ۱: یک عدد تصادفی انتخاب کنید $r_1 \in [0,1]$؛
مرحله ۲: **if** $r_1 < g_m$ **then**
  کروموزوم برای جهش انتخاب می شود و به مرحله ۳ می رود؛
end
else
  از این کروموزوم صرف نظر کنید؛
end
مرحله ۳: برای هر جزء از نسل انجام دهید؛
  مرحله ۱.۳: یک عدد تصادفی انتخاب کنید $r_2 \in [0,1]$؛
  مرحله ۲.۳: **if** $r_2 < g_m$ **then**
    این جزء را به صورت زیر جهش دهید؛
    مرحله ۱.۲.۳: **if** $p_j = vn_k$ **then**
      به طور تصادفی یکی را انتخاب کنید $\{1,2,\ldots,vc\} - \{vn_k\}$؛
    end
  end
  مرحله ۲.۲.۳: **else**
    از این جزء بگذرید؛
  end

Algorithm ۴: نسل بر اساس احتمال جهش g_m

مثال برای حالت چهار گره:
شبکه نشان داده شده در شکل ۱ دارای چهار گره و شش یال است ،که در آن کمان از $a1$ تا $a6$ و گره ها از $a7$ تا $a10$ را شامل می شود و رابط بین گره ها نشان می دهد.

۵. نتیجه‌گیری

تخصیص بهینه اجزا برای یک شبکه جریان تصادفی با حداکثر قابلیت اطمینان سیستم تحت حداقل زمان بررسی شده است. یک مساله تخصیص اجزای چند هدفه مشروط به قابلیت اطمینان سیستم و زمان تخصیص ارائه شده است و به عنوان مسئله مدل سازی خطی فازی فرموله شد. علاوه بر این، در این مقاله یک رویکرد مبتنی بر الگوریتم ژنتیک با بهینه سازی فازی که برای حل تخصیص بهینه اجزا در یک شبکه جریان تصادفی است که در آن هر یال و گره دارای چندین ظرفیت ممکن و زمان هستندارائه شده است. رویکرد ارائه شده از تابع عضویت فازی به عنوان تابع تناسب استفاده می کند. رویکرد پیشنهادی در یافتن بهترین جواب بهینه با به حداکثر رساندن قابلیت اطمینان سیستم و به حداقل رساندن زمان موفق بوده است.

مراجع

[1] Shin-Guang Chen. Optimal double-resource assignment for the robust design problem in multistate computer networks. *Applied Mathematical Modelling*, 38(1):263–277, 2014.

[2] Ivan Henderson V Gue, Aristotle T Ubando, Kathleen B Aviso, and Raymond R Tan. Optimal design of a trigeneration plant using fuzzy linear programming with global sensitivity analysis on product price uncertainty. *Energy Procedia*, 158:2176–2181, 2019.

[3] H Hamdy, MR Hassan, M Eid, and M Khalifa. Solving optimal components assignment problem for a multistate network using fuzzy optimization. *International Journal of Mobile Network Communications & Telematics (IJMNCT)*, 9(3), 2019.

[4] MR Hassan and H Abdou. Multi-objective components assignment problem subject to lead-time constraint. *Indian Journal of Science and Technology*, 11(21):1–9, 2018.

[5] Yi-Kuei Lin and Cheng-Fu Huang. Stochastic flow network reliability with tolerable error rate. *Quality Technology & Quantitative Management*, 10(1):57–73, 2013.

[6] Yi-Kuei Lin and Cheng-Ta Yeh. A two-stage approach for a multi-objective component assignment problem for a stochastic-flow network. *Engineering Optimization*, 45(3):265–285, 2013.

[7] Yih-Jou Tzang, Hong-Yi Chang, Chih-Hsuan Tzang, Ting-Yun Chi, and Chun-Yen Huang. An application of fuzzy multi-objective linear programming for components design of games or animated characters. in *2015 First International Conference on Computational Intelligence Theory, Systems and Applications (CCITSA)*, pages 56–59. IEEE, 2015.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، SP–275، صص. ۲۱۸–۲۲۰

مدل بندی زمان حوادث ترافیکی با استفاده از شبکه عصبی عمیق بقا

فاطمه محمدی*[آ]، محمد آرشی[آ]، آرزو حبیبی راد[آ]

[آ]دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
تابع بقا
مدل‌های نرخ خطر مبنا
زمان پاکسازی حادثه
تحلیل بقای عمیق
یادگیری چند وظیفه‌ای

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

حوادث ترافیکی یکی از چالش‌های اصلی در مدیریت ترافیک شهری هستند که می‌توانند تاثیرات منفی بر ایمنی و کارایی سیستم‌های حمل و نقل داشته باشند. یکی از آثار منفی حوادث ترافیکی، ایجاد ترافیک و تاخیر در عبور و مرور است. اقدامات نادرست آژانس‌های مدیریت ترافیک در برخورد با تصادفات می‌تواند منجر به تاخیر در ترافیک و خطر تصادف شود. آژانس‌های حمل و نقل برای مدیریت حوادث ترافیکی و به کارگیری استراتژی‌های مناسب برای کاهش زمان حادثه و به دنبال آن کاهش ازدحام ترافیکی نیاز به پیش‌بینی مدت زمان حادثه دارند. داده‌های زمان حوادث ترافیکی داده‌های زمان تا رویداد هستند. یکی از ویژگی‌های این داده‌ها وابستگی به مدت زمان است. یکی از مدل‌های رایج برای در نظر گرفتن این ویژگی، مدل‌های نرخ خطر مبنا است. مدل‌های نرخ خطر مبنا شامل مدل‌های زمان شکست شتابیده و مدل خطرات متناسب پارامتری و نیمه پارامتری کاکس می باشد. عملکرد مدل‌های نرخ خطر مبنا در پیش‌بینی زمان حوادث ترافیکی، با توجه به فرضیاتی که دارند ممکن است دارای محدودیت‌هایی باشد.از جمله این فرضیات می‌توان به فرض خطرات متناسب، در نظر گرفتن توزیع خاص برای داده‌ها، اثر ثابت با زمان عوامل تاثیرگذار و رابطه خطی بین متغیرهای مستقل و وابسته، اشاره کرد و ممکن است برخی از این فرضیات در داده‌های حوادث ترافیکی وجود نداشته باشد. یکی دیگر از روش‌های رایج برای مدل‌بندی زمان حوادث ترافیکی مدل‌های یادگیری ماشین می‌باشد. نقطه قوت این مدل‌ها این است که برخی از فرضیات مشکل‌ساز مدل‌های نرخ خطر مبنا را ندارند. یکی از روش‌های یادگیری ماشین، شبکه‌های عصبی عمیق می‌باشد. اگر هدف این مدل‌ها پیش‌بینی مدت زمان پاکسازی حادثه باشد، آن ها نمی‌توانند وابستگی به مدت زمان را در داده‌های حوادث ترافیکی در نظر بگیرند. لذا از مدل‌های شبکه‌های عصبی عمیق با هدف برآورد تابع بقا استفاده می‌کنیم. اما این مدل‌ها هم نمی‌توانند به صراحت مدت زمان یک حادثه ترافیکی را پیش‌بینی کنند. بنابراین در این مطالعه علاقه‌مندیم که مدل یادگیری عمیق مبتنی بر تحلیل بقا طراحی کنیم که هم تابع بقا را برآورد کند و هم زمان حوادث ترافیکی را پیش‌بینی کند. مدل هدف می‌تواند وابستگی مدت زمان را هنگام پیش‌بینی مدت زمان حادثه با برآورد همزمان تابع بقا بر اساس مفهوم یادگیری چند وظیفه‌ای در نظر بگیرد.

۱. مقدمه

حوادث ترافیکی تاثیرات منفی بر ایمنی و کارایی سیستم‌های حمل و نقل دارد. از جمله این تاثیرات می‌توان موارد زیر را نام برد.

- آسیب‌ها و تلفات جانی
- ایجاد ترافیک و تاخیر در عبور و مرور
- آلودگی محیط زیست

*فاطمه محمدی
پست *الکترونیک :* fatema.mohammadi680@gmail.com (فاطمه محمدی)، arashi@um.ac.ir (محمد آرشی)، ahabibi@um.ac.ir (آرزو حبیبی راد)

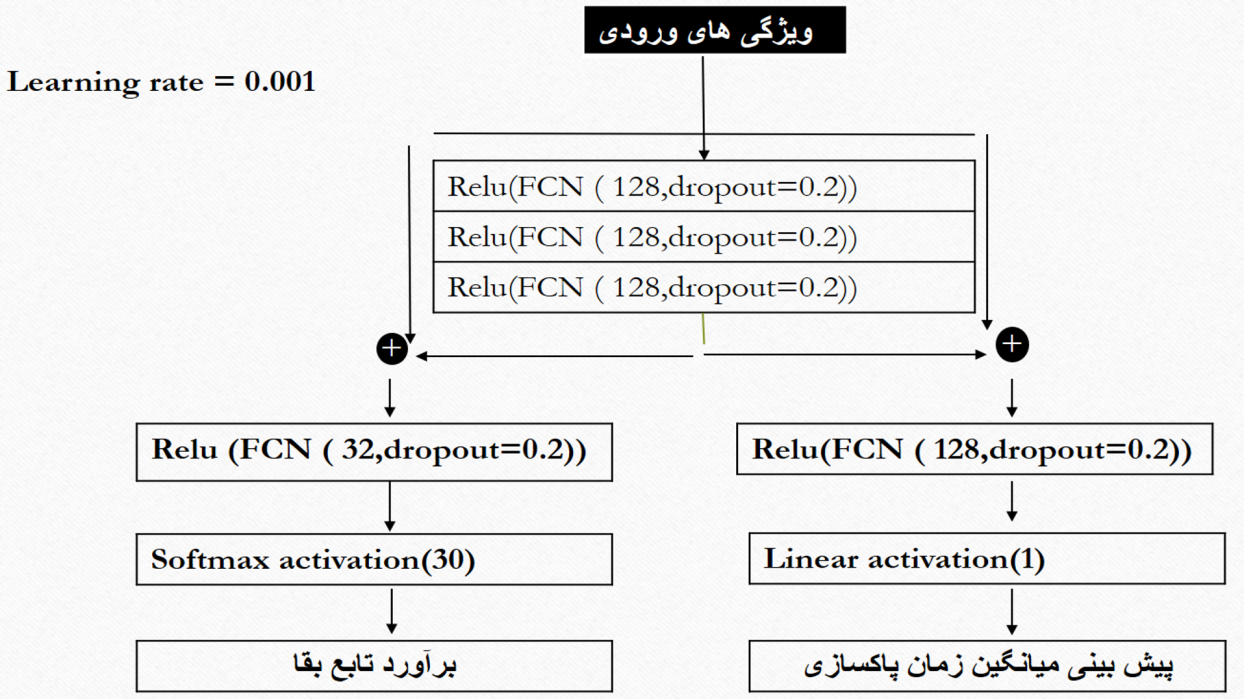
- آسیب به زیر ساخت‌ها
- آسیب‌های روانی
- افزایش زمان سفر
- فشار بر خدمات اضطراری
- بروز حوادث ثانویه

بنابراین به عنوان یکی از چالش‌های اصلی در مدیریت ترافیک محسوب می‌شود. سازمان‌های مدیریت ترافیک برای به‌کارگیری استراتژی‌های مناسب و کاهش این اثرات منفی نیاز به پیش‌بینی مدت زمان حادثه دارند. مدت زمان حادثه را می‌توان به چهار مرحله تقسیم کرد: زمان تشخیص، زمان پاسخ، زمان پاکسازی و زمان بازیابی. زمان پاکسازی که زمان ورود بین یک تیم پاسخ و پاکسازی کامل حادثه است طولانی‌ترین مرحله است. یکی از اهداف مدل‌بندی داده‌های حوادث ترافیکی، پیش‌بینی زمان پاکسازی حادثه است. داده‌های زمان پاکسازی حادثه داده‌های مدت زمان هستند که زمانی است تا وقوع رویداد منظور از رویداد، پاکسازی کامل حادثه است. یکی از ویژگی‌های این داده‌ها، وابستگی به مدت زمان است. منظور از وابستگی به مدت زمان یعنی احتمال پایان پاکسازی حادثه به طول مدت زمانی که پاکسازی به طول انجامیده است بستگی دارد. برای در نظر گرفتن این ویژگی در داده‌های مدت زمان حادثه که داده‌های زمان تا رویداد هستند، عمدتاً از مدل‌های آماری نرخ خطر مبنا استفاده شده است. [۱–۳] این مدل‌ها دو نوع متغیر وابسته را در نظر می‌گیرند :

- میانگین زمان پاکسازی
- تابع نرخ خطر

با استفاده از این تابع نرخ خطر می‌توان تابع بقا را برآورد کرد. مطالعات قبلی عمدتاً فقط میانگین زمان پاکسازی را در نظر گرفته‌اند زیرا امکان تفسیر ساده را فراهم می‌کند به طوری‌که اثرات مستقیم پارامترهای متغیرهای مستقل بر زمان پاکسازی اندازه‌گیری می‌شود. مدل زمان شکست شتابیده (AFT) یک مدل پرکاربرد است که اثرات ثابت با زمان عوامل تاثیرگذار را فرض می‌کند. همچنین یکی دیگر از فرضیات این مدل‌ها رابطه خطی متغیرهای مستقل با لگاریتم زمان پاکسازی است. این دو فرض ممکن است برای داده‌های حوادث ترافیکی و در یک آزادراه برقرار نباشد. بنابراین استفاده از این مدل‌ها دارای محدودیت‌هایی می‌باشد. یکی دیگر از روش‌های رایج برای مدل‌سازی زمان پاکسازی حادثه مدل‌های یادگیری ماشین از جمله مدل جنگل تصادفی، ماشین گرادیان تقویتی و شبکه های عصبی مصنوعی است. با این حال مدل‌های یادگیری ماشین میانگین زمان پاکسازی را به عنوان متغیر وابسته در نظر می‌گیرند و ویژگی وابستگی به مدت زمان را نادیده می‌گیرند. مطالعه‌ای اخیر گزارش داده است که عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین قابل مقایسه یا بدتر از مدل‌های زمان شکست شتابیده است. [۴] مدل‌های شبکه‌های عصبی عمیق که یک رویکرد اجتناب ناپذیر در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی هستند، همچنین اگر با هدف پیش‌بینی میانگین زمان پاکسازی حادثه باشند نمی‌توانند ویژگی وابستگی به مدت زمان را در نظر بگیرند. اخیراً مدل‌های تحلیل بقای عمیق برای برآورد تابع بقا، به جای پیش‌بینی زمان رویداد با استفاده از شبکه‌های عصبی عمیق پیشنهاد شده‌اند.[۵، ۶]

نقطه قوت کلیدی این مدل‌ها این است که برخی از فرضیات مشکل‌ساز مدل زمان شکست شتابیده (AFT) را ندارند. اما این مدل‌ها نمی‌توانند به صراحت میانگین زمان پاکسازی حادثه را پیش‌بینی کنند. در ادامه مدلی ارائه می‌شود که می‌تواند به طور همزمان هم تابع بقا را برآورد کند و هم مدت زمان حادثه را با استفاده از ساختار یادگیری چند وظیفه‌ای پیش‌بینی کند.



شکل ۱: ساختار شبکه هدف

۲. نتایج اصلی

به داده‌ها سه مدل آماری زمان شکست شتابیده با سه توزیع فرضی لگ نرمال، لگ لجستیک و وایبول برازش داده شده است که با توجه به نتایج، مدل زمان شکست شتابیده با توزیع فرضی لگ نرمال عملکرد بهتری نسبت به دو مدل دیگر دارد و به عنوان مدل پایه انتخاب شد. مدل زمان شکست شتابیده با یک پارامتر تصادفی نیز به داده‌ها برازش داده شد که عملکرد بهتری نسبت به مدل پایه به دست آورد که نشان دهنده ناهمگنی مشاهده نشده در بین داده‌ها می‌باشد. برای هر دو مدل جنگل تصادفی و ماشین گرادیان تقویتی عملکرد آنها با تغییر وظایف از پیش‌بینی میانگین زمان پاکسازی به برآورد تابع بقا، بهبود می‌یابد. بر خلاف مدل‌های یادگیری ماشین این بهبودی عملکرد برای شبکه‌های عصبی عمیق حاصل نشد. با این حال مدل هدف، عملکرد پیش‌بینی شبکه عصبی عمیق را افزایش می‌دهد و بهترین عملکرد را در بین تمام مدل‌های معیار نشان می‌دهد. این نتیجه قابلیت ساختار یادگیری چند وظیفه‌ای را برای در نظر گرفتن ویژگی وابستگی به مدت زمان تایید می‌کند.

مراجع

[1] Jones, B., Janssen, L., and Mannering, F. (1991). *Analysis of the frequency and duration of freeway accidents in Seattle.* Accident, Analysis and Prevention, 23(4), 239–255. https://doi.org/10.1016/0001-4575(91)90003-N

[2] Chung, Y. (2010). *Development of an accident duration prediction model on the Korean Freeway Systems.* Accident; Analysis and Prevention, 42(1), 282–289. https://doi.org/10.1016/j.aap.2009.08.005

[3] Tavassoli Hojati, A., Ferreira, L., Washington, S., and Charles, P. (2013). *Hazard based models for freeway traffic incident duration.* Accident; Analysis and Prevention, 52, 171–181. https://doi.org/10.1016/j.aap.2012.12.037

[4] Tang, J., Zheng, L., Han, C., Yin, W., Zhang, Y., Zou, Y., and Huang, H. (2020). *Statistical and machine-learning methods for clearance time prediction of road incidents: A methodology review.* Analytic Methods in Accident Research, 27, 100123. https://doi.org/10.1016/j.amar.2020.100123

[5] Katzman, J. L., Shaham, U., Cloninger, A., Bates, J., Jiang, T., and Kluger, Y. (2018). *DeepSurv: Personalized treatment recommender system using a Cox proportional hazards deep neural network.* BMC Medical Research Methodology, 18(1), 24. https://doi.org/10.1186/s12874-018-0482-1

[6] Lee, C., Zame, W. R., Yoon, J., and Van Der Schaar, M. (2018). *DeepHit: A deep learning approach to survival analysis with competing risks.* 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2018, 2314–2321. https://doi. org/10.1609/aaai.v32i1.11842

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–277، صص. ۲۲۱–۲۲۵

کران‌های آنتروپی عملگری نسبی تسالیس تعمیم‌یافته

مریم فضل الهی *،آ

آستادیار گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
آنتروپی عملگر نسبی
آنتروپی عملگر نسبی تسالیس
آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
47A63
47A60
46L05

چکیده

در این مقاله، کران‌های بالا و پایین آنتروپی عملگری نسبی تسالیس تعمیم‌یافته را به‌دست می‌آوریم که برخی نتایج معروف ارائه شده توسط نویسندگان دیگر را تعمیم خواهد داد. علاوه بر این، یکنوایی اطلاعات را برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته و مکمل آن بررسی می نماییم. یکنوایی اطلاعات برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس و آنتروپی عملگر نسبی ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ باشند. فوجی و کامی [۳] آنتروپی عملگری نسبی عملگرهای مثبت معکوس پذیر A و B را به‌صورت

$$S(A,B) = A^{\frac{1}{2}}\log(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

معرفی کردند.
یاناگی [۶] مفهوم آنتروپی عملگری نسبی تسالیس را به عنوان تعمیمی از آنتروپی عملگر نسبی $S(A,B)$ به صورت زیر تعریف کرد

$$T_\lambda(A|B) = \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\lambda A^{\frac{1}{2}} - A}{\lambda} = \frac{A\sharp_\lambda B - A}{\lambda}$$

که $0 < \lambda \leq 1$ و می نوان نوشت:

$$T_\lambda(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(Ln_\lambda A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

که برای عملگر مثبت X، $Ln_\alpha X = \frac{X^\alpha - 1}{\alpha}$. توجه کنید که

$$\lim_{\lambda\to 0} T_\lambda(A|B) = S(A|B).$$

*سخنران
پست الکترونیک : m_fazlolahi@pnu.ac.ir (مریم فضل الهی)

یاناگی [۶] مفهوم آنتروپی عملگری نسبی تسالیس تعمیم‌یافته را برای عملگرهای وارون‌پذیر مثبت A و B که $q,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0,k\in\mathbb{Z}$ به‌صورت زیر معرفی کرد:

$$\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B)=\frac{A\natural_{q+k\lambda}B-A\natural_{q+(k-1)\lambda}B}{\lambda}.$$

مفهوم $A\natural_{\mu}B$ نمایشگر میانگین $\mu-$ توانی عملگری توسعه‌یافته برای $\mu\in\mathbb{R}$ است که برای نمونه به [۵] مراجعه نمایید. میانگین عملگر $\mu-$ توانی توسعه‌یافته به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A\natural_{\mu}B=A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\mu}A^{\frac{1}{2}}.$$

در حالت خاص، برای $\lambda\in(0,1]$ داریم:

$$\tilde{T}_{0,1,\lambda}(A|B)=\frac{A\sharp_{\lambda}B-A\sharp_{0}B}{\lambda}=\frac{A\sharp_{\lambda}B-A}{\lambda}=T_{\lambda}(A|B).$$

فوجی و کامی [۴] نامساوی زیر را به‌عنوان رابطه‌ای بین آنتروپی عملگر نسبی و آنتروپی عملگر نسبی تسالیس به‌دست آوردند:

$$T_{-\lambda}(A|B)\leq S(A|B)\leq T_{\lambda}(A|B). \qquad (1)$$

دراگومیر برخی نامساوی‌هایی برای آنتروپی عملگر نسبی ارائه داد [۱، ۲]. زو [۱۲] برخی نامساوی‌های عملگری نسبت به آنتروپی عملگر نسبی تسالیس ثابت کرد و نامساوی‌های موجود را تعمیم داد. سپس، برخی نامساوی‌ها را در [۱۳] برای آنتروپی عملگر نسبی ارائه داد و تعمیم نتایج را در [۱۲] به‌دست آورد و کران‌های بالا و پایین جدید برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس و آنتروپی عملگر نسبی ارائه داد. نیکوفر و همکاران، مفهوم آنتروپی عملگر نسبی را توسعه داده و کران‌های آنتروپی عملگر نسبی تعمیم‌یافته را به فرم کلی مشخص کردند و کران‌هایی از توسیع پارامتری برای آنتروپی شانون، آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته و آنتروپی عملگر نسبی تسالیس [۱۰] به‌دست آوردند. علاوه بر این، رابطه بین آنتروپی عملگر نسبی تعمیم‌یافته و آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته در [۱۱] ثابت شده است که به عنوان تعمیمی از (۱) می‌باشد. مرادی و همکاران [۸] کران‌هایی برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس با کاربرد نامساوی هرمیت–هادامار ارائه داده‌اند و نیکوفر و همکاران یک تظریف قابل توجه و پیشرفته از نتایج ارائه شده در [۸] فراهم کردند. در ادامه دو کار اثبات شده به ترتیب در [۱۲] و [۱۴] آمده است.

(۱) فرض کنید A و B دو عملگر وارون پذیر مثبت، $a>0$، $\lambda\in(0,1]$ و $v\in[0,1]$ باشند. آنگاه

$$l_2A-l_1A\sharp_{\lambda-1}B+l_2A\sharp_{\lambda}B\leq T_{\lambda}(A|B)\leq l_1B-l_2A\sharp_{\lambda}B-l_3A,$$

که l_1، l_2 و l_3 تعریف شده در قضیه ۲.۲ هستند.

(۲) فرض کنید A و B دو عملگر وارون‌پذیر مثبت باشند به‌طوری‌که $Sp(A),Sp(B)\subseteq J\subset(0,+\infty)$. دراین‌صورت برای هر $r,s\in J$ و $\lambda\in[-1,0)\cup(0,1]$ داریم:

$$(\ln_{\lambda}s)A+A\sharp_{\lambda}B-sA\sharp_{\lambda-1}B\leq T_{\lambda}(A|B)\leq(\ln_{\lambda}r)A+r^{\lambda-1}(B-rA).$$

توجه کنید که چشم‌انداز $\mathcal{P}_f$ تابع یکنوای عملگری $f(t)=t^{1/2}$، میانگین عملگری ارائه شده توسط کوبو و آندو در [۷] می‌باشد.

۲. نتایج اصلی

لم ۱.۲. [۹، ۱۰] *فرض کنید f_1,f_2,f_3 توابعی حقیقی مقدار روی بازه بسته I باشند. اگر برای $t\in I$، $f_1(t)\leq f_2(t)\leq f_3(t)$، آنگاه برای عملگرهای وارون‌پذیر مثبت A و B که طیف عملگرهای A و $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ در بازه $\mathbb{I}$ باشند، داریم:*

$$\mathcal{P}_{f_1}(A,B)\leq\mathcal{P}_{f_2}(A,B)\leq\mathcal{P}_{f_3}(A,B)$$

در این قسمت، کران‌های بالا و پایین برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته نسبت به میانگین $\mu-$ توانی توسعه‌یافته را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت، $a>0$، $\lambda\in(0,1]$ و $v\in[0,1]$. دراین‌صورت*

$$\begin{aligned}l_3A\natural_{q+k\lambda}B-l_1A\natural_{q+k\lambda-1}B+l_2A\natural_{q+(k-1)\lambda}B&\\ \leq\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B)&\\ \leq l_1A\natural_{q+(k-1)\lambda+1}B-l_2A\natural_{q+k\lambda}B-l_3A\natural_{q+(k-1)\lambda}B&\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$l_1=\frac{a^{\lambda-1}}{v(a^\lambda-1)+1}, l_2=\frac{v(1-a^\lambda)}{\lambda(v(a^\lambda-1)+1)}, l_3=\frac{(\lambda-1+v)a^\lambda+1-v}{\lambda(v(a^\lambda-1)+1)}.$$

در حالت خاص، نتیجه زیر که توسط زو ثابت شده است را داریم:

نتیجه ۳.۲. [۱۲] *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت، $a>0$، $\lambda\in(0,1]$ و $v\in[0,1]$. آنگاه*

$$l_2A-l_1A\sharp_{\lambda-1}B+l_3A\sharp_\lambda B\le T_\lambda(A|B)\le l_1B-l_2A\sharp_\lambda B-l_3A,$$

به‌طوری‌که l_1، l_2، و l_3 تعریف شده در قضیه ۲.۲ باشند.

اثبات. با قرار دادن $q=0$ و $k=1$ در قضیه ۲.۲، نتیجه مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. □

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت، $a>0$، $\lambda\in(0,1]$ و $v\in[0,1]$. آنگاه*

$$(1-\ln a)A-\frac{1}{a}AB^{-1}A\le S(A|B)\le(\ln a-1)A+\frac{1}{a}B.$$

اثبات. با میل دادن $\lambda\to0$ در نتیجه ۳.۲، می‌توان به‌دست آورد

$$(l_2+l_3)A-l_1AB^{-1}A\le S(A|B)\le l_1B-(l_2+l_3)A, \qquad (2)$$

که $l_1=\frac{1}{a}$، $l_2=-v\ln a$، و $l_3=1+(v-1)\ln a$. با قرار دادن l_1,l_2 ، l_3 در (۲)، نتیجه حاصل می‌شود. □

در نتیجه ۷.۲، این نتیجه را برای متغیرهای r و s گسترش می‌دهیم. در قضیه بعدی، کران‌های بالا و پایین دیگری برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته نسبت به میانگین $\mu-$ توانی توسعه‌یافته به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت با طیف در بازه J باشند. آنگاه برای هر $r,s\in J$ داریم:*

$$\begin{aligned}\frac{s^{q+k\lambda}-s^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}A&+(\frac{q}{\lambda}+k)(A\sharp_{q+k\lambda}B-s(A\sharp_{q+k\lambda-1}B))\\&+(\frac{q}{\lambda}+(k-1))(s(A\sharp_{q+(k-1)\lambda-1}B)-A\sharp_{q+(k-1)\lambda}B)\\&\le\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B)\\&\le\frac{r^{q+k\lambda}-r^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}A\\&+\frac{(q+k\lambda)r^{q+k\lambda-1}-(q+(k-1)\lambda)r^{q+(k-1)\lambda-1}}{\lambda}(B-rA).\end{aligned}$$

در حالت خاص، نتیجه زیر را که توسط فروچی و همکاران [۱۴] ثابت شده است را خواهیم داشت.

نتیجه ۶.۲. [۱۴] *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت با طیف در بازه J باشند. آنگاه برای هر $r,s\in J$ و $\lambda\in[-1,0)\cup(0,1]$ داریم:*

$$(\ln_\lambda s)A+A\sharp_\lambda B-sA\sharp_{\lambda-1}B\le T_\lambda(A|B)\le(\ln_\lambda r)A+r^{\lambda-1}(B-rA).$$

اثبات. با قرار دادن $q=0$ و $k=1$ در قضیه ۵.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۷.۲. *فرض کنید A و B عملگرهای وارون‌پذیر مثبت با طیف در بازه J باشند. آنگاه برای هر $r,s\in J$ داریم:*

$$(1+\ln s)A-sAB^{-1}A\le S(A|B)\le(\ln r-1)A+\frac{1}{r}B$$

اثبات. با جایگذاری $\lambda\to0$ در لم ۶.۲ نتیجه را به‌دست می‌آوریم. □

توجه کنید که این نتیجه، توسعه نتیجه ۴.۲ است، چون زمانی که برای $a>0$ فرض می‌کنیم $s=\frac{1}{a}$ و $r=a$، نتیجه ۴.۲ را تایید می‌نماییم.در حقیقت، این مطلب یک نسخه دو متغیره از نتیجه ۴.۲ نسبت به r و s می‌باشد.

۳. یکنواختی اطلاعات

در این فصل، یکنواختی اطلاعات را برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس تعمیم‌یافته بررسی می‌نماییم.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ عملگرهای وارون‌پذیر مثبت باشند به‌طوری‌که $0<m_1I\le A\le M_1I$، $0<m_2I\le B\le M_2I$. اگر $\Phi:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نگاشت خطی مثبت و $k\in\mathbb{Z},\lambda>0,q\in\mathbb{R}$ آنگاه برای $0<\alpha$ داده شده*

$$\Phi(\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B))\le\int_0^1\frac{\Phi((A\sharp_{\gamma+\lambda}B)\sharp_\mu A)\sharp_{\gamma+\lambda}\Phi((A\sharp_{\gamma+\lambda}B)\sharp_\mu B)-\Phi(A\sharp_{\gamma+\lambda}B)}{\lambda}\mathrm{d}\mu$$
$$\le\tilde{T}_{q,k,\lambda}(\Phi(A),\Phi(B))+\frac{1-\alpha}{\lambda}\Phi(A)\natural_\gamma\Phi(B)-\frac{\beta}{\lambda}\Phi(A)$$

برقرار است که

$$\beta=\begin{cases}\alpha(\gamma-1)\left(\dfrac{M^\gamma-m^\gamma}{\alpha\gamma(M-m)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\dfrac{Mm^\gamma-mM^\gamma}{M-m}, & \gamma m^{\gamma-1}\ge\dfrac{M^\gamma-m^\gamma}{\alpha(M-m)}\ge\gamma M^{\gamma-1}\\ \min\{(1-\alpha)M^\gamma,(1-\alpha)m^\gamma\}, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\qquad(۳)$$

و نیز $0<\gamma+\lambda<1$، $0<\gamma=q+(k-1)\lambda$، $m=\dfrac{m_2}{M_1}$ و $M=\dfrac{M_2}{m_1}$.

گزاره ۲.۳. *فرض کنید A و B عملگر وارون‌پذیر مثبت با طیف در بازه J و $\Phi:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نگاشت خطی مثبت باشند. دراین‌صورت برای هر $r,s\in J$، $\lambda\neq0$، $k\in\mathbb{Z}$ داریم:*

$$\tilde{T}_{q,k,\lambda}(\Phi(A)|\Phi(B))\le\Phi(\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B))+\left(\frac{r^{q+k\lambda}-r^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}-\frac{s^{q+k\lambda}-s^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}\right)\Phi(A)$$
$$+\frac{(q+k\lambda)r^{q+k\lambda-1}-(q+(k-1)\lambda)r^{q+(k-1)\lambda-1}}{\lambda}\Phi(B-rA)$$
$$-\left(\frac{q}{\lambda}+k\right)\Phi(A\natural_{q+k\lambda}B-s(A\natural_{q+k\lambda-1}B))$$
$$-\left(\frac{q}{\lambda}+(k-1)\right)\Phi(s(A\natural_{q+(k-1)\lambda-1}B)-A\natural_{q+(k-1)\lambda}B)$$

اثبات. از نامساوی اول در قضیه ۵.۲ و خطی بودن Φ حاصل می‌شود که برای هر $r,s\in J$، $\lambda\neq0$، $k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{s^{q+k\lambda}-s^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}\Phi(A)+\left(\frac{q}{\lambda}+k\right)\Phi(A\natural_{q+k\lambda}B-s(A\natural_{q+k\lambda-1}B))$$
$$+\left(\frac{q}{\lambda}+(k-1)\right)\Phi(s(A\natural_{q+(k-1)\lambda-1}B)-A\natural_{q+(k-1)\lambda}B)$$
$$\le\Phi(\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B)).$$

لذا برای هر $r,s\in J$، $\lambda\neq0$، $k\in\mathbb{Z}$

$$0\le\Phi(\tilde{T}_{q,k,\lambda}(A|B))-\frac{s^{q+k\lambda}-s^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}\Phi(A)$$
$$-\left(\frac{q}{\lambda}+k\right)\Phi(A\natural_{q+k\lambda}B-s(A\natural_{q+k\lambda-1}B))$$
$$-\left(\frac{q}{\lambda}+(k-1)\right)\Phi(s(A\natural_{q+(k-1)\lambda-1}B)-A\natural_{q+(k-1)\lambda}B).\qquad(۴)$$

از طرف دیگر، نامساوی دوم در قضیه ۵.۲ نتیجه می‌دهد

$$\tilde{T}_{q,k,\lambda}(\Phi(A)|\Phi(B))\le\frac{r^{q+k\lambda}-r^{q+(k-1)\lambda}}{\lambda}\Phi(A)\qquad(۵)$$
$$+\frac{(q+k\lambda)r^{q+k\lambda-1}-(q+(k-1)\lambda)r^{q+(k-1)\lambda-1}}{\lambda}(\Phi(B)-r\Phi(A)).$$

از دو نامساوی (۴) و (۵)، نامساوی‌های مطلوب را به‌دست می‌آوریم. □

ملاحظه ۳.۳. ملاحظه می‌کنیم که اگر به‌ترتیب در قضیه ۱.۳ و گزاره ۲.۳ قرار دهیم $q = ۰$ و $k = ۱$، آنگاه یکنواختی اطلاعات را برای آنتروپی عملگر نسبی تسالیس و مکمل آن نتیجه می‌گیریم.

توجه کنید که آنتروپی عملگر نسبی خواصی مشابه آنتروپی دارد، به‌عنوان مثال، زیرجمع‌پذیری، تقعر اکید و یکنواختی اطلاعات [۱۵]. در واقع، برای نگاشت خطی مثبت یکدار Φ از مجموعه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت به خودش، داریم:

$$\Phi(S(A|B)) \leq S(\Phi(A)|\Phi(B)).$$

در نتیجه بعدی، یک نامساوی مکمل به‌دست می‌آوریم. با قرار دادن $k = ۱, q = ۰$ و $\lambda \to ۰$ در نتیجه ۲.۳، در ادامه، یکنواختی اطلاعات وارون را برای آنتروپی عملگر نسبی ارائه می‌دهیم.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید A و B عملگر وارون‌پذیر مثبت با طیف در بازه J و $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ نگاشت خطی مثبت باشند. دراین‌صورت برای هر $r, s \in J$ داریم:*

$$S(\Phi(A)|\Phi(B)) \leq \Phi(S(A|B)) + (\ln \frac{r}{s} - ۲)\Phi(A) + \Phi(sAB^{-۱}A + \frac{۱}{r}B).$$

مراجع

[1] Dragomir, S.S. Some inequalities for relative operator entropy. Preprint RGMIA Res. Rep. Col l., **18(145)**, 1–12, 2015.
[2] Dragomir, S.S. Further inequalities for relative operator entropy. RGMIA Res. Rep. Col l., **18(160)**, 1–11, 2015.
[3] Fujii, J. I., Kamei, E. Relative operator entropy in noncommutative information theory. Math. Japonica, **34**, 341–348,1989.
[4] Fujii, J. I., Kamei, E. Uhlmann's interpolational method for operator means. Math. Japon., **34(4)** 541–547,1989 .
[5] Furuta, T. Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators. Linear Algebra Appl., **381**, 219–235, 2004.
[6] K. Yanagi, K. Kuriyama, S. Furuichi Generalized shanon ineqalities based on Tsallis relative operator entropy , Linear Algebra Appl., **394**, 109–118, 2005.
[7] Kubo, F., Ando, T. *Means of positive linear operators*. Math. Ann., **246**, 205–224, 1980.
[8] Moradi, H. R., Furuichi, S., Minculete, N. Estimates for relative operator entropy. Math. Inequal. Appl., **20(4)**, 1079–1088, 2017.
[9] Nikoufar, I. *On operator inequalities of some relative operator entropies*. Adv. Math., **259**, 376–383, 2014.
[10] Nikoufar, I. Bounds of some relative operator entropies in a general form. Filomat, **32(14)**, 5105–5114, 2018.
[11] Nikoufar, I., Yousefzadeh, Z. Inequalities for the generalized Tsallis relative operator entropy. Filomat, **34(8)**, 2713–2721, 2020.
[12] Zou, L. Operator inequalities associated with Tsallis relative operator entropy. Math. Inequal. Appl., **18(2)**, 401–406, 2015.
[13] Zou, L., Jiang, Y. A note on inequalities for Tsallis relative operator entropy. Bull. Iranian Math. Soc., **42(4)**, 855–859, 2016 .
[14] Furuichi, S. Moradi, H. R. Some remarks on Tsallis relative operator entropy. RACSAM, **32(14)**, 1–10, 2020.
[15] Fujii, J. I. Operator means and the relative operator entropy. Operator Theory: Advances and Applications, **59**, 161–172, 1992.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–278، صص. ۲۲۶–۲۲۸

یک مدل برنامه ریزی آرمانی چند بخشی

فاطمه زهرا مشک آبادی بهنمیری [آ]، سید هادی ناصری اوجاکی [ب]

[آ] دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی دانشگاه مازندران
[ب] عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه مازندران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
برنامه‌ریزی آرمانی
برنامه‌ریزی آرمانی چند بخشی
سطوح آرمان چندبخشی

چکیده

در محیط پیچیده و پویای کسب و کار امروزی، شرکت‌ها و سازمان‌ها اغلب با اهداف متعدد و رقابتی روبرو هستند که باید متعادل و بهینه شوند. برنامه‌ریزی آرمانی نوعی تکنیک بهینه‌سازی ریاضی است که به تصمیم‌گیرندگان اجازه می‌دهد تا اهداف و محدودیت‌های متعدد و بعضاً متضاد را متعادل کنند. در مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره، یکی از روش‌های کارآمد برای مدیریت اهداف متضاد، استفاده از برنامه‌ریزی هدف فازی است که امکان تنظیم اولویت‌های مختلف را در یک مدل فراهم می‌کند. این روش در حوزه‌هایی مانند مسائل حمل‌ونقل چندهدفه به کار گرفته شده و کارایی بالایی از خود نشان داده است[۶] . برنامه‌ریزی آرمانی سنتی فقط قادر به مدیریت اهداف با یک سطح آرمان (سطح آرزو) است. در بسیاری از کاربردهای واقعی، ممکن است تصمیم‌گیرندگان با اهداف چندگانه ای روبرو شوند که شامل سطوح مختلفی از آرزو برای یک یا چند هدف است. در بسیاری از کاربردهای واقعی، تصمیم‌گیرندگان ممکن است با اهدافی مواجه شوند که دارای چندین سطح آرزو باشند. برای مدل‌سازی این نوع مسائل، رویکردهای برنامه‌ریزی هدف چندانتخابی فازی پیشنهاد شده‌اند که می‌توانند به انعطاف‌پذیری بیشتر در تصمیم‌گیری کمک کنند [۵]. این پژوهش به بررسی و مطالعه روش‌هایی جدید برای حل مسائل برنامه ریزی آرمانی چند بخشی می پردازد که کارآمدتر و مؤثرتر باشند. در این راستا، رویکردهای جدید مدل‌سازی و حل مسائل برنامه ریزی آرمانی چند بخشی و کارایی آنها در مقایسه با روش های سنتی بررسی شده است. علاوه بر این، مدل پیشنهادی در محیط نرم افزاری لینگو پیاده سازی شده و عملکرد آن در حل مسائل پیچیده، ارزیابی گردیده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می دهند که روش پیشنهادی می تواند ابزار موثرتری برای حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی در اختیار برنامه‌ریزان و تصمیم‌گیرندگان قرار دهد که منجر به بهبود تصمیم‌گیری و نتایج بهتر می‌شود.

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی آرمانی [1] یک رویکرد تحلیلی مهم است که برای حل بسیاری از مشکلات واقعی، توسعه یافته است. با این حال، شرایط وجود سطوح آرزوی چند بخشی، ممکن است در بسیاری از مشکلات بازاریابی یا مدیریت تصمیم‌گیری وجود داشته باشد. این مشکل با تکنیک‌های فعلی برنامه ریزی آرمانی قابل حل نیست. به منظور بهبود اثربخشی برنامه ریزی آرمانی و حل مشکل برنامه‌ریزی هدف چندبخشی، در این مقاله از دیدگاه مشارکت چندین سطح آرزو به حل مسئله چند بخشی می پردازیم.

۲. بیان مساله

در برنامه ریزی آرمانی، هدف این است که مقادیر تصمیم گیری به گونه ای تعیین شوند که انحراف از اهداف مطلوب (یا سطح آرزوها) حداقل شود. این مدل اجازه می دهد تا اهداف متعددی به طور همزمان مورد توجه قرار گیرند؛ درحالیکه تصمیم گیری در راستای یافتن بهترین راه حل

پست الکترونیک : fatemehzahramoshkabadi@gmail.com (فاطمه زهرا مشک آبادی بهنمیری)، nhadi57@gmail.com (سید هادی ناصری اوجاکی)

[1] Goal Programming

از میان مجموعه ای از راه حل های ممکن است. برنامه‌ریزی آرمانی نوعی تکنیک بهینه‌سازی ریاضی است که به تصمیم‌گیرندگان اجازه می‌دهد تا اهداف و محدودیت‌های متعدد و بعضاً متضاد را متعادل کنند. این روش توسط چارنس و کوپر در سال ۱۹۶۱ معرفی شد. [۱] قدیمی‌ترین شکل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min \sum_{i=1}^{n} |f_i(X) - g_i|$$

که در آن یک تابع خطی از هدف i - ام و g_i سطح آرمان برای هدف i- ام است. مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی معمولاً به‌عنوان مسائل برنامه‌ریزی خطی، با توابع و محدودیت‌های آرمانی تعریف می‌شوند تا اهداف و محدودیت‌های مختلف درگیر در مسئله تصمیم‌گیری را نشان دهند. با این حال، برنامه‌ریزی هدف سنتی فقط قادر به مدیریت اهداف با یک سطح آرمان [۲] است. در بسیاری از کاربردهای واقعی، ممکن است تصمیم‌گیرندگان با اهداف چندگانه‌ای روبرو شوند که شامل سطوح مختلفی از آرزو برای یک یا چند هدف است .[۲] نرم افزار لینگو یکی از ابزارهای قدرتمند برای حل مدل‌های بهینه‌سازی است که در این پژوهش برای پیاده‌سازی مدل MSGP استفاده شده است. مراحل پیاده‌سازی به شرح زیر است:

۱. تعریف متغیرها و پارامترها: ابتدا مجموعه متغیرهای تصمیم‌گیری و سطوح آرمان تعریف می‌شوند.
۲. تعیین تابع هدف: تابع دستاورد که به حداقل‌سازی انحرافات از اهداف می‌پردازد، مشخص می‌شود.
۳. فرمول‌بندی محدودیت‌ها: مجموعه محدودیت‌های مدل شامل محدودیت‌های منابع، ظرفیت و سایر الزامات مسئله تعیین می‌شوند.
۴. اجرای مدل: مدل در محیط لینگو کدنویسی شده و با استفاده از حل‌کننده داخلی اجرا می‌شود.
۵. تحلیل نتایج: خروجی‌های مدل، بررسی و بهترین راهکارها پیشنهاد می‌شود.

برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی (MSGP)[۳] شکل پیشرفته‌تری از برنامه‌ریزی آرمانی است که امکان مدل‌سازی مسائل تصمیم‌گیری با بخش‌ها یا مراحل متعدد، با درنظرگرفتن چندین هدف و محدودیت را فراهم می‌کند. مدل MSGP را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: تابع دستاورد:

$$\min Z = \{g_1(d_1^+, d_1^-), g_2(d_2^+, d_2^-), \dots, g_n(d_n^+, d_n^-)\}$$
$$S.t. \sum_{i=1}^{n} S_{ij}X_i + d_i^- - d_i^+ = g_i, j = 1, 2, \dots, n$$
$$S_{ij} = S_{i1} or S_{i2} or \dots S_{im}, i = 1, 2, \dots, n$$

اهداف و محدودیت‌ها: با این حال، فرمول‌بندی و حل مسائل MSGP به دلیل پیچیدگی ذاتی و نیاز به مدل‌سازی دقیق ریاضی می‌تواند چالش‌برانگیز باشد. این امر منجر به مسائل متعددی از جمله جواب‌های غیربهینه، هدررفت منابع و مشکل در تفسیر نتایج شده است.[۳] پیچیدگی مسائل MSGP از عوامل متعددی ناشی می‌شود، از جمله وجود بخش‌ها یا مراحل متعدد، نیاز به درنظرگرفتن انواع اهداف و محدودیت‌ها، و پتانسیل غیرخطی‌بودن و ناپیوستگی در توابع هدف. این عوامل می‌توانند فرمول‌بندی و حل مسائل MSGP را به شیوه‌ای کارآمد و مؤثر دشوار کنند. علاوه بر این، مسائل MSGP اغلب شامل مقادیر زیادی از داده‌ها می‌شود که می‌تواند آن‌ها را از نظر محاسباتی سخت کند و تفسیر آن‌ها را چالش‌برانگیز کند. [۴]

۳. نتیجه گیری

مدل برنامه‌ریزی آرمانی چند بخشی به عنوان یکی از روش های پیشرفته در بهینه‌سازی مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه، امکان در نظر گرفتن اهداف مختلف با سطوح متفاوتی از آرمان را فراهم می‌کند. این مدل با ارائه چارچوبی انعطاف‌پذیرتر نسبت به مدل‌های سنتی، می‌تواند در حل مسائل پیچیده‌ای که شامل محدودیت‌ها و اهداف متنوع هستند، نقش مؤثری ایفا کند. نتایج این پژوهش نشان داد که مدل پیشنهادی در مقایسه با روش‌های سنتی، دقت و کارایی بیشتری در بهینه‌سازی اهداف چندگانه دارد. یکی از چالش‌های اصلی در به‌کارگیری مدل‌های MSGP، پیچیدگی بالای فرمول‌بندی و نیاز به روش‌های محاسباتی پیشرفته برای حل آن‌ها است. بااین‌حال، استفاده از رویکردهای جدید، مانند الگوریتم‌های الهام‌گرفته از طبیعت و الگوریتم‌های فراابتکاری، می‌تواند منجر به بهبود عملکرد این مدل‌ها در مقیاس‌های بزرگ‌تر شود. این رویکردها شامل روش MSGP متوالی، روش MSGP هم‌زمان و روش MSGP تطبیقی است، که هر کدام از این روش‌ها نقاط قوت و ضعف خاص خود را دارند و برای انواع مسائل تصمیم‌گیری در زمینه‌های مختلف به کار گرفته شده‌اند. در آینده، می‌توان با توسعه مدل‌های ترکیبی که از تکنیک‌های احتمالی و روش‌های یادگیری پیشرفته بهره می‌برند، دقت و سرعت حل مسائل MSGP را افزایش داد. همچنین، بررسی کاربردهای عملی این مدل در حوزه‌هایی مانند مدیریت زنجیره تأمین، تخصیص منابع، برنامه‌ریزی تولید و مدیریت پروژه می‌تواند به توسعه دانش و افزایش کارایی این روش در حل مسائل واقعی کمک کند. تحقیقات جاری در این زمینه به اصلاح این روش‌ها ادامه می‌دهد و بینش‌ها و ابزارهای جدیدی را برای شاغلین در زمینه‌های مختلف ارائه می‌کند.

[2] Aspiration level
[3] Multi-segment goal programming

مراجع

[1] Charnes, A., & Cooper, W. W. (1961). Management Models and the Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley, 4, 38-91.
[2] Karimi, H., & Attarpour, M. (2012). Multi-aspiration goal programming formulation,International Journal of Industrial Engineering : Theory Applications and Practice, 19, 456-463.
[3] Liao, C.N., (2009), Formulating the multi-segment goal programming, Computers & Industrial Engineering, 56, 138-141.
[4] Liao, C.N., (2011). Revised multi-segment goal programming and applications, ProbStat Forum, 12, 110-119.
[5] Nasseri, S. H., Ziaseraji, M., Goodarzian, F.& Abraham, A. (2021). A revised model for fuzzy multi-choice goal programming. Intelligent and Fuzzy Techniques for Emerging Conditions and Digital Transformation, 580-588.
[6] Rivaz, S., Nasseri, S. H., & Ziaseraji, M., (2020). A fuzzy goal programming approach to multiobjective transportation problems, Fuzzy Information and Engineering, 12, 139-149.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–281، صص. ۲۲۹–۲۳۴

شمارش نیم ابرگروه های (ابرمونوئیدهای) کامل ساخته شده از نیم گروه (مونوئید) مرتبه کمتر از ۶

سعید میروکیلی*[آ]، حسین نراقی[ب]، حسن نراقی[ج]

[آ] دانشیار گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
[ب] استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران ، ایران
[ج] استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد ،واحد آشتیان، آشتیان اراک ، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
شمارش
نیم ابرگروه
ابر مونوئید

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
20N20

چکیده

در این مقاله، به کمک روش دی سالوو و همکاران برای شمارش KH ابرگروه‌ها تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل و همچنین ابرمونوئیدهای مرتبه کوچک را محاسبه کرده و جداول کیلی آن ها را بدست می آوریم.

۱. مقدمه

بسیاری از محققان، از جمله بایون و لایگروس، با استفاده از محاسبات کامپیوتری توانسته‌اند رده‌های خاصی از ابرساختارها را شمارش کنند [۱، ۲، ۱۲]. همچنین، دی سالوو، دواز و دیگران در شمارش تحلیلی ابرساختارها و کاربردهایشان فعالیت داشته‌اند [۷–۱۰]. روش دی سالوو و همکاران در شمارش KH –ابرگروه‌ها این ایده را به ما می‌دهد که می‌توان از این روش در شمارش ابرگروه‌های چندمتقارن بهره‌برداری کرد. در این بخش، مقدمه‌ای کوتاه از تعاریف و نتایج مورد نیاز برای مطالعه نیم ابرگروه‌ها ارائه می‌دهیم که در مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در این بخش قصد داریم به شمارش تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل و همچنین شمارش ابرمونوئیدهای از مرتبه کوچک، بپردازیم. برای این محاسبات از [۱، ۱۰–۱۲] کمک گرفته‌ایم.

۲. مفاهیم اساسی

در این بخش می‌خواهیم تعداد K_H–ابرگروه‌های دارای n عضو، تولیدشده توسط ابرگروه H به‌طوری‌که $|H| < ۵$ را با تقریب یکریختی پیدا کنیم. مطالب و نمادهای این بخش از [۱۰] آورده شده است.
فرض کنید K یک K_H–ابرگروه تولیدشده توسط ابرگروه H است به‌طوری‌که $K = \cup_{a\in H} A_a$، $|K| = n$، $H = \{x_۱, \dots, x_m\}$ و $|A_{x_i}| = n_i$.
دراین‌صورت K از نوع $(n_۱, n_۲, \dots n_m)$ است به‌طوری‌که $n_۱ + n_۲ + \dots n_m = n$. تعداد m–تایی‌های از اعداد صحیح مثبت که در این معادله صدق می‌کند برابر با $\binom{n-۱}{m-۱}$ است که این مقدار را با $\gamma_{n,m}$ نیز نمایش می‌دهیم.

*سخنران
پست الکترونیک : saeedmirvakili@yazd.ac.ir (سعید میروکیلی)، ho.naraghi@pnu.ac.ir (حسین نراقی)، hassannaraghi1376@gmail.com (حسن نراقی)

فرض کنید $[n,m]$ تعداد کلاس‌ها از نظر مشابه‌بودن روی K_H ابرگروه‌های از مرتبه n، تولیدشده توسط ابرگروه‌های از مرتبه m است. به علاوه فرض کنید $[[n,m]]$ تعداد کلاس‌های یکریختی ابرگروه‌های با این شرایط است. واضح است که $\gamma_{n,۱} = \gamma_{n,n} = ۱$ و لذا

$$[n,۱] = [[n,۱]] = ۱$$

همچنین اگر $\mathcal{J}(n)$ نشان دهنده تعداد ابرگروه‌های از مرتبه n با تقریب یکریختی باشد آنگاه

$$[n,n] = ۱,\ [[n,n]] = \mathcal{J}(n).$$

در حقیقت به ازای $m = ۱$ یک ابرگروه کلی از مرتبه n داریم و به ازای $m = n$ یک K_H ابرگروه بدیهی داریم که یکریخت با مجموعه مولدهای مرتبط با آن است.
حال فرض کنید $۲ \le m \le ۶$ و $m \le n$:
برای محاسبه $[n,m]$ مشاهده می‌شود که این عدد به تعداد جواب‌های معادله خطی زیر بستگی دارد.

$$n_۱ + n_۲ + \cdots n_m = n$$

به‌طوری‌که به ازای $۱ \le i \le m$، $x_i \in \mathbb{N}^*$
فرض کنید $S(n,m)$ مجموعه چنین mـتایی‌هایی از اعداد صحیح مثبت است. واضح است که $S(n,m) \neq \phi$، زیرا $(۱,۱,\cdots,۱) \in S(n,m)$.
اگر $\alpha = (\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_m) \in S(n,m)$، آنگاه به ازای هر i که $۱ \le i \le m$، $r_\alpha(\alpha_i)$ نشان دهنده تعداد دفعاتی است که α_i در mـتایی α ظاهر می‌شود.
رابطه ρ را در $S(n,m)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall(\alpha,\beta) \in [S(n,m)]^۲,\ \alpha = (\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_m),\ \beta = (\beta_۱,\beta_۲,\cdots,\beta_m),$$

$$\alpha\rho\beta \Leftrightarrow ([\{\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_m\} = \{\beta_۱,\beta_۲,\cdots,\beta_m\} = T] \text{ و } [\forall w \in T,\ r_\alpha(w) = r_\beta(w)])$$

دراین‌صورت ρ یک رابطه هم‌ارزی است. فرض کنید $S^*(n,m)$ مجموعه خارج‌قسمتی از $S(n,m)$ وابسته به رابطه ρ است. با توجه به تعریف رابطه شبیه بودن، $|S^*(n,m)| = [n,m]$.
فرض کنید که به ازای هر t که $۱ \le t \le m$، $s_t(n,m)$ نمایش دهنده تعداد کلاس‌های هم‌ارزی وابسته به ρ است که مجموعه حاصل از mـتایی‌ها از مرتبه t باشد. دراین‌صورت واضح است که

$$|S^*(n,m)| = \sum_{t=۱}^{m} s_t(n,m).$$

در ادامه قصد داریم تعداد $s_t(n,m)$ را به ازای $۲ \le m \le ۶$ و $۱ \le t \le m$ به دست آوریم. حالت‌های ممکن به شرح ذیل است:

$$s_۱(n,۲) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد است،} \\ ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج است.} \end{cases}$$

$$s_۲(n,۲) = \begin{cases} \dfrac{n-۱}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد است،} \\ \dfrac{n}{۲} - ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج است.} \end{cases}$$

و لذا

$$|s^*(n,۲)| = \begin{cases} \dfrac{n-۱}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد است،} \\ \dfrac{n}{۲} & \text{اگر } n \text{ زوج است.} \end{cases}$$

به عبارت دیگر

$$[n,۲] = INT(\frac{n}{۲})$$

به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $INT(x)$ نمایش دهنده جزء صحیح x است.

$$s_۱(n,۳) = \begin{cases} ۰ & ۳ \nmid n, \\ ۱ & ۳ \mid n. \end{cases}$$

$$s_۲(۳,۳)=۰,\ s_۲(۴,۳)=۱,\ s_۲(۵,۳)=۲$$

و به ازای هر $n\geq ۶$

$$s_۲(n,۳)=s_۲(n-۳,۳)+\begin{cases}۲ & \text{اگر } n \text{ فرد است،}\\ ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج است.}\end{cases}$$

$$s_۳(n,۳)=s_۳(n-۳,۳)+\begin{cases}\dfrac{n-۴}{۲} & \text{اگر } n \text{ زوج است،}\\ \dfrac{n-۵}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد است.}\end{cases}$$

$$s_۱(n,۴)=\begin{cases}۰ & ۴\nmid n,\\ ۱ & ۴\mid n.\end{cases}$$

اگر $t=۲$، جواب‌ها دارای فرم‌هایی شبیه (x,x,x,y) یا (x,x,y,y) با شرط $x\neq y$ هستند که به ترتیب تعداد این نوع جواب‌ها را با $\bar{s}_۲(n,۴)$ و $\tilde{s}_۲(n,۴)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که

$$\bar{s}_۲(۴,۴)=۰,\ \bar{s}_۲(۵,۴)=\bar{s}_۲(۶,۴)=۱,\ \bar{s}_۲(۷,۴)=۲$$

و به ازای هر $n\geq ۸$

$$\bar{s}_۲(n,۴)=\bar{s}_۲(n-۴,۴)+\begin{cases}۱ & ۳\nmid n-۱,\\ ۲ & ۳\mid n-۱.\end{cases}$$

در حالت (x,x,y,y) داریم:

$$\tilde{s}_۲(۴,۴)=\tilde{s}_۲(۵,۴)=\tilde{s}_۲(۷,۴)=۰,\ \tilde{s}_۲(۶,۴)=۱$$

و به ازای هر $n\geq ۸$ نتیجه می‌گیریم:

$$\tilde{s}_۲(n,۴)=\tilde{s}_۲(n-۴,۴)+\begin{cases}۱ & \text{اگر } n \text{ زوج است،}\\ ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد است.}\end{cases}$$

اگر $t=۳$، به روش مشابه حالت‌های قبلی

$$s_۳(۴,۴)=s_۳(۵,۴)=s_۳(۶,۴)=۰,\ s_۳(۷,۴)=۱$$

و به ازای هر $n\geq ۸$ داریم:

$$s_۳(n,۴)=s_۳(n-۴,۴)+s_۲(n-۴,۳)+\begin{cases}\dfrac{n-۴}{۲} & \text{اگر } n \text{ زوج است،}\\ \dfrac{n-۵}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد است.}\end{cases}$$

اگر $t=۴$:

$$s_۴(n,۴)=۰,\ \forall n<۸$$

$$s_۴(n,۴)=s_۴(n-۴,۴)+s_۳(n-۴,۳),\ \forall n\geq ۸$$

دی سالوو تعداد ابرگروه های کامل از مرتبه n ساخته شده از گروه مرتبه m را با $C(n,m)$ نشان داد:

قضیه ۱.۲. [۱۰] *فرض کنید $C(n)$ تعداد ابرگروه های کامل از مرتبه n در حد هم‌ارزی باشد، در این صورت:*

۱. $C(n,۲)=n-۱$؛
۲. $C(n,۳)=s_۱(n,۳)+۲s_۲(n,۳)+۳s_۳(n,۳)$؛
۳. $C(n,۴)=۲s_۱(n,۴)+۵\bar{s}_۲(n,۴)+۶\tilde{s}_۲(n,۴)+۱۰s_۳(n,۴)+۱۶s_۴(n,۴)$؛
۴. $C(۲)=۱$؛
۵. $C(۳)=۳$؛
۶. $C(۴)=۷$؛
۷. $C(۵)=۱۴$.

حال به کمک مفاهیم قبل و پیاده سازی روی نیم گروه ها نتایج جدید در شمارش نیم‌ابرگروه‌های کامل و ساختارهای وابسته پیدا می کنیم.

۳. شمارش نیم‌ابرگروه‌های کامل و ابرمونوئیدهای کامل

در این بخش ما در حد هم‌ارزی (یکریختی و پادیکریختی) تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل مرتبه n تولید شده توسط نیم‌گروه H که $|H| \leq ۴$ را می‌یابیم.
با توجه به فرمول های بخش ۲، تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل مرتبه n تولید شده توسط تمام نیم‌گروه‌های m عضوی را با $S[m,n]$ نشان می دهیم. د همچنین تعداد ابرمونوئیدهای کامل مرتبه n تولید شده توسط تمام مونوئیدهای m عضوی را با $M[m,n]$ نشان می دهیم. در این بخش $S[n,۴]$، $S[n,۳]$، $S[n,۲]$ و $M[n,۴]$، $M[n,۳]$، $M[n,۲]$ را بدست می‌آوریم:
تعداد نیم‌گروه‌های در حد یکریختی از مرتبه ۲، برابر ۵ است که در جدول زیر نشان داده شده است. با کمک این نیم‌گروه‌ها و گروه یکریختی آن‌ها $S[n,۲]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$H_۱: \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \qquad H_۲: \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{matrix} \qquad H_۳: \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{matrix} \qquad H_۴: \begin{matrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{matrix}$$

داریم $|AUT(H_۳)| = ۲$ و $|AUT(H_۱)| = |AUT(H_۲)| = |AUT(H_۴)| = ۱$.
با توجه به تعریف $\sum$–نیم‌ابرگروه، $H_۱$ و $H_۳$ $\sum$–نیم‌ابرگروه نیستند.
از $H_۱$ تعداد $n-۱$ نیم‌ابرگروه ساخته می‌شود.
از $H_۳$ نیز تعداد $[n/۲]$ نیم‌ابرگروه ساخته می‌شود (با توجه به گروه خودریختی). همچنین، برای نیم‌گروه $H_۲$ و $H_۴$ داریم:

$$s_۱(n,۲) + ۲s_۲(n,۲)$$

بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۳. *برای هر* $n \geq ۲$

$$S[n,۲] = ۲(s_۱(n,۲) + ۲s_۲(n,۲)) + (n-۱) + [n/۲].$$

و

$$M[n,۲] = ۲(s_۱(n,۲) + ۲s_۲(n,۲)).$$

می‌دانیم ۱۸ نیم‌گروه مرتبه ۳ در حد هم‌ارزی وجود دارند. گروه خودریختی این ۱۸ نیم‌گروه در جدول زیر نشان داده شده است.

$Tabel\ A.G.$	$Order$ ۳
$group$	$number$
$trivial$	۱۲
$\mathbb{Z}_۲$	۵
$\mathbb{S}_۳$	۱

در جدول زیر اطلاعات کامل نشان داده شده است:

$Cayley's\ Table$	$Automorphism\ Group$	$\sum -semihypergroup$
$H_۱ = [۰۱۲][۱۲۰][۲۰۱]$	$AUT(H_۱) = \langle(۲۳)\rangle$	Yes
$H_۲ = [۱۲۱][۲۱۲][۱۲۱]$	$AUT(H_۲) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۳ = [۱۲۲][۲۲۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۳) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۴ = [۲۱۰][۱۱۱][۰۱۲]$	$AUT(H_۴) = \langle ۱\rangle$	Yes
$H_۵ = [۲۰۰][۰۱۲][۰۲۲]$	$AUT(H_۵) = \langle ۱\rangle$	Yes
$H_۶ = [۲۰۰][۰۲۲][۰۲۲]$	$AUT(H_۶) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۷ = [۲۲۲][۲۲۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۷) = \langle(۱۲)\rangle$	No
$H_۸ = [۲۲۲][۲۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۸) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۹ = [۲۱۲][۱۱۱][۲۱۲]$	$AUT(H_۹) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۱۰ = [۲۰۲][۰۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۰) = \langle ۱\rangle$	Yes
$H_۱۱ = [۲۲۲][۱۱۱][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۱) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۱۲ = [۲۲۲][۰۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۲) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۱۳ = [۰۱۲][۱۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۳) = \langle ۱\rangle$	Yes
$H_۱۴ = [۰۲۲][۲۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۴) = \langle(۱۲)\rangle$	Yes
$H_۱۵ = [۰۰۰][۱۱۱][۰۰۲]$	$AUT(H_۱۵) = \langle ۱\rangle$	No
$H_۱۶ = [۰۰۲][۱۱۲][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۶) = \langle(۱۲)\rangle$	No
$H_۱۷ = [۰۰۰][۱۱۱][۲۲۲]$	$AUT(H_۱۷) = \langle(۱۲),(۱۲۳)\rangle$	No
$H_۱۸ = [۰۰۰][۱۱۱][۰۱۲]$	$AUT(H_۱۸) = \langle(۱۲)\rangle$	$Yes.$

با توجه به اطلاعات در جدول بالا داریم:

قضیه ۲.۳. *برای هر $n \geq ۳$ و با توجه به اینکه تعدادی از نیم‌گروه‌ها، $\sum$–نیم‌ابرگروه هستند داریم:*

$$\begin{aligned} S[n,۳] &\leq ۱۲(s_۱(n,۳)+۳s_۲(n,۳)+۶s_۳(n,۳))+۵(s_۱(n,۳)+۲s_۲(n,۳)+۳s_۳(n,۳))+\\ &\quad (s_۱(n,۳)+s_۲(n,۳)+s_۳(n,۳))\\ &= ۱۸s_۱(n,۳)+۴۷s_۲(n,۳)+۸۸s_۳(n,۳). \end{aligned}$$

و چون $H_۱$، $H_۴$، $H_۵$، $H_{۱۰}$ و $H_{۱۳}$ مونویید هستند، داریم

$$M[n,۳] = ۴(s_۱(n,۳)+۳s_۲(n,۳)+۶s_۳(n,۳))+(s_۱(n,۳)+۲s_۲(n,۳)+۳s_۳(n,۳))$$

۱۲۶ نیم‌گروه مرتبه ۴ در حد هم‌ارزی وجود دارند. گروه خودریختی این ۱۲۶ نیم‌گروه در جدول زیر نشان داده شده اند (GAP یا [۱۱]).

$Tabel\ A.G.$	$Order\ ۴$
$group$	$number$
$trivial$	۷۸
$\mathbb{Z}_۲$	۳۹
$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۳
$\mathbb{S}_۳$	۵
$\mathbb{S}_۴$	۱

$Tabel\ A.G.$	$Order\ ۴$	$Structure$
$group$	$number$	
$trivial$	۷۸	$\langle ۱\rangle$
$\mathbb{Z}_۲$	۳۵	$\langle(ab)\rangle$
$\mathbb{Z}_۲$	۴	$\langle(ab)(cd)\rangle$
$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۲	$\langle(ab),(cd)\rangle$
$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۱	$\langle(ab)(cd),(ac)(bd)\rangle$
$\mathbb{S}_۳$	۵	$\mathbb{S}_۳$
$\mathbb{S}_۴$	۱	$\mathbb{S}_۴$

حال برای محاسبه یک کران بالا از $S[n,۴]$ قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳.۳. *برای هر* $n \geq ۴$ *داریم:*

$$\begin{aligned} S[n,۴] \leq\ & ۷۸(s_۱(n,۴)+۴\overline{s}_۲(n,۴)+۶\tilde{s}_۲(n,۴)+۱۲s_۳(n,۴)+۲۴s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۳۵(s_۱(n,۴)+۳\overline{s}_۲(n,۴)+۴\tilde{s}_۲(n,۴)+۷s_۳(n,۴)+۱۲s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۴(s_۱(n,۴)+۲\overline{s}_۲(n,۴)+۳\tilde{s}_۲(n,۴)+۶s_۳(n,۴)+۱۲s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۲(s_۱(n,۴)+۲\overline{s}_۲(n,۴)+۳\tilde{s}_۲(n,۴)+۴s_۳(n,۴)+۶s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۱(s_۱(n,۴)+۱\overline{s}_۲(n,۴)+۱\tilde{s}_۲(n,۴)+۳s_۳(n,۴)+۶s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۵(s_۱(n,۴)+۲\overline{s}_۲(n,۴)+۲\tilde{s}_۲(n,۴)+۳s_۳(n,۴)+۴s_۴(n,۴)) \\ +\ & ۱(s_۱(n,۴)+\overline{s}_۲(n,۴)+\tilde{s}_۲(n,۴)+s_۳(n,۴)+s_۴(n,۴)) \end{aligned}$$

اگر $OP۴$ *تعداد نیم‌گروه‌های مرتبه ۴ با گروه اتومورفیسم ۲ عضوی شامل جایگشت فرد باشد،* $EP۴ = ۳۹ - OP۴$ *را داریم.*

جدول خودریختی‌های نیم‌گروه‌های مرتبه ۵ در جدول زیر نشان داده شده است [۱۱]:

$Tabel\ A.G.$	$Order$ ۵
$group$	$number$
$trivial$	۷۴۶
$\mathbb{Z}_۲$	۳۴۲
$\mathbb{Z}_۳$	۲
$\mathbb{Z}_۴$	۱
$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۲۶
$\mathbb{S}_۳$	۳۳
$D_۸$	۱
$D_{۱۲}$	۴
$\mathbb{S}_۴$	۴
$\mathbb{S}_۵$	۱

تعداد ۱۱۶۰ نیم‌گروه مرتبه ۵ در حد هم‌ارزی وجود دارند. با توجه به قضایای بالا، تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل تا مرتبه ۵ را در نتیجه بعد داریم:

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید* $CS(n)$ *تعداد نیم‌ابرگروه‌های کامل مرتبه* n *باشند. با توجه به اطلاعات در جدول بالا داریم:*

۱. $CS(۲) = ۴$؛
۲. $CS(۳) = ۲۵$؛
۳. $CS(۴) = ۱۸۴$؛
۴. $CS(۵) = ۱۶۷۴ + OP۴$.

مراجع

[1] R. Bayon, N. Lygeros, *Les hypergroupes et H_v-groupes d'ordre 3*, submitted to Bulletin of the Greek Mathematical Society.
[2] R. Bayon, N. Lygeros, *Number of abelian H_v-groups of order n*, N. J. A. Sloane, editor, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A108089, 2005.
[3] R. Bayon, N. Lygeros, *Les hypergroupes abéliens d'ordre 4, Eléments structurels de la théorie des hyperstructures*, Colloque de l'Université de Thrace, Mars (2005).
[4] B. Davvaz, V. Leoreanu, *Hypergroup theory*, World Scientific, 2022.
[5] B. Davvaz, *Semihypergroup theory*, Elsevier, 2016.
[6] B. Davvaz, T. Vougiouklis, *A walk through weak hyperstructures; H_v-structure*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019.
[7] M. De Salvo, *I K_H ipergruppi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **XXXI** (1982) 113—122.
[8] M. De Salvo, *Gli $(H;G)$-ipergruppi*, Riv. Mat. Univ. Parma., **(4) 10** (1984) 207—216.
[9] M. De Salvo, *Similitued and isomorphism in K_H hypergroups*, Proceeding of Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures an Applications, Xanthy, Greece, (1990) 87—96.
[10] M. De Salvo, *On the number of K_H hypergroups*, Riv. Di Mat. Pura Ed Appl., **12** (1992) 7—25.
[11] A. Distler, *Classification and enumeration of finite semigroup*, A Thesis Submitted for the Degree of PhD at the University of St. Andrews, 2010.
[12] Ch. Tsitouras, Ch. G. Massouros, *On enumeration of hypergroups of order 3*, Computers and Mathematics with Applications, **59** (2010) 519—523.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، 282–OR، صص. ۲۳۵–۲۳۸

ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های خاکستری

داود درویشی سلوکلایی[آ]، صافیه کر*[،ب]

[آ]دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[ب]دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
ارزیابی کارایی
واحدهای تصمیم‌گیری
تحلیل پوششی داده‌ها
عدم قطعیت
محیط خاکستری

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در دنیای کنونی که منابع محدود و محیط رقابتی فشرده‌تر شده است، ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری به‌عنوان یک ابزار برای بهره‌برداری بهینه از منابع و افزایش کارایی و کیفیت عملکرد آن‌ها بسیار حائز اهمیت است. تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک روش محاسباتی پیچیده و قدرتمند، امکان ارزیابی نسبی عملکرد واحدهای مختلف را فراهم می‌کند. این روش می‌تواند به مدیران کمک کند تا عوامل تأثیرگذار بر کارایی را تشخیص داده و به بهبود آن‌ها بپردازند در سال‌های اخیر در اغلب کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در زمینه‌های مختلف، کاربردهای متفاوتی از تحلیل پوششی داده‌ها دیده شده است. در اغلب تصمیم گیری ها و ارزیابی‌ها با داده‌های نادقیق سرو کار داریم. رویکردهای مختلفی برای مواجهه با عدم قطعیت از جمله رویکرد تصادفی، فازی وجود دارد. در این پژوهش از تلفیق داده‌های خاکستری و تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده است.

۱. مقدمه

بسیاری از وضعیت‌های تصمیم‌گیری در دنیای واقعی با عدم‌قطعیت همراه هستند. در این شرایط، تحلیل‌های کمی معمولاً با چالش‌های خاصی مواجه می‌شوند. در شرایط نادقیق، محاسبه دقیق برخی پارامترها امکان‌پذیر نیست و بسیار زمان‌بر و پیچیده و هزینه‌بر است. از طرفی، تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک روش مبتنی بر نسبت‌های نسبی کمک می‌کند تا به ارزیابی کارایی در شرایط تردیدآور پرداخته شود. با افزایش هزینه‌ها و منابع محدود، تخصیص بهینه منابع برای واحدهای مختلف تصمیم‌گیری اهمیت بسیاری دارد. تحلیل پوششی داده‌ها می‌تواند به مدیران کمک کند تا نقاط ضعف در تخصیص منابع را شناسایی کرده و بهبودهای لازم را ایجاد کنند و چه‌بسا با روبروشدن با داده‌های نادقیق این مهم در شرایط خاکستری بسیار بهتر صورت می‌گیرد. هدف ارزیابی عملکرد کمک به تصمیم‌گیری، بازنگری و بازخورد در سطوح مختلف اجرای طرح‌ها، کمک به طراحی مجدد طرح‌های جاری و تدوین طرح‌های جدید بوده است. می‌توان اظهار داشت که هدف نهایی از ارزیابی عملکرد، افزایش کارایی و اثربخشی سازمان است [۶]. در طول سالیان متمادی برای ارزیابی و سنجش کارایی سازمان‌ها از روش‌های مختلفی استفاده شد. یکی از این روش‌ها که بسیار از آن استفاده شده و سهم بالایی در تحقیقات مختلف حوزه‌های علمی مرتبط با سنجش و کارایی دارد، روش تحلیل پوششی داده‌هاست [۲]. تحلیل پوششی داده‌ها، یکی از کارآمدترین روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره است که دارای کاربرد گسترده و فراوان در حوزه ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. لازم به ذکر است که ایده اولیه این تکنیک در سال ۱۹۵۷ توسط فارل به وجود آمد [۷].

*سخنران
پست *الکترونیک :* d_darvishi@pnu.ac.ir (داود درویشی سلوکلایی)، safiehkor30@yahoo.com (صافیه کر)

نظریه سیستم‌های خاکستری رویکرد جدیدی در محیط عدم‌قطعیت است که تمرکز آن بر روی مساله‌هایی است که از نمونه‌های کوچک و اطلاعات ناقص استفاده می‌کنند. این مساله‌ها باعث شده است که استفاده از سیستم‌های خاکستری در دنیای امروزی کاربرد زیادی داشته باشند. در میان سیستم‌های غیرقطعی، این روش کارایی مناسبی در استخراج و استفاده از داده‌ها داشته و همین مساله موجب استفاده بیشتر از سیستم‌های خاکستری در دنیای امروزی شده است [۴].

۲. تحلیل پوششی داده‌ها

در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها به منظور جلوگیری از پراکنده‌کاری، به جای عوامل ورودی سیستم، از مفهوم نهاده (داده) و به جای محصولات خروجی سیستم، از مفهوم ستانده (ستاده) استفاده می‌شود. این مفاهیم از علم اقتصاد گرفته شده است که مبنای تحلیل‌های این روش جدید می‌باشد [۵].



شکل ۱: انواع مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

ارزیابی کارایی یک واحد مستلزم مقایسه ستانده‌ها با نهاده‌هایش است. این مقایسه به صورت‌های مختلف انجام می‌شود که عبارتند از:
کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده در حالتی که تنها یک نهاده و یک ستانده داشته باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{کارایی} = \frac{\text{مقدار ستانده}}{\text{مقدار نهاده}}$$

اما معمولاً واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای چندین نهاده و چندین ستانده هستند. در این حالت کارایی عبارتند از [۱]:

$$\text{کارایی} = \frac{\text{مجموع وزنی ستانده}}{\text{مجموع وزنی نهاده}}$$

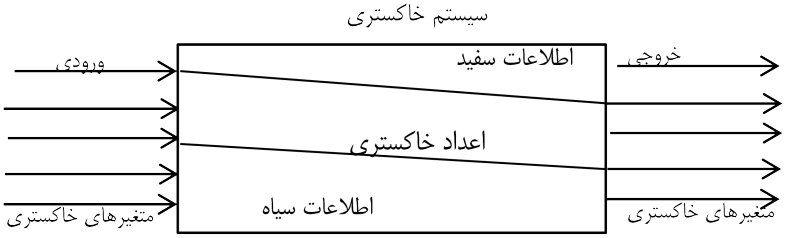
که در این حالت، مشکل اصلی تعیین وزن‌ها می‌باشد.
روش تحلیل پوششی داده‌ها، روش بهینه‌سازی کارآمدی است که برای بهبود عملکرد محصول یا فرآیند با چندین پاسخ پیشنهاد شده است. این روش یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی، برای ارزیابی کارایی نسبی چندین واحد تصمیم‌گیرنده است که از ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه، فرآیند تولید ساختاری را ارائه می‌دهد [۳].

۳. نظریه سیستم‌های خاکستری

نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از روش‌های پیشرو در تحلیل ریاضی سیستم‌های با اطلاعات غیرقطعی است. هریک از سیستم‌های مختلف اجتماعی، اقتصادی، کشاورزی، صنعتی یا زیستی را بر اساس زمینه‌های تحقیقاتی آن‌ها نامگذاری می‌کنند. با توجه به میزان قطعیت موجود در مطالعه سیستم‌ها می‌توان از رنگ‌ها برای نامگذاری و نمایش سیستم استفاده نمود. سیستم خاکستری را بر اساس رنگ عناصر وابسته به آن نامگذاری کرده‌اند. در نظریه کنترل اصولاً تیرگی رنگ‌ها اشاره به میزان شفافیت اطلاعات دارد. بر این اساس می‌توان شفافیت اطلاعات را در سه دسته به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود:

- **سیستم سیاه:** بیانگر این است که داده‌های مربوطه، روابط درونی میان آن‌ها و ساختار آن کاملاً ناشناخته است.
- **سیستم سفید:** سیستمی است که شناخت افراد نسبت به آن و نیز اطلاعات در مورد آن کامل است.

- **سیستم خاکستری:** سیستم‌هایی که نه کاملاً ناشناخته و نه کاملاً شناخته‌شده هستند (اطلاعات در مورد آن‌ها ناقص است) [۴].



شکل ۲: مفهوم یک سیستم خاکستری

تعریف ۱.۳. فرض کنیم X مجموعه مرجع باشد. آنگاه مجموعه خاکستری G از مجموعه مرجع X با دو نماد $\overline{\mu}_G(x)$ و $\underline{\mu}_G(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\overline{\mu}_G(x) : x \to [۰,۱] \\ \underline{\mu}_G(x) : x \to [۰,۱]\end{cases}$$

که در آن $\overline{\mu}_G(x) \geq \underline{\mu}_G(x)$ و $x \in X$ و $X = \mathbb{R}$ است. $\overline{\mu}_G(x)$ و $\underline{\mu}_G(x)$ به ترتیب حد بالا و حد پایین از تابع عضویت G می‌باشند. هنگامی‌که $\overline{\mu}_G(x) = \underline{\mu}_G(x)$ داشته باشیم، آنگاه مجموعه خاکستری G به مجموعه فازی تبدیل می‌شود. این قابلیت نشان‌دهنده شمول نظریه سیستم خاکستری به حالت‌های فازی و انعطاف آن در مواجه با مسائل فازی است.

عدد خاکستری می‌تواند به‌عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. به‌طور مثال، رتبه معیارها در یک تصمیم‌گیری، به‌صورت متغیرهای زبانی بیان می‌شوند که می‌توان آن‌ها را با بازه‌های عددی بیان نمود. این بازه‌های عددی شامل اطلاعات نامطمئن خواهد بود. عدد خاکستری معمولاً به‌وسیله نماد $\otimes_G$ بیان و خاکستری نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳. عدد خاکستری عددی است که مقدار دقیق آن معلوم نیست اما محدوده‌ای که در آن قرار می‌گیرد مشخص است. در حقیقت، عدد خاکستری عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه‌ای از اعداد اتخاذ می‌کند.

با توجه به مدل CCR از تحلیل پوششی داده: با توجه به مدل زیر:

$$\begin{aligned}\max \quad & \mu^T Y_{jo} \\ \text{st.} \quad & w^T x_j - \mu^T Y_{jo} \geq ۰, \quad j = ۱, \dots, n \\ & w^T x_{jo} = ۱ \quad w \geq ۰, \quad \mu \geq ۰\end{aligned}$$

این مدل برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری اعداد محدود به کار می‌رود. در اینجا n یک شماره از واحدهای تصمیم‌گیری است و $X_j = (X_{۱j}, \dots, X_{mj})$ و $Y_j = (Y_{۱j}, \dots, Y_{sj})$، همه مثبت به عنوان بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم‌گیری j ام شناخته می‌شوند و m و s به ترتیب شماره‌ی ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. و $w = (w_۱, \dots, w_m)^T$ و $\mu = (\mu_۱, \dots, \mu_s)^T$ (همگی نامنفی) بردارهای وزن متغیری هستند که با حل این مسئله برنامه‌ریزی تعیین می‌شوند.

مدل خاکستری:

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = \mu^T \otimes Y_{jo} \\ \text{s.t.} \quad & w^T \otimes X_j - \mu^T \otimes Y_j \geq ۰, \quad j = ۱, \dots, n \\ & w^T \otimes X_{jo} = ۱ \qquad w \geq ۰, \quad \mu \geq ۰\end{aligned}$$

۴. مثال عددی: ارزیابی عملکرد شرکت‌های فناوری

هدف این مطالعه، ارزیابی عملکرد چندین شرکت فناوری بر اساس معیارهای نوآوری با استفاده از مدل در محیط خاکستری است. این روش به ما کمک می‌کند تا عملکرد نسبی شرکت‌ها را در شرایطی که داده‌ها دقیق نیستند، مورد بررسی قرار دهیم.
نهاده‌ها (ورودی‌ها): هزینه تحقیق و توسعه (میلیون دلار)، تعداد کارکنان بخش نوآوری، سرمایه‌گذاری در فناوری‌های نوین (میلیون دلار) و ستانده‌ها (خروجی‌ها): تعداد پتنت‌های ثبت‌شده، درآمد حاصل از محصولات نوآورانه (میلیون دلار) و میزان رشد کاربران یا مشتریان جدید خواهد بود.

جدول ۱: داده‌های خاکستری برای شرکت‌های فناوری

شرکت	هزینه R&D (میلیون دلار)	تعداد کارکنان نوآوری	سرمایه‌گذاری در فناوری‌های نوین (میلیون دلار)	تعداد پتنت‌های ثبت‌شده	درآمد نوآورانه (میلیون دلار)	رشد کاربران (درصد)
A	[۱۵, ۲۰]	[۵۰, ۶۰]	[۱۰, ۱۵]	[۸, ۱۲]	[۵۰, ۷۰]	[۱۰, ۱۵]
B	[۲۵, ۳۰]	[۷۰, ۸۰]	[۲۰, ۲۵]	[۱۵, ۱۸]	[۸۰, ۱۰۰]	[۲۰, ۲۵]
C	[۱۰, ۱۵]	[۴۰, ۵۰]	[۸, ۱۲]	[۵, ۸]	[۴۰, ۵۵]	[۸, ۱۲]
D	[۳۰, ۳۵]	[۹۰, ۱۰۰]	[۲۵, ۳۰]	[۲۰, ۲۵]	[۱۲۰, ۱۵۰]	[۳۰, ۳۵]
E	[۱۸, ۲۲]	[۵۵, ۶۵]	[۱۲, ۱۸]	[۱۰, ۱۴]	[۶۰, ۸۵]	[۱۵, ۲۰]

۵. نتیجه‌گیری

شرکت D که بالاترین میزان سرمایه‌گذاری در فناوری‌های نوین و بیشترین تعداد پتنت را دارد، احتمالاً یکی از کاراترین شرکت‌ها خواهد بود. در مقابل، شرکت C که کمترین میزان سرمایه‌گذاری را دارد و تعداد پتنت‌های آن نیز پایین است، احتمالاً کمترین کارایی را خواهد داشت. شرکت‌های A، B و E در بازه‌ای بین این دو شرکت قرار دارند و بسته به تخصیص بهینه منابع، می‌توانند بهبود عملکرد داشته باشند. اگر نسبت خروجی به ورودی یک شرکت برابر ۱ باشد، آن شرکت کارا است. اگر مقدار نسبت کمتر از ۱ باشد، نشان می‌دهد که شرکت می‌تواند منابع خود را بهینه‌تر تخصیص دهد تا به بهره‌وری بیشتری برسد. تحلیل داده‌های خاکستری به ما کمک می‌کند تا عدم قطعیت موجود در داده‌ها را مدیریت کنیم و نتایج واقعی‌تری از ارزیابی کارایی بگیریم.

مراجع

[1] Lawrence Seifret. Identifying excesses and deficits in chinese industrial productivity (1953-1990): a weighted data envelopment analysis approach. *Omega*, 26(2):229–296, 1994.

[۲] فرشید خمویی، معظمه شکرالله تباآرکتیج، بهرام مؤذنی، و سعید صحت. استفاده از مدل تلفیقی تحلیل پوششی داده‌ها–تصمیم گیری چند شاخصه در ارزیابی کارایی نسبی و رتبه بندی شرکت های بیمه در ایران. *پژوهشنامه* بیمه، سال سی و سوم(شماره ۲):۲۲–۱، ۱۳۹۷. پیاپی ۱۳۰.

[۳] نظری شیر کوهی، سلمان، یعقوبی، امیر، و تقی زاده یزدی، محمدرضا. به کارگیری شبیه سازی گسسته پیشامد و تحلیل پوششی داده ها به منظور بهبود عملکرد اورژانس بیمارستان. *فصلنامه مدیریت صنعتی*، ۱۱(۱):۶۳–۸۲، ۱۳۹۸.

[۴] ناصری اوجاکی، سیدهادی و درویشی سلوکلائی، داود. *رویکردهای عدم قطعیت با تاکید بر نظریه سیستم های خاکستری*. انتشارات دانشگاه مازندران، ۱۳۹۸.

[۵] سیدعلیرضا میرحسینی. ارزیابی عملکرد تامین کنندگان با رویکرد تئوری خاکستری و تحلیل پوششی داده ها (مطالعه موردی: کارخانه کاشی اورست). پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشکده علوم انسانی، موسسه آموزش عالی جهاد دانشگاهی استان یزد، ۱۳۹۱.

[۶] محمود نظریان. تعیین کارایی و رتبه بندی شعب بانک با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده ها (مطالعه موردی: بانک صادرات – شعب غرب تهران). پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشکده مدیریت، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، ۱۳۹۵.

[۷] پژمان پیکانی و عمران محمدی. ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با ساختار شبکه ایی در حضور خروجی نامطلوب. *پژوهش های نوین در ریاضی*، سال پنجم(شماره ۱۷):۱۵۷–۱۶۶، ۱۳۹۸.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، IS–283، صص. ۲۳۹–۲۴۲

مقایسه براوردگرهای گشتاوری و ماکزیمم درستنمایی در توزیع گاما–گاریما

محمد مهدی صابر[آ]، مهرداد تقی‌پور[ب]

[آ]گروه آمار، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران
[ب]گروه آمار، دانشگاه قم، قم، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
توزیع گاریما
گشتاورهای معکوس

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

یک ترکیب از توزیع گاما و گاریما به نام مدل احتمال گاما–گاریما وجود دارد. این توزیع دارای گشتاورهای طبیعی نیست اما گشتاورهای منفی آن وجود دارند. در این حالت برای براورد گشتاوری از گشتاورهای معکوس استفاده می‌کنیم. مقایسه این براوردگرها با براوردگر ماکزیمم درستنمایی نشان می‌دهد که براورد گشتاوری و ماکزیمم درستنمایی در این توزیع کارآیی یکسانی دارند.

مقدمه

روش‌های براوردیابی در آمار، به‌عنوان ابزارهای بنیادین برای استنتاج پارامترهای مدل‌ها و توزیع‌های آماری، نقشی محوری در تحلیل داده‌ها ایفا می‌کنند. این روش‌ها در طول زمان توسعه یافته‌اند و به‌عنوان سنگ بنای مدل‌سازی داده‌های واقعی شناخته می‌شوند. یکی از قدیمی‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها، روش گشتاوری[1] است که توسط کارل پیرسون در قرن نوزدهم معرفی شد. این روش با برابر قرار دادن گشتاورهای نمونه‌ای و گشتاورهای جمعیتی عمل می‌کند و به دلیل سادگی محاسباتی، همچنان در بسیاری از کاربردها مورد استفاده قرار می‌گیرد.
در مقابل، روش درستنمایی ماکزیمم[2] که توسط رونالد فیشر در دهه ۱۹۲۰ مطرح شد، به دلیل خواص مجانبی مطلوبی مانند کارایی و سازگاری، به یکی از روش‌های اصلی در آمار تبدیل شده است. این روش با حداکثرسازی تابع درستنمایی، پارامترهای مدل را به گونه‌ای تخمین می‌زند که احتمال مشاهده داده‌های موجود بیشینه شود. این دو روش – گشتاوری و درستنمایی ماکزیمم – به دلیل سادگی و انعطاف‌پذیری، به‌طور گسترده در تحلیل داده‌ها و مدل‌سازی آماری به کار می‌روند.
ترکیب دو مدل احتمالی، یکی از رویکردهای مؤثر برای ایجاد مدل‌های جدید است که عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های اولیه دارند. به‌عنوان مثال، توزیع‌های نمایی و لیندلی به‌طور گسترده در مدل‌سازی داده‌های طول عمر استفاده شده‌اند. با این حال، مطالعات مقایسه‌ای نشان می‌دهند که هر یک از این توزیع‌ها در برخی کاربردها متفاوت عمل می‌کنند. در برخی موارد، توزیع نمایی و در موارد دیگر توزیع لیندلی برازش بهتری ارائه می‌دهد. نتایج مشابهی در مقایسه توزیع‌های گاما و وایبول نیز مشاهده شده است؛ به‌طوری که این دو توزیع در برخی مجموعه داده‌ها عملکرد ضعیف‌تری دارند.
توزیع‌های آماری نقشی اساسی در مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی در حوزه‌های مختلف مانند بیمه، اقتصاد، مهندسی و علوم پزشکی ایفا می‌کنند. با این حال، توزیع‌های استاندارد معمولاً در برازش دقیق برخی داده‌های واقعی محدودیت دارند، بنابراین نیاز به توسعه توزیع‌های جدید احساس می‌شود. به‌عنوان مثال، شانکر (۲۰۱۶) توزیع گاریما را معرفی کرد که عملکرد بهتری نسبت به توزیع‌های نمایی و لیندلی دارد.

پست الکترونیک : (محمد مهدی صابر)، (مهرداد تقی‌پور)

[1]Method of Moments
[2]Maximum Likelihood Estimation

در جست‌وجوی توزیع‌های نوین، ترکیب توزیع‌ها یکی از روش‌های کارآمد است. ابدی و همکاران (۲۰۱۹) توزیع گاما–لیندلی (G-LD) را معرفی کردند که از ترکیب توزیع گاما و لیندلی به‌دست می‌آید. اخیراً، ری و شانکر (۲۰۲۳) توزیع گاما–شانکر (G-SD) را توسعه دادند که شامل توزیع نمایی–شانکر (E-SD) به‌عنوان حالت خاصی است.
دلایل اصلی برای در نظر گرفتن توزیع گاما–گاریما (G-GD) را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

توضیح تغییرپذیری: اگر طول عمر یک جزء از توزیع گاما پیروی کند و پارامتر مقیاس آن متغیر باشد، این تغییرپذیری با توزیع گاریما قابل توصیف است.

مدل‌سازی ناهمگونی: در شرایط واقعی، اجزای یک جامعه ممکن است از نظر پایداری متفاوت باشند. توزیع‌های ترکیبی مانند G-GD این ناهمگونی را به‌خوبی مدل می‌کنند.

برازش داده‌های دم بلند: توزیع‌های ترکیبی مانند G-GD برای مجموعه‌داده‌های با دم بلند مناسب‌تر هستند.

عملکرد بهتر: انتظار می‌رود توزیع G-GD عملکرد بهتری نسبت به توزیع‌های کلاسیک مانند گاما و وایبول داشته باشد، زیرا توزیع گاریما عملکرد بهتری نسبت به توزیع‌های نمایی و لیندلی ارائه می‌دهد.

در تحلیل توزیع‌های ترکیبی مانند G-GD، روش‌های براوردیابی مانند درستنمایی ماکزیمم و گشتاوری نقشی کلیدی ایفا می‌کنند. به‌عنوان مثال، برای تخمین پارامترهای توزیع G-GD، استفاده از روش درستنمایی ماکزیمم به دلیل خواص مجانبی آن، می‌تواند نتایج دقیق‌تری ارائه دهد. از سوی دیگر، روش گشتاوری به دلیل سادگی محاسباتی، می‌تواند در مواردی که داده‌ها حجیم هستند یا محاسبات پیچیده‌تر ممکن است چالش‌برانگیز باشد، به‌عنوان یک روش جایگزین مفید باشد. به‌طور خلاصه، توزیع گاما–گاریما (G-GD) به‌عنوان یک مدل ترکیبی جدید، پتانسیل بالایی برای بهبود برازش داده‌های طول عمر دارد و می‌تواند در تحلیل داده‌های واقعی در حوزه‌های مختلف کاربردی باشد. استفاده از روش‌های براوردیابی مناسب، مانند درستنمایی ماکزیمم و گشتاوری، به بهینه‌سازی این مدل‌ها و افزایش دقت آن‌ها کمک می‌کند.

۱. مدل احتمال گاما–گاریما

تعریف ۱.۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارمترهای α و λ است اگر تابع چگالی (pdf) آن بصورت زیر باشد:

$$f_X(x\,|\,\alpha,\gamma) = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha))} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, \quad x > 0,\ \alpha,\lambda > 0 \tag{۱}$$

α و λ را بترتیب پارامتر شکل و پارامتر مقیاس می‌گویند.

تعریف ۲.۱. متغیر تصادفی Y دارای توزیع گاریما با پارامتر شکل $\beta > 0$ است اگر تابع چگالی (pdf) آن بصورت زیر باشد:

$$f_Y(y\,|\,\beta) = \frac{\beta}{\beta+2}(1+\beta+\beta y)e^{-\beta y}, \qquad y > 0 \tag{۲}$$

لم ۳.۱. *فرض کنید* $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ *و* $\alpha \sim Garima(\beta)$. *آنگاه تابع چگالی و تابع توزیع حاشیه‌ای* X *بصورت زیر است:*

$$\begin{aligned} f_X(x;\alpha,\beta) &= \int_0^{\infty} f_{X|\lambda}(x) f_{\lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{\alpha\beta[(\beta+x)(1+\beta)+\beta(\alpha+1)]x^{\alpha-1}}{(\beta+2)(\beta+x)^{2+\alpha}}, \qquad x > 0, \alpha, \beta > 0 \end{aligned} \tag{۳}$$

$$F_X(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha}[(\alpha+1)(\beta^2+\alpha\beta+2x+2\beta)+\beta x]}{(\alpha+1)(\beta+2)(\beta+x)^{1+\alpha}}, \qquad x > 0, \alpha, \beta > 0 \tag{۴}$$

در این حالت متغیر تصادفی X *را به‌عنوان توزیع گاما–گاریما* $(G\text{-}GD)$ *تعریف می‌شود و با نماد* $X \sim G\text{-}GD(\alpha,\beta)$ *نشان می‌دهیم.*
تابع چگالی احتمال (pdf) *توزیع گاما–گاریما تک نمایی*[3] *و دارای چولگی مثبت است و همچنین دارای دمی بسیار بلند است.*

[3] unimodal

۲. برآورد ماکزیمم درستنمایی

فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع گاما–گاریما (G-GD) باشند. در این صورت، تابع درست‌نمایی بصورت صورت زیر است:

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta)=\left(\frac{\alpha\beta}{\beta+2}\right)^n \frac{\prod_{i=1}^{n}[(\beta+x_i)(1+\beta)+\beta(\alpha+1)](\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha-1}}{\prod_{i=1}^{n}(\beta+x_i)^{\alpha+2}} \qquad (5)$$

تابع درست‌نمایی لگاریتمی توزیع گاما–گاریما (G-GD) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\ln L(\alpha,\beta)=n\ln\alpha+n\ln\beta-n\ln(\beta+2)+\sum_{i=1}^{n}\ln[(\beta+x_i)(1+\beta)+\beta(\alpha+1)]+$$
$$(\alpha-1)\sum_{i+1}^{n}\ln(x_i)-(\alpha+2)\sum_{i-1}^{n}\ln(\beta+x_i) \qquad (6)$$

برآوردگرهای درست‌نمایی بیشینه (ML) پارامترهای α و β، که به ترتیب با $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان داده می‌شوند، از حل معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{(\beta+x_i)(1+\beta)+\beta(\alpha+1)}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta+x_i)=0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{(\beta+2)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+2\beta+x_i+\alpha)}{(\beta+x_i)(1+\beta)+\beta(\alpha+1)}-(\alpha+2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta+x_i}=0$$

۳. براورد گشتاوری

لم ۱.۳. *اگر* $X\sim G-GD(\alpha,\beta)$ *آنگاه:*

$$E(X^r)=\infty,\qquad r\geq 1.$$

لم ۲.۳. *اگر* $X\sim G-GD(\alpha,\beta)$ *آنگاه:*

$$\mu'_{(-1)}=E(X^{-1})=E(\frac{1}{X})=\frac{(\beta^2+3\beta)}{\beta^2(\beta+2)(\alpha-1)},\qquad \alpha>1$$

$$\mu'_{(-2)}=E(X^{-2})=E(\frac{1}{X^2})=\frac{2(\beta^2+4\beta)}{\beta^3(\beta+2)(\alpha-1)(\alpha-2)},\qquad \alpha>2.$$

با توجه به لم ۱.۳ از آن‌جا یکه همه گشتاورهای مثبت توزیع گاما–گاریما (G-GD) بی‌نهایت هستند، برای برآورد گشتاوری پارمترهای توزیع از گشتاورهای منفی توزیع گاما–گاریما استفاده می‌کنیم.
بنابراین با استفاده از لم ۲.۳ برای $\alpha>2$ می‌توان براوردهای گشتاوری را از حل همزمان دو معادله زیر بدست آورد:

$$\frac{(\beta+3)}{\beta(\beta+2)(\alpha-1)}=\overline{E(\frac{1}{X})}=\overline{E(X^{-1})} \qquad (8)$$

$$\frac{2(\beta+4)}{\beta^2(\beta+2)(\alpha-1)(\alpha-2)}=\overline{E(\frac{1}{X^2})}=\overline{E(X^{-2})} \qquad (9)$$

می‌توان نشان داد که براورد گشتاوری پارامتر β ریشه حقیقی مثبت چند جمله ای زیر می‌باشد:

$$ab\tilde{\beta}^{۳} + (۲a^{۲} + ۵ab - b)\tilde{\beta}^{۲} + (۱۲a^{۲} + ۶ab - ۶b)\tilde{\beta} + ۱۶a^{۲} - ۹b$$

و همچنین براورد گشتاوری پارامتر α سپس از رابطه زیر بدست می‌اید:

$$\tilde{\alpha} = ۱ + \frac{(\tilde{\beta} + ۳)}{\tilde{\beta}(\tilde{\beta} + ۲)a}$$

بطوریکه $a = \overline{E(\frac{۱}{X})}$، $b = \overline{E(\frac{۱}{X^{۲}})}$

۴. مقایسه بین براوردگرهای گشتاوری و ماکزیمم درستنمایی

در این بخش با استفاده از یک مطالعه شبیه سازی به مقایسه براوردگر ماکزیمم درستنمایی و گشتاوری پرداخته ایم. معیارهای مقایسه دو معیار اریبی و میانگین مربعات خطا میباشد. نتایج نشان میدهد که تفاوت بسیار کمی میان این دو براوردگر وجود دارد.
نتایج این مقایسات در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱:

			براوردگر گشتاوری		براوردگر ماکزیمم درستنمایی	
n			اریبی	میانگین مربعات خطا	اریبی	میانگین مربعات خطا
۱۵	α	۱٫۵	۰٫۰۵۲	۰٫۱۳۲	۰٫۰۶	۰٫۱۴۵
	β	۲	۰٫۰۸۱	۰٫۱۷۰	۰٫۰۷۴	۰٫۱۳۶
۲۵	α	۳	۰٫۰۳۵	۰٫۰۹۲	۰٫۰۲۳	۰٫۰۸۵
	β	۱	۰٫۰۴۱	۰٫۱۲۰	۰٫۰۴	۰٫۰۹۱
۵	α	۰٫۷۵	۰٫۲۳۵	۰٫۴۹۲	۰٫۱۶	۰٫۵۱۸
	β	۱٫۴	۰٫۳۶۵	۰٫۵۳۷	۰٫۱۱۳	۰٫۴۵۳

مراجع

[1] Abdi, M., Asgharzadeh, A., Bakouch, H.S. & Alipour, Z. (2019). A new compound Gamma and Lindley distribution with Application to failure data. Austrian Journal of Statistics, 48,54-75.
[2] Chhikara, R.S. & Folks,J.L. (1977). The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model. Technometrics, 19(2), 461-468.
[3] Demicheli, R., Bonadonna, G., Hrushesky, W. J., Retsky, M.W., & Valgussa, P. (2004). Menopausal Status Dependence of the timing of Breast cancer Recurrence after Surgical Removal of the primary Tumour. Breast Cancer Research, 6(6), 689 – 696.
[4] Finkelstein, M. (2008). Failure Rate Modeling for Reliability and Risk. Springer series in Reliability Engineering.
[5] Lie, C.D. & Xie, M. (2006). Stochastic Ageing and Dependence for Reliability. Springer, New York.
[6] Lindley, D.V. (1958). Fiducial Distribution and Bayes' Theorem. Journal of The Royal Statistical Society, 20(1), 102-107.
[7] Proschan, F. (1963). Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate. Technometrics, 5(3), 375 – 383.
[8] Ray, M. & Shanker, R. (2023a). A Compound of Gamma and Shanker Distribution. Reliability Theory and Applications, 18(2), 87-99.
[9] Ray, M. & Shanker, R. (2023b). A Compound of Exponential and Shanker Distribution With an Application, Journal of Scientific Research, 67(4), 39-46.
[10] Shanker, R., Hagos, F. & Sujatha, S. (2015). On Modeling of Lifetimes data using Exponential and Lindley distributions. Biometrics & Biostatistics International Journal, 2(5), 140 -147.
[11] Shanker R. (2016). Garima distribution and its Applications. Biometrics and Biostatistics International Journal, 4(7), 275-281.
[12] Shanker, R., Shukla, K.K., Shanker, R. & Tekie, A.L. (2016). On modelling of Lifetime data using two-parameter gamma and Weibull distributions. Biometrics & Biostatistics International journal, 4(5), 201 – 206.
[13] Shaked, M. & Shanthikumar, J.G. (1994). Stochastic Orders and Their Applications.Academic Press New Work.
[14] Weibull W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. Journal of applied mechanics, 18(3):293–297.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، RP–286، صص. ۱۲۴۳–۱۲۴۴

بررسی میزان درستی تشخیص در گفتار خوانی بر اساس زنجیرهای مارکف پنهان

زهره نیکوروش*

گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
انتروپی نسبی شانون
گفتار خوانی
زنجیر مارکف پنهان

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
60J10

چکیده

در این مقاله، نرخ انتروپی نسبی بین دو فرآیند تصادفی را به عنوان معیاری برای مشخص کردن میزان کارآیی روشهای بازشناسی تصویری گفتار یا گفتار خوانی، ا به کار می بریم. بدین منظور به جای استفاده از روشهای مقایسهای معمول، بازشناسی تصویری گفتار را با مدل مارکف پنهان مدلسازی کرده و بر اساس نرخ انتروپی نسبی بین یک زنجیر مارکف و زنجیر مارکف پنهان متناظر آن، که توسط یک کانال تصادفی ایجاد میشود، عمل میکنیم.

۱. بخش اصلی

هدف از تشخیص گفتار که در متون علمی بیشتر با نام بازشناسی گفتار شناخته شده است، طراحی و پیاده‌سازی سیستمی است که اطلاعات گفتاری را دریافت و متن و فرمان گوینده را استخراج می‌کند. فناوری بازشناسی گفتار به رایانه‌ای که توانایی دریافت صدا را دارد، این قابلیت را می‌دهد که گفتار کاربر را متوجه شود. اما اگر کاربر توانایی ایجاد صدای طبیعی نداشته باشد (به عنوان مثال کاربر ناشنوا) موضوع به لب خوانی یا گفتار خوانی که روشی برای درک سخنان با استفاده از تفسیر بصری حرکات لب‌ها، چهره و زبان است، تغییر پیدا می کند. گفتار و تشخیص آن را می توان با فرآیند مارکف و فرآیند مارکف پنهان توضیح داد. میزان درستی تشخیص در گفتار خوانی برای آزمایش روشهای ابداعی، به طور معمول با محاسبه تعداد خطای به دست آمده در نتایج صورت می پذیرد. در این چکیده پیشنهاد می شود برای میزان درستی تشخیص در گفتار خوانی، بر اساس فرآیند مارکف پنهان، ار نرخ انتروپی نسبی که از رابطه زیر به دست می آید، استفاده شود.

$$D(P_X||P_Y) \quad = E_X \log \frac{P_X(X)}{P_Y(X)}, \qquad D(\mathcal{X}||\mathcal{Y}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N^n} D(P_{X_1^n}||P_{Y_1^n}).$$

ثابت کرده ایم [۱] برای محاسبه رابطه فوق داریم

$$\bar{D}(\mathcal{X}||\mathcal{Y}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S|^n} \bar{D}(P_{X_1^n}||P_{Y_1^n}) = \frac{\alpha}{N(N-1)}, \qquad \alpha = N\log N + \sum_{s_1^2 \in S^2} P_{X_2|X_1}(s_2|s_1)\log P_{X_2|X_1}(s_2|s_1).$$

که N تعداد اعضای فضای نمونه S در تعریف آزمایشها است. همچنین X نشان دهنده زنجیر مارکف و Y نشان دهنده زنجیر مارکف پنهان است. به عنوان مثال در [۲] آزمایشی طرح شده که نتایج آن را با نرخ انتروپی نسبی ارزیابی کرده ایم.

*سخنران
پست الکترونیک : nikooravesh@birjandut.ac.ir (زهره نیکوروش)

مراجع

[1] GH. Yari and Z. Nikooravesh. Relative entropy rate between a markov chain and its corresponding hidden markov chain. *J. Statist. Res. Iran*, 8(1):97–109, 2011.

[۲] رضا شالباف، منصور وفادوست و احمد شالباف. بازشناسي ديداري گفتار با استفاده از مدلهاي شكل فعال و مدلهاي مخفي ماركوف. *چهارمین کنفرانس ماشین بینایی و پردازش تصویر*، صفحات ۲۵–۲۶، ۱۳۸۵.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، IS–288، صص. ۲۴۵–۲۴۸

مواجهه با یک مشکل در طرح آزمایش ها: نیاز به مقایسه دو تیمار مستقل بدون داشتن تیمار دوم

محمدمهدی صابر*[آ]، مهرداد تقی پور[ب]

[آ]گروه آمار مرکز آموزش عالی اقلید
[ب]گروه آمار دانشگاه قم

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
طرح آزمایشهای آماری
آزمون مقایسه دو جامعه
آزمون تی مستقل
بتن تیپ ۲

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
62P30
62J12
62F03

چکیده

در این مقاله یک روش جدید جهت مقایسه دو تیمار زمانی که یکی از تیمارها موجود نیست ارایه شده است. در یک پژوهش جهت یافتن مدل بهینه ساخت بتن براساس میزان نیاز به سیمان، این مشکل بوجود آمده است.

۱. مقدمه

طرح آزمایشات آماری از مباحث بسیار مهم و کاربردی در علم آمار می باشد. بطورکه سایر علوم از این مبحث برای انجام تحقیقات خود استفاده زیادی می کنند. برای آشنایی با این مبحث می توان به [۱]
مراجعه نمود.برای انجام هر نوع پروژه ساخت و ساز نیاز به استفاده از یک سری مواد، مصالح و تجهیزات است که ملات یکی از مهمترین آن ها می باشد. تحقیقات بسیاری درمورد استفاده سیمان در ساخت بتن و میزان استفاده از سیمان بصورت بهینه در حوزه مهندسی ساخت وساز صورت گرفته که برای نمونه می توان به مراجع [۲] و [۳] مراجعه نمود. اما بصورت روشهای آماری، پژوهشی انجام نگرفته. در این مقاله از حوزه طرح ازمایشات به این مساله نگاه می کنیم. هر ملات عموما ترکیبی از میزان مشخصی سیمان و میزان مشخصی ماسه است. میزان ترکیب سیمان و ماسه در ملات، تیپ های ۱، ۲، ۳ و ۴ را تشکیل می دهد. نسبت سیمان در این چهار تیپ ملات به ترتیب یک به سه، یک به چهار، یک به پنج و یک به شش می باشد. این چهار تیپ ملات در موارد خاص بکار برده می شوند. هدف این پژوهش بررسی امکان کاهش مقدار سیمان در بتن تیپ ۲ جهت کاهش هزینه با حفظ حداقل ۹۵ درصد مقاومت قبلیست. با توجه به قیمت بالای سیمان و همچنین میزان بالای استفاده از بتن در پروژه های عمرانی مانند ساخت سد ، پل، منبع آب و ساختمان سازی و...مثبت بودن نتیجه این تحقیق می تواند باعث کاهش بسیار زیاد هزینه ها شود. تاکنون از روش های آماری جهت بررسی امکان کاهش میزان سیمان در بتن استفاده نشده است. از این رو این پژوهش پیشینه تحقیقی جهت گزارش ندارد.

*سخنران
پست الکترونیک : first.author@gmail.com (محمدمهدی صابر)، second.author@gmail.com (مهرداد تقی پور)

۲. روش انجام کار

ابتدا توجه کنید که در فرضیه این پژوهش دقیقا گفته نشده است که آیا کاهش میزان مشخصی از سیمان در ساخت بتن منجر به ثابت ماندن مقاومت بتن با اطمینان ۹۵ درصد می شود. در واقع میزان کاهش سیمان به میزان است، در این سوال مشخص نیست.
جهت بهتر مشخص شدن شیوه کار ابتدا توضیح خواهیم داد که اگر میزان کاهش سیمان دقیقا مشخص بود چگونه بایستی عمل کرد. در این حالت با یک مساله طرح آزمایشات از نوع مقایسه دو تیمار مستقل یا وابسته مواجه خواهیم بود. بدلایلی که در طول پژوهش و در ادامه توضیح خواهیم داد ما شرایط جمع آوری مشاهدات را بگونه ای انجام خواهیم داد که بتوانیم دو تیمار مستقل را در نظر بگیریم.

۲. ۱. *آزمون مقایسه دو جامعه مستقل*

آزمون مقایسه میانگین دو جامعه مستقل، یکی از آزمون های پر کاربرد در تحلیل های آماری است. به کمک این آزمون، می توانیم میانگین دو جامعه مستقل را با هم مقایسه کرده و نسبت به تفاوت آماری آن ها، تصمیم بگیریم. مقایسه دو جامعه مستقل با توجه به شرایط دو جامعه به یکی از سه روش زیر انجام می پذیرد. الف. زمانی که داده های جوامع از توزیع نرمال پیروی کنند یا تعداد داده ها در هر کدام از جوامع حداقل ۲۵ باشد، آزمون پارامتری مورداستفاده می گیرد. در این حالت اگر واریانس دو جامعه برابر باشند، آماره تی برای مقایسه میانگین دو جامعه، مناسب است. آزمون مورد استفاده در این حالت آزمون تی مستقل نام دارد. ب. زمانی که داده های جوامع از توزیع نرمال پیروی کنند یا تعداد داده ها در هر کدام از جوامع حداقل ۲۵ باشد، اما واریانس دو جامعه برابر نباشند، هر چند با یک مساله پارامتری سر و کار داریم اما نمیتوان از آزمون تی مستقل استفاده نمود. ج. زمانی که داده های حداقل یکی از جوامع نه از توزیع نرمال پیروی کنند و نه تعداد آن ها به ۲۵ برسد، در این حالت بهتر است از آزمون های ناپارامتری مشابه مانند آزمون من ـ ویتنی Whitney-Mann) (یا معادل آن آزمون رتبه ای نشانه ای ویلکاکسون استفاده کنیم. از آنجاییکه در این پژوهش تعداد مشاهدات در هر تیمار از ۲۵ بیشتر است بدون نیاز به بررسی فرض نرمال بودن داده ها از یکی از حالتهای الف یا ب استفاده خواهیم کرد.

۲. ۲. *مشکل اصلی در انجام پژوهش*

بررسی فرضیه این پژوهش نیازمند این است که دو تیمار در اختیار داشته باشیم و سپس آزمون برابری میانگینهای دو تیمار را انجام دهیم. اما در اینجا تنها یکی از تیمارها، یعنی تیماری که بتن آن بدون کاهش سیمان ساخته شده است را در اختیار داریم. در واقع ما اطلاعی از اینکه کاهش سیمان چقدر میتواند باشد نداریم و بدون داشتن آن قادر به تهیه داده از تیمار دیگر نیستیم. ابتدا با چندین آزمون و خطا و صرف زمان زیاد، چند بار داده های تیمار دوم تهیه شدند اما در نهایت نتایج مطلوب حاصل نگردید.

۳. راهکار رفع مشکل

برای یافتن تیماری که قرار است بعدا مورد آزمون قرار گیرد ما از شیوه ی انجام آزمون تی مستقل، آماره آزمون و همچنین ناحیه بحرانی آن به شکل معکوس استفاده می کنیم. فرض کنید تیماری که داده های آن را در اختیار داریم دارای میانگین μ_1 و تیماری که داده های آن موجود نیستند دارای میانگین μ_2 باشد.
فرض اولیه و فرض مقابل در این آزمون بصورت زیر است:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_2 < \mu_1 \quad (1)$$

اگر فرض اولیه یعنی H_0 رد شود آن گاه کاهش میزان سیمان در بتن منجر به کاهش مقاومت بتن گردیده است. پس باید بدنبال یافتن شرایطی باشیم که فرض H_0 را تایید کند. در صورتی فرض H_0 تایید میگردد که در ناحیه زیر معروف به ناحیه پذیرش قرار بگیریم:

$$A.R = t > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) \quad (2)$$

بطوریکه:

$$t = \frac{\bar{x_2} - \bar{x_1}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}} \quad (3)$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 1} \quad (4)$$

همچنین n_1 و n_2 به ترتیب تعداد نمونه‌های گرفته شده در تیمارهای اول و دوم، $\bar{x_1}$ و $\bar{x_2}$ به ترتیب میانگین مقاومت بتن در تیمارهای اول و دوم و S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس مقاومت بتن در تیمارهای اول و دوم می‌باشد. هدف ما این است که از حل رابطه (۲)است:مقدار x_2 را مشخص کنیم اما S_2^2 و n_2 نیز مجهول هستند. فرض اینکه واریانس دو گروه و تعداد داده‌ها در دو تیمار برابر هستند را در نظر می‌گیریم. بعبارت دیگر

$$n_1 = n_2 = n, \qquad S_1^2 = S_2^2 = S^2.$$

با این فرضیات روابط (۳) و (۴) به‌صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$t = \frac{\bar{x_2} - \bar{x_1}}{S_p\sqrt{\frac{2}{n}}} \tag{۵}$$

و

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S^2 + (n-1)S^2}{2n-2} = S^2 \tag{۶}$$

با قرار دادن رابطه‌های فوق در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{\bar{x_2} - \bar{x_1}}{S_p\sqrt{\frac{2}{n}}} > t_\alpha(2n-2) \tag{۷}$$

تا جایی که فرض H_0 رد نشود برای ما مناسب است.

$$\bar{x_2} > \bar{x_1} + S\sqrt{\frac{2}{n}}t_\alpha(2n-2) \tag{۸}$$

مقدار متداول برای α را ۰/۰۱ و ۰/۰۵ و ۰/۱ در نظر می‌گیرند. در این پژوهش ما مقدار ۰/۰۵ را برای α در نظر می‌گیریم که نشان از اطمینان ۹۵ درصدی در نتایج را دارد. توجه شود که $t_{0/05}(2n-2)$ برای هر مقدار n مقداری منفی است، یعنی اگر حداکثر به اندازه

$$S\sqrt{\frac{2}{n}}t_{0/05}(2n-2) \tag{۹}$$

از میانگین مقاومت بتن‌های جدید کاهش یابد با اطمینان ۹۵ درصد مقاومت بتن کاهش نیافته است. حال در این پژوهش با تعداد ۹۴ داده و $S = 43/32$مقدار رابطه (۹) برابر با $-10/45$ می‌باشد.
همان طور که در ابتدا گفته شد، در بتن تیپ ۲ با استفاده از نسبت یک به چهار سیمان به ماسه یعنی ۲۰ درصد سیمان از مجموع سیمان و بتن استفاده می‌شود. با توجه به اینکه با ۲۰ درصد سیمان میانگین مقاومت بتن $\bar{x_1} = 277/04$ بوده است. پس $\bar{x_2}$ حداقل باید

$$\bar{x_2} > 277/04 - 10/45 = 266/59$$

باشد.
با در نظر گرفتن تناسب خطی بصورت زیر داریم:

مقاومت بتن	درصد سیمان
۲۷۷/۰۴	۲۰
۲۶۶/۵۹	؟

جدول شماره ۱

با توجه به جدول ۱، میتوان گفت درصد مطلوب برای رسیدن به مقاومت برابر با ۲۰ درصد سیمان، ۱۹/۲۵ درصد می‌باشد.

۴. نتیجه گیری

این پژوهش با ارائه رویکردی نوآورانه که در آن ناحیه پذیرش فرض صفر در آزمون تی مستقل معکوس شد، مشکل عدم دسترسی به داده‌های مستقیم در تیمار دوم (بتن با کاهش سیمان) را حل کرد و زمینه‌ای نوین برای بهینه‌سازی مواد اولیه در صنعت ساخت‌وساز ایجاد نمود. این رویکرد نه تنها موفق به کاهش مصرف سیمان تا ۲۵/۱۹ درصد شد، بلکه مقاومت بتن را در حد ۹۵ درصد مقاومت اولیه (معادل ۵۹/۲۶۶) حفظ کرد. استفاده از آزمون تی مستقل به‌عنوان ابزاری کلیدی در مقایسه میانگین دو جامعه مستقل، همراه با معکوس‌سازی ناحیه پذیرش فرض صفر، یک روش خلاقانه برای حل چالش‌های داده‌محور بود که قابلیت تعمیم به سایر زمینه‌های تحقیقاتی را دارد. این یافته‌ها مؤید این موضوع هستند که حتی کاهش اندک در میزان سیمان نیز می‌تواند به نتایج مطلوب در حوزه مقاومت بتن منجر شود و هزینه‌های پروژه‌های عمرانی را کاهش دهد. در نهایت، این رویکرد نه تنها از لحاظ اقتصادی مقرون‌به‌صرفه است، بلکه استانداردهای کیفیت را نیز حفظ می‌کند و می‌تواند الگویی برای پژوهش‌های آینده در بهینه‌سازی مواد اولیه و پیشرفت صنعت ساخت‌وساز باشد. بطور خلاصه، رویکرد نوآورانه معکوس‌سازی ناحیه پذیرش فرض صفر در آزمون تی مستقل، مشکل کاهش سیمان در بتن را حل کرد و زمینه‌ای نوین برای بهینه‌سازی اقتصادی و کیفی مواد اولیه در صنعت ساخت‌وساز ایجاد نمود.

مراجع

[۱] مونتگمری، داگلاس (۱۳۹۵). طراحی و تحلیل آزمایشها، ترجمه: کحازاده، عباس، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
[۲] احمدیان، رضا – فریدزاد، علی. (۱۳۸۷) . بررسی مزیت نسبی سیمان: مطالعه موردی سیمان بهبهان. مدلسازی اقتصادی؛ دوره ۲ شماره ۱ صفحات ۱۶۲ -۱۴۳.
[۳] حمزه فلاح .کاهش مصرف سیمان در بتن با روش های نوین؛ اولین کنفرانس بین المللی پژوهش در آب، فاضلاب و مهندسی رودخانه.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، ED–292، صص. ۲۴۹–۲۵۲

بررسی روش تدریس فعال معلم در میزان و تثبیت درک دانش‌آموزان از مبحث مثلثات

نعیمه حلمی سیاسی فریمانی*[آ]، مریم نادری پاریزی[ب]

[آ]دانشجوی کارشناس ارشد رشته آموزش ریاضی ، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۴۱۱۷ - ۷۶۱۶۹، کرمان ، ایران
[ب]استادیارگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷ - ۱۹۳۹۵، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
روش تدریس
میزان وتثبیت درک دانش‌آموزان
مبحث مثلثات
شناسایی اشتباهات فراگیران

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
97D30
97D40
97D70

چکیده

این مقاله به بررسی تأثیر روش‌های تدریس فعال معلم بر میزان درک و تثبیت یادگیری دانش‌آموزان می‌پردازد. روش‌های تدریس فعال، دانش‌آموزان را به مشارکت فعال در فرآیند یادگیری تشویق می‌کنند و نقش معلم را از سخنران صرف به تسهیل‌گر و راهنما تغییر می‌دهند. در این مقاله، ابتدا به تعریف و تبیین روش‌های تدریس فعال پرداخته می‌شود و سپس مزایای استفاده از این روش‌ها در افزایش درک و تثبیت یادگیری دانش‌آموزان مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، مراحل اجرای روش‌های تدریس فعال در تدریس مبحث مثلثات و راهکارهای عملی برای دانش‌آموزان و معلمان اشاره می‌شود. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های تدریس فعال، تأثیر مثبتی بر میزان درک و تثبیت یادگیری دانش‌آموزان دارد. این روش‌ها باعث افزایش انگیزه، مشارکت و تعامل دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری می‌شوند و به آن‌ها کمک می‌کنند تا مفاهیم را عمیق‌تر و پایدارتر درک کنند. در نهایت، مقاله به ارائه پیشنهاداتی برای دانش‌آموزان، معلمان و مسئولان آموزشی در جهت استفاده مؤثر از روش‌های تدریس فعال در کلاس‌های درس می‌پردازد.

۱. مقدمه

مبحث مثلثات یکی از مباحث مهم و پایه ای در ریاضیات است که در بسیاری از رشته‌های علمی و کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این حال، این مبحث برای بسیاری از دانش‌آموزان دشوار و چالش برانگیز است. یکی از عوامل موثر در یادگیری این مبحث، روش تدریس معلم است. روش تدریس معلم‌ها بسیار اهمیت دارد چون روش می‌تواند باعث شکوفایی استعدادهای شاگردان شود و یا برعکس فرصت یادگیری شان را از بین ببرد. کارپنتر [1] (۲۰۰۳)، معتقد است که "زمانی که بر یادگیری دانش‌آموز تمرکز می‌کنیم، نقش معلم در مقایسه با نقش او در روش‌های تدریس سنتی و انتقالی، غیرمستقیم‌ترو مشکل‌تر می‌شود. با تمرکز به افکار دانش‌آموزان به جای تمرکز بر جوابهای صحیح، معلم‌ها قادرخواهند بود فرایندهای تفکر را تشویق و تقویت‌کنند، فرایندهایی که در غیر این صورت نادیده گرفته می‌شوند".(سپیده چمن آرا، ۱۳۸٤)
در این پژوهش، روش تدریس فعال معلم در مبحث مثلثات برای دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم رشته تجربی شهر فریمان بررسی شده است. همچنین، اشتباهات دانش‌آموزان در مبحث مثلثات شناسایی و تحلیل شده، سپس راهکارهای مناسب برای رفع این اشتباهات ارائه شده است.

*سخنران
پست الکترونیک : hlmi3218@gmail.com (نعیمه حلمی سیاسی فریمانی)، M.Naderi.Parizi@pnu.ac.ir (مریم نادری پاریزی)

[1]Carpenter

۲. روش تدریس فعال

روش تدریس فعال، روشی است که در آن دانش‌آموزان به طور فعال در فرایند یادگیری شرکت می‌کنند و نقش محوری را ایفا می‌کنند. در این روش، معلم به جای ارائه مستقیم مطالب، دانش‌آموزان را به تفکر، پرسش، بحث و تبادل نظر تشویق می‌کند. این امر باعث می‌شود که دانش‌آموزان عمیق‌تر و پایدارتر مطالب را یاد بگیرند. پروفسورگیج [۲] (۱۹۷۸)، استاد بزرگ تعلیم وتربیت، درکتابی با عنوان "مبانی علمی هنر تدریس" گفته است: بدون شک فقط معلم می‌تواند تاثیر بیشتری بر آنچه در مدارس می‌گذرد، داشته باشد. معلم می‌تواند تعلیم و تربیت را فرایندی همراه با لذت و کامیابی،یا فرایندی بی‌ثمرکند. (گیج، ترجمه مهرمحمدی، ۱۳۷۹) موفقیت نظام‌های آموزشی تا حد معینی به دانش و مهارت‌های حرفه‌ای معلم بستگی دارد.

۳. مبانی نظری روش تدریس فعال

روش تدریس فعال ریشه در نظریه‌های یادگیری ساخت‌گرا و شناختی دارد. در این نظریه‌ها، یادگیری به عنوان یک فرایند فعال و سازنده در نظر گرفته می‌شود که در آن دانش‌آموزان با استفاده از تجربیات قبلی خود و تعامل با محیط، دانش جدید را می‌سازند. روش تدریس فعال با فراهم کردن فرصت های یادگیری فعال برای دانش‌آموزان، به آنها کمک می‌کند تا عمیق‌تر و پایدارتر مطالب را یاد بگیرند.

۴. مراحل اجرای روش تدریس فعال در مبحث مثلثات

طرح درس: معلم باید قبل از تدریس، طرح درس مناسبی را برای مبحث مثلثات تهیه کند. در این طرح درس، اهداف آموزشی، فعالیت‌های یادگیری، روش‌های ارزشیابی و منابع مورد نیاز مشخص می‌شود.

ایجاد انگیزه: معلم باید در ابتدای کلاس، با استفاده از روش‌های مختلف، انگیزه دانش‌آموزان را برای یادگیری مبحث مثلثات افزایش دهد. برای مثال، می‌توان از مثال‌های کاربردی از زندگی واقعی، طرح سوالات چالش برانگیز یا نمایش فیلم‌های آموزشی استفاده کرد.

فعالیت‌های یادگیری: معلم باید در طول کلاس، فعالیت‌های یادگیری متنوعی را برای دانش‌آموزان طراحی کند. این فعالیت‌ها می‌تواند شامل بحث گروهی، حل مسئله، انجام آزمایش، تهیه گزارش و ارائه مطلب باشد.

ارزشیابی: معلم باید به طور مداوم، میزان یادگیری دانش‌آموزان را از طریق روش‌های مختلف ارزشیابی کند. این ارزشیابی می‌تواند شامل پرسش‌های کتبی، پرسش‌های شفاهی، بررسی تکالیف و پروژه‌ها باشد.

بازخورد: معلم باید پس از هر ارزشیابی، به دانش‌آموزان بازخورد مناسبی ارائه دهد. این بازخورد باید شامل نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان و راهکارهای بهبود آنها باشد.

۵. راهکارهای عملی برای معلمان

استفاده از مثال‌های عینی و ملموس: در تدریس مفاهیم مثلثاتی، از مثال‌های عینی و ملموس که در زندگی روزمره دانش‌آموزان وجود دارد، استفاده کنید. برای مثال، می‌توانید از ساختمان‌ها، پل‌ها، ساعت‌ها و سایر اشیاء برای توضیح مفاهیم زاویه، مثلث و نسبت های مثلثاتی استفاده کنید. کثیری (۱۳۸۸) در پژوهش بررسی مثال‌ها و نقش آن در یادگیری ریاضی، به ارائه چند توصیه آموزشی برای معلمان ریاضی می‌پردازد.

– توجه به تولید مثال می‌تواند در ایجاد یادگیری مفهومی بسیار موثرباشد، به این‌منظور معلم باید از دانش‌آموزان بخواهد تا سعی کنند مثال‌هایی راجع به مفاهیم مورد بحث توسط خودشان تولید کنند.

– توجه به ارائه مثال در فرایندهای آموزشی بسیار حائز اهمیت است. ارائه‌ی مثال‌های خوب توسط معلم در درک مفاهیم ریاضی بسیار موثراست.

استفاده از تصاویر و نمودارها: تصاویر و نمودارها ابزارهای بسیار مفیدی برای تجسم مفاهیم مثلثاتی هستند. از این ابزارها برای توضیح مفاهیم پایه‌ای، نمایش روابط بین نسبت های مثلثاتی و حل مسائل استفاده کنید.

استفاده از فناوری‌های آموزشی: از نرم‌افزارهای آموزشی، فیلم‌های آموزشی و پلتفرم‌های آنلاین برای تدریس و یادگیری مبحث مثلثات استفاده کنید. این ابزارها می‌توانند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم به صورت تعاملی و جذاب کمک کنند.

ایجاد فضای تعاملی درکلاس: در کلاس درس، فضای تعاملی ایجاد کنید و دانش‌آموزان را به پرسش، بحث و تبادل نظر تشویق کنید. این امر باعث می‌شود که دانش‌آموزان به طور فعال در فرایند یادگیری شرکت کنند و عمیق‌تر مطالب را یاد بگیرند.

ارائه بازخورد مستمر: به طور مداوم، میزان یادگیری دانش‌آموزان را از طریق روش‌های مختلف ارزشیابی کنید و به آنها بازخورد مناسب ارائه دهید. این بازخورد باید شامل نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان و راهکارهای بهبود آنها باشد.

توجه به تفاوت‌های فردی: به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان توجه کنید و راهکارهای مناسب برای رفع مشکلات هر دانش‌آموز ارائه دهید.

برخی از دانش‌آموزان ممکن است نیاز به زمان بیشتری برای یادگیری مفاهیم داشته باشند، در حالی که برخی دیگر ممکن است نیاز به تمرین‌های بیشتر برای تسلط بر مسائل داشته باشند.

[2] Gage

۶. شناسایی اشتباهات دانش‌آموزان

یکی از راه‌های موثر برای بهبود یادگیری دانش‌آموزان، شناسایی و تحلیل اشتباهات آنهاست. با شناسایی اشتباهات دانش‌آموزان، معلم می‌تواند نقاط ضعف آنها را شناسایی و راهکارهای مناسب برای رفع آنها ارائه دهد. همچنین، دانش‌آموزان نیز با آگاهی از اشتباهات خود، می‌توانند تلاش بیشتری برای یادگیری مطالب داشته باشند.

۷. اشتباه‌های رایج دانش‌آموزان در مبحث مثلثات

عدم درک مفاهیم پایه: بسیاری از دانش‌آموزان در درک مفاهیم پایه‌ای مثلثات مانند سینوس،کسینوس، تانژانت، زاویه، مثلث قائم الزاویه و دایره مثلثاتی مشکل دارند.
فرمول‌های پیچیده: فرمول‌های مثلثاتی برای بسیاری از دانش‌آموزان پیچیده و دشوار به نظر می‌رسند.
کاربرد در مسائل: دانش‌آموزان در کاربرد فرمول‌های مثلثاتی در حل مسائل مختلف مشکل دارند.
اشتباهات محاسباتی: بسیاری از دانش‌آموزان در محاسبات مثلثاتی دچار اشتباه می‌شوند.

۸. راهکارهایی برای رفع اشتباهات دانش‌آموزان

تدریس مفهومی: معلم باید مفاهیم پایه‌ای مثلثات را به صورت مفهومی و با استفاده از مثال‌های عینی و ملموس برای دانش‌آموزان توضیح دهد.
استفاده از روش‌های متنوع: معلم باید از روش‌های تدریس متنوعی مانند روش پرسش و پاسخ، روش بحث گروهی، روش حل مسئله و روش آزمایش برای تدریس مثلثات استفاده کند.
ارائه تمرین‌های متنوع: معلم باید تمرین‌های متنوعی را در سطوح مختلف برای دانش‌آموزان ارائه دهد تا آنها بتوانند مهارت خود را در حل مسائل مثلثاتی افزایش دهند.
استفاده از ابزارهای کمک آموزشی: معلم می‌تواند از ابزارهای کمک آموزشی مانند نرم‌افزارهای آموزشی، فیلم‌های آموزشی و نمودارهای تعاملی برای تدریس مثلثات استفاده کند.

۹. راهکارهای عملی برای دانش‌آموزان

مرور مفاهیم پایه‌ای: قبل از شروع مبحث مثلثات، مفاهیم پایه‌ای ریاضی مانند زاویه، مثلث، اعداد اعشاری و محاسبات جبری را مرور کنید.
یادگیری فعال: در کلاس درس به طور فعال در فرایند یادگیری شرکت کنید و سوالات خود را از معلم بپرسید.
مطالعه منظم: به طور منظم مطالب درسی را مطالعه کنید و تمرین‌های مربوطه را حل کنید.
استفاده از منابع کمک آموزشی: از منابع کمک آموزشی مانند کتاب‌های کمک درسی، نرم افزارهای آموزشی و فیلم‌های آموزشی برای یادگیری بیشتر استفاده کنید.
حل تمرین‌های متنوع: تمرین‌های متنوعی را در سطوح مختلف حل کنید تا مهارت خود را در حل مسائل مثلثاتی افزایش دهید.
همکاری با همکلاسی‌ها: با همکلاسی‌های خود در مورد مسائل درسی بحث و تبادل‌نظر کنید. این امر می‌تواند به شما در یادگیری بهتر مطالب کمک کند.
استفاده از اینترنت: از اینترنت برای جستجوی اطلاعات بیشتر در مورد مبحث مثلثات و حل مسائل آن استفاده کنید.

۱۰. پیشنهادها برای معلمان و مسئولان آموزشی

با توجه به نتایج این مطالعه، پیشنهاد می‌شود که معلمان ریاضی در تدریس مبحث مثلثات، از روش تدریس فعال استفاده کنند و به شناسایی و تحلیل اشتباهات دانش‌آموزان توجه ویژه داشته باشند.
برگزاری کارگاه‌های آموزشی برای معلمان ریاضی جهت آشنایی با روش‌های تدریس فعال و نحوه شناسایی و رفع اشتباهات دانش‌آموزان در مبحث مثلثات.
انجام پژوهش‌های بیشتر در زمینه بررسی تاثیر روش‌های تدریس فعال بر یادگیری دانش‌آموزان در سایر مباحث ریاضی.
تهیه و توزیع بسته‌های آموزشی شامل طرح درس‌های فعال، فعالیت‌های یادگیری متنوع و نمونه سوالات امتحانی برای مبحث مثلثات.
استفاده از فناوری‌های نوین آموزشی مانند نرم افزارهای آموزشی و پلتفرم‌های آنلاین برای تدریس و یادگیری مبحث مثلثات.
استفاده از نرم افزار، تجربه‌های فرد را نسبت به مسئله عمیق‌تر می‌کند. دانش‌آموز می‌تواند در زمان روبرو شدن با مسئله‌های مناسب و دیدن حالت‌های متفاوت برای یک مسئله به این باور برسد که قبل از اینکه جواب نهایی بدهد، باید درمورد مسئله تامل و تفکر بیشتری داشته باشد. (فاطمه فرمهر، ۱۳۸۷)

۱۱. پیشنهادها برای دانش‌آموزان

استفاده از بازی‌های آموزشی: استفاده از بازی‌های آموزشی مرتبط با مبحث مثلثات می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم به صورت جذاب و سرگرم‌کننده کمک کند. برای مثال، می‌توان از بازی‌های‌کارتی، بازی‌های رومیزی و بازی‌های ویدئویی که مفاهیم مثلثاتی را به چالش می‌کشند، استفاده کرد.
تهیه و توزیع جزوات آموزشی: تهیه و توزیع جزوات آموزشی شامل خلاصه مطالب، نمونه سوالات و پاسخنامه تشریحی می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مستقل کمک کند. این جزوات می‌توانند به عنوان یک منبع مرجع برای دانش‌آموزان در طول سال تحصیلی و همچنین در زمان آمادگی برای امتحانات مورد استفاده قرار گیرند.
استفاده از فناوری‌های نوین آموزشی: استفاده از فناوری‌های نوین آموزشی مانند نرم‌افزارهای آموزشی، پلتفرم‌های آنلاین و واقعیت مجازی می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم مثلثاتی به صورت تعاملی و جذاب کمک کند. این ابزارها می‌توانند به دانش‌آموزان در تجسم مفاهیم، حل مسائل و دریافت بازخورد فوری کمک کنند.
برگزاری کارگاه‌های آموزشی برای دانش‌آموزان: برگزاری کارگاه‌های آموزشی برای دانش‌آموزان جهت آشنایی با روش‌های مطالعه صحیح، نحوه حل مسئله و مدیریت زمان می‌تواند به آنها در یادگیری بهتر مبحث مثلثات کمک کند. در این کارگاه‌ها، می‌توان به دانش‌آموزان در مورد نحوه برنامه‌ریزی برای مطالعه، نحوه یادداشت‌برداری، نحوه حل مسائل پیچیده و نحوه مدیریت استرس در زمان امتحانات آموزش داد.
ایجاد گروه‌های مطالعه: ایجاد گروه‌های مطالعه برای دانش‌آموزان می‌تواند به آنها در یادگیری بهتر مبحث مثلثات کمک کند. در این گروه‌ها، دانش‌آموزان می‌توانند با یکدیگر در مورد مسائل درسی بحث و تبادل نظر کنند و به یکدیگر در حل مشکلات کمک کنند.

۱۲. جمع‌بندی

روش تدریس فعال معلم، با تأکید بر مشارکت فعال دانش‌آموزان در فرایند یادگیری، می‌تواند به بهبود درک و تثبیت مفاهیم مثلثاتی در دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم رشته تجربی شهر فریمان و سایر دانش‌آموزان کمک کند. شناسایی و تحلیل اشتباهات رایج دانش‌آموزان در این مبحث و ارائه راهکارهای مناسب برای رفع آنها، از جمله نکات کلیدی در این راستا است. با اجرای راهکارهای عملی ارائه شده برای معلمان و دانش‌آموزان و توجه به پیشنهادات تکمیلی، می‌توان به بهبود یادگیری مبحث مثلثات و در نتیجه افزایش موفقیت دانش‌آموزان در این درس مهم کمک کرد.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، GC–297، صص. ۲۵۳–۲۵۹

برخی از روابط عددی بین درآیه های مثلث خیام پاسکال

بهزاد صالحیان متی کلایی *،آ

آدانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
ضرایب دوجمله ای
اتحادهای ترکیبیاتی
مثلث خیام – پاسکال

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
05A10
11B05
11B65

چکیده

در بین اعداد مشهور ضرایب دوجمله ای جایگاه خاص خودشان را دارند.در واقع ضرایب دوجمله ای، از آن دسته از اعدادی هستند که مطالعات فراوانی در باره آنها انجام شده است و حجم زیادی از مساله های ریاضیات ترکیبیاتی وابسته به محاسبات مربوط به این اعداد می باشند. در اکثر کتاب های مر بوط به تر کیبیات برای بررسی ویژگی های این اعداد فصل های مفصل و مستقلی را به آن ها تخصیص می دهند. از ویژگی های مهم این دسته از اعداد انعطاف پذیری آنها در محاسبات و شکل پذیری ساده و تبدیل شوندگی متنوع آنها می باشد که این اعداد را برای ریاضی دانان جذاب کرده است.همه این ها نشانه هایی از درجه اهمیت این دسته از اعداد را دارند.ظاهر ساده و مفهوم قابل درک این اعداد نوید وجود بیشمار مساله جالب و جذاب در سطوح مختلفی از سختی را دارند. در این مقاله ابتدا با بررسی تاریخچه شکل گیری این اعداد در نقاط مختلف جهان، برخی از ویژگی های مهم ضرایب دوجمله ای را بررسی می کنیم و سپس مساله جالبی از آن را مطرح و حل خواهیم کرد.

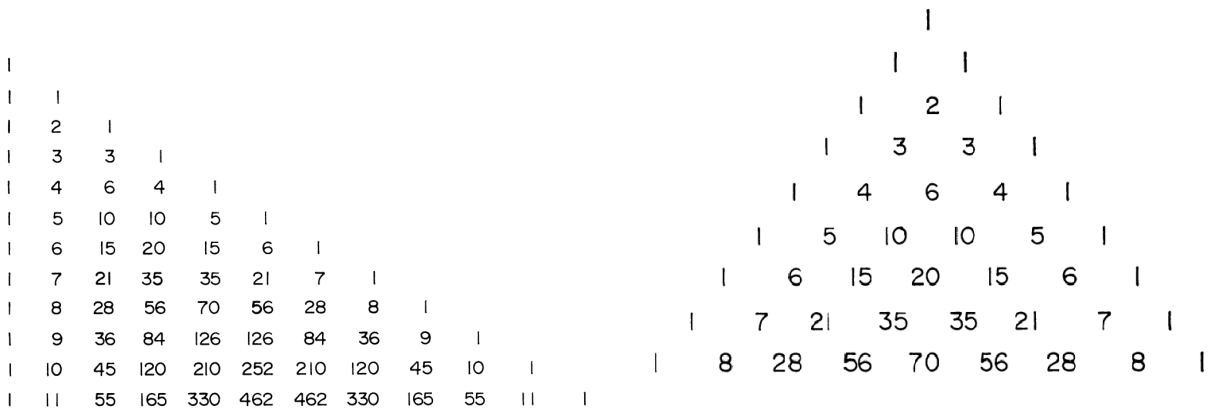
۱. مقدمه

الگوهای عددی در آرایه های عددی همواره می توانند، منبعی عالی از مساله هایی برای جلب توجه دانش آموزان و دانشجویان باشند. این نوع مسایل، می توانند موجب تحریک انگیزه دانشجویان برای تسلط بر انجام عملیات بنیادی درریاضیات بشوند. یکی از معروفترین این آرایه ها مثلث خیام پاسکال نام دارد. همانطور که از نامش پیداست، این یک آرایه عددی به صورت مثلث است. بخشی از این مثلثها را در شکل ۱ به دو شیوه متمایز نمایش داده ایم. هر یک از این دو نمودار مزایا و معایب خاص خودشان را دارند. در اکثر کتابها و مقالات صورت سمت راستی این مثلث را به کار می گیرند، در حالی که، صورت دوم برای یافتن الگوهای جالب توجه و یافتن ویژگی های عددی بین درآیه های این گونه از مثلثها بسیار گویا تر و مناسب تر هستند. ما در اینجااز صورت دوم آن در شکل ۱ استفاده خواهیم کرد .

۲. مثلث خیام ـ پاسکال

مثلث پاسکال ترتیبی از نمایش، اعداد در یک آرایه مثلثی است به طوری که اعداد انتهای هر سطر برابر با ۱ و اعداد باقی مانده مجموع نزدیکترین دو عدد در سطر بالای سرش هستند. این مفهوم به طور گسترده ای در احتمال، ترکیبات و جبر استفاده می شود. در کتابها و مقالاتی که در کشورهای غربی نوشته می شوند به آن مثلث پاسکال، و در برخی از آنها آن را مثلث پاسکال نیوتن می نامند. اما، آیا این پاسکال بود که اولین مرتبه این نمایش عددی را کشف کرد یا آن که در سایر نقاط جهان حتی قرن ها پیش از پاسکال این نمایش از آرایه ها شناخته شده بود. از کتاب

*سخنران
پست الکترونیک : bsalehian@du.ac.ir (بهزاد صالحیان متی کلایی)



شکل ۱: دو نمایش مختلف مثلث خیام ـ پاسکال

تاریخ ریاضیات تالیف اسمیت جلد دوم، چنین شرح می دهد که « قضیه دوجمله ای معروف به قضیه دو جمله ای نیوتن بسط عبارت $(a+b)^n$ به ازای مقادیر صحیح و مثبت n یا لااقل وروش به دست آوردن ضرایب آن مدتها پیش از آنکه به اروپا برسد، در مشرق زمین شناخته شده بود. حالت $n=2$ را اقلیدس ۳۰۰ سال قبل از میلاد می دانسته است. اما تعمیم قاعده به ازای مقادیر دیگر را تا آن جایی که اطلاع داریم در نوشته های جبری عمر خیام (۱۱۰۰ میلادی) آمده است. .... تعمیم قضیه دو جمله ای به ازای n های منفی و کسری کاری بوده که توسط نیوتن انجام گرفته است». نخستین بار این مثلث در سده دهم میلادی توسط هندی ها در جریات شرح یک کتاب باستانی به زبان سانسکریت نوشته پینگالا یک راضی دان و دانشمندی که دو قرن قبل از میلاد مسیح می زست، نشانه هایی از وجود این مثلث به دست آمد به همین مناسبت هندی ها به آن «مثلث پینگالا» می گویند [۶].

در کتاب ریاضیات برای همه، تالیف هگبن [۴] « بی شک فریبندگی اعداد مثلثی، موجب شده کسانی به فکر مثلث حسابی پاسکال بیافتند و این که این مثلث حسابی را به نام پاسکال، مثلث حسابی پاسکال می نامند برای آن است که پاسکال اولین ریاضی دان فرانسوی است که به نظریه احتمالات ریاضی که اساس علم آمار مدرن است توجه کرده است. در واقع سلسله مثلث حسابی را خیام ریاضی دان ایرانی در قرن یازدهم به دست آورد. این سلسله در کتاب **آیینه قیمتی چهار عنصر** معرفی شد. این کتاب حدود سال ۱۳۰۰ میلادی بوسیله ریاضی دان چینی چو شی که، در زمانی که امپراطوری مغول در اروپای شرقی پیش می رفت نوشته شده است». مولف کتاب ریاضیات برای همه پس از تشریح این مطلب همه جا مثلث حسابی را مثلث حسابی خیام می نامد و در جای دیگر این کتاب می نویسد: عمر خیام که **دستور دو جمله ای** را کشف کرد یک ماتریالیسم با ایمان بود که می خواست حکمت را در عالم واقعی بکار ببرد و آن را موافق میل خود از نو بسازد.چو شی کی در این کتاب که نقطه‌ی اوج جبر چینی به‌حساب می‌آید،این کتاب را با مثلثی که در شکل ۴ می‌بینید آغاز کرده و از آن برای توضیح بسط دوجمله‌ای درجه‌ی چهار استفاده کرده‌است.

تقریباً هم‌زمان با هندی‌ها، «کرجی» ریاضی‌دان ایرانی درباره‌ی این مثلث سخن به میان آورده‌است. پس از او «خیام»، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و شاعر بلندآوازه‌ی ایرانی، در رساله‌ای با عنوان درستی شیوه‌های هندی در جذر و کعب، که تا کنون پیدا نشده، به تعمیم قانون‌های هندی برای یافتن ریشه‌ی دوم و سوم پرداخته و روش‌هایی برای ریشه‌های چهارم و بالاتر یافته‌است که پیش از او کسی نمی‌دانسته. مشابه این روش‌ها، بعدها توسط نیوتن نیز مطرح شد و اکنون به دستور نیوتن شناخته می‌شود. این شواهد و شواهد تاریخی دیگر، تاریخ‌نگاران ریاضی را قانع کرده که بسط دوجمله‌ای و مثلث حسابی آن را خیام ابداع کرده و رسماً پیش‌نهاد شده که هردوی این‌ها به نام خیام نام‌گذاری شوند؛ بسط دوجمله‌ای خیام به جای بسط دوجمله‌ای نیوتن، و مثلث خیام به جای مثلث پاسکال. دیگر ریاضی‌دان ایرانی غیاث‌الدین جمشید کاشانی نیز در نوشته‌های خود به این مثلث اشاره‌کرده و به صراحت گفته که این جدول‌ها را از پیشینیان خود اقتباس کرده‌است.

ریاضی دان بزرگ ایرانی غیاث الدین جمشید کاشانی، کتاب بزرگ مفتاح الحساب را در اوایل سال ۸۳۰ هجری قمری یعنی تقریبا دویست سال قبل از پاسکال و دویست و بیست سال قبل از نیوتن نوشته است.از مقدمه مفتاح الحساب پیداست که این کتاب شامل مطالبی است که در آن زمان برای یک نفر محاسب لازم بود، یعنی کتاب مفتاح یک کتاب درسی است نه یک رساله پژوهشی. نکته دبسیار مهم آن است که کاشانی در مقدمه مفتاح الحساب به صراحت می نویسد که تمام جداولی که در آن کتاب آورده است خودش استنباط کرده مگر هفت جدولی که در واقع مثلث حسابی مشابه مثلث پاسکال می باشد را از پیشینیان خودش استفاده کرد و در کتاب مفتاح نوشته است. بنابراین مثلث حسابی و دستور دو جمله ای مدتها قبل از جمشید کاشانی شناخته شده بودند. طبیعی است بپرسیم این که این مطالب که در زمان جمشید کاشانی شناخته شده بودند از کجا پیدا شدند؟برای پیدا کردن جواب این سوال باید به کتابهای جبری که قبل از جمشید کاشانی بودند مراجعه کنیم. در کتاب **جبر و مقابله خیام** به انظمام تاریخ ریاضیتا زمان خیام که جناب دکتر مصاحب منتشر کرده است می نویسد که: « هندی ها برای استخراج جذر و کعب طرقی

دارند که مبنی بر اندک تفحص است و ان عبارتند از دانستن مربعات ارقام از ۱ تا ۹ و حاصل ضرب آنها در یک دیگر و من اثبات صحت این طرق و چگونگی نیل به مقصود از طریق آنها کتابی تالیف کرده ام. در این کتاب انواعی که هندیان ذکر کرده اند انواع دیگری از قبیل استخراج ریشه های چهارم و پنجم و ششم و بالاتر را افزوده امو قبل از من کسی آنها را ذکر نکرده است. براهین این کتاب عددی است و بر قسمتهای مربوط به حساب از کتاب اصول مبتنی است».

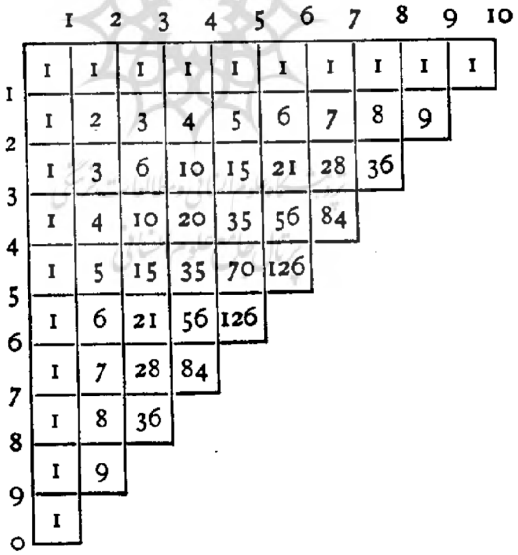
کتابی که خیام به آن اشاره می کند به احتمال قوی عبارتست از رساله در صحت طرق هندی در استخراج جذر و کعب و شاید رساله مشکلات الحساب باشد.متاسفانه از این دو کتاب فقط نامی باقی مانده و هنوز نسخه ای از آن به دست نیامده است.

از این که خیام به صراحت در کتاب جبرو مقابله خود می گوید که استخراج ریشه های چهارم و پنجم و بالاتر را به طرق هندی افزوده و کسی قبل از او چیزی در این بابت ذکر نکرده و نظر به این که مطالب مذکور بعد از خیام در کتب ریاضی نوشته شده وبعدها جزو مطالب درسی به حساب آمده است می توان دانست که مخترع واقعی مثلث های حسابس و دستور بسط دو جمله ای (البته زمانی که توان عددی صحیح و مثبت باشد) همان ریاضی دان بزرگ ایرانی حکیم عمر خیام است که در قرن یازدهم میلادی یعنی شش قرن قبل از پاسکال و نیوتن می زیسته و این مطالب را در آثار خود بجا گذاشته پس باید آنها را مثلث خیام و دستور دو جمله ای خیام نامید.

همانطور که پیش از این اشاره شددر کتابهایی که در کشورهای اروپایی نوشته می شد « **مثلث حسابی**» را به نام « مثلث حسابی پاسکال » می شناسند. علتهم این است که هنگامی که دولگ فرانسوی در ۱۸۶۹ میلادی از رساله خود تحت عنوان « اثبات رابطه دو جمله ای نیوتن از سوی پاسکال» در دانشگاه سوربن دفاع کرده، برای اولین بار رساله پاسکال را درباره مثلث حسابی مورد بحث قرار داده و آن را برای تعیین ضرایب دو جمله ای ها به کار برده است. از همین تاریخ بود که این مثلث ها به نام مثلث های حسابی پاسکال مشهور شدند. حال آن که بعدها مورخان ریاضی متوجه شدند که موضوع این مثلث ها نه تنها در آثار ریاضی دانان غیر اروپایی آمده، بلکه در آثار ریاضی دانان اروپایی قبل از پاسکال نظیر مایکل اشتیفل آلمانی در ۱۵۶۷ میلادی نیز مطرح شده است. (اسمیت : تاریخ ریاضی).

اشتیفل مثلث حسابی را در آثار خود به کار برده و از آن در محاسبات حسابی استفاده کرده است.بر اساس تحقیقات بوسمن مورخ ریاضی، مشخص شد که پاسکال از این کتاب در رساله خود موسوم به مثلث های حسابی استفاده کرده است و تنها کار اصیل وی در خصوص مثلث حسابی هم این بود که آن رابه گونه ای قابل توجهی د رآثار خود در مباحث مربوط به حساب احتمالات وارد ساخته و به کار برده است.

تصویر زیر ۲ از مثلث حسابی، نمایی از آن است که در رساله پاسکال آمده است.



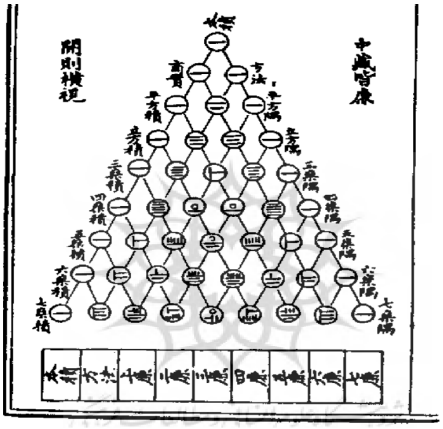
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
0	1									

شکل ۲: مثلث حسابی پاسکال در رساله مثلث های حسابی نوشته پاسکال

.

در سده‌ی هفدهم میلادی، «بلیز پاسکال» رساله‌ای با عنوان «رساله‌ای درباره‌ی مثلث حسابی» نگاشت که در آن به بررسی ویژگی‌های مثلث خیام ـ پاسکال پرداخته بود. تصویری که پاسکال در رساله‌ی خود آورده‌است را می‌توانید در شکل ۵ مشاهده نمایید. یک سال پس از نگارش این رساله، مساله‌ی توزیع عادلانه‌ی جایزه در یک مسابقه‌ی ناتمام توسط یکی از شوالیه‌های به‌نام و متفکر دربار لویی چهاردهم مطرح شد. پاسکال این مساله را به کمک همین مثلث حل کرد و با «پیر دو فرما» مشاور شهر تولوز در این باره مکاتبه کرد و هنگامی که فهمید هر دو به نتیجه‌های

یکسانی رسیده‌اند با خوشحالی گفت که «ملاحظه می‌شود که حقیقت در تولوز و پاریس یکسان است». در اروپا پیش از پاسکال نیز این مثلث توسط ریاضی‌دان ایتالیایی نیکولو فونتانا تارتاگلیا مطرح شده‌بود واز همین رو برخی این مثلث را مثلث تارتاگلیا می‌نامند. اما این مثلث با این همه داستان، چگونه ساخته می‌شود؟ اگر یک سطر نامتناهی از عددها بسازیم که در آن یک‌بار عدد ۱ (یک) ظاهرشده وبقیه‌ی عددهای آن همگی صفر هستند و پس از آن در سطر بعدی هرعدد حاصل جمع دو عدد بالای سرخودش باشد تصویری که به‌دست می‌آید مثلثی از عددهای غیرصفر در بین صفرهاست.اما موضوع به همین سادگی نیست! در این مثلث ویژگی‌های هیجان انگیز بسیاری نهفته است که در کتابها و مقالات فراوانی به آن پرداخته شده است.



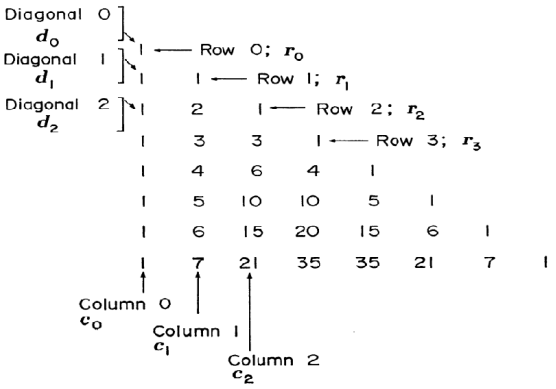
شکل ۳: آیینه‌ی گران‌بهای چهار

در واقع ضرایب دوجمله ای، از آن دسته از اعدادی هستند که مطالعات فراوانی در باره آنها انجام شده است و حجم زیادی از مساله های ریاضیات گسسته به محاسباتی مربوط به این اعداد ختم می شوند. در اکثر کتاب های مر بوط به تر کیبیات برای بررسی ویژگی های این اعداد فصل های مفصل و مستقلی را به آن ها تخصیص می دهند. از ویژگی های مهم این دسته از اعداد انعطاف پذیری آنها در محاسبات و شکل پذیری ساده و تبدیل شوندگی متنوع آنها می باشد که این اعداد را برای ریاضی دانان جذاب کرده است.همه این ها نشانه هایی از درجه اهمیت این دسته از اعداد را دارند.ظاهر ساده و مفهوم قابل درک این اعداد نوید وجود بیشمار مساله جالب و جذاب در سطوح مختلفی از سختی را دارند. در این مقاله ابتدا چند ویژگی مهم ضرایب دوجمله ای را بررسی می کنیم و سپس مساله جالبی از آن را مطرح و حل خواهیم کرد. تا کمترین و بیشترین فاصله ای که بین دو عدد متوالی در هر سطر از مثلث خیام–پاسکال وجود دارد را پیدا کنیم.

۳. چند ویژگی مهم ضرایب دو جمله ای

در این قسمت برای بررسی ویژگی های مثلث خیام–پاسکال، از نمایش مثلث قائم الزاویه ای که در شکل ۱ در ردیف اول قرار داداستفاده می کنیم. برای ارجاع بهتر در آینده از نمایش شکل ۴ برای ارجاع راحت تر به یک سطر، ستون یا یک قطر مثلث خیام–پاسکال بهره می گیریم[۱–۳].
در این بخش برای درک بهتر آرایه های عددی مثلث خیام–پاسکال برخی از خواص اولیه و مهم موجود در این مثلث را بیان می کنیم. در هر سطر اولین درآیه را با $a_{۰}$ دومین درآیه را با $a_{۱}$ و الی آخر نشان می دهیم. پس در سطر سوم در شکل ۴ ، $a_{۰}=۱$ و $a_{۱}=۳$ و $a_{۲}=۳$ و $a_{۳}=۱$ می باشد.

- **ویژگی ۱** مجموعه اعداد ستون اول یعنی $C_{۱}$ مجموعه اعداد شمارشی یعنی اعداد طبیعی هستند به عبارتی دیگر $C_{۱}=\{۱,۲,۳,\dots\}$. به طور مشابه مجموعه اعداد روی قطر اول هم برابر با اعداد شمارشی است، یعنی $D_{۱}=\{۱۲,۳,\dots\}$. در نتیجه $C_{۱}=D_{۱}$. شکل ۵ .



شکل ۴: سطر و ستون و قطر مثلث خیام–پاسکال

- **ویژگی۲** مجموعه اعداد ستون دوم برابر است با مجموعه اعداد قطر دوم یعنی، $C_2 = D_2$. اعداد ستون دوم را اعدا مثلثی می گویند.برای اینکه با داشتن هر تعداد مهره به اندازه اعداد مجود در ستون دوم می توانیم یک مثلث بسازیم.
- **ویژگی۳** مجموع درایه های سطر kام برابر است با 2^k.مثلا در سطر $k = 5$ داریم: $2^5 = 32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$.
- **ویژگی۴** در هر سطری مجموع درآیه های ستونهای با شماره زوج برابر است با مجموع درآیه های موجود در ستونهای با شماره فرد. مثلا در سطر ششم داریم: $6 + 20 + 6 = 1 + 15 + 15 + 1$.
- **ویژگی۵** هرگاه k عددی اول باشد، در آن صورت k هر عنصر ستون kام یا قطر kام بجز درآیه ۱ را عاد می کند. مثلا در شکل ۱ به ازای $k = 5$ هر عنصر ستون پنجم بر ۵ بخشپذیر است.

قضیه زیر رابطه صعودی نزولی بین درآیه های هر سطر را نشان می دهد.

قضیه ۱.۳. *نشان دهید :*

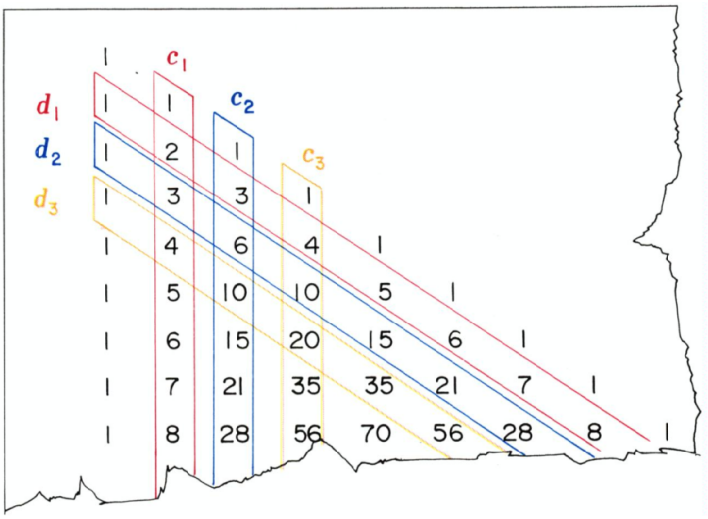
۱. *به ازای هر عدد زوج* $n \in \mathbb{N}$
اگر $0 \le i < j \le \frac{n}{2}$ *آنگاه* $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$.
و
$\binom{n}{i} > \binom{n}{j}$ *اگر* $\frac{n}{2} \le i < j \le n$.

۲. *به ازای هر عدد فرد* $n \in \mathbb{N}$
$\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$ *اگر* $0 \le i < j \le \frac{n-1}{2}$.
و
اگر $\frac{n+1}{2} \le i < j \le n$ *آنگاه* $\binom{n}{i} > j\binom{n}{j}$

اثبات . فرض کنید، r و n اعداد صحیح نامنفی باشند به طوری که $n > 0$ و $n \ge r$. در این صورت با توجه به رابطه زیر خواهیم دید که:

$$\frac{\binom{n}{r-1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \cdot \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{r}{n-r+1}.$$

در این صورت بدیهی است که $\frac{\binom{n}{r-1}}{\binom{n}{r}} < 1$ اگر و تنها اگر $r < \frac{n+1}{2}$. حال، در این صورت اگر n عددی زوج باشد، از رابطه بالا در می یابیم که $\binom{n}{r} > \binom{n}{r-1}$ اگر و تنها اگر $r \le \frac{n}{2}$ باشد. از اینجا بر می آید که $\binom{n}{i} > \binom{n}{j}$ است اگر $0 \le i < j \le \frac{n}{2}$ همچنین،اگر $\frac{n}{2} \le i < j \le n$



شکل ۵: نمایش سطر و قطر دزر مثلث خیام پاسکال

از این رابطه بر می آید که، $0 \leq n-j < n-i \leq \frac{n}{2}$ در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} > \binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}.$$

به همین ترتیب، اگر n عددی فرد باشد از رابطه فوق بر می آید که، $\binom{n}{r-1} < \binom{n}{r}$ اگر وفقط اگر $r \leq \frac{n-1}{2}$ باشد. از اینجا بر می آید که، $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$ اگر که $0 \leq i < j \leq \frac{n-1}{2}$ باشد. همچنین، اگر $\frac{n+1}{2} \leq i < j \leq n$ باشد از اینجا بر می آید که $0 \leq n-j < n-i \leq n$ و درنتیجه،

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} > \binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}.$$

□

۴. شکاف بین دو عدد متوالی در هر سطر مثلث خیام پاسکال

حال با توجه به مطالب فوق اولین پرسشی که به ذهن خطور می کند آن است که در هر سطری، بیشترین شکافی که می تواند بین دو عدد متوالی آرایه های یک سطر وجود داشته باشد چه میزانی است. به این پرسش در قضیه زیر پاسخ می دهیم.
به عبارتی دقیق تر به ازای هر دو عدد صحیح و مثبت n و k که در آن $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n$ است، در این صورت عبارت،

$$\Delta_k(n) = \left| \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right|$$

را به عنوان فاصله دو جمله متوالی در سطر nـام مثلث خیام ـ پاسکال تعریف می کنیم. حال قرار می دهیم $\Delta_m(n) = \min_{1 \leq k \leq n} \Delta_k(n)$ و $\Delta_M(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k(n)$. هدف مان، حل دو مساله زیر است:

- **مساله ۱:** مقدار $\Delta_m(n)$ را بیابید، سپس همه مقادیر k را پیدا کنید که به ازای آن داشته باشیم $\Delta_k(n) = \Delta_m(n)$.
- **مساله۲:** مقدار $d_M(n)$ را بیابید، سپس همه مقادیر k را پیدا کنید که به ازای آن داشته باشیم $\Delta_k(n) = \Delta_M(n)$.

ابتدا مساله ۱ را بررسی می کنیم که ساده تر است. به خاطر ویژگی تقارنی ضرایب دوجمله ای، کافی است فقط مقادیر $\Delta_k(n)$ را به ازای k هایی که $1 \le k \le \lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor$. چون

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-2k+1)}{k!(n-k+1)} = 0$$

اگر و تنها اگر $n-2k+1=0$، به این ترتیب $\Delta_m(n)=0$ اگر و تنها اگر n فرد باشد و $\Delta_k(n)=0$ اگر و تنها اگر $k=\frac{(n+1)}{2}$ باشد. در صورتی که n عددی زوج باشد، به سادگی می توان نشان داد که $\Delta_m(n)=n-1$ بجز وقتی که $n=4$ باشد، که در این صورت با یک محاسبه سرراست می توان دریافت که $\Delta_m(4)=2$. در حقیقت، اگر قرار دهیم $d_m(n)=\min\{\Delta_k(n) | 1 \le k \le n, k \ne \frac{(n+1)}{2}\}$ ، (به طوری که با کنار گذاشتن حالت بدیهی زمانی که n عددی فرد باشد، $\Delta_m(n)=0$ است) به طور کلی می توان نشان داد که به ازای هر $n \ne 4$ خواهیم داشت $d_m(n)=n-1$.

قضیه ۱.۴. *به ازای هر $n \ge 2$ ، به استثنای $n=4$ ، داریم $d_m(n)=n-1$ به علاوه،اگر $n \ne 6$ باشد، آنگاه $\Delta_k(n)=n-1$ اگر و تنها اگر $k=1$ یا n باشد و اگر $n=6$ باشد، آنگاه $\Delta_k(6)=5$ اگر و تنها اگر $k=1,3,4$ یا ۶ باشد .*

اثبات . چون حالت $n \le 6$ را می توانیم با آزمودن مقادیر اولیه در مثلث خیام ـ پاسکال به طور مستقیم بررسی کرد، پس فرض می کنیم که $n>6$ باشد. حال با کمک استقرا اثبات قضیه را پی می گیریم. با یک بررسی مستقیم در مثلث خیام ـ پاسکال به وضوح قضیه برای $n=7$ و ۸ برقرار است. بنا بر ویژگی تقارنی ضرایب دوجمله ای در مثلث خیام ـ پاسکال، تنها کافی است نشان دهیم که به ازای هر k که در آن $2 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و به ازای هر $n \ge 9$ خواهیم داشت $\Delta_k(n) > n-1$. بنابر اتحاد پاسکال، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} &= \left\{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right\} - \left\{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2}\right\} \\ &= \left\{\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right\} + \left\{\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2}\right\}.\end{aligned} \tag{۱}$$

اگر n فرد باشد، آنگاه طبق فرض استقرا داریم: $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} \ge n-2$ و $\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} \ge n-2$. در نتیجه از (۱) بر می آید که

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \ge 2(n-2) = (n-1)+(n-3) > n-1. \tag{۲}$$

اگر n عدد زوج باشد، باز هم استدلال بالا معتبر است بجز زمانی که $k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است، که در این حالت خواهیم داشت:

$$\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = 0.$$

حال اگر یک مرتبه دیگر از اتحاد پاسکال استفاده کنیم از (۱) بر می آید که:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} &= \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} \\ &= \{\binom{n-2}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}\} + \{\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-2}{k-3}\}.\end{aligned} \tag{۳}$$

چون $n-2$ زوج است، از فرض استقرا بر می آید که، $\binom{n-2}{k-1} - \binom{n-2}{k-2} \ge n-3$ و $\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-2}{k-3} \ge n-3$.
در نتیجه از (۳) خواهیم داشت:

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \ge 2(n-3) = (n-1)+(n-5) > n-1. \tag{۴}$$

حال بنا به روابط (۲) و (۴) اثبات قضیه کامل خواهد بود. □

حالا بر می گردیم به مساله۲ که جواب آن از جواب مساله۱ وضوح کمتری دارد. جواب این مساله را در قضیه۲ بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۲.۴. *قرار می دهیم* $t = \frac{۱}{۲}(n + ۲ - \sqrt{n+۲})$. *در این صورت خواهیم داشت :*

$$\Delta_M(n) = \binom{n}{\lfloor t \rfloor} - \binom{n}{\lfloor t \rfloor - ۱}.$$

به علاوه،

$$\Delta_k(n) = \Delta_M(n)$$

اگر و تنها اگر که در آن $\mathbb{Z}$*مجموعه اعداد صحیح می باشد .*

قضیه ۳.۴. *قرار می دهیم* $t = \frac{۱}{۲}(n + ۲ - \sqrt{n+۲})$. *در این صورت خواهیم داشت :*

$$\Delta_M(n) = \binom{n}{\lfloor t \rfloor} - \binom{n}{\lfloor t \rfloor - ۱}.$$

به علاوه،

$$\Delta_k(n) = \Delta_M(n)$$

اگر و تنها اگر
که در آن $\mathbb{Z}$*مجموعه اعداد صحیح می باشد .*

اثبات . به خاطر تقارن ضرایب دوجمله ای می توانیم فرض کنیم که $k \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ است. با محاسبه مستقیم می توان نشان داد که:

$$\left\{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-۱}\right\} - \left\{\binom{n}{k-۱} - \binom{n}{k-۲}\right\} = \frac{n!s}{k!(n-k+۲)!}$$

که در آن

$$\begin{aligned} s &= (n-k+۲)(n-۲k+۱) - k(n-۲k+۳) \\ &= (n-۲k+۱)(n-۲k+۲) - ۲k \\ &= (۲k)^۲ - (۲n+۴)(۲k) + (n+۱)(n+۲) \\ &= \{۲k - (n+۲)\}^۲ - (n+۲) \\ &= \{۲k - (n+۲) + \sqrt{n+۲}\}\{۲k - (n+۲) - \sqrt{n+۲}\} \\ &= ۴(k-t)\{k - \tfrac{۱}{۲}(n+۲+\sqrt{n+۲})\} \end{aligned}$$

که در آن $t = \frac{۱}{۲}(n + ۲ - \sqrt{n+۲})$. چون $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor < \frac{۱}{۲}(n + ۲ + \sqrt{n+۲}) \leq k$ می توان نتیجه گرفت که،

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-۱} \geq \binom{n}{k-۱} - \binom{n}{k-۲}$$

اگر و تنها اگر $k \leq t$ باشد و تساوی برقرار می شود اگر و تنها اگر $t \in \mathbb{Z}$. به این ترتیب حکم قضیه به اثبات می رسد.

□

برای مشاهده کارآیی قضیه۲ چند مثال را بررسی می کنیم.

مثال ۴.۴. فرض کنید $n = ۱۳$ باشد . در این صورت $t = \frac{۱}{۲}(۱۵ - \sqrt{۱۵}) \notin \mathbb{Z}$ و $\lfloor t \rfloor = ۵$. بنابراین، بزرگترین شکاف بین جملات سطر ۱۳ام مثلث خیام–پاسکال دوبار تکرار می شود: یک مرتبه بین ضرایب $\binom{۱۳}{۴}$ و $\binom{۱۳}{۵}$ و بار دیگر بین ضرایب $\binom{۱۳}{۸}$ و $\binom{۱۳}{۹}$ اتفاق می افتد.
که این فاصله دقیقا برابر است با $\binom{۱۳}{۹} - \binom{۱۳}{۸} = ۱۲۸۷ - ۷۱۵ = ۵۷۲ = \binom{۱۳}{۵} - \binom{۱۳}{۴}$. حال، این بار قرار می دهیم $n = ۱۴$ در این صورت $t = ۶ \in \mathbb{Z}$. بنابراین بزرگترین فاصله بین ضرایب دوجمله ای در سطر ۱۴ام مثلث خیام–پاسکال چهار مرتبه بین ضزایب این سطر رخ می دهد.بین ضرایب $\binom{۱۴}{۴}$ و $\binom{۱۴}{۵}$؛ بین $\binom{۱۴}{۵}$ و $\binom{۱۴}{۶}$؛بین $\binom{۱۴}{۸}$ و $\binom{۱۴}{۹}$ و بین $\binom{۱۴}{۹}$ و$\binom{۱۴}{۱۰}$. که قدر مطلق این فاصله ها برابر است با $\binom{۱۴}{۵} - \binom{۱۴}{۴} = ۲۰۰۲ - ۱۰۰۱ = ۱۰۰۱$.

مراجع

[1] Chong C.C. ; Meng K.K. , *PRINCIPLES And TECHNIQUES IN COMBINATORICS*,World Scientific Publishing Co Pte. Ltd. 1992.
[2] Edwards, A. W. F. *Pascal's arithmetical triangle: the story of a mathematical idea*,Dover Publications, Inc., 2019.
[3] Gould,H.W., *Combinatorial Identities*, World Scientific 1972.
[4] Hogben L.T., *Mathematics for the Million* George Allen and Unwin, Ltd. 1930.
[5] Houghton C., *Differences and Pascal's Triangle*,Mathematics in School, Vol. 20, No. 4 (Sep., 1991), pp. 37-38.
[6] Struik D, *A Source Book in Mathematics 1200-1800*. Cambridge,Mass.: Harvard University Press, 1969.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، SP–302، صص. ۲۶۲–۲۶۴

بررسی روش دنباله‌ای محض تسریع یافته پیرامون میانگین در مدل خطی سری زمانی

سودابه سجادی پناه*[آ]، محمود میرجلیلی[ب]، احمدرضا زنبوری[آ،ب]

[آ]کارمند علوم پزشکی بوشهر
[ب]گروه آمار، دانشگاه ولایت

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
روش دنباله‌ای تسریع یافته
مدل خطی
مونت کارلو

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله روش دنباله‌ای تسریع یافته در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پیرامون میانگین مدل خطی سری زمانی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا نتایج تحت سه قضیه‌ی اصلی ارائه می‌شود که نشان‌دهنده‌ی ویژگی‌های کارایی مجانبی، کارایی مجانبی ریسک و توزیع مجانبی برآوردگر است. سپس شبیه‌سازی مونت کارلو جهت بررسی نتایج تئوری در مدل خودبازگشتی ـمیانگین متحرک مرتبه اول انجام شده است. در این راستا متوسط متعیر توقفف نسبت متغیر توقف به اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه برای برآورد نقطه ای، نسبت تابع مخاطره‌ی متناظر با متغیر پیشنهادی به تابع مخاطره‌ی حاصل از روش اندازه‌ی نمونه ثابت بهینه و احتمال پوشش فاصله اطمینان ارائه شده است. همچنین توزیع مجانبی برآوردگر میانگین رسم شده است.

۱. مقدمه

کاربرد بسیار مشاهدات سری زمانی بخصوص مدل خطی در زمینه‌های گوناگون از جمله اقتصاد، صنعت، پزشکی و ...محققان بسیاری را به بررسی و مطالعه این داده‌ها ترغیب کرده است. هدف از بررسی و مطالعه این مشاهدات برآورد، پیش‌بینی مقادیر آینده و حتی در مواقعی مقایسه این مشاهدات است که در بسیاری از شرایط محدودیت‌هایی همچون مجهول بودن اندازه‌ی نمونه، عدم دسترسی به نمونه و هزینه بر بودن دستیابی با توجه به شرایط مشاهدات است. یکی از راهکارهای پیشنهادی تعیین اندازه‌ی نمونه بهینه به‌کارگیری روش‌های دنباله‌ای مناسب است. ایده استفاده از روش‌های دنباله‌ای با استفاده از قاعده توقف مناسب به منظور برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای به صورت گسترده از مدت‌ها مورد توجه بوده است. عملکرد روش دنباله‌ای محض برای دنباله‌ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع در قالب تئوری با جزیئات بسیار برای اولین بار توسط محققانی چون [۹]، [۷] و ...مطرح و بررسی شده است. در ادامه استفاده از روش‌های دنباله‌ای در داده‌های وابسته، برای اولین بار توسط [۱۲، ۱۳] جهت بررسی روش دنباله‌ای محض در مدل خودبازگشتی مرتبه اول مطالعه شده است. همچنین در ادامه [۵]، [۶] و [۸] نتایج این مطالعات را به ترتیب به مدل خوبازگشتی مرتبه p و فرایندهای خطی تعمیم دادند. [۱۴] برآورد فاصله‌ای با طول ثابت برای پارامترهای مدل خودبازگشتی آستانه‌ای مرتبه اول با روش دنباله‌ای محض بررسی نمود. [۱] برآورد فاصله‌ای میانگین فرایند خطی با روش دنباله‌ای محض مورد مطالعه قرار داد. [۱۸] بر روش دنباله‌ای محض در مدل خودبازگشتی مرتبه اول مروری داشتند. [۲، ۳] روش دنباله‌ای محض را به ترتیب در مدل‌های خودبازگشتی با ضرایب تصادفی از مرتبه p تک‌متغیره و چندمتغیره بررسی کردند. هم‌چنین، [۱۱] علاوه بر مرور روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض، بر نرخ همگرایی تابع مخاطره حاصل از روش دنباله‌ای محض مطالعه کردند. [۱۵] روش دومرحله‌ای برای مدل خودبازگشتی مرتبه اول برای برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای را بررسی نمودند. سپس [۱۶] روش دومرحله‌ای و دومرحله‌ای بهبودیافته برای خودبازگشتی با ضرایب

*سودابه سجادی پناه
پست الکترونیک : yahoo.com@soodabesajadi (سودابه سجادی پناه)، mirjalili8@yahoo.com (محمود میرجلیلی)،
ahmadrezanboori@gmail.com (احمدرضا زنبوری)

تصادفی برای برآورد نقطه‌ای مورد بررسی قرار دادند. همچنین [۱۷] کلاسی از روش‌های دنباله‌ای برای بررسی عملکرد نقطه‌ای و فاصله‌ای مدل خودبازگشتی مرتبه p با برآوردگرهای حداقل مربعات و برآوردگرهای گشتاوری مورد مطالعه قرار دادند. روش‌های دنباله‌ای بر اساس شیوه‌ی تعریف متغیر توقف متفاوت هستند که یکی از پرکاربردترین این روش‌ها، روش دنباله‌ای تسریع یافته است که در واقع بهبودیافته روش دنباله‌ای محض می باشد. در هنگامی که قصد مقایسه دو گروه مستقل از مدل‌های خطی سری زمانی باشد، روش دنباله‌ای می تواند کمک شایانی برای تعیین اندازه نمونه بهینه با توجه به هزینه بر بودن بررسی نمونه نماید. به عنوان مثال در این زمینه می توان روش پیشنهادی را در آزمون مقایسه دو مدل خطی پیشنهاد شده در مطالعه [۱۰] به کار برد. در این مطالعه با توجه به کاربرد مدل‌های خطی، به بررسی مدل میانگین مدل خطی جهت بررسی علمکرد روش دنباله‌ای تسریع یافته در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پرداخته می‌شود.

۲. بررسی برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای

مدل خطی سری زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$X_t = \mu + \sum_{j=۱}^{\infty} a_j Z_{t-j}, \quad t = ۱, ۲, \ldots,$$

که μ میانگین مجهول و $\{\ldots, Z_{-۱}, Z_۰, Z_۱, \ldots\}$ دنبالهای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مجهول F هستند. هم‌چنین برای ضرایب a_j ثابت‌های $A > ۰$ و $۰ < \rho < ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $j > ۰$ ، $|a_j| < A\rho^j$ برقرار است. در این مقاله هدف بررسی برآورد میانگین مجهول فرایند خطی با استفاده از روش‌های دنباله‌ای محض تسریع یافته است. همانطور که در مقدمه اشاره شد، با توجه به اهمیت مدل‌های خطی و روش دنباله‌ای محض تسریع یافته علاقه‌مند به بررسی عملکرد روش برای برآورد میانگین شده‌ایم. برآورد میانگین نمونه‌ای فرایند خطی به صورت $\hat{\mu} \simeq \bar{X}_n = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i$ حاصل می‌شود. هم‌چنین برآوردگر پارامتر μ هنگامی‌که $n \to \infty$ دارای توزیع مجانبی $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right) \to N\left(۰, \tau^۲\right)$ است. تابع زیان جهت برآورد میانگین به‌صورت $L_n(\bar{X}_n, \mu) = a(\bar{X}_n - \mu)^۲ + cn$ در نظر گرفته می‌شود که $a > ۰$ وزن معلوم و $c > ۰$ هزینه‌ی هر واحد نمونه‌گیری هستند. اگر $\tau^۲$ معلوم باشد، تابع مخاطره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$R_n = \mathbf{E}\left[L_n(\bar{X}_n, \mu)\right] = a\mathbf{E}\left[\bar{X}_n - \mu\right]^۲ + cn = a\tau^۲/n + cn + o(n^{-۱}),$$

که $\tau^۲ = \left(\sum_{j=۰}^{\infty} a_j\right)^۲ \sigma^۲$ است. در بررسی روش پیشنهادی هدف مینیمم سازی تابع مخاطره در برآورد نقطه‌ای است. با فرض نادیده گرفتن $o(n^{-۱})$ اندازه نمونه ثابت بهینه تقریبا برابر $n_c \simeq \left(\frac{a}{c}\right)^{۱/۲} \tau$ است. تابع مخاطره متناظر با اندازه نمونه بهینه تقریبا $R_{n_c} \simeq ۲cn_c$ حاصل می‌شود. در بسیاری از شرایط در عمل τ مجهول است و روش اندازه نمونه ثابت بهینه کاربرد ندارد. بدین جهت قاعده‌ی توقف با توجه به اندازه نمونه ثابت بهینه به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

$$t = \inf\{n \geq m | n \geq \left(\frac{a}{c}\right)^{۱/۲} \rho\left(\hat{\tau}_n + n^{-h}\right)\}, \quad N_۱ = [\left(\frac{a}{c}\right)^{۱/۲}\left(\hat{\tau}_t + t^{-h}\right)],$$

$$N_p = \max\{t, N_۱\}$$

که $\rho > ۰$ ثابت مناسب و n^{-h} فاکتور توقف نامیده می‌شود. در ادامه قضیه اصلی این بخش ارائه می‌شود که نشان‌دهنده کارا بودن روش دنباله‌ای محض تسریع یافته نسبت به روش اندازه نمونه ثابت بهینه است.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید به‌ازای* $s > ۲$ ، $\mathbf{E}[|\varepsilon_۱|^{۲s}] < \infty$ و $h \in (۰, \frac{s-۲}{۴})$ *برقرار هستند. آنگاه هنگامی‌که* $c \to ۰$ *نتایج زیر حاصل می‌شود*

$$\frac{N_p}{n_c} \xrightarrow{a.s} ۱,$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{N_p}{n_c}\right] \to ۱,$$

$$\frac{R_{N_p}}{R_{n_c}} \to ۱.$$

اثبات . مشابه قضیه مجانبی [۱۷] اثبات می‌شود. □

با توجه به قاعده‌ی توقف ارائه شده، تحت قضیه‌ی زیر نشان داده می‌شود که برآوردگر میانگین بر اساس متغیر توقف پیشنهادی دارای توزیع مجانبی نرمال است.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید به‌ازای* $s > ۲$، $\mathbf{E}[|\varepsilon_۱|^{۲s}] < \infty$ و $h \in (۰, \frac{s-۲}{۴})$ *برقرار هستند . آنگاه هنگامی‌که* $c \to ۰$ *نتیجه زیر حاصل می‌شود :*

$$\sqrt{N_p}\left(\bar{X}_{N_p} - \mu\right) \xrightarrow{D} N\left(۰, \tau^۲\right).$$

اثبات . مشابه قضیه مجانبی [۱۷] اثبات می‌شود. □

با توجه به توزیع مجانبی برآوردگر میانگین با اندازه نمونه ثابت می توان به قضیه بالا دست یافت. در ادامه به بررسی فاصله اطمینان μ با طول ثابت $(۲d)$ و ضریب اطمینان $۱ - \alpha$ با استفاده از روش دومرحله‌ای بهبودیافته پرداخته می‌شود. فاصله اطمینان $I = \left(\bar{X}_{k_d} - d, \bar{X}_{k_d} + d\right)$ در نظر گرفته می‌شود که اندازه نمونه ثابت بهینه نیز تقریبا برابر است با $k_d = [\tau^۲ z^۲_{(۱-\alpha)/۲}/d^۲]$. هنگامی‌که $d \to ۰$ نتیجه می‌شود. قاعده‌ی توقف روش با توجه به اندازه‌ی نمونه بهینه به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$t^* = \inf\{n \geq m | n \geq \left(\frac{Z^۲_{(۱-\alpha)/۲}}{d^۲}\right)\left(\hat{\tau}_n + n^{-h}\right)\}, \quad N^*_۱ = [\{\left(\frac{Z^۲_{(۱-\alpha)/۲}}{d^۲}\right)\left(\hat{\tau}_t + t^{-h}\right)\}^{۱/\gamma} + q] + ۱$$

$$N^d_p = \max\{t^*, N^*_۱\}.$$

که $q > ۰$ ثابت مناسب، n^{-h} فاکتور توقف و γ ثابت مناسب نامیده می‌شوند. در ادامه قضیه اصلی بیان میگردد که نشان‌دهنده‌ی ویژگی‌های کارایی مجانبی و سازگاری مجانبی است.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید به‌ازای* $s > ۲$، $\mathbf{E}[|\varepsilon_۱|^{۲s}] < \infty$ و $h \in (۰, \frac{s-۲}{۴})$ *برقرار هستند . آنگاه هنگامی‌که* $d \to ۰$ *نتایج زیر حاصل می‌شوند :*

$$\frac{N^d_p}{k_d} \xrightarrow{a.s} ۱,$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{N^d_p}{k_d}\right] \to ۱,$$

$$P\left(\mu \in I_{N^d_p}\right) \to ۱ - \alpha, \to ۱.$$

اثبات . مشابه قضیه مجانبی برآورد فاصله‌ای [۱۷] اثبات می‌شود. □

با به‌کارگیری قاعده‌های توقف پیشنهادی در این بخش به بررسی عملکرد در برآورد پارامتر و تعیین اندازه نمونه نهایی پرداخته می‌شود.

۲ .۱ . *شبیه‌سازی*

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو عملکرد روش دنباله‌ای محض تسریع یافته در مدل خودبازگشتی ـ میانگین متحرک با $p = ۱, q = ۱$ بررسی می‌شود. توزیع اغتشاش $\varepsilon_i \sim N(۹, ۰/۵)$ در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی برآورد نقطه‌ای، متغیرهای توقف حاصل از روش دنباله‌ای تسریع یافته و اندازه نمونه ثابت بهینه، تفاضل نسبت هر یک از متغیرهای توقف از یک، میانگین مربعات خطای پارامترها، مخاطره‌های حاصل از روش دنباله‌ای تسریع یافته و اندازه نمونه ثابت بهینه با در نظر گرفتن ۱۰۰۰۰ تکرار محاسبه شده‌اند. مقادیر مفروض جهت محاسبات $\beta = ۰/۵$ ، $\theta = -۰/۳$ ، اندازه نمونه اولیه برآورد نقطه‌ای ۱۰۰، ۴۰ و اندازه نمونه اولیه برآورد فاصله‌ای $۱۰, ۲۰, ۳۰, ۴۰, ۵۰$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین توزیع مجانبی برآوردگر میانگین برای اندازه نمونه اولیه ۲۰ و ۵۰ با در نظر گرفتن ۱۰۰۰۰ تکرار رسم شده است.

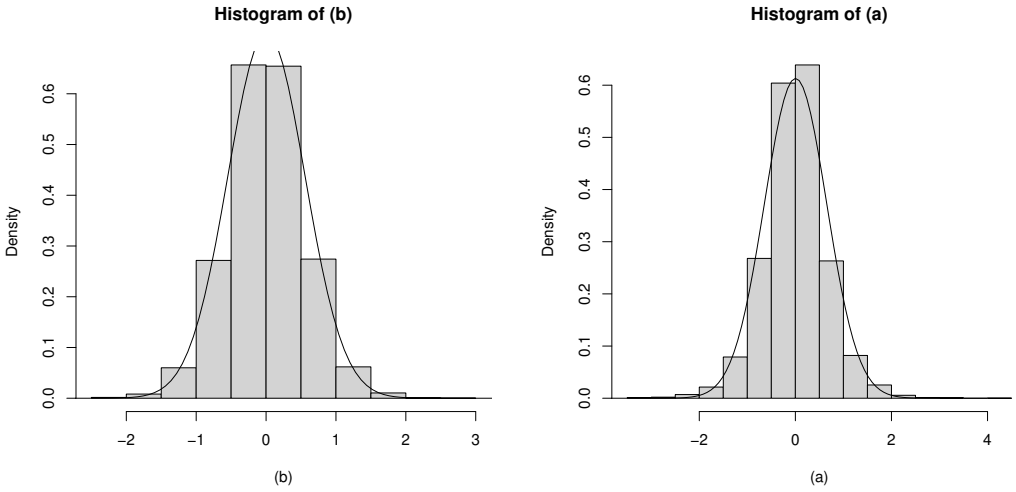
نتایج برآورد نقطه‌ای در جدول‌های ۱ با فرض هزینه‌های نمونه‌گیری به ترتیب ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۰۵ گزارش شده است. هم‌چنین نتایج احتمال پوشش ناحیه اطمینان در جدول ۲ برای $d = ۰/۸$ و ضریب اطمینان ٪۹۵ گزارش شده است. همانطور که از جدول‌های ۱ مشاهده می‌شود، تابع مخاطره حاصل از روش دنباله‌ای تسریع یافته با افزایش اندازه نمونه اولیه مقادیر نزدیک به روش اندازه نمونه ثابت دارد. میانگین مربعات خطای برآوردگرها نیز برای مقادیر مختلف اندازه نمونه اولیه ناچیز است. متغیر توقف روش دنباله‌ای تسریع یافته با افزایش اندازه نمونه به اندازه نمونه ثابت بهینه بسیار نزدیک و تفاضل نسبت آنها نیز کم می‌شود. هم‌چنین احتمال پوشش ناحیه اطمینان با افزایش اندازه نمونه اولیه به سمت مقدار یک میل می‌کند که نشان‌دهنده عملکرد خوب این روش است. نتایج برازش توزیع نرمال نشاندهنده تایید نتایج تئوری ارائه شده است. عملکرد روش دنباله‌ای تسریع یافته به روش اندازه نمونه ثابت بهینه با افزایش اندازه نمونه اولیه نزدیکی بسیار دارد.

جدول ۱: برآوردگرهای مدل بر اساس روش دنباله‌ای تسریع یافته با اندازه اولیه ۱۰.

$(n_\circ, c, \beta, \theta)$	$\hat{N_p}$	$\left(\frac{\hat{N_p}}{n_\circ} - ۱\right)$	$\hat{\mu}$	$\mathrm{MSE}(\hat{\mu})$	$R_{\hat{N}}/R_{n_\circ}$
$(۴۰, ۰/۰۰۵, ۰/۵, -۰/۳)$	۴۰.۴۲۴۵	۰.۴۲۴۵	۸.۵۵۳۴	۰.۲۱۰۷	۱.۰۳۳۰
$(۴۰, ۰/۰۰۵, ۰/۳, ۰/۲)$	۴۰.۰۰۳۹	۰.۰۰۳۹	۸.۶۶۷۶	۰.۱۲۱۰	۰.۸۰۳۶
$(۴۰, ۰/۰۰۵, ۰/۱, ۰/۵)$	۴۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۸.۷۵۱۴	۰.۷۸۱۰	۰.۶۹۵۳
$(۴۰, ۰/۰۰۵, ۰/۶, -۰/۲)$	۴۳.۴۳۶۲	۳.۴۳۶۲	۸.۴۷۲۸	۰.۳۰۱۳	۱.۲۹۷۴
$(۴۰, ۰/۰۰۵, ۰/۲, ۰/۳)$	۴۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲	۸.۷۱۸۳	۰.۰۹۴۷	۰.۷۳۷۰
$(۸۰, ۰/۰۰۰۵, ۰/۵, -۰/۳)$	۸۱.۰۳۹۴	۱.۰۳۹۴	۸.۸۱۹۸	۰.۰۳۷۱	۱.۱۰۳۶
$(۸۰, ۰/۰۰۰۵, ۰/۳, ۰/۲)$	۹۰.۹۷۶۰	۱۰.۹۷۶۰	۸.۸۵۷۲	۰.۲۸۵۰	۰.۹۲۶۸
$(۸۰, ۰/۰۰۰۵, ۰/۱, ۰/۵)$	۸۶.۱۴۲۷	۶.۱۴۲۷	۸.۸۸۱۳	۰.۲۱۹۰	۰.۸۳۳۸
$(۸۰, ۰/۰۰۰۵, ۰/۶, -۰/۲)$	۷۹.۰۰۱۲	۰.۰۰۱۲	۸.۸۱۹۱	۰.۰۷۸۰	۰.۹۸۶۷
$(۸۰, ۰/۰۰۵, ۰/۲, ۰/۳)$	۸۷.۶۳۳۸	۷.۶۳۳۸	۸.۸۷۱۲	۰.۰۲۴۰	۰.۹۰۵۳

جدول ۲: برآورد فاصله اطمینان میانگین

اندازه اولیه	(β, θ)				
	$(۰/۲, ۰/۳)$	$(۰/۶, -۰/۲)$	$(۰/۱, ۰/۵)$	$(۰/۳, ۰/۲)$	$(۰/۵, -۰/۳)$
۲۰	۰/۹۳۳۲	۰/۸۷۸۵	۰/۷۹۶۲	۰/۸۶۳۱	۰/۷۶۸۴
۳۰	۰/۹۶۴۸	۰/۹۲۲۶	۰/۸۲۷۹	۰/۹۱۴۲	۰/۸۰۹۸
۴۰	۰/۹۸۳۳	۰/۹۵۱۳	۰/۸۵۰۲	۰/۹۳۶۷	۰/۸۲۷۲
۵۰	۰/۹۸۹۰	۰/۹۶۲۵	۰/۸۷۳۳	۰/۹۶۲۵	۰/۸۷۷۴



شکل ۱: برازش توزیع نرمال بر هستوگرام برآودگر میانگین بر اساس متغیر توقف تسریع یافته بر اساس اندازه نمونه اولیه ۲۰ و ۵۰

۲.۲ . بحث و نتیجه‌گیری

هنگامی که پارامترهای مدل مجهول باشند، روش اندازه نمونه ثابت بهینه کاربردی ندارد. یکی از روش‌های جایگزین برای تعیین اندازه نمونه روش نمونه‌گیری دنباله‌ای است. از طرفی با توجه به کاربرد بسیار زیاد مدل های خطی در عمل به بررسی روش دنباله‌ای تسریع یافته پرداخته شده است. در مواقعی که پژوهشگر با محدودیت هزینه یا عدم دسترسی اندازه نمونه مواجه می شود روش جایگزینی برای حل محدودیت است. همانگونه که از نتایج مشاهده می شودعملکرد روش همچون روش اندازه نمونه ثابت در برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای می باشد.

مراجع

[1] Gombay, E. (2010). Sequential confidence intervals for time series. *Periodica Mathematica Hungarica*, **61**, 183-193.
[2] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2017). Risk efficient estimation of fully dependent random coefficient autoregressive models of general order. *Communications in Statistics -Theory and Methods*, **47**, 4242-4253.

[3] Karmakar, B. and Mukhopadhyay, I. (2019). Risk efficient sequential estimation of multivariate random coefficient autoregressive process. *Sequential Analysis*, **38**, 26-45.
[4] Mukhopadhyay, N. (1995). Sequential estimation of means of linear processes. *Metrika*, **42**, 279-290.
[5] Fakhre-Zakeri, I., Lee, S. (1992). Sequential estimation of the mean of a linear process. *Sequential Analysis*, **11**, 181-197.
[6] Fakhre-Zakeri, I., Lee, S. (1993). Sequential estimation of the mean vector of a multivariate linear process. *Multivariate Analysis*, **47**, 196-209.
[7] Ghosh, M., Mukhopadhyay, N., Sen, P.K. (1997). Sequential Estimation. *Wiley*, New York.
[8] Lee, S. (1996). Sequential estimation for the autocorrelations of linear processes. *The Annals of Statistics*, **24**, 2233-2249.
[9] Martinsek, A.T. (1983). Second order approximation to the risk of a sequential procedure. *The Annals of Statistics*, **11**, 827-836.
[10] Mahmoudi, Mohammad Reza., Maleki, Mohsen and Pak, Abbas. (2017). Testing the difference between two independent time series models. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, **41**, 665–669.
[11] Sriram, T. N. and Samadi, S. Y. (2019). Second-Order Analysis of regret for sequential estimation of the autoregressive parameter in Firat-Order Autoregressive model. *Sequential Analysis*, **38(3)**, 411-435.
[12] Sriram, T. N. (1987). Sequential estimation of the mean of a first-order stationary autoregressive process. *The Annals of Statistics*, **15**, 1079-1090.
[13] Sriram, T. N. (1988). Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first-order autoregressive process. *Sequential Analysis*, **7**, 53-74.
[14] Sriram, T. N. (2001). Fixed size confidence regions for parameters of threshold ar(1) models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **97**, 293-304.
[15] Sajjadipanah. S., Mahmoudi. E., and Zamani. M. (2021). Modified Two-Stage Sampling Around the Mean of the First Order Autoregressive Model. *Journal of Statistical Sciences*, 16: 127-148.
[16] Sajjadipanah. S., Mirjalili. SM., and Zanboori. A. (2023). Two-Stage and Modified Two-stage Estimation in Threshold First-Order Autoregressive Process. *Journal of Mahani Mathematical Research*, 12: 363-410.
[17] Sajjadipanah. S., Mirjalili. SM., and Mousavialiabadi. SM. (2023). Class of Modified Two-Stage Procedure in a Autoregressive Process. *Journal of Mathematical Extention* , 17:1-32.
[18] Sriram, T. N. and Laci, R. (2014). Sequential estimator for time series models. *Sequential Analysis*, **33**, 136-157.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، SP–142، صص. ۲۶۷–۲۷۰

شاخص نابرابری جینی چند متغیره و تابع مفصل

شهریار میرزائی*[آ]، مهدی کلانتری[ب]

[آ]گروه آمار دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[ب]گروه آمار دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
شاخص جینی چند متغیره
تابع مفصل
معیار متوسط انحراف جینی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
91B82
62P20

چکیده

شاخص جینی چند متغیره ابزاری قدرتمند برای سنجش نابرابری است که با در نظر گرفتن چندین متغیر به طور همزمان، تصویر جامع‌تری از نابرابری در جامعه ارائه می‌دهد. در این مقاله ضمن مروری بر تعریف شاخص نابرابری جینی، به معرفی شاخص نابرابری جینی دو متغیره و نیز تعمیم آن به شاخص نابرابری جینی چند متغیره می‌پردازیم. همچنین ارتباط بین شاخص جینی چند متغیره و تابع مفصل نیز مطالعه می‌شود. علاوه بر آن مفهوم کارائی بر اساس شاخص ضریب جینی چند متغیره و معیار متوسط انحرافات جینی چند متغیره ارائه می گردد.

۱. پیش‌گفتار

شاخص نابرابری جینی چند متغیره، ابزاری برای سنجش نابرابری در توزیع چندین متغیر به طور همزمان است. این شاخص می تواند در حوزه‌های مختلفی مانند اقتصاد، جامعه‌شناسی، بهداشت عمومی و ... کاربرد داشته باشد. برخلاف شاخص جینی تک متغیره که فقط نابرابری در توزیع یک متغیر (مثلاً درآمد) را بررسی می‌کند، شاخص جینی چند متغیره می‌تواند نابرابری در توزیع چندین متغیر مانند درآمد، تحصیلات، سلامت و ... را به طور همزمان در نظر بگیرد. این شاخص چند متغیره ابزاری قدرتمند برای سنجش نابرابری است که با در نظر گرفتن چندین متغیر به طور همزمان، تصویر جامع‌تری از نابرابری در جامعه ارائه می‌دهد. انتخاب روش مناسب برای محاسبه شاخص جینی چند متغیره می‌تواند چالش برانگیز باشد. یک روش برای محاسبه ضریب جینی چند متغیره استفاده از تابع مفصل است. می‌توان از تابع مفصل برای ساخت توزیع مشترک متغیرها استفاده کرد و سپس با استفاده از این توزیع مشترک، شاخص جینی چند متغیره را محاسبه نمود. به این ترتیب، تابع مفصل به عنوان یک ورودی برای محاسبه شاخص جینی چند متغیره عمل می‌کند. با انتخاب توابع مفصل مناسب، می‌توان مدل‌های مختلفی برای نابرابری چند متغیره ساخت. این مدل‌ها می‌توانند به درک بهتر عوامل مؤثر بر نابرابری و طراحی سیاست‌های مناسب برای کاهش آن کمک کنند.
فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع F و تابع چندک

$$F^{-1}(u) = \sup\{x : F(x) \le u\}, \quad \forall u \in [0, 1],$$

باشد. همچنین فرض می‌کنیم $0 < \mu = E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(t)dt < \infty$ که در آن $\bar{F} = 1 - F$ است. اکنون قرار دهید $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ یک بردار تصادفی با تابع توزیع احتمال توام $F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n)$ باشد. تابع توزیع احتمال چند متغیره می‌تواند

*شهریار میرزائی
پست الکترونیک : sh_mirzaee@pnu.ac.ir (شهریار میرزائی)، mahdi_kalantari@pnu.ac.ir (مهدی کلانتری)

بر اساس توزیع‌های احتمال حاشیه‌ای و با استفاده از تابع مفصل نگاشته شود. فرض کنید X یک بردار تصادفی با توابع توزیع احتمال حاشیه‌ای $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$ باشد، در این صورت تابع توزیع توام می تواند به صورت $F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))$ نگاشته شود که در آن C تابع مفصل برای بردار تصادفی Xاست (نلسن ۲۰۰۶ [۲]و پارسا و همکاران ۲۰۲۴ [۳]رابببنید). به ازای $x_1, ..., x_n \in R$ تابع بقا بردار X بصورت $\bar{F}_X(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n)$ تعریف می شود که این تابع می تواند بصورت

$$\bar{F}_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{C}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)), \quad (1)$$

نگاشته شود که در آن $\bar{C}$ را تابع مفصل بقا بردار X می نامند.

۲. شاخص نابرابری جینی

شاخص جینی و نیز معیار میانگین انحرافات جینی دو شاخص مهم در سنجش پراکندگی داده ها می باشند. معیار نابرابری جینی مشهورترین شاخص سنجش نابرابری درآمد در جامعه است. تعریف های متعددی از شاخص جینی و متوسط انحراف جینی ارائه شده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمال $F(t) = P(X \leq t)$ و نیز تابع بقای $\bar{F} = ۱ - F$ باشد در این صورت شاخص متوسط انحرافات جینی عبارت است از

$$GMD(X) = E|X - X'| = ۲\int_{۰}^{\infty} F(t)\bar{F}(t)dt, \quad (2)$$

که در آن X و X' نمونه های تصادفی و مستقل از تابع توزیع F هستند.

یک شاخص بهنجار بر اساس تعریف فوق با مقادیر بین صفر و یک، شاخص جینی می باشد که عبارت است از:

$$G(X) = \frac{GMD(X)}{۲E(X)}, \quad (3)$$

همچنین شاخص‌های میانگین انحرافات جینی و معیار جینی می‌توانند بر اساس کواریانس بین متغیر تصادفی و تابع توزیع احتمال آن بصورت

$$GMD(X) = ۴COV(X, F(X)), \quad G(X) = \frac{۲COV(X, F(X))}{E(X)}, \quad (4)$$

تعریف شوند (برای مطالعه بیشتر معیارهای شاخص متوسط انحرافات جینی و ضریب جینی به جورجی و گوبیوتی (۲۰۱۷) [۱] و یتزاکی و شکتمن (۲۰۱۷) [۴] مراجعه شود).

۳. شاخص نابرابری جینی دو متغیره

در این قسمت نسخه دو متغیره از شاخص متوسط انحراف جینی را بر اساس فرمول در ذیل معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی دو متغیره باشد. شاخص متوسط انحراف جینی دو متغیره (X, Y) عبارت است از:

$$GMD(X, Y) = E|X - Y|, \quad (5)$$

چون

$$|X - Y| = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\},$$

هر گاه قرار دهیم

$$U = \max\{X, Y\}$$

و

$$V = \min\{X, Y\}$$

داریم:

$$GMD(X, Y) = E(U) - E(V),$$

به همین شیوه میتوان شاخص جینی دو متغیره را به صورت:

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= \frac{GMD(X,Y)}{E(X)+E(Y)}, \\ &= \frac{E(U)-E(V)}{E(X)+E(Y)}, \\ &= \frac{E(U)-E(V)}{E(U)+E(V)}, \end{aligned}$$

تعریف نمود.

گزاره ۲.۳. *فرض کنید* (X,Y) *یک بردار تصادفی دو متغیره باشد. در این صورت:*

$$GMD(X,Y) \geq |E(X)-E(Y)| \tag{۶}$$

و

$$G(X,Y) \geq \frac{|E(X)-E(Y)|}{E(X)+E(Y)}. \tag{۷}$$

گزاره ۳.۳. *فرض کنید* (X,Y) *یک بردار تصادفی دو متغیره باشد. در این صورت به ازای* $a > ۰$ *داریم:*

$$P(X-a<Y<X+a) \geq ۱ - \frac{GMD(X,Y)}{a}. \tag{۸}$$

۴. شاخص نابرابری جینی چند متغیره

ما در این قسمت، به تعمیم شاخص جینی دو متغیره به حالت چند متغیره می‌پردازیم. فرض کنید $X=(X_۱,\dots,X_n)$ یک بردار تصادفی چند متغیره باشد. قرار می دهیم

$$X_{(۱)} = \min(X_۱,\dots,X_n), \quad X_{(n)} = \max(X_۱,\dots,X_n)$$

تعریف ۱.۴. فرض کنید $X=(X_۱,\dots,X_n)$ یک بردار تصادفی چند متغیره باشد. شاخص متوسط انحراف جینی چند متغیره بردار X عبارت است از:

$$\begin{aligned} GMD(X) &= GMD(X_{(۱)},\dots,X_{(n)}), \\ &= E(X_{(n)}) - E(X_{(۱)}). \end{aligned}$$

به همین شیوه شاخص جینی چند متغیره بردار X را می توان به صورت

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{GMD(X)}{E(X_{(n)})+E(X_{(۱)})}, \\ &= \frac{E(X_{(n)})-E(X_{(۱)})}{E(X_{(n)})+E(X_{(۱)})}, \end{aligned}$$

تعریف نمود. اگر $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه همتوزیع با تابع توزیع F باشد، در اینصورت

$$GMD(X) = \int \{۱ - \delta(F(t)) - \hat{\delta}(\bar{F}(t))\}dt, \tag{۹}$$

که در آن δ و $\hat{\delta}$ بترتیب مقاطع مورب توابع مفصل C و $\bar{C}$ هستند. همچنین اگر $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه مستقل و همتوزیع با تابع توزیع F باشد، در اینصورت

$$GMD(X) = \int_{۰}^{\infty} [۱-(F(t))^n - (\bar{F}(t))^n]dt. \tag{۱۰}$$

مثال ۲.۴. فرض کنید $X_1, \dots, X_n \sim U(0, 1)$ یک نمونه مستقل و همتوزیع باشد در اینصورت

$$GMD(X) = \int_0^1 \{1 - t^n - (1 - t^n)\}dt = \frac{n-1}{n+1},$$

واضح است که در این حالت

$$\lim_{n\to\infty} GMD(X) = 1.$$

چون $E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$ و $E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}$ و این نتیجه می‌دهد که $GMD(X) = G(X)$.

مثال ۳.۴. فرض کنید $X_1, \dots, X_n \sim \exp(1)$ یک نمونه مستقل و همتوزیع باشد، در اینصورت با قرار دادن $t = e^{-x}$ داریم

$$GMD(X) = \int_0^1 \{\frac{1 - t^n - (1 - t^n)}{t}\}dt = H(n) - \frac{1}{n},$$

که در آن $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$، در اینصورت، $\lim_{n\to\infty} GMD(X) = +\infty$ و علاوه بر آن $G(X) = \frac{nH(n)-1}{nH(n)+1}$.

۵. شاخص کارایی ضریب جینی در سیستم ها

تعریف ۱.۵. فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_n)$ یک بردار تصادفی و $T = \Phi(X_1, \dots, X_k)$ برای $k \le n$ ، طول عمر یک سیستم با تابع حقیقی Φ باشد. در اینصورت شاخص کارائی متوسط انحراف جینی چند متغیره عبارت است از:

$$GMD_n(T) = E(T) - E(X_{(1)}). \quad (11)$$

واضح است که: $GMD_n(X_{(n)}) = GMD(X)$ و $GMD_n(X_{(1)}) = 0$.
به همین روش شاخص کارایی ضریب جینی چند متغیره نیز به صورت

$$G_n(T) = \frac{GMD_n(T)}{GMD_n(X_{(n)})}, \quad (12)$$

تعریف می شود. قابل ملاحظه است که اگر $T \equiv X_{(1)}$ آنگاه $G_n(T) = 0$ و نیز اگر $T \equiv X_{(n)}$ آنگاه $G_n(T) = 1$ خواهد بود.

گزاره ۲.۵. *فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_n)$ یک بردار تصادفی و $T = \Phi(X_1, \dots, X_k)$ برای $k \le n$ ، طول عمر یک سیستم نیمه منسجم باشد، در اینصورت به ازای $c > 0$ داریم:*

$$P(T < X_{(1)} + c \times GMD(X_{(n)})) \ge 1 - \frac{G_n(T)}{c}. \quad (13)$$

۶. بحث و نتیجه گیری

شاخص جینی چند متغیره می تواند ابزاری قوی برای اندازه‌گیری نابرابری در توزیع همزمان متغیرهای پژوهش باشد و در حوزه‌هایی چون اقتصاد، جامعه‌شناسی و بهداشت عمومی کاربرد فراوان داشته باشد. این شاخص، برخلاف نوع تک متغیره خود که تنها نابرابری در یک متغیر (مانند درآمد) را می‌سنجد، نمای کلی‌تری از نابرابری در جامعه ارائه می‌دهد. برای محاسبه آن می‌توان از تابع مفصل استفاده کرد؛ توزیع مشترک متغیرها را می توان با تابع مفصل ساخت و سپس در محاسبه شاخص جینی چند متغیره به کار برد. به عبارتی، تابع مفصل ورودی محاسبه این شاخص است. انتخاب توابع مفصل مناسب، امکان ساخت مدل‌های مختلف نابرابری چند متغیره را فراهم می‌سازد که به درک بهتر عوامل نابرابری و طراحی سیاست‌های مؤثر برای کاهش آن کمک می‌کند.

مراجع

[1] G. M. Giorgi and S. Gubbiotti. Celebrating the memory of Corrado Gini: a personality out of the ordinary. *International Statistical Review*, 85:325–370, 2017.

[2] R. B. Nelsen, An Introduction to Copulas. *New York: Springer*, 2006.

[3] M. Parsa, H. Jabbari and J. Ahmadi, Some copula-based results on optimal number of cold standby components in parallel systems. *Stochastic Models in Probability and Statistics*, 2024.

[4] S. Yitzhaki, and E. Schechtman, The Gini methodology: a primer on a statistical methodology. *New York: Springer*, 2013.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AL–126، صص. ۲۷۱–۲۷۱

شرایط لازم و کافی برای تولید همزمان شبه گروه یکانی و گروه انقباضی توسط یک عملگر مشترک

مهرآسا آیت اللهی *،آ

آگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
C_0 شبه‌گروه
گروه یکانی
گروه انقباضی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
47D60
20M10

چکیده

مفهوم ریاضی C_0 شبه‌گروه دارای کاربرد گسترده‌ای در مطالعه معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی است. علاوه‌براین، در توصیف و تحلیل رفتار سیستم‌های کنترل خطی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ به عنوان مثال در تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی و پیش‌بینی رفتار بلند مدت آن‌ها می‌تواند مورد استفاده قرار گرفته و در نتیجه به عنوان یک ابزار قدرتمند، منجر به طراحی یک کنترل بهینه‌تر برای سیستم‌های دینامیکی شود. در این پژوهش، نشان می‌دهیم که اگر $(T(t))_{t\geq}$ یک C_0 شبه‌گروه یکانی با عملگر مولد A باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه گروه انقباضی به صورت $(T(t))_{t\in R}$ داشته باشیم این است که $-A$ نیز یک C_0 شبه‌گروه یکانی تولید کند.

*مهرآسا آیت اللهی
پست *الکترونیک :* m_ayatollahi@pnu.ac.ir (مهرآسا آیت اللهي)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، NA–149، صص. ۲۷۲–۲۷۹

بررسی روابط سببی با دو روش محاسبات مخزن و نگاشت متقابل همگرا روی داده‌های سری زمانی

ابوالقاسم بادلی *[،آ]، دکتر منوچهر بابانژاد[آ]، دکتر مجید عظیم محسنی[آ]

[آ]دانشگاه گلستان، دانشکده علوم، گروه آمار

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
روابط سببی
محاسبات منبع
نگاشت متقابل همگرا

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
62M10
62M20

چکیده

شناسایی روابط سببی بین سری‌های زمانی یکی از چالش‌های مهم در تحلیل داده‌های پیچیده است، به‌ویژه زمانی که این روابط غیرخطی و با تاخیرهای زمانی همراه باشند. در این مطالعه، به مقایسه دو روش پیشرفته محاسبات مخزن و نگاشت متقابل همگرا برای شناسایی روابط سببی در داده‌های سری زمانی پرداخته می‌شود. روش محاسبات مخزن با استفاده از یک شبکه عصبی بازگشتی ساده اما قدرتمند، قادر به مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است، در حالی که روش نگاشت متقابل همگرا بر اساس نظریه سیستم‌های دینامیکی، امکان شناسایی روابط سببی حتی در حضور تاخیرهای زمانی و وابستگی‌های غیرخطی را فراهم می‌کند. در این پژوهش، با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده، کارایی و دقت این دو روش در شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱. مقدمه

شناسایی روابط سببی بین سری‌های زمانی کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی، از جمله اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی و علوم اجتماعی دارد. این چالش ناشی از ماهیت پیچیده و غیرخطی روابط بین سری‌های زمانی است که ممکن است به صورت همزمان نباشند و با تاخیرهای زمانی همراه باشند. علاوه بر این، وجود نویز و عدم قطعیت در داده‌های واقعی، تحلیل این روابط را دشوارتر می‌کند.

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر یادگیری ماشین و محاسبات پیشرفته به عنوان ابزارهایی قدرتمند برای تحلیل داده‌های پیچیده و کشف روابط غیرخطی بین سری‌های زمانی مطرح شده‌اند. در این میان، روش محاسبات مخزن (Reservoir Computing) و روش نگاشت متقابل همگرا (Convergent Cross Mapping) به دلیل توانایی‌های منحصر به فرد خود در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و شناسایی روابط سببی، مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش محاسبات مخزن با استفاده از یک شبکه عصبی بازگشتی ساده اما قدرتمند، قادر است رفتار سیستم‌های پیچیده را با دقت بالا مدل‌سازی کند. از سوی دیگر، روش نگاشت متقابل همگرا، که بر اساس نظریه سیستم‌های دینامیکی توسعه یافته است، امکان شناسایی روابط سببی حتی در حضور تاخیرهای زمانی و وابستگی‌های غیرخطی را فراهم می‌کند. روش محاسبات مخزن در اوایل دهه ۲۰۰۰ توسعه یافت. این رویکرد به عنوان یک نوآوری در یادگیری ماشین و شبکه‌های عصبی شناخته می‌شود. جیگر و هاس (۲۰۰۷) مفهوم محاسبات مخزن را به طور رسمی معرفی کردند. این شبکه‌ها به دلیل ساختار ساده و کارایی بالا در مدل‌سازی دینامیک‌های زمانی، مورد توجه قرار گرفتند. RCC به سرعت در زمینه‌های مختلفی از جمله پیش‌بینی سری‌های زمانی، پردازش سیگنال و تحلیل داده‌های پیچیده به کار گرفته شد و از آن زمان، پژوهش‌های زیادی بر روی بهبود و گسترش این روش انجام شده است (هوانگ و همکاران (۲۰۲۱)).

از سوی دیگر، روش نگاشت متقابل همگرا در سال ۲۰۱۰ توسط سوگیهارا و همکاران معرفی شد. این روش به عنوان یک تکنیک برای شناسایی روابط سببی در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی توسعه یافت و بر اساس نظریه سیستم‌های دینامیکی و مفهوم همبستگی بنا شده است. ECCM به

* سخنران
پست *الکترونیک :* n_badeli@yahoo.com (ابوالقاسم بادلی)، m.babanezhad@gu.ac.ir (دکتر منوچهر بابانژاد)، m.azim@gu.ac.ir (دکتر مجید عظیم محسنی)

محققان این امکان را می‌دهد که روابط سببی را حتی در حضور تأخیرهای زمانی و نویز شناسایی کنند. این روش به ویژه در مطالعات اکولوژیکی و زیست‌محیطی به کار رفته است، جایی که شناسایی روابط سببی بین متغیرهای پیچیده و غیرخطی اهمیت دارد. ECCM به عنوان یک ابزار قدرتمند برای تحلیل داده‌های بزرگ و پیچیده در علوم مختلف شناخته می‌شود. روش‌های محاسبات مخزن و نگاشت متقابل همگرا به دلیل توانایی‌های منحصر به فرد خود در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و شناسایی روابط سببی، مورد توجه قرار گرفته‌اند. محاسبات مخزن با استفاده از یک شبکه عصبی بازگشتی ساده اما قدرتمند، قادر است رفتار سیستم‌های پیچیده را با دقت بالا مدل‌سازی کند. از سوی دیگر، روش نگاشت متقابل همگرا، که بر اساس نظریه سیستم‌های دینامیکی توسعه یافته است، امکان شناسایی روابط سببی حتی در حضور تأخیرهای زمانی و وابستگی‌های غیرخطی را فراهم می‌کند. در این مطالعه، به طور خاص، به مقایسه عملکرد این دو روش در شناسایی روابط سببی بین سری‌های زمانی پرداخته می‌شود. با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده، کارایی و دقت هر یک از این روش‌ها در شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف نهایی این پژوهش، ارائه یک چارچوب تحلیلی است که بتواند با دقت بالا و قابلیت اطمینان مناسب، روابط سببی بین سری‌های زمانی را شناسایی کرده و جزئیات این روابط را به طور دقیق مشخص کند. این پژوهش می‌تواند به عنوان گامی مهم در جهت بهبود روش‌های تحلیل داده‌های سری زمانی و کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی مورد استفاده قرار گیرد. (جاکوب رانج (۲۰۱۹)).

۲. مواد و روشها

تعریف ۱.۲ (رابطه سببی). می گوییم که Y_t باعث X_t می شود اگر بتوانیم X_t را با اطلاعات گذشته به همراه سری زمانی Y_t بهتر و با دقت بیشتری از زمانی که از اطلاعات گذشته غیر از Y_t استفاده شده باشد پیش بینی کنیم. در این حالت از نماد $Y_t \to X_t$ استفاده می‌کنیم. اگر تعریف فوق با جابه جایی دو سری برقرار باشد، می گوییم که بازخورد در حال وقوع است، که با $Y_t \leftrightarrow X_t$ نشان داده می شود، یعنی بازخورد زمانی اتفاق می افتد که X_t باعث Y_t شود و همچنین Y_t باعث X_t شود.

۳. مراحل الگوریتم CCM

فرض کنید دو سری زمانی X_t و Y_t داشته باشیم و بخواهیم رابطه سببی $X_t \to Y_t$ را مورد بررسی قرار دهیم.
گام اول: برای هر لحظه t بردار $E-۱$ بعدی زیر تشکیل می شود:

$$\tilde{X}_t = (X_t, X_{t-\tau}, X_{t-۲\tau}, \dots, X_{t-(E-۱)\tau})$$

تعیین بعد $E-۱$ کاملا وابسته به روند داده ها و ساختار آن می باشد. این مقدار بر اساس تجربیات گذشته و یا بر اساس معیارهای سری زمانی همچون تابع خودهمبستگی و خود همبستگی جزئی تعیین می گردد. برای روابط پیچیده تر می توان از آن به عنوان یک ابر پارامتر در الگوریتم استفاده کرد و طی الگوریتم بهینه سازی پیش بینی، مقدار آن را تعیین کرد. به عبارت دیگر مقدار آن را در هر مرتبه تا زمانی تغییر داد تا دیگر در دقت پیش بینی تغییر محسوسی ایجاد نشود.
گام دوم: مرتب سازی نزدیکترین همسایگی ها بر اساس فاصله های اقلیدسی همسایگان در بردار اطلاعات پیشین گام اول :

$$d_i = d(X_t, X_{t_i}),\ i = ۱, \cdots, E-۱$$

با مرتب کردن مقادیر فاصله می توان نزدیکترین همسایگان را به ترتیب مرتب کرد. متناسب با فواصل مرتب شده $d_{(۱)}, \cdots, d_{(E-۱)}$ میتوان زمانهای متناظر آنها را مشخص کرد. این زمانها را $t_{(۱)}, \cdots, t_{(E-۱)}$ می نامیم.
توجه کنید که در این روش، نزدیکترین همسایگان از زمانهای مجاور یا مضرب τ استفاده می شود.
گام سوم :
در این گام محاسبه وزن های

$$w_i = e^{-\frac{d_i}{d_{(۱)}}},\ i = ۱, \dots, E-۱$$

همانطور که در بخش ۲.۱.۲ بیان شد محاسبه می شود و سپس نرمال سازی می شود:

$$w_i' = w_i / w_+,\ i = ۱, \dots, E-۱$$

گام چهارم :
در این گام، تصویر سری زمانی Y_t بر خمینه سری زمانی X_t یعنی M_X به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_{M_X}^{Y_t} = \tilde{Y}_t = \sum_{i=۱}^{E-۱} w_i' \hat{Y}_{t_i}$$

که در آن $P_{M_X}^{Y_t}$ تصویر سری زمانی بر خمینه سری زمانی X_t و $\hat{Y}_{t_i}$ براورد سری زمانی Y_t در زمانهای ماقبل و مربوط به زمانهای خمینه X_t می باشد.
همانطور که مشخص است این رابطه یک رابطه بازگشتی است که در هر زمان به روز رسانی می شود. اگر طول سری زمانی n و بعد اطلاعات پیشین $E-1$ باشد، بازه زمانی قابل محاسبه از الگوریتم $t=(E-1)\tau,\cdots,n$ می باشد.
اگر رابطه سببی $X_t \to Y_t$ برقرار باشد انتظار داریم $\tilde{Y}_t$ به Y_t همگرا شود. به همین دلیل به این روش نگاشت متقابل همگرا گفته می شود.
گام پنجم :
ضریب همبستگی پیرسن بین $Y_{t+\tau}$ و $\hat{Y}_{t+\tau}$ یعنی $\rho_{XY}(\tau)=\mathrm{corr}(\hat{Y}_{t+\tau},Y_{t+\tau})$ به ازای مختلف τ محاسبه می‌گردد.

از این شاخص برای بررسی رابطه سببی $X_t \to Y_t$ استفاده می شود. هر چه $\rho_{XY}(\tau)$ به ۱ نزدیک تر باشد بیانگر این است که اطلاعات پیشین سری زمانی X_t برای پیش بینی سری زمانی Y_t کفایت لازم را داشته است و رابطه سببی بین دو سری زمانی وجود دارد. توجه کنید که با تغییر دادن بعد فضای پیشین می توان مقادیر پیش بینی را به ازای مقادیر مختلف تاخیر محاسبه کرد. با رسم نمودار $\rho_{XY}(\tau)$ در تاخیرهای مختلف، می توان تاخیر موثری که در آن همبستگی به بیشترین مقدار میرسد و یا به عبارت دیگر دقت پیش بینی در بهترین وضعیت ممکن است بدست آورد.
برای بررسی رابطه سببی $Y_t \to X_t$ در همه مراحل الگوریتم می توان جای دو سری زمانی را عوض کرد. اگر هر دو رابطه سببی تایید شد می توان گفت که رابطه سببی از نوع بازخورد می باشد.
رابطه سببی یک طرفه $X_t \to Y_t$ زمانی رخ می‌دهد که $\rho_{XY}(\tau)$ در تاخیرهای مثبت τ دارای پیک معنی‌دار باشد و یا به طور معادل $\rho_{YX}(\tau)$ در تاخیرهای منفی τ پیک معنی‌دار باشد. به همین صورت می‌توان در مورد رابطه $X_t \to Y_t$ قضاوت کرد.
رابطه سببی دو طرفه $X_t \leftrightarrow Y_t$ زمانی اتفاق می‌افتد که پیک معنی‌دار در هر دو تابع $\rho_{XY}(\tau)$ و $\rho_{YX}(\tau)$ در تاخیرهای منفی اتفاق بیفتد.

۱.۳ . *شبکه محاسبات منبع*

در این شبکه، بر اساس داده های ورودی، یک شبکه عصبی بازگشتی ایجاد میشود که وزنها و اتصالات آن به طور تصادفی انتخاب میشود. این شبکه داخلی نهایتاً هسته اصلی شبکه محاسبات منبع را شکل میدهد که به آن منبع گفته میشود. این شبکه داخلی پس از نهایی شدن وزنها، ثابت باقی میماند و به روزرسانی نمی شود. تفاوت اصلی این شبکه با سایر شبکه‌های عصبی در همین قسمت است، زیرا در سایر شبکه‌ها کل اجزای شبکه به صورت متوالی به روزرسانی میشوند. ثابت بودن اطلاعات منبع باعث میشود که مهمترین و پیچیده ترین اطلاعات در آن ذخیره شود و همچنین به روزرسانی سایر قسمتهای شبکه با سرعت بیشتری انجام گردد. قسمت دیگر شبکه محاسبات منبع، لایه خروجی است که در این قسمت به روزرسانی انجام میشود. این قسمت شامل اتصالات داده‌های خروجی به منبع است که تا رسیدن به ارتباط مناسب با منبع، به روزرسانی می شود. علاوه بر وزنهای فوق، تصویر معکوس خروجی بر داده های درونی در شبکه به روز رسانی میشود. فرض کنید w^{in} وزنهای شبکه ورودی منبع، w وزنهای اتصالات درونی منبع، w^{out} وزن اتصالات درونی و لایه خروجی و w_{back} وزن تصویر معکوس خروجی بر داده های درونی باشد. در این صورت، مقادیر درونی شبکه یعنی U_n ها توسط رابطه زیر محاسبه میشوند:

$$U_{n+1}=f(w^{in}x_{n+1}+wU_n+w^{back}y_n)$$

که در آن f یک تابع غیرخطی است که معمولاً تابع سیگموئید در نظر گرفته میشود. به وزنهای w^{back}، w و w^{in} وزنهای پژواک گفته می شود.پس از محاسبه مقادیر درونی، وزنهای مختلف که ترکیبی از خروجی منبع و تصویر معکوس خروجی است، مقادیر پیش‌بینی شبکه به صورت زیر محاسبه میشود:

$$y_{n+1}=f^{out}(w^{out}(x_{n+1},U_{n+1},y_n))$$

۲.۳ . *بررسی رابطه سببی به روش محاسبات منبع سببی*

برای بررسی رابطه سببی بین دو سری زمانی X_t و Y_t بصورت زیر عمل می کنیم:

گام اول

بر اساس مقادیر X_t، $Y_{t+\tau}$ به ازای مقادیر مختلف $-k \le \tau \le k$ پیش‌بینی می‌شود. مقادیر پیش‌بینی $\hat{Y}_{t+\tau}$ نامیده می‌شود.

گام دوم

بر اساس مقادیر Y_t، $X_{t+\tau}$ به ازای مقادیر مختلف $-k \le \tau \le k$ پیش‌بینی می‌شود. مقادیر پیش‌بینی $\hat{X}_{t+\tau}$ نامیده می‌شود.

گام سوم

ضریب همبستگی پیرسن بین $Y_{t+\tau}$ و $\hat{Y}_{t+\tau}$ یعنی $\rho_{XY}(\tau)=\mathrm{corr}(\hat{Y}_{t+\tau},Y_{t+\tau})$ به ازای مختلف τ محاسبه می‌گردد.

گام چهارم

ضریب همبستگی پیرسن بین $X_{t+\tau}$ و $\hat{X}_{t+\tau}$ یعنی $\rho_{YX}(\tau) = \mathrm{corr}(\hat{X}_{t+\tau}, X_{t+\tau})$ به ازای مختلف τ محاسبه می‌گردد.

گام پنجم

بر اساس $\rho_{XY}(\tau)$ و $\rho_{YX}(\tau)$ و ترسیم آنها به ازای تاخیرهای τ در مورد رابطه سببی تصمیم‌گیری می‌شود.

۴. نتایج عددی شبیه سازی

بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده و از مدل‌های خطی و غیرخطی به ارزیابی روش محاسبات منبع در آشکار کردن رابطه سببی بین دو سری زمانی پرداخته می‌شود.

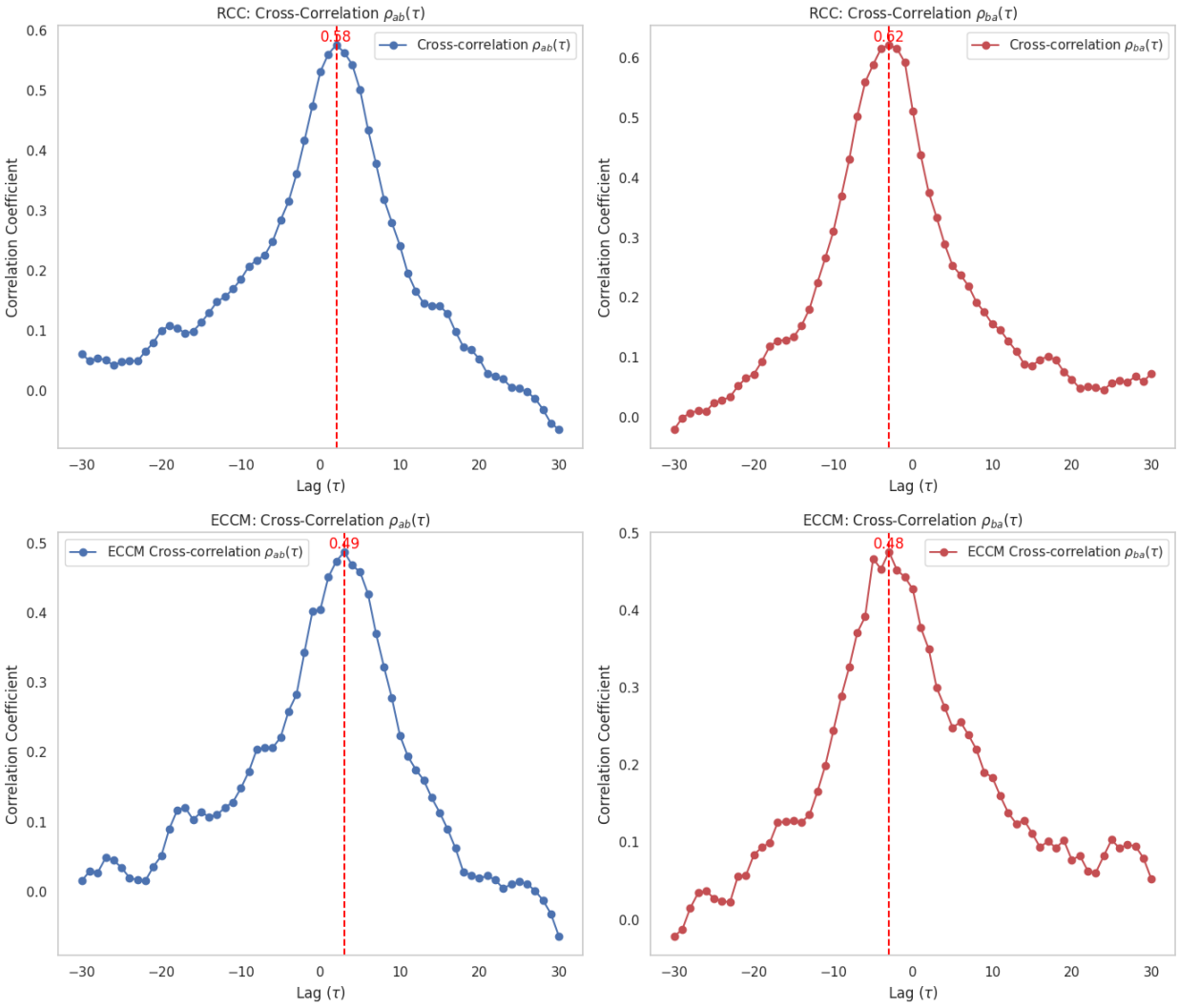
۴ .۱ . *مدل خطی*

برای ارزیابی روشهای پایان‌نامه مدل سببی $X_t \to Y_t$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$X_t = ۰/۸۵X_{t-۱} + \varepsilon_t^{(۱)} \qquad (۱)$$

$$Y_t = ۰/۸۵Y_{t-۱} + ۰/۲X_{t-۱} + \varepsilon_t^{(۲)} \qquad (۲)$$

که در آن $\varepsilon_t^{(۱)}$ و $\varepsilon_t^{(۲)}$ دو سری زمانی نوفه سفید نرمال مستقل با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ در نظر گرفته می‌شود. بر اساس یک سری زمانی ۵۰۰ تایی از سریهای زمانی X_t و Y_t، مقادیر $\hat{X}_{(t+\tau)}$ و $\hat{Y}_{(t+\tau)}$ به ازای تأخیرهای زمانی τ از ۳۰− تا ۳۰ بر حسب دو روش محاسبه گردید. سپس مقادیر $\rho_{XY}(\tau) = \mathrm{corr}(\hat{Y}_{t+\tau}, Y_{t+\tau})$ و $\rho_{YX}(\tau) = \mathrm{corr}(\hat{X}_{t+\tau}, X_{t+\tau})$ در هر دو روش محاسبه می‌گردد. انتظار می‌رود که لگهای $\rho_{XY}(\tau)$ در تاخیرهای مثبت و $\rho_{YX}(\tau)$ در تاخیرهای منفی دارای پیک معنی‌دار باشند. نمودار ۱ عملکرد دو روش محاسبات منبع (دونمودار بالا) و روش نگاشت متقابل همگرا (دو نمودار پایین) را در تعیین رابطه سببی بین دو سری‌زمانی را نشان می‌دهد. بر اساس این نمودار و مقدار پیک در آن مشخص است که درحالت خطی هر دو روش عملکرد یکسان و مناسبی در تعیین رابطه سببی بین دو سری‌زمانی داشته‌اند.



شکل ۱: همبستگی متقابل بین سری های زمانی پاسخ و پیش‌بینی در دو روش محاسبات منبع و نگاشت متقابل همگرا در مدل خطی

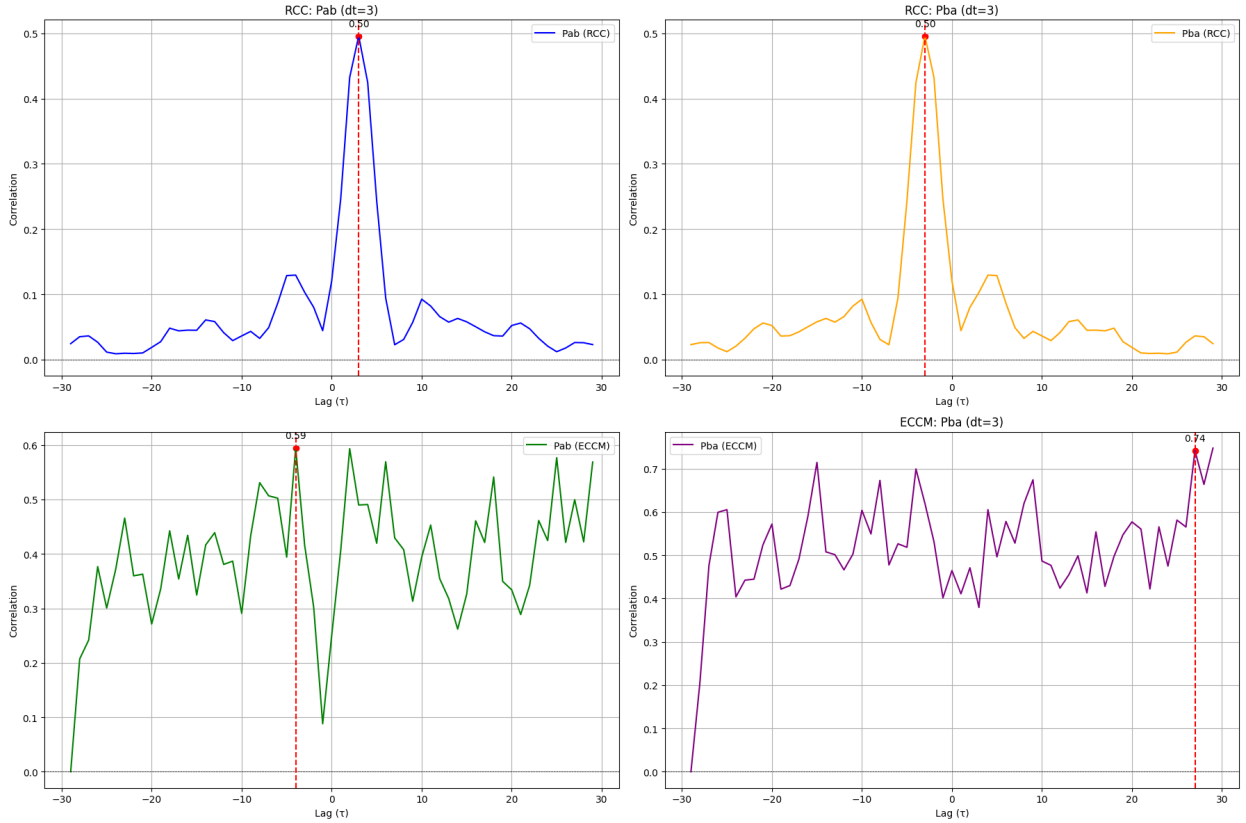
۲.۴ . *مدل غیرخطی با تأخیر*

رابطه سببی بین دو سری‌زمانی ممکن است با تأخیر بیش از یک گام اتفاق بیفتد. به عبارت دیگر، تأخیر در اثرگذاری یکی بر دیگری ممکن است طولانی باشد. در این بخش مسأله مورد بررسی این است که آیا این دو روش توانایی شناسایی میزان تأخیر در ارتباط سببی بین دو سری‌زمانی را دارند یا خیر. برای این بخش رابطه سببی $x_t \to y_t$ که دارای مدل زیر است در نظر گرفته می‌شود:

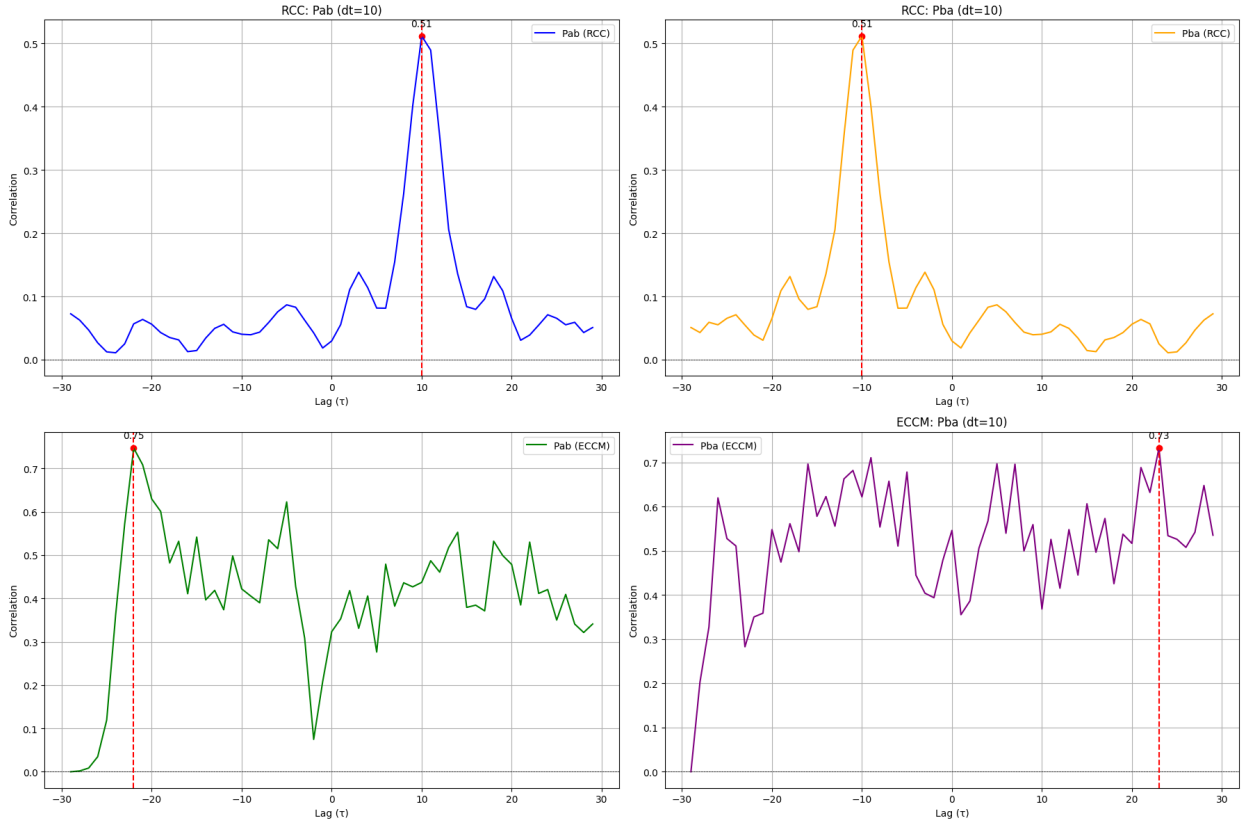
$$x_t = x_{t-1}(۳٫۷۸ - ۳٫۷۸x_{t-1}) \quad (۷)$$

$$y_t = y_{t-1}(۳٫۷۸ - ۳٫۷۸y_{t-1} - ۰٫۸x_{t-\tau}) \quad (۸)$$

که در آن τ_d تأخیر زمانی در ارتباط سببی بین دو سری‌زمانی میباشد. برای این کار یک بار فرض میشود $\tau_d = ۳$ و یک بار $\tau_d = ۱۰$ باشد. ۵۰۰ مشاهده از هر دو سری‌زمانی در هر دو حالت τ_d شبیه‌سازی می‌شود. سپس $\rho_{xy}(\tau)$ و $\rho_{yx}(\tau)$ به ازای تأخیر زمانی τ_d از ۳۰− تا ۳۰ در هر دو روش محاسبه و ترسیم گردید. نمودارهای ۲ و ۴۳ عملکرد دو روش محاسبات منبع (دونمودار بالا) و روش نگاشت متقابل همگرا (دو نمودار پایین) را در تعیین رابطه سببی بین دو سری‌زمانی را در دو حالت در نظر گرفته شده نشان می‌دهد. بر اساس این نمودارها و مقدار پیک در آن مشخص است که در این حالت روش محاسبات منبع دقیقا مقدار تاخیر در رابطه سببی بین دو سری‌زمانی را مشخص کرده است اما روش نگاشت متقابل در این حالت عملکرد خوبی نداشته است.



شکل ۲: همبستگی متقابل بین سری های زمانی پاسخ و پیش‌بینی در دو روش محاسبات منبع و نگاشت متقابل همگرا در مدل غیر خطی با تاخیر ۳



شکل ۳: همبستگی متقابل بین سری های زمانی پاسخ و پیش‌بینی در دو روش محاسبات منبع و نگاشت متقابل همگرا در مدل غیر خطی با تاخیر ۱۰

در این مطالعه، دو روش **محاسبات مخزن (Reservoir Computing)** و **نگاشت متقابل همگرا (Convergent Cross Mapping)** برای شناسایی روابط سببی بین سری‌های زمانی مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که هر دو روش در شناسایی روابط سببی در شرایط مختلف عملکرد متفاوتی دارند. در ادامه، نتایج اصلی این پژوهش به تفکیک بیان می‌شوند:

۴.۳. *مدل خطی*

در مدل خطی، هر دو روش **محاسبات مخزن** و **نگاشت متقابل همگرا** عملکرد مشابه و مناسبی در شناسایی رابطه سببی بین سری‌های زمانی نشان دادند. نمودارهای همبستگی متقابل در هر دو روش، پیک‌های معنی‌داری را در تاخیرهای مثبت و منفی نشان دادند که بیانگر وجود رابطه سببی یک‌طرفه $X_t \to Y_t$ است. این نتایج نشان می‌دهند که در مدل‌های خطی، هر دو روش قابلیت شناسایی روابط سببی را با دقت بالا دارند.

۴.۴. *مدل غیرخطی با تأخیر*

در مدل غیرخطی با تأخیر، نتایج نشان دادند که روش **محاسبات مخزن** نسبت به روش **نگاشت متقابل همگرا** عملکرد بهتری دارد. در حالی که روش محاسبات مخزن توانست رابطه سببی را حتی در شرایطی که تأخیر زمانی τ_d بین سری‌های زمانی وجود داشت (به عنوان مثال $\tau_d = ۳$ و $\tau_d = ۱۰$) شناسایی کند، روش نگاشت متقابل همگرا در این شرایط عملکرد ضعیفی داشت و نتوانست رابطه سببی را به طور واضح تشخیص دهد. این تفاوت عملکرد به ویژه در تاخیرهای زمانی بزرگتر مشهود بود. روش محاسبات مخزن به‌طور دقیق توانست تأخیرهای زمانی را شناسایی کند، در حالی که روش نگاشت متقابل همگرا در این زمینه موفق نبود.

۴.۵. *مقایسه کلی روش‌ها*

- **محاسبات مخزن**: این روش به دلیل استفاده از یک شبکه عصبی بازگشتی ساده اما قدرتمند، توانایی بالایی در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی دارد. نتایج نشان دادند که این روش در شناسایی روابط سببی، به ویژه در مدل‌های غیرخطی و در حضور تأخیرهای زمانی، عملکرد بهتری دارد.

- **نگاشت متقابل همگرا**: این روش بر اساس نظریه سیستم‌های دینامیکی عمل می‌کند و برای شناسایی روابط سببی در سیستم‌های غیرخطی طراحی شده است. با این حال، نتایج نشان دادند که این روش در شرایطی که رابطه بین سری‌های زمانی ضعیف است یا تأخیرهای زمانی طولانی وجود دارد، عملکرد ضعیفی دارد.

۴.۶. *کاربردهای عملی*

نتایج این مطالعه نشان می‌دهند که انتخاب روش مناسب برای شناسایی روابط سببی به ویژگی‌های داده‌ها و نوع رابطه سببی بستگی دارد. در مواردی که رابطه بین سری‌های زمانی خطی است، هر دو روش می‌توانند به خوبی عمل کنند. اما در مواردی که رابطه غیرخطی و پیچیده است یا تأخیرهای زمانی طولانی وجود دارد، روش **محاسبات مخزن** گزینه بهتری است. این یافته‌ها می‌توانند در حوزه‌های مختلفی مانند اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی و علوم اجتماعی مورد استفاده قرار گیرند.

۴.۷. *جمع‌بندی*

این مطالعه نشان داد که هر دو روش **محاسبات مخزن** و **نگاشت متقابل همگرا** قابلیت‌های منحصر به فردی در شناسایی روابط سببی بین سری‌های زمانی دارند. با این حال، روش **محاسبات مخزن** در شرایط غیرخطی و پیچیده، به ویژه در حضور تأخیرهای زمانی، عملکرد بهتری دارد. این پژوهش گامی مهم در جهت بهبود روش‌های تحلیل داده‌های سری زمانی و کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی محسوب می‌شود.

۴.۸. *پیشنهادات برای پژوهش‌های آینده*

- بررسی عملکرد این روش‌ها در داده‌های واقعی و مقایسه آن‌ها با روش‌های دیگر شناسایی روابط سببی.
- توسعه روش‌های ترکیبی که از مزایای هر دو روش استفاده کنند.
- بررسی تأثیر پارامترهای مختلف (مانند بعد خمینه و تعداد همسایه‌ها) بر دقت و کارایی روش‌ها.
- مطالعه بیشتر بر روی شناسایی تأخیرهای زمانی در روابط سببی و بهبود روش‌های موجود برای این منظور.

این نتایج می‌توانند به عنوان پایه‌ای برای پژوهش‌های آینده در زمینه شناسایی روابط سببی در داده‌های پیچیده مورد استفاده قرار گیرند.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–311، صص. ۲۸۰–۲۸۲

آشنایی با مجموعه فازی مردد تصویری

فاطمه باباکردی *،آ

آعضو هیأت علمی دانشگاه گنبدکاووس، گروه ریاضی و آمار

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
مجموعه فازی
مجموعه مردد
مجموعه فازی مردد تصویری

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

برای بررسی مسائل پیچیده تصمیم‌گیری چند معیاره، با ترکیب مجموعه فازی تصویری و مجموعه فازی مردد، مجموعه فازی مردد تصویری مطرح و اعمال روی ارائه می‌شود. از آنجایی که هر چه مدلبندی مسئله ریاضی پیچیدگی‌های بیشتری از مسئله دنیای واقعی را درنظر بگیرد، جواب مدل نیز به واقعیت نزدیکتر است و یکی از ابزارهای لازم برای درنظر گرفتن پیچیدگی متغیرها، مجموعه فازی مردد تصویری هستند در این مقاله جهت آشنایی هر چه بیشتر محققان با این دسته از مجموعه ها به مروری بر آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱. مقدمه

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی برای یک هدف خاص، ممکن است چندین طرح ممکن به عنوان جایگزین مطرح شود. تصمیم‌گیری چند معیاره، روشی برای تصمیم‌گیری است که برای رتبه‌بندی یا انتخاب بین طرح‌های مطرح شده، چندین معیار بایستی با هم در نظر گرفته شوند و این مسائل در زمینه‌های کاربردی زیادی اتفاق می‌افتد [۴–۶].

به طور سنتی، از اعداد حقیقی برای ارزیابی استفاده می‌شود ولی، در دنیای واقعی، داده‌ها مبهم و پیچیده هستند و تصمیم‌گیرندگان ممکن است هنگام ارزیابی گزینه‌ها نامطمئن باشند. برای مقابله با مبهم بودن اطلاعات ارزیابی، مجموعه فازی [۱۰] برای بهبود فرم اطلاعات پیشنهاد شد. در طول دهه‌های گذشته، تحقیقات زیادی در زمینه مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره فازی انجام شد [۵]. اگرچه مجموعه‌های فازی ابزاری معتبر برای بیان ارزیابی داده‌های نامشخص است، اما در بسیاری از مسائل دنیای واقعی پاسخگو نیستند. برای بیان مؤثرتر اطلاعات ارزیابی، بسیاری از اشکال تعمیم یافته FS پیشنهاد شد [۱–۳، ۷، ۹، ۱۱].

هدف از این مقاله مرور ابزاری جدید برای بیان اطلاعات است. نظریه مجموعه فازی مردد تصویری با ترکیب مفاهیم مجموعه فازی تصویری [۳] و مجموعه فازی مردد [۷] بیان شده است که این مجموعه به عنوان شکل تعمیم یافته از مجموعه فازی، مجموعه فازی شهودی [۱]، مجموعه فازی تصویری و مجموعه فازی مردد، می‌تواند عدم قطعیت و پیچیدگی را بیان کند.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف پایه‌ای مورد نیاز را بیان کرده و در بخش ۳ به آشنایی با مجموعه‌های فازی مردد تصویری و اعمال روی آن‌ها خواهیم پرداخت و سرانجام در بخش ۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای پژوهش‌های آتی مطرح خواهد شد.

*سخنران
پست *الکترونیک :* first.author@gmail.com (فاطمه باباکردی)

۲. تعاریف پایه‌ای

تعریف ۱.۲ ([۱۰]). یک مجموعه فازی به فرم

$$Q = \{\langle x, \mu_Q(x)\rangle | x \in X\} \quad (۱)$$

با شرط $۰ \leq \mu_Q(x) \leq ۱$ که $\mu_Q(x)$ درجه عضویت را نشان می‌دهد، ارائه می‌گردد و زوج $Q = \langle x, \mu_Q(x)\rangle$ عدد فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲ ([۷]). فرض کنید X مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی مردد روی X تابع h است که به هر عضو X زیر مجموعه‌ای از $[۰, ۱]$ را نسبت می‌دهد و با نمادگذاری ریاضی به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$H = \{\langle x, h_A(x)\rangle | x \in X\} \quad (۲)$$

که $h_A(x)$ مجموعه مقادیر از $[۰, ۱]$ می‌باشد که درجه عضویت‌های ممکن $x \in X$ به مجموعه $A \subset X$ را نمایش می‌دهد.

تعریف ۳.۲ ([۸]). فرض کنید X مجموعه متناهی و غیرتهی باشد، مجموعه فازی تصویری P روی X به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$P = \{\langle x, \mu_P(x), \eta_P(x), \nu_P(x)\rangle | x \in X\}, \quad (۳)$$

که $\mu_P(x)$، $\eta_P(x)$ و $\nu_P(x)$ به ترتیب توابع عضویت مثبت، خنثی و منفی متعلق به $[۰, ۱]$ در شرط $۰ \leq \mu_P(x) + \eta_P(x) + \nu_P(x) \leq ۱$ صدق می‌کنند.

۳. مجموعه فازی مردد تصویری

در این بخش به بررسی مجموعه‌های فازی مردد تصویری و اعمال حسابی روی آن‌ها می‌پردازیم [۸].

تعریف ۱.۳. فرض کنید X غیرتهی و متناهی باشد، مجموعه فازی مردد تصویری N روی X به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$N = \{\langle x, \tilde{\mu}(x), \tilde{\eta}(x), \tilde{\nu}(x)\rangle | x \in X\}, \quad (۴)$$

که $\tilde{\mu}(x) = \{\alpha | \alpha \in \tilde{\mu}(x)\}$، $\tilde{\eta}(x) = \{\beta | \beta \in \tilde{\eta}(x)\}$ و $\tilde{\nu}(x) = \{\gamma | \gamma \in \tilde{\nu}(x)\}$ سه تابع عضویت چند مقداره در $[۰, ۱]$ می‌باشند که به ترتیب درجه عضویت‌های منفی و خنثی و مثبت می‌باشند. درجه‌های فوق در شرط $۰ \leq \alpha^+ + \beta^+ + \gamma^+ \leq ۱$ صدق می‌کنند که $\alpha^+ = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mu}(x)} \max\{\alpha\}$، $\beta^+ = \bigcup_{\beta \in \tilde{\eta}(x)} \max\{\beta\}$ و $\gamma^+ = \bigcup_{\gamma \in \tilde{\nu}(x)} \max\{\gamma\}$، عنصر فازی مردد تصویری $\tilde{n} = \{\tilde{\mu}(x), \tilde{\eta}(x), \tilde{\nu}(x)\}$ نامیده می‌شود و برای سادگی کار به صورت $\tilde{n} = \{\tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{\nu}\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۳ ([۸]). فرض کنید $\tilde{n} = \{\tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{\nu}\}$، $\tilde{n}_۱ = \{\tilde{\mu}_۱, \tilde{\eta}_۱, \tilde{\nu}_۱\}$ و $\tilde{n}_۲ = \{\tilde{\mu}_۲, \tilde{\eta}_۲, \tilde{\nu}_۲\}$ سه عنصر فازی مردد تصویری و $\lambda > ۰$ و $\tilde{n}^c$ مجموعه متمم $\tilde{n}$ باشند، آنگاه اعمال روی عنصر فازی مردد تصویری به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{n}^c = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mu}, \beta \in \tilde{\eta}, \gamma \in \tilde{\nu}} \{\{\gamma\}, \{\beta\}, \{\alpha\}\} \quad (۵)$$

$$\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲ = \{\tilde{\mu}_۱ \oplus \tilde{\mu}_۲, \tilde{\eta}_۱ \oplus \tilde{\eta}_۲, \tilde{\nu}_۱ \oplus \tilde{\nu}_۲\} = \bigcup_{\alpha_۱ \in \tilde{\mu}_۱, \beta_۱ \in \tilde{\eta}_۱, \gamma_۱ \in \tilde{\nu}_۱, \alpha_۲ \in \tilde{\mu}_۲, \beta_۲ \in \tilde{\eta}_۲, \gamma_۲ \in \tilde{\nu}_۲} \{\{\alpha_۱ + \alpha_۲ - \alpha_۱\alpha_۲\}, \{\beta_۱\beta_۲\}, \{\gamma_۱\gamma_۲\}\}; \quad (۶)$$

$$\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲ = \{\tilde{\mu}_۱ \oplus \tilde{\mu}_۲, \tilde{\eta}_۱ \oplus \tilde{\eta}_۲, \tilde{\nu}_۱ \oplus \tilde{\nu}_۲\} = \bigcup_{\alpha_۱ \in \tilde{\mu}_۱, \beta_۱ \in \tilde{\eta}_۱, \gamma_۱ \in \tilde{\nu}_۱, \alpha_۲ \in \tilde{\mu}_۲, \beta_۲ \in \tilde{\eta}_۲, \gamma_۲ \in \tilde{\nu}_۲} \{\{\alpha_۱\alpha_۲\}, \{\beta_۱ + \beta_۲ - \beta_۱\beta_۲\}, \{\gamma_۱ + \gamma_۲ - \gamma_۱\gamma_۲\}\}; \quad (۷)$$

$$\lambda\tilde{n} = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mu}, \beta \in \tilde{\eta}, \gamma \in \tilde{\nu}} \{\{۱ - (۱ - \alpha)^\lambda\}, \{\beta^\lambda\}, \{\gamma^\lambda\}\}; \quad (۸)$$

$$\tilde{n}^\lambda = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mu}, \beta \in \tilde{\eta}, \gamma \in \tilde{\nu}} \{\{\alpha^\lambda\}, \{۱ - (۱ - \beta)^\lambda\}, \{۱ - (۱ - \gamma)^\lambda\}\}. \quad (۹)$$

مثال ۳.۳ ([۸]). فرض کنید $\tilde{n}_۱ = \{\{۰/۳, ۰/۴\}, \{۰/۲\}, \{۰/۲, ۰/۳\}\}$ و $\tilde{n}_۲ = \{\{۰/۳\}, \{۰/۲, ۰/۳\}, \{۰/۱, ۰/۲\}\}$ دو عنصر فازی مردد تصویری باشند و $\lambda = ۲$ آنگاه

(۱) $\tilde{n}_۱^c = \{\{۰/۲, ۰/۳\}, \{۰/۲\}, \{۰/۳, ۰/۴\}\}, \tilde{n}_۲^c = \{\{۰/۱, ۰/۲\}, \{۰/۲, ۰/۳\}, \{۰/۳\}\}$؛

(۲) $\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲ = \{\{۰/۵۱, ۰/۵۸\}, \{۰/۰۴, ۰/۰۶\}, \{۰/۰۲, ۰/۰۳, ۰/۰۴, ۰/۰۶\}\}$؛

(۳) $\tilde{n}_۱ \otimes \tilde{n}_۲ = \{\{۰/۰۹, ۰/۱۲\}, \{۰/۳۶, ۰/۴۴\}, \{۰/۲۸, ۰/۳۶, ۰/۳۷, ۰/۴۴\}\}$؛

(۴) $\lambda\tilde{n}_۱ = \{\{۰/۵۱, ۰/۶۴\}, \{۰/۰۴\}, \{۰/۰۴, ۰/۰۹\}\}, \lambda\tilde{n}_۲ = \{\{۰/۵۱\}, \{۰/۰۴, ۰/۰۹\}, \{۰/۰۱, ۰/۰۴\}\}$؛

(۵) $\tilde{n}_۱^\lambda = \{\{۰/۰۹, ۰/۱۶\}, \{۰/۳۶\}, \{۰/۳۶, ۰/۵۱\}\}, \tilde{n}_۲^\lambda = \{\{۰/۰۹\}, \{۰/۳۶, ۰/۵۱\}, \{۰/۱۹, ۰/۳۶\}\}$.

Let $\tilde{n} = \{\tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{\nu}\}, \tilde{n}_۱ = \{\tilde{\mu}_۱, \tilde{\eta}_۱, \tilde{\nu}_۱\}$, and $\tilde{n}_۲ = \{\tilde{\mu}_۲, \tilde{\eta}_۲, \tilde{\nu}_۲\}$PHFEs three be, $\lambda, \lambda_۱, \lambda_۲ > ۰$, then

قضیه ۴.۳ ([۸]). *فرض کنید* $\tilde{n} = \{\tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{\nu}\}$، $\tilde{n}_۱ = \{\tilde{\mu}_۱, \tilde{\eta}_۱, \tilde{\nu}_۱\}$ و $\tilde{n}_۲ = \{\tilde{\mu}_۲, \tilde{\eta}_۲, \tilde{\nu}_۲\}$ *سه عنصر فازی مردد تصویری و* $\lambda, \lambda_۱, \lambda_۲ > ۰$ *آنگاه*

(۱) $\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲ = \tilde{n}_۲ \oplus \tilde{n}_۱$؛

(۲) $\tilde{n}_۱ \otimes \tilde{n}_۲ = \tilde{n}_۲ \otimes \tilde{n}_۱$؛

(۳) $\lambda(\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲) = \lambda\tilde{n}_۱ \oplus \tilde{n}_۲$؛

(۴) $(\tilde{n}_۱ \otimes \tilde{n}_۲)^\lambda = \tilde{n}_۱^\lambda \otimes \tilde{n}_۲^\lambda$؛

(۵) $\lambda_۱\tilde{n} \oplus \lambda_۲\tilde{n} = (\lambda_۱ + \lambda_۲)\tilde{n}$؛

(۶) $\tilde{n}^{\lambda_۱} \otimes \tilde{n}^{\lambda_۲} = \tilde{n}^{(\lambda_۱ + \lambda_۲)}$؛

(۷) $(\tilde{n}^{\lambda_۱})^{\lambda_۲} = \tilde{n}^{\lambda_۱\lambda_۲}$.

۴. نتیجه‌گیری

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، اطلاعات ارزیابی نامشخص و پیچیده به ناچار توسط تصمیم‌گیرندگان ارائه می‌شود. به عنوان مثال، ده مدیر تجاری درباره یک پروژه سرمایه‌گذاری بحث می‌کنند. پنج نفر نظرموافق، دو نفر مخالفت می‌کنند و سایر مدیران کسب و کار دارای نظر ممتنع هستند و همچنین تصمیم‌گیرندگان نظرات خود را در هر حالت با چندین مقدار ممکن، مطرح می‌کنند. بدیهی است که مجموعه فازی فقط می‌تواند درجه عضویت اطلاعات ارزیابی را نشان دهد و نظرات ده مدیر تجاری نمی‌تواند توسط مجموعه فازی ارائه گردد. لذا در این مقاله به مرور ابزاری جدید به نام مجموعه فازی مردد تصویری برای بیان این نوع اطلاعات که شامل درجات عضویت مثبت، خنثی، منفی با چندین مقدار ممکن که توسط تصمیم‌گیرندگان ارائه می‌شود، می‌باشند. در پژوهش بعدی به معرفی مجموعه فازی مردد تصویری نرم و کاربرد آن در مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره خواهیم پرداخت.

مراجع

[1] K.T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst.*, 20:87–96, 1986.

[2] K.T. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst.*, 31:343–349, 1989.

[3] Bùi Công Cường. Picture fuzzy sets. *Journal of Computer Science and Cybernetics*, 30(4):409–409, 2014.

[4] Fernando López Hernández, Elena Giménez de Ory, Sergio Ríos Aguilar, and Rubén González Crespo. Residue properties for the arithmetical estimation of the image quantization table. *Applied Soft Computing*, 67:309–321, 2018.

[5] Abbas Mardani, Ahmad Jusoh, and Edmundas Kazimieras Zavadskas. Fuzzy multiple criteria decision-making techniques and applications–two decades review from 1994 to 2014. *Expert systems with Applications*, 42(8):4126–4148, 2015.

[6] Juan Antonio Morente-Molinera, Gang Kou, Rubén González-Crespo, Juan M Corchado, and Enrique Herrera-Viedma. Solving multi-criteria group decision making problems under environments with a high number of alternatives using fuzzy ontologies and multi-granular linguistic modelling methods. *Knowledge-Based Systems*, 137:54–64, 2017.

[7] Vicenç Torra. Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, 25(6):529–539, 2010.

[8] Rui Wang and Yanlai Li. Picture hesitant fuzzy set and its application to multiple criteria decision-making. *Symmetry*, 10(7):295, 2018.

[9] Jun Ye. Trapezoidal neutrosophic set and its application to multiple attribute decision-making. *Neural computing and Applications*, 26: 1157–1166, 2015.

[10] Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.

[11] Bin Zhu, Zeshui Xu, and Meimei Xia. Dual hesitant fuzzy sets. *Journal of Applied mathematics*, 2012(1):879629, 2012.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، AN–298، صص. ۲۸۳–۲۸۴

R–نت‌ها و SR–نت‌ها در فضای R–توپولوژی

مریم نادری پاریزی*

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
R–نت
SR–نت
فضای R–توپولوژی
فضای SR–توپولوژی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

در این مقاله مفهوم جدیدی از فضای توپولوژیکی بر اساس روابط معرفی شده است. این فضاهای توپولوژیکی، فضاهای R–توپولوژی و SR- توپولوژی نامیده می‌شوند. در این مقاله، مثال‌هایی از R–نت‌ها و SR–نت‌ها آمده است و به برخی از خواص آنها اشاره شده است.

۱. مقدمه

در سال ۲۰۲۰ اسحاقی و همکارانش در [۴] کلاس جدیدی از تعمیم فضاهای متریک معرفی نمودند که به فضاهای R–متریک معروفند و در [۴] کاربردهایی از این فضاها آمده است. همچنین در [۳] R–نت و SR–نت را تعریف نمودند و به برخی از خواص توپولوژیکی آنها پرداخته‌اند. در سرتاسر این مقاله، فرض می‌کنیم X یک مجموعه غیر تهی و τ یک توپولوژی روی X و R یک رابطه روی X باشد.

۲. R–نت و SR–نت

تعریف ۱.۲. یک نت $\{x_j\}_{j\in J}$ در X را یک R –نت می‌نامیم اگر $x_i\, R\, x_j$ برای هر $i,j \in J$ به‌طوری‌که $i \leq j$ و SR–نت گوییم هرگاه $x_i\, R\, x_j$ برای هر $i,j \in J$.

مثال ۲.۲. فرض کنیم $\{U$ از پایین کراندار$|\mathbb{R} \subseteq J = \{U$ با شمول معکوس مرتب باشد یعنی $U \leq W$ اگر و فقط اگر $W \subseteq U$. مجموعه $X = \mathbb{R}$ و رابطه $R :=\leq$ را در نظر می‌گیریم. $x_U = \inf U$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $U \leq W$ بنابراین $W \subseteq U$ و $\inf U \leq \inf W$ با توجه به تعریف x_U داریم $x_U \leq x_W$. بنابراین $\{x_U\}_{U\in J}$ یک R–نت می‌باشد.

مثال ۳.۲. $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ را در نظر می‌گیریم. $J = P(\mathbb{N})$ با شمول معکوس مرتب است یعنی $U \leq W$ اگر و فقط اگر $W \subseteq U$. قرار می‌دهیم $R :=\leq$ و

$$x_U = \begin{cases} \min U & U \neq \emptyset \text{ اگر} \\ 0 & U = \emptyset \text{ اگر} \end{cases}$$

*سخنران
پست *الکترونیک :* M.Naderi.Parizi@pnu.ac.ir (مریم نادری پاریزی)

اگر $U \leq V$ آنگاه $V \subseteq U$ بنابراین $\min U \leq \min V$ پس $x_U \leq x_V$. در نتیجه $\{x_U\}_{U\in J}$ یک Rـنت می‌باشد.

مثال ۴.۲. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی و τ یک توپولوژی روی $P(A)$ باشد. اگر R را رابطه شمول روی $P(A)$ در نظر بگیریم و قرار دهیم $J = P(A)$ با شمول معکوس. سپس $\{x_U\}_{U\in J}$ که $x_U = U^c$ یک Rـنت می‌باشد.

لم ۵.۲. *رابطه $R = X \cdot X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت هر نت یک Rـنت و SRـنت می‌باشد.*

لم ۶.۲. *هر SRـنت یک Rـنت است. اما عکس این مطلب درست نیست. مثال ۲.۲ را ببینید.*

لم ۷.۲. *لم: فرض کنیم $R : X \to X$ یک تابع یک‌به‌یک باشد و $\{x_j\}_{j\in J}$ یک Rـنت باشد. در این‌صورت $\{x_j\}_{j\in J}$ ثابت است.*

اثبات. فرض کنیم i, j دو عضو از J باشند در این‌صورت $L \in J$ وجود دارد به‌طوری‌که $i \leq L$ و $j \leq L$. بنابراین $R(x_i) = x_L$ و $R(x_j) = x_L$. زیرا $\{x_j\}$، Rـنت است. چون R یک به یک است پس $x_i = x_j$ در نتیجه $\{x_j\}_{j\in J}$ ثابت است. □

۳. Rـهمگرایی و SRـهمگرایی

تعریف ۱.۳. یک Rـنت (SRـنت) $\{x_j\}_{j\in J}$ را Rـهمگرا (SRـهمگرا) به $x \in X$ گوییم و می‌نویسیم $x_j \xrightarrow{R} x$ ($x_j \xrightarrow{SR} x$) هرگاه برای هر همسایگی U از x، وجود داشته باشد $j_\circ \in J$ به‌طوری‌که $x_j \in U$ برای هر $j \geq j_\circ$.

یادداشت: در مثال قبل چون هر Rـنت (SRـنت) ثابت است پس Rـهمگرا می‌باشد.

مثال ۲.۳. $X = \mathbb{R}$ را با توپولوژی استاندارد در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $R := \geq$ و فرض می‌کنیم $J = (0, +\infty), \leq)$ یک مجموعه مرتب باشد. $x \in X$ و $x_j = \frac{x}{j}$ که $j \in J$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح $\{x_j\}_{j\in J}$ یک Rـنت می‌باشد که Rـهمگرا به صفر است.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $E \subseteq X$. نقطه‌ی $x_\circ \in X$ یک نقطه Rـحدی (SRـحدی) از E گفته می‌شود اگر یک Rـنت (SRـنت) $\{x_j\}_{j\in J}$ در $E \setminus \{x_\circ\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_j \xrightarrow{R} x_\circ$ ($x_j \xrightarrow{SR} x$).
مجموعه همه نقاط Rـحدی (SRـحدی) از E با E'^R (E'^{SR}) نشان داده می‌شود.

مثال ۴.۳. در مثال قبل، فرض کنیم $E = (0, \infty)$ در اینصورت ۰ یک نقطه Rـحدی از E می‌باشد.

تعریف ۵.۳. $E \subseteq X$ را در نظر بگیرید. E، Rـبسته (SRـبسته) نامیده می‌شود اگر E شامل همه نقاط Rـحدی (SRـحدی) خود باشد. یعنی $E'^R \subseteq E$ ($E'^{SR} \subseteq E$).

تعریف ۶.۳. $E \subseteq X$، Rـباز (SRـباز) نامیده می‌شود اگر E^c، Rـبسته (SRـبسته) باشد.

قضیه ۷.۳. *قرار دهید $\tau_R = \{U \subseteq X | U, R - \text{باز است}\}$ ($\tau_{SR} = \{U \subseteq X | U, SR - \text{باز است}\}$) در این‌صورت τ_R، (τ_{SR}) یک توپولوژی روی X است که Rـتوپولوژی (SRـتوپولوژی) نامیده می‌شود و (X, τ_R) یک فضای R- توپولوژی همچنین (X, τ_{SR}) فضای SRـتوپولوژی نام دارد.*

قضیه ۸.۳. $\tau \subseteq \tau_R \subseteq \tau_{SR}$

مراجع

[1] Baghani, H., Gordji, M.E., Ramezani, M.: Orthogonal sets, the axiom of choice and proof of a fixed point theorem. J. Fixed Point Theory Appl. **18**(3), 465–477 (2016)
[2] Berge, C.: Topological Spaces, Including a Treatment of Multivalued. Dover Publications, New York (2010)
[3] Khalehoghli, S., Rahimi, H., Gordji, M.E.: R topological spaces and SR topological spaces with their applications. Mathematical Sciences 14:249–255 (2020)
[4] Khalehoghli, S., Rahimi, H., Gordji, M.E.: Fixed point theorems in R-metric spaces with applications. AIMS **5**(4), 3125–3137 (2020)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–312، صص. ۲۸۵–۲۸۵

مسئله حمل و نقل دوقطبی مختلط فازی

فاطمه باباکردی*،آ

آعضو هیأت علمی دانشگاه گنبدکاووس، گروه ریاضی و آمار

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
مجموعه فازی
مسئله حمل و نقل

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

مسئله حمل و نقل یکی از پرکاربردترین و ملموس ترین مسائل برنامه ریزی خطی است که در انواع مسائل عملی کاربرد دارد. هدف این مسئله، یافتن یک طرح انتقال بهینه با مینیموم‌سازی هزینه حمل کالا میباشد بطوریکه با استفاده از منابع موجود در مبدا، خواسته های مقصد برآورده شود. مسائل حمل و نقل معمولی فرض می کنند که مقادیر هزینه های حمل و نقل و مقادیر تقاضا و عرضه توسط متغیرهای حقیقی تعریف می شوند، درصورتیکه این مقادیر در مسائل حمل و نقل به دلیل برخی عوامل غیر قابل کنترل، غیرقابل پیش بینی هستند. مطالعه حاضر زمانی که تمام پارامترها اعداد فازی دوقطبی مختلط هستند، مسئله حمل و نقل را فرموله می‌کند و از ساختار بهینه‌سازی جدید برای به دست آوردن جوابی کاربردی برای مسئله نهایی استفاده می‌کند. مزایای روش پیشنهادی این است که ورودی های مسئله به فرم اعداد فازی دوقطبی مختلط در نظر گرفته شده یعنی پیچیدگی‌های مسئله دنیای واقعی درمتغیرهای ورودی مدل دیده شده بنابراین جواب نهایی نیز واقعی و کاربردی تر خواهد بود.

*سخنران
پست *الکترونیک :* first.author@gmail.com (فاطمه باباکردی)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–313، صص. ۲۸۶–۲۸۶

تبدیل فوریه دوقطبی مختلط فازی برای حل معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی

فاطمه باباکردی*،آ

آعضو هیأت علمی دانشگاه گنبدکاووس، گروه ریاضی و آمار

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
مجموعه فازی
تبدیل فوریه دوقطبی

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
34B16
34B40
65M70

چکیده

این مقاله جواب دقیق معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی براساس تبدیل فوریه دوقطبی مختلط فازی تحت مشتق‌پذیری جزئی هاکوهارای تعمیم یافته ارائه می‌کند. تبدیل فوریه دوقطبی مختلط فازی تعریف و ویژگی‌های اساسی بررسی می‌شود. در ادامه، مدلی از معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی با استفاده از مشتق‌پذیری هاکوهارای تعمیم یافته ساخته می‌شود و جواب تحلیلی معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی با روش تبدیل فوریه دو قطبی مختلط مورد بررسی قرار می‌گیرد. مثالهای عددی کارایی روش پیشنهادی را نشان میدهد و نوع مشتق‌پذیری و حل معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی به صورت گرافیکی نشان داده شده است، که تطبیق پذیری روش پیشنهادی و تأثیر انواع مشتق‌پذیری بر رفتار جواب معادله حرارت دوقطبی مختلط فازی را نشان می دهد.

*سخنران
پست *الکترونیک :* first.author@gmail.com (فاطمه باباکردی)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، FM–123، صص. ۲۸۷–۲۹۵

مکان‌یابی برای ساخت و ساز به کمک شاخص رندیک از گراف فازی مبهم

علیمحمد فلاح اندواری*،آ

آ استادیار دانشگاه فرهنگیان مازندران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
گراف فازی مبهم
شاخص رندیک
کاربرد

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۲۰):
05C99
03E72

چکیده

مقاله‌ای که پیش روی شماست، ابتدا به معرفی گراف فازی ساده، گراف فازی مبهم، درجهٔ همسایگی باز از یک رأس و یکی از شاخص‌های مهم آن، یعنی شاخص رندیک که در پیدا کردن بهترین مکان برای ساخت و ساز استفاده می‌شود، می‌پردازد. در ادامه، به کاربرد آن شاخص، یعنی پیدا کردن مکان مناسب برای ساخت درمانگاه شبانه‌روزی مناطق کوهستانی شهرستان آمل، یعنی روستاهای ییلاقی آهن‌سر، مریجون، تیران شیرکلا، اندوار و نشل که مناطقی صعب‌العبور و با جمعیت ثابت کم هستند پرداخته و به کمک شاخص رندیک که تابع عضویت رأس‌های آن کیفیت جاده‌ها و جمعیت ثابت و ساکن آنها در تمام فصول از سال است، در نظر گرفته شد. به یک نتیجهٔ علمی رسیده است که در بین این روستاها، اندوار بهترین مکان برای ساخت درمانگاه شبانه‌روزی تشخیص داده شد.

۱. مقدمه

گراف در ریاضیات دستکم دارای دو معنی است:

۱. در ریاضیات پایه، گراف به نمودار یک تابع اشاره دارد و در اصطلاح ریاضیدانان، گراف مجموعه‌ای از نقاط و خطوط به هم پیوسته است.
۲. گراف مدلی ریاضی.

گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعهٔ گسسته است که اعضایش به شیوه‌ای با هم پیوند دارند. به عنوان مثال، اعضای این مجموعه می‌توانند چند انسان باشند و ارتباط میان آنها دست دادن با یکدیگر باشد؛ اعضای این مجموعه می‌توانند اتم‌های یک مولکول شیمیایی باشند و ارتباط میان آنها پیوندهای شیمیایی باشد؛ همچنین، اعضای این مجموعه می‌توانند بخش‌های گوناگون یک زمین باشند و ارتباط میان آنها پل‌هایی باشد که آنها را به هم متصل می‌کنند (مسئلهٔ پل‌های کونیکسبرگ [۱]).
در سال ۱۷۳۶، لئونهارد اویلر، ریاضیدان و دانشمند سوئیسی، با حل مسئلهٔ پل‌های کونیکسبرگ نظریهٔ گراف‌ها را بنیان نهاد. اما نخستین بار، در سال ۱۸۷۸، جیمز جوزف سیلوستر، ریاضیدان انگلیسی، این مدل‌های ریاضی را گراف نامید [۲]. در سال ۱۹۷۷، کافمن نخستین تعریف از گراف فازی را پیشنهاد کرد که مبتنی بر روابط فازی بیان‌شده توسط لطفی‌زاده در سال ۱۹۷۵ بود [۳]. البته در سال ۱۹۷۶، رزنفلد تعریف‌هایی شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرده بود که منجر به دسته‌بندی گراف‌های فازی به دو نوع ساده و مبهم شد [۳].
حال گراف‌های فازی ساده و مبهم را تعریف می‌کنیم و مثال‌های ملموسی از آنها ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱ (مجموعهٔ فازی و تابع عضویت). هر مجموعه یک صفت مشخص‌کنندهٔ مخصوص به خود دارد که معیار عضویت عناصر در آن مجموعه است. در حقیقت، اگر عنصری از مجموعهٔ مرجع دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه و در غیر این صورت، خارج از مجموعه است.

*سخنران
پست الکترونیک : alimohamad.fallah@yahoo.com (علیمحمد فلاح اندواری)

این معیار عضویت تابع عضویت نامیده می‌شود. به زبان ریاضی، اگر X مجموعه‌ای ناتهی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه تابع عضویت مجموعهٔ A با μ_A نشان داده می‌شود و با ضابطهٔ

$$\mu_A : X \to \{۰, ۱\}, \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

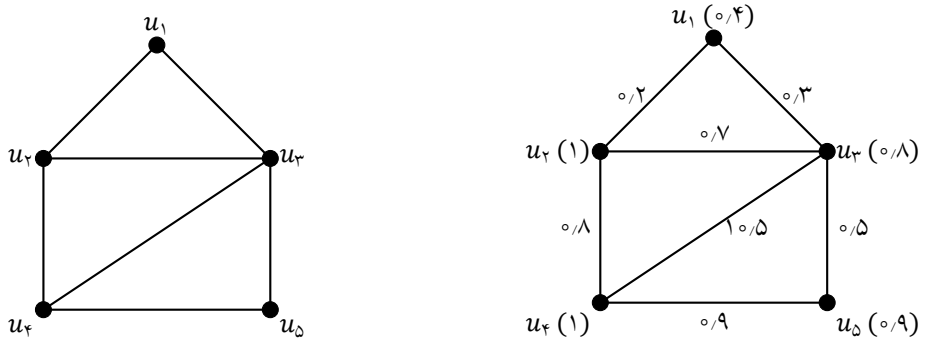
به کمک گراف‌های ساده در ریاضیات گسسته، می‌توان گراف فازی ساده را تعریف کرد. در واقع، در گراف‌های فازی ساده، برای رأس‌ها و یال‌ها تابع عضویت تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱ (گراف فازی ساده). فرض کنید V یک مجموعهٔ ناتهی باشد. یک گراف فازی سادهٔ $\widetilde{G}$ زوج مرتب (σ, μ) است که $\sigma : V \to [۰, ۱]$ یک زیرمجموعهٔ فازی V و $\mu : V \times V \to [۰, ۱]$ یک رابطهٔ فازی متقارن روی σ است به طوری که برای هر $u, v \in V$ داریم

$$\mu(u, v) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v).$$

گراف سادهٔ $G^* = (V, E)$ از یک گراف فازی ساده، گراف زمینهٔ آن نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱. در شکل ۱، گراف فازی سادهٔ $\widetilde{G} = (\sigma, \mu)$ و گراف زمینهٔ آن، یعنی $G^* = (V, E)$ رسم شده‌اند.



(آ) گراف فازی سادهٔ $\widetilde{G} = (\sigma, \mu)$ (ب) گراف زمینهٔ $G^* = (V, E)$

شکل ۱: گراف فازی سادهٔ $\widetilde{G} = (\sigma, \mu)$ و گراف زمینهٔ $G^* = (V, E)$ از آن

پس از آشنایی با گراف‌های فازی ساده، به گراف‌های فازی مبهم می‌پردازیم.

تعریف ۴.۱ (مجموعهٔ مبهم). فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی باشد. یک مجموعهٔ مبهم A از X زوج مرتب (t_A, f_A) است که $t_A : X \to [۰, ۱]$ و $f_A : X \to [۰, ۱]$ به ترتیب توابع عضویت درستی و نادرستی روی X هستند به طوری که برای هر $x \in X$ داریم

$$۰ \leq t_A(x) + f_A(x) \leq ۱.$$

تعریف ۵.۱ (رابطهٔ مبهم). فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ ناتهی و متناهی باشند. یک رابطهٔ مبهم R زیرمجموعه‌ای مبهم از $X \times Y$ است که به صورت

$$R = \left\{ \langle (x, y), t_R(x, y), f_R(x, y) \rangle : x \in X, y \in Y \right\}$$

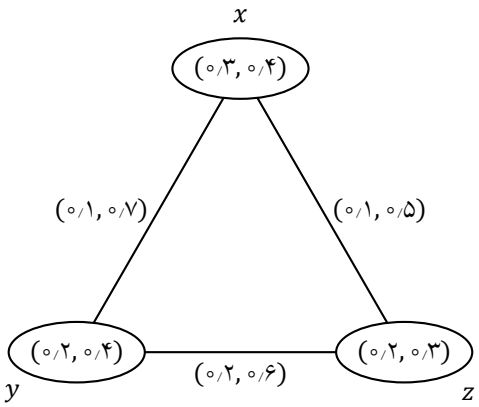
تعریف می‌شود که در آن $t_R, f_R : X \times Y \to [۰, ۱]$ و برای هر $(x, y) \in X \times Y$ داریم

$$۰ \leq t_R(x, y) + f_R(x, y) \leq ۱.$$

تعریف ۶.۱ ([۴]، گراف فازی مبهم). اگر $G^* = (V, E)$ یک گراف ساده باشد، زوج $G = (A, B)$ یک گراف فازی مبهم روی G^* نامیده می‌شود هرگاه $A = (t_A, f_A)$ یک مجموعهٔ مبهم روی V و $B = (t_B, f_B)$ یک مجموعهٔ مبهم روی $E \subseteq V \times V$ باشد به صوری که برای هر $xy \in E$ داشته باشیم

$$t_B(xy) \leq \min\{t_A(x), t_A(y)\}, \quad f_B(xy) \geq \max\{f_A(x), f_A(y)\}.$$

مثال ۷.۱. در شکل ۲، گراف فازی مبهم G با مجموعهٔ رئوس $V = \{x, y, z\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E = \{xy, yz, xz\}$ رسم شده است.



شکل ۲: گراف فازی مبهم $G = (V, E)$

۲. معرفی شاخص رندیک و کاربردی از آن در مکان‌یابی

تعریف ۱.۲ (تابع با ارزش واقعی). فرض کنید V مجموعه‌ای ناتهی باشد. زوج مرتب (t_A, f_A) به عنوان تابع با ارزش واقعی در نظر گرفته می‌شود هرگاه $t_A, f_A : V \to [۰, ۱]$ و برای هر $m \in V$ داشته باشیم

$$۰ \leq t_A(m) + f_A(m) \leq ۱.$$

تعریف ۲.۲ (درجهٔ همسایگی باز). درجهٔ همسایگی باز رأس m در گراف فازی مبهم $G = (A, B)$ به صورت

$$\deg(m) = \big(\deg t(m), \deg f(m)\big)$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\deg t(m) = \sum_{\substack{n \neq m \\ mn \in E}} t_B(mn), \quad \deg f(m) = \sum_{\substack{n \neq m \\ mn \in E}} f_B(mn).$$

حال می‌توانیم شاخص رندیک را که یکی از مهم‌ترین شاخص‌های گراف‌های فازی مبهم است، معرفی کنیم.

تعریف ۳.۲ (شاخص رندیک). فرض کنید $G = (A, B)$ یک گراف فازی مبهم باشد. شاخص رندیک G که آن را با $\mathrm{RI}(G)$ نشان می‌دهند، به صورت

$$\mathrm{RI}(G) = \big(\mathrm{RI}t(G), \mathrm{RI}f(G)\big)$$

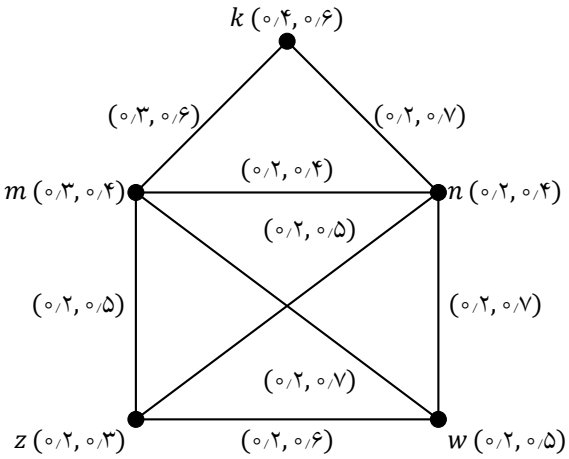
تعریف می‌شود که در آن

$$\mathrm{RI}t(G) = \sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} \big(t_A(m_i) \cdot t_A(m_j) \cdot \deg t(m_i) \cdot \deg t(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}},$$

$$\mathrm{RI}f(G) = \sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} \big(f_A(m_i) \cdot f_A(m_j) \cdot \deg f(m_i) \cdot \deg f(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}}.$$

مثال ۴.۲. در شکل ۳ یک گراف فازی مبهم رسم شده است. می‌خواهیم شاخص رندیک آن را به دست آوریم. از روی این گراف معلوم است که

$$\deg(m) = (۰٫۹, ۲٫۲), \quad \deg(n) = (۰٫۸, ۲٫۳), \quad \deg(z) = (۰٫۶, ۱٫۶),$$
$$\deg(w) = (۰٫۶, ۲), \quad \deg(k) = (۰٫۵, ۱٫۳).$$



شکل ۳: یک گراف فازی مبهم

بنابراین

$$\mathrm{RI}t(G) = \sum_{\substack{i\neq j \\ v_iv_j\in E}} \left(t_A(v_i)\cdot t_A(v_j)\cdot \deg t(v_i)\cdot \deg t(v_j)\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(t_A(m)\cdot t_A(k)\cdot \deg t(m)\cdot \deg t(k)\right)^{-\frac{۱}{۲}} + \left(t_A(m)\cdot t_A(z)\cdot \deg t(m)\cdot \deg t(z)\right)^{-\frac{۱}{۲}} \\
&\quad + \left(t_A(m)\cdot t_A(n)\cdot \deg t(m)\cdot \deg t(n)\right)^{-\frac{۱}{۲}} + \left(t_A(m)\cdot t_A(w)\cdot \deg t(m)\cdot \deg t(w)\right)^{-\frac{۱}{۲}} \\
&\quad + \left(t_A(k)\cdot t_A(n)\cdot \deg t(k)\cdot \deg t(n)\right)^{-\frac{۱}{۲}} + \left(t_A(n)\cdot t_A(w)\cdot \deg t(n)\cdot \deg t(w)\right)^{-\frac{۱}{۲}} \\
&\quad + \left(t_A(z)\cdot t_A(w)\cdot \deg t(z)\cdot \deg t(w)\right)^{-\frac{۱}{۲}} + \left(t_A(z)\cdot t_A(n)\cdot \deg t(z)\cdot \deg t(n)\right)^{-\frac{۱}{۲}} \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۰٫۳\times ۰٫۴\times ۰٫۹\times ۰٫۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۳\times ۰٫۲\times ۰٫۹\times ۰٫۶}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۳\times ۰٫۲\times ۰٫۹\times ۰٫۸}} \\
&\quad + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۳\times ۰٫۲\times ۰٫۹\times ۰٫۶}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۴\times ۰٫۲\times ۰٫۵\times ۰٫۸}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۲\times ۰٫۲\times ۰٫۸\times ۰٫۶}} \\
&\quad + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۲\times ۰٫۲\times ۰٫۶\times ۰٫۶}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۲\times ۰٫۲\times ۰٫۶\times ۰٫۸}} \\
&= ۴٫۳۵ + ۵٫۵۶ + ۴٫۷۶ + ۵٫۵۶ + ۴٫۵۵ + ۷٫۱۴ + ۸٫۳۳ + ۷٫۱۴ = ۴۷٫۳۹.
\end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\mathrm{RI}f(G) = \sum_{\substack{i\neq j \\ v_iv_j\in E}} \left(f_A(v_i)\cdot f_A(v_j)\cdot \deg f(v_i)\cdot \deg f(v_j)\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= ۱٫۱۶ + ۱٫۵۴ + ۱٫۵۲ + ۱٫۱۵ + ۱٫۲۱ + ۱٫۱۲ + ۱٫۵۸ = ۹٫۲۸.$$

بنابراین

$$\mathrm{RI}(G) = \left(\mathrm{RI}t(G), \mathrm{RI}f(G)\right) = (۴۷٫۳۹, ۹٫۲۸).$$

حال یافتهٔ اصلی مقاله را دربارهٔ شاخص رندیک گراف‌های فازی مبهم ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید* $G = (A, B)$ *یک گراف فازی مبهم از گراف سادهٔ* $G^* = (V, E)$ *باشد که* $|V| = n \geq ۲$ *و* $|E| = m$. *در این صورت*

$$\mathrm{RI}t(G) \geq \frac{m}{n-۱}, \quad \mathrm{RI}f(G) \geq \frac{m}{n-۱}.$$

اثبات. چون G یک گراف فازی مبهم است، پس برای هر $m_i \in V$ داریم

$$۰ \leq t_A(m_i) \leq ۱, \quad ۰ \leq f_A(m_i) \leq ۱.$$

بنابراین برای هر $m_i, m_j \in V$ خواهیم داشت

$$t_A(m_i) \cdot t_A(m_j) \leq ۱, \quad f_A(m_i) \cdot f_A(m_j) \leq ۱. \tag{۱}$$

از سوی دیگر، چون $|V| = n \geq ۲$، پس هر رأس می‌تواند به $n-۱$ رأس متصل شود، اما

$$\deg t(m_i) = \sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} t_B(m_i m_j), \quad \deg f(m_i) = \sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} f_B(m_i m_j).$$

بنابراین برای هر $m_i \in V$ داریم $\deg t(m_i) \leq n-۱$ و $\deg f(m_i) \leq n-۱$. این نتیجه می‌دهد که

$$\deg t(m_i) \cdot \deg t(m_j) \leq (n-۱)^۲, \quad \deg f(m_i) \cdot \deg f(m_j) \leq (n-۱)^۲. \tag{۲}$$

حال از روابط (۱) و (۲) داریم

$$t_A(m_i) \cdot t_A(m_j) \cdot \deg t(m_i) \cdot \deg t(m_j) \leq (n-۱)^۲,$$
$$f_A(m_i) \cdot f_A(m_j) \cdot \deg f(m_i) \cdot \deg f(m_j) \leq (n-۱)^۲,$$

یعنی

$$\big(t_A(m_i) \cdot t_A(m_j) \cdot \deg t(m_i) \cdot \deg t(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۱}{n-۱},$$
$$\big(f_A(m_i) \cdot f_A(m_j) \cdot \deg f(m_i) \cdot \deg f(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۱}{n-۱}.$$

از این رو

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} \big(t_A(m_i) \cdot t_A(m_j) \cdot \deg t(m_i) \cdot \deg t(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{m}{n-۱},$$
$$\sum_{\substack{i \neq j \\ m_i m_j \in E}} \big(f_A(m_i) \cdot f_A(m_j) \cdot \deg f(m_i) \cdot \deg f(m_j)\big)^{-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{m}{n-۱}.$$

در نتیجه،

$$\mathrm{RI}t(G) \geq \frac{m}{n-۱}, \quad \mathrm{RI}f(G) \geq \frac{m}{n-۱}. \quad \square$$

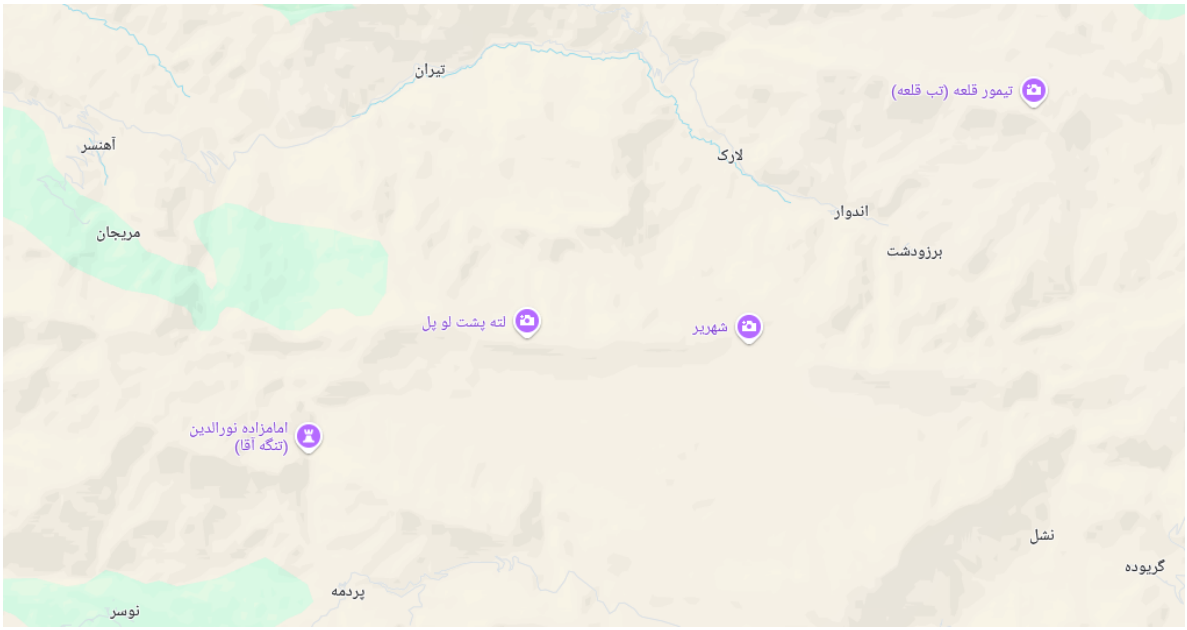
بدون شک یکی از وظایف حکومت اسلامی حفظ سلامت جامعه و شهروندان است. در مناطق کوهستانی و صعب‌العبور، اگر دولت تصمیم بگیرد برای چند روستای ییلاقی، اقدام به ساخت یک درمانگاه شبانه‌روزی کند، بر اساس جمعیت و کیفیت جاده‌های ارتباطی میان این روستاها، باید مکانی واحد برای ساخت آن تعیین کند. یکی از ابزار مهم و قوی برای تعیین این مکان شاخص رندیک گراف‌های فازی مبهم است. بنابراین لازم است موقعیت جغرافیایی، جمعیت و کیفیت جاده‌های ارتباطی میان این روستاها با استفاده از یک گراف فازی مبهم مدل‌سازی شود.

در این قسمت، شاخص رندیک را برای یافتن بهترین مکان ساخت یک درمانگاه شبانه‌روزی برای پنج روستای ییلاقی شهرستان آمل در استان مازندران و در منطقهٔ زندگی نویسنده به کار می‌گیریم. این روستاها عبارت‌اند از آهن‌سر (Ah)، مریجون (Ma)، تیران شیرکلا (Ti)، اندوار

(An) و نشل (Ne). درصدهای ارائه‌شده برای کیفیت جاده‌های ارتباطی میان آنها بر اساس تجربهٔ شخصی نویسنده است. در حقیقت، در فصل زمستان، به علت بارش برف، معمولاً جاده‌های کوهستانی (به ویژه، جادهٔ تیران شیرکلا–اندوار–نشل) بسته می‌شوند، ولی بین روستاهای مریجون و آهن‌سر رفت و آمد انجام می‌شود. همچنین در فصل تابستان، در بعضی از روزها به دلیل بارش باران‌های شدید، سیل راه می‌افتد و جادهٔ آهن‌سر–تیران شیرکلا مسدود می‌شود.

هدف این است که به کمک شاخص رندیک مناسب‌ترین مکان را برای ساخت یک درمانگاه شبانه‌روزی مشخص کنیم، یعنی تعیین کنیم برای ساخت این درمانگاه کدام روستا مناسب‌تر است. به این ترتیب، ابتدا لازم است با یک گراف فازی مبهم مسئله را مدل‌سازی کنیم. رئوس گراف فازی مبهم مورد نظر که آن را G می‌نامیم، روستاهای ذکرشده و یال‌های این گراف جاده‌های ارتباطی میان آنها هستند.

شکل ۴ موقعیت جغرافیایی پنج روستای مورد بحث را از نقشه‌های گوگل نشان می‌دهد.



شکل ۴: موقعیت جغرافیایی پنج روستای مورد بحث از نقشه‌های گوگل

جدول ۱ وزن رئوس گراف فازی مبهم G را نشان می‌دهد.

جدول ۱: وزن رئوس گراف فازی مبهم G

رأس	Ah	Ma	Ti	An	Ne
(t_A, f_A)	(۰٫۸, ۰٫۱)	(۰٫۷, ۰٫۲)	(۰٫۶, ۰٫۴)	(۰٫۵, ۰٫۴)	(۰٫۴, ۰٫۴)

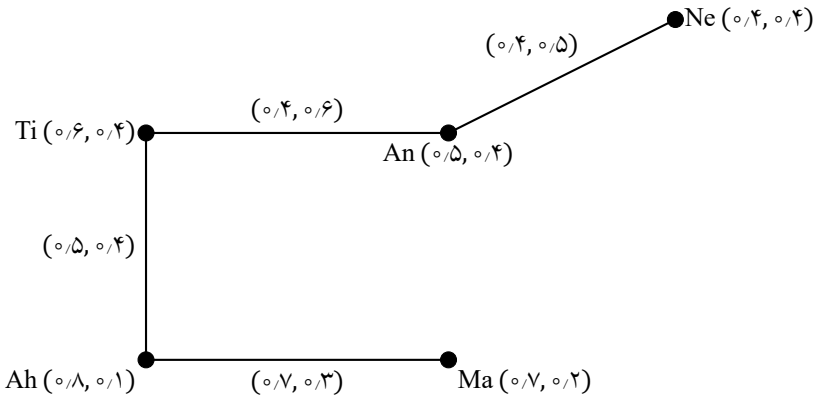
یادآوری می‌کنیم که با توجه به تعریف گراف فازی مبهم، وزن هر یال G به کمک رابطه‌های

$$t_B(xy) \le \min\{t_A(x), t_A(y)\}, \quad f_B(xy) \ge \min\{f_A(x), f_A(y)\}$$

به دست می‌آید. جدول ۲ وزن یال‌های گراف فازی مبهم G را نشان می‌دهد.

جدول ۲: وزن یال‌های گراف فازی مبهم G

یال	Ah–Ma	Ah–Ti	Ti–An	An–Ne
(t_B, f_B)	(۰٫۷, ۰٫۳)	(۰٫۵, ۰٫۴)	(۰٫۴, ۰٫۶)	(۰٫۴, ۰٫۶)



شکل ۵: نمودار گراف فازی مبهم G

به این ترتیب، گراف فازی مبهم G مطابق شکل ۵ رسم می‌شود.
جدول ۳ جمعیت ثابت روستاهای مورد بحث را در چهار فصل سال نشان می‌دهد.

جدول ۳: جمعیت ثابت پنج روستای مورد بحث در چهار فصل سال

روستا	آهن‌سر	مریجون	تیران شیرکلا	اندوار	نشل
جمعیت (نفر)	۱۶۵	۷۰	۵۰	۱۸۵	۲۶۰

جدول ۴ فاصله‌های روستاهای مورد بحث را از یکدیگر نشان می‌دهد.

جدول ۴: فاصله‌های پنج روستای مورد بحث از یکدیگر

روستاها	آهن‌سر–مریجون	آهن‌سر–تیران شیرکلا	تیران شیرکلا–اندوار	اندوار–نشل
فاصله (کیلومتر)	۷	۲۰	۱۵	۵

سرانجام، جدول ۵ فاصله‌های روستاهای مورد بحث را از شهر آمل نشان می‌دهد.

جدول ۵: فاصله‌های پنج روستای مورد بحث از شهر آمل

روستا	آهن‌سر	مریجون	تیران شیرکلا	اندوار	نشل
فاصله از آمل (کیلومتر)	۶۰	۶۷	۸۰	۹۵	۱۰۰

حال شاخص رندیک گراف فازی مبهم G را محاسبه می‌کنیم. درجه‌های رئوس این گراف به صورت

$$\deg(\text{Ah}) = (۱٫۲, ۰٫۷), \quad \deg(\text{Ma}) = (۰٫۷, ۰٫۳), \quad \deg(\text{Ti}) = (۰٫۹, ۱),$$
$$\deg(\text{An}) = (۰٫۸, ۱٫۱), \quad \deg(\text{Ne}) = (۰٫۴, ۰٫۵)$$

هستند. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{RI}t(G) &= \big(t(\mathrm{Ah})\cdot t(\mathrm{Ti})\cdot \deg t(\mathrm{Ah})\cdot \deg t(\mathrm{Ti})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(t(\mathrm{Ah})\cdot t(\mathrm{Ma})\cdot \deg t(\mathrm{Ah})\cdot \deg t(\mathrm{Ma})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(t(\mathrm{Ti})\cdot t(\mathrm{An})\cdot \deg t(\mathrm{Ti})\cdot \deg t(\mathrm{An})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(t(\mathrm{An})\cdot t(\mathrm{Ne})\cdot \deg t(\mathrm{An})\cdot \deg t(\mathrm{Ne})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۰٫۸\times ۰٫۶\times ۱٫۲\times ۰٫۹}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۸\times ۰٫۷\times ۱٫۲\times ۰٫۷}} \\ &\quad + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۶\times ۰٫۵\times ۰٫۹\times ۰٫۸}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۵\times ۰٫۴\times ۰٫۸\times ۰٫۴}} \\ &= ۱٫۳۹ + ۱٫۴۵ + ۲٫۱۷ + ۴ = ۹٫۰۱.\end{aligned}$$

به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{RI}f(G) &= \big(f(\mathrm{Ah})\cdot f(\mathrm{Ti})\cdot \deg f(\mathrm{Ah})\cdot \deg f(\mathrm{Ti})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(f(\mathrm{Ah})\cdot f(\mathrm{Ma})\cdot \deg f(\mathrm{Ah})\cdot \deg f(\mathrm{Ma})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(f(\mathrm{Ti})\cdot f(\mathrm{An})\cdot \deg f(\mathrm{Ti})\cdot \deg f(\mathrm{An})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &\quad + \big(f(\mathrm{An})\cdot f(\mathrm{Ne})\cdot \deg f(\mathrm{An})\cdot \deg f(\mathrm{Ne})\big)^{-\frac{۱}{۲}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۰٫۱\times ۰٫۴\times ۰٫۷\times ۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۱\times ۰٫۲\times ۰٫۷\times ۰٫۳}} \\ &\quad + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۴\times ۰٫۴\times ۱\times ۱٫۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۰٫۴\times ۰٫۴\times ۱٫۱\times ۰٫۵}} \\ &= ۵٫۸۸ + ۱۶٫۶۷ + ۲٫۳۸ + ۳٫۳۳ = ۲۸٫۲۶.\end{aligned}$$

از این رو

$$\mathrm{RI}(G) = \big(\mathrm{RI}t(G), \mathrm{RI}f(G)\big) = (۹٫۰۱, ۲۸٫۲۶).$$

از سوی دیگر، شاخص‌های رندیک تک‌تک رئوس به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}&\mathrm{RI}t(G\cdot \mathrm{Ah}) = ۲٫۸۴,\ \mathrm{RI}f(G\cdot \mathrm{Ah}) = ۲۲٫۵۵ \Rightarrow \mathrm{RI}(G\cdot \mathrm{Ah}) = (۲٫۸۴, ۲۲٫۵۵),\\ &\mathrm{RI}t(G\cdot \mathrm{Ma}) = ۱٫۴۵,\ \mathrm{RI}f(G\cdot \mathrm{Ma}) = ۱۶٫۶۷ \Rightarrow \mathrm{RI}(G\cdot \mathrm{Ma}) = (۱٫۴۵, ۱۶٫۶۷),\\ &\mathrm{RI}t(G\cdot \mathrm{Ti}) = ۳٫۵۶,\ \mathrm{RI}f(G\cdot \mathrm{Ti}) = ۸٫۲۶ \Rightarrow \mathrm{RI}(G\cdot \mathrm{Ti}) = (۳٫۵۶, ۸٫۲۶),\\ &\mathrm{RI}t(G\cdot \mathrm{An}) = ۶٫۱۷,\ \mathrm{RI}f(G\cdot \mathrm{An}) = ۵٫۷۱ \Rightarrow \mathrm{RI}(G\cdot \mathrm{An}) = (۶٫۱۷, ۵٫۷۱),\\ &\mathrm{RI}t(G\cdot \mathrm{Ne}) = ۴,\ \mathrm{RI}f(G\cdot \mathrm{Ne}) = ۳٫۳۳ \Rightarrow \mathrm{RI}(G\cdot \mathrm{Ne}) = (۴, ۳٫۳۳).\end{aligned}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اگر رأس Ah را حذف کنیم، رأس Ma نیز به طور خودکار حذف می‌شود. به همین ترتیب، اگر رأس An را حذف کنیم، رأس Ne نیز به طور خودکار حذف می‌شود. از سوی دیگر، برای رأس Ti دو مورد زیر پراهمیت هستند:

۱. روستای متناظر به این رأس، یعنی تیران شیرکلا جمعیت کمی دارد؛
۲. با حذف این رأس، مقدار عضویت تابع نادرست شاخص رندیک کاهش چشمگیری نخواهد داشت.

همچنین، برای رأس An دو مورد زیر پراهمیت هستند:

۱. روستای متناظر به این رأس، یعنی اندوار جمعیت زیادی دارد؛
۲. با حذف این رأس، مقدار عضویت تابع درست شاخص رندیک کاهش چشمگیری خواهد داشت.

در نتیجه، بهترین و مناسب‌ترین مکان برای ساخت درمانگاه شبانه‌روزی رأس An، یعنی روستای اندوار است.

مراجع

[۱] اسماعیل بابلیان. *مباحثی در ریاضیات گسسته*. انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۸۶.
[۲] مهدی بهزاد، علی رجالی، علی عمیدی و عبادالله محمودیان، *ریاضیات گسسته*، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران، ۱۳۸۵.
[3] M. Akram, A. Farooq, A. B. Saeid, and K. P. Shum. Certain types of vague cycles and vague trees. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 28:621–631, 2015.
[4] R. A. Borzooei, and H. Rashmanlou. Domination in vague graphs and its applications. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 29:1933–1940, 2015.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–315، صص. ۲۹۶–۳۰۰

ارائه یک تابع جریمه فازی و کاربرد آن در مساله مکانیابی تک وسیله‌ای

نعمت اله تقی‌نژاد*[آ]، مرتضی نظری[ب]

[آ] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبد، ایران
[ب] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
مکانیابی آرمانی فازی
تک وسیله‌ای
تابع جریمه
الگوریتم فرا ابتکاری

چکیده

در این مقاله به مساله مکانیابی با شعاع آرمانی فازی و همچنین وزن‌های فازی می‌پردازیم تا توانسته باشیم مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در مدل ارائه شده بررسی نمائیم. هدف این مساله تعیین مکان یک سرویس دهنده در شعاع آرمانی (فاصله مشخصی) تا هر یک از نقاط تقاضا با درنظرگرفتن حالت فازی وعدم قطعیت در متغیرهای مساله است. ابتدا در این طرح یک تابع زیان فازی برای محاسبه جریمه عدم دست یابی دقیق به شعاع آرمانی معرفی و تحلیل می‌شود سپس به جستجوی جواب های مدل ارائه شده با استفاده از الگوریتم ژنتیک خواهیم پرداخت.

۱- مقدمه

نظریه مکانیابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر در سال ۱۹۰۹ تحت عنوان در" مورد مکان صنایع" متولد شد [۳]. وبر در این کتاب نتایج تحقیقات خود را در مورد صنایع کارخانه‌ای ارائه کرد. نمونه‌های گوناگون از مسئله مکانیابی وبر را می‌توان در مراجع [۴، ۵، ۶، ۷] مشاهده نمود.

یکی از مشخصه‌های پرکاربرد و مهمی که در نظریه‌های اخیر تحقیق در عملیات ظاهر شده است، مفهوم مکانیابی آرمانی می‌باشد. فتحعلی و همکاران، برای اولین بار یک مسئله خاص از مسئله مکانیابی وبر آرمانی را مطرح کردند. آن‌ها در این مسئله برای هر نقطه تقاضا، یک شعاع آرمانی را در نظر گرفته و فاصله بین تسهیلات جدید و نقاط تقاضا را دقیقا برابر با شعاع آرمانی متناظر با هر نقطه تقاضا، تعیین کردند. از آن‌جایی که در واقعیت به‌ندرت مکانی برای تسهیلات جدید وجود دارد که فاصله آن تا نقاط تقاضا دقیقا برابر با شعاع آرمانی در نظر گرفته شود، لذا آن‌ها در این مدل به دنبال کمینه کردن تابع زیان مجموع وزنی مربعات خطا بودند. آن‌ها با استفاده از روش مربع بزرگ–مربع کوچک الگوریتمی برای حل مسئله تحت نرم اقلیدسی پیشنهاد دادند [۱۲]. سپس جمالیان و فتحعلی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله با هدف کمینه کردن مجموع وزنی قدرمطلق خطا، ارائه دادند [۱۳]. فتحعلی و جمالیان، به بررسی مسئله کمینه کردن مجموع مربعات خطا پرداخته و آن را مسئله مکانیابی وبر مربعی آرمانی [۱] (GSWLP) نامیدند. آن‌ها با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی پرندگان به حل مسئله فوق تحت نرم اقلیدسی پرداختند [۱۴]. اخیرا نظری و همکاران، مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای حل مسئله خود یک روش شبه–وایزفیلد ارائه نمودند [۱۵]. همچنین سلیمانی و همکاران، یک مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای آرمانی را تحت نرم l_p مورد بررسی قرار دادند و سپس برای حل این مسئله الگوریتم شبه–وایزفیلد و الگوریتم گاوس– نیوتن را ارائه کردند [۱۶]. از طرفی دیگر به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت، در بیشتر مواقع یافتن مقادیر دقیق و معین برای پارامترهای مسائل مکانیابی امری غیرممکن می‌باشد. از این‌رو می‌توان از نظریه قدرتمند مجموعه‌های فازی برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت‌های موجود، به صورت ریاضی بهره گرفت[۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱].

*سخنران
[۱] پست الکترونیک : first.author@gmail.com (نعمت اله تقی‌نژاد)

۲- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی توابع زیان متقارن و نامتقارن و نظریه مجموعه‌های فازی را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱ [۲۲]. فرض کنید δ یک برآورد از مقدار واقعی پارامتر θ باشد. اگر D، کلاس کلیه برآوردگرهای پارامتر θ باشد، در برآورد θ به‌وسیله برآوردگر $\delta \in D$، مقدار خطای حاصل شده را با تابع زیان $E(\theta,\delta)$ اندازه می‌گیرند که تابعی از $\Delta = \theta - \delta$ می‌باشد. در این صورت تابع زیان $E(\theta,\delta)$ در دو شرط زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} &E(\theta,\delta) \geq 0, \forall\theta,\forall\delta \\ &E(\theta,\delta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \delta \end{aligned} \qquad (1)$$

واریان [۲۲]، در یک مطالعه کاربردی در ارزیابی مالکیت املاک و مستغلات، تابع زیان نامتقارن لینکس را که بسیار مفید واقع شد، معرفی نمود. این تابع در یک طرف مبدا مختصات، تقریبا به صورت نمایی افزایش می‌یابد در حالی که در سمت دیگر آن به‌صورت خطی رفتار می‌کند. بنابراین در موقعیت‌هایی که باید بین خطای مثبت و خطای منفی با اندازه‌های یکسان، تفاوت قائل باشیم، نمی‌توان از توابع زیان متقارن مانند تابع زیان مربعات خطا و یا تابع زیان قدر مطلق خطا که قادر به تفکیک این موضوع نمی‌باشند، استفاده نمود. لذا باید به دنبال یک تابع زیان نامتقارن بود. به عنوان یک مثال عینی می‌توان به این مورد اشاره نمود که در ساخت و ساز سد، کم برآورد حداکثر سطح آب، بسیار مهمتر و جدی‌تر از بیش برآورد آن است زیرا ممکن است در اثر کم برآورد سطح آب در یک طوفان سیل آسا آب پشت سد از دیواره آن بالا آمده و از آن خارج شود و خسارت‌های جانی و مالی زیادی را به همراه بیاورد در حالیکه بیش برآورد حداکثر سطح آب تنها ممکن است خسارت ناشی از هزینه‌های ساخت و ساز را در پی داشته باشد.

تعریف ۲ تعریف ۱-۱۵ (*تابع جریمه فازی*) فرض کنید که xبرآوردگر پارامتر فازی R باشد. در این صورت تابع زیان محدب فازی برای عدد فازی مثلثی فازی $R = (R_1, R_2, R_3)$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$E(x,R) = |x - R_1| + 3|x - R_2| + |x - R_3| + (R_1 - R_3) \qquad (1)$$

در رابطه بالا مشاهده می‌شود که

$$E(R_2,R) = |R_2 - R_1| + 3|R_2 - R_2| + |R_2 - R_3| + (R_1 - R_3)$$

$$= R_2 - R_1 + R_3 - R_2 + R_1 - R_3 = 0$$

همچنین برای $R_1 \leq x \leq R_3$، از آنجایی‌که $|x - R_1| + |x - R_3| = (R_3 - R_1)$، خواهیم داشت،

$$E(x,R) = 3|x - R_2|.$$

برای $x > R_3$، *با توجه به اینکه* $|x - R_1| = x - R_1$، $|x - R_2| = x - R_2$ *و* $|x - R_3| = x - R_3$ *داریم:*

$$E(x,R) = 5x - 3R_2 - 2R_3 > 0$$

و برای $x < R_1$، *با توجه به اینکه* $|x - R_1| = R_1 - x$، $|x - R_2| = R_2 - x$ *و* $|x - R_3| = R_3 - x$ *داریم:*

$$E(x,R) = 2R_1 + 3R_2 - 5x > 0$$

در نتیجه شرایط تابع جریمه برقرار است.

مثال: *برای عدد فازی* $R = (2,3,5)$ *می‌خواهیم تابع جریمه را به ازای* $x = 0$ *و* $x = 6$ *محاسبه کنیم.*

$$E(0,R) = |0 - 2| + 3|0 - 3| + |0 - 5| + (2 - 5) = 13,$$
$$E(6,R) = |6 - 2| + 3|6 - 3| + |6 - 5| + (2 - 5) = 11,$$

گزاره ۱-۲- در صورتی که $R = (R_1, R_2, R_3)$ یک عدد فازی متقارن باشد تابع جریمه معرفی شده متقارن است در غیر اینصورت تابع جریمه متقارن نمی‌باشد.

گزاره ۱-۳- در صورتی که برای $R = (R_1, R_2, R_3)$ داشته باشیم $R_1 = R_2 = R_3$ یعنی R یک عدد قطعی باشد در اینصورت داریم،

$$E(x,R) = |x - R_2| + 3|x - R_2| + |x - R_2| + (R_2 - R_2) = 5|x - R_2|$$

درنتیجه تابع جریمه فازی معرفی شده به تابع جریمه قدرمطلق با ضریب ۵ تبدیل خواهد شد که این ضریب ۵ تاثیری در تعیین جواب بهینه نخواهد داشت.

مجموعه فازی $\tilde{A}$ مجموعهای محدب باشد، ۲. $h(\tilde{A}) = ۱$، ۳. مجموعه فازی $\tilde{A}$ دارای تکیه‌گاه کراندار باشد.
تعریف ۴ [۲۱]. هر عدد فازی به شکل $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$، عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \begin{cases} \frac{x-a_۱}{a_m-a_۱} & a_۱ \le x \le a_m \\ \frac{a_u-x}{a_u-a_m} & a_m \le x \le a_u \\ ۰ & O.W \end{cases} \quad (۵)$$

تعریف ۵ [۲۱]. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$، دو عدد فازی مثلثی مفروض و k یک عدد حقیقی باشند. در این‌صورت عملیات ریاضی بین اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \tilde{A} + \tilde{B} = \langle a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u \rangle \\ \tilde{A} - \tilde{B} = \langle a_l - b_u, a_m - b_m, a_u - b_l \rangle \\ k\tilde{A} = \begin{cases} \langle ka_l, ka_m, ka_u \rangle \, k \ge ۰ \\ \langle ka_u, ka_m, ka_l \rangle \, k < ۰ \end{cases} \end{cases} \quad (۶)$$

تعریف ۶ [۲۱]. فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$، دو عدد فازی مثلثی مفروض باشند. در این صورت می‌گوییم $\tilde{A}$ به‌طور نسبی از $\tilde{B}$ کوچکتر است و با نماد $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ نشان می‌دهیم اگر وتنها اگر:

۱. $a_m < b_m$
۲. $a_m = b_m$ و $(a_m - a_l) > (b_m - b_l)$
۳. $a_m < b_m$، $(a_m - a_l) = (b_m - b_l)$ و $(a_u - a_m) < (b_u - b_m)$.

۱. مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای با شعاع آرمانی فازی تحت نرم l_p

در دنیای واقعی به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت، در بیشتر مواقع یافتن مقادیر دقیق و معین برای پارامترها امری غیرممکن می‌باشد. از این‌رو می‌توان از نظریه قدرتمند مجموعه‌های فازی برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت‌های موجود، به صورت ریاضی بهره گرفت. در این راستا طالشیان و همکاران (Taleshian، & Fathali، Taghi-Nezhad ۲۰۱۸)، مسائل مکانیابی ۱–میانه و ۲–میانه را روی درخت با وزن‌های فازی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی یک الگوریتم فازی برای حل مساله ۱–میانه پیشنهاد داده و این الگوریتم را برای حل مساله ۲–میانه گسترش دادند. تقی نژاد (Taghi-Nezhad، ۲۰۱۹) به مساله مکانیابی میانه فازی پرداخته و قضیه بهینگی راسی را برای اولین بار در محیط فازی برای این مساله اثبات کرد. اثبات این قضیه، پیچیدگی محاسباتی بکارگیری الگوریتم های ابتکاری را کاهش می‌دهد. سلطان پور و همکاران (Soltanpour، Alizadeh، & Baroughi ۲۰۱۸) مساله مکانیابی یک میانه معکوس را روی درخت فازی با وزن های فازی شهودی مورد مطالعه قرار دادند. در تمام تحقیقات انجام شده که تا کنون بر روی مسائل مکانیابی آرمانی انجام گرفته است، مقادیر تمامی متغیرهای مساله دقیق و با قطعیت مشخص بوده‌اند از این رو برای مواجه با شرایط واقعی در این طرح پژوهشی به مسئله مکانیابی آرمانی پرداخته‌ایم که در آن شعاع آرمانی و وزن‌ها از نوع اعداد فازی مثلثی هستند و برای پوشش شعاع آرمانی فازی یک تابع جریمه فازی نیز تعریف و تحلیل شد که در ادامه آن را بکار خواهیم گرفت.
حال مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای آرمانی با نرم l_p را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن‌ها به صورت اعداد فازی باشند. در این صورت این مسئله به مسئله فازی (۲–۸)، تبدیل می‌شود:

$$\tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} \tilde{w}_i . E\left(d_{l_p}\left(\overline{X}, X_i\right) - \tilde{R}_i\right) \quad (۲)$$

که در آن $\tilde{w}_i, i = ۱, \dots, n$ و $\tilde{R}_i$ اعداد فازی مثلثی می‌باشند. الگوریتم تبدیل را به صورت زیر ارائه خواهیم کرد.
الگوریتم تبدیل:
گام اول: مسئله برنامه‌ریزی فازی (۲–۸) را در نظر بگیرید. به ازای $i = ۱, \dots, n$، با جایگذاری مقادیر $\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$ مسئله برنامه‌ریزی زیر نتیجه می‌شود:

$$\min \tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle . E\left(d_{l_p}\left(\overline{X}, X_i\right) - \tilde{R}_i\right) \quad (۳)$$

گام دوم: به ازای $i = ۱, \dots, n$، با جایگذاری مقادیر $\tilde{R}_i = \langle R_{il}, R_{im}, R_{iu} \rangle$ و تابع جریمه (۱-۹) داریم:

$$\min \tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle . \left(\left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{il} \right| + ۳ \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{im} \right| + \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{iu} \right| + (R_{il} - R_{iu}) \right) \quad (۴)$$

بنا به تعریف ۱-۱۳ و رابطه
$E\left(\Delta\right) = \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{il} \right| + ۳ \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{im} \right| + \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{iu} \right| + (R_{il} - R_{iu}) \geq ۰$، نتیجه می‌شود:

$$\tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} \langle w_{il}.E(\Delta), w_{im}.E(\Delta), w_{iu}.E(\Delta) \rangle \quad (۵)$$

گام سوم: حال بنا به خاصیت جمع اعداد فازی داریم:

$$\tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \left\langle \sum_{i=۱}^{n} w_{il}.E\left(\Delta\right), \sum_{i=۱}^{n} w_{im}.E\left(\Delta\right), \sum_{i=۱}^{n} w_{iu}.E\left(\Delta\right) \right\rangle \quad (۶)$$

گام چهارم: با توجه به مراحل قبل مسئله برنامه‌ریزی فازی (۲-۱۱) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\min \tilde{F}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \left\langle \sum_{i=۱}^{n} w_{il}.E\left(\Delta\right), \sum_{i=۱}^{n} w_{im}.E\left(\Delta\right), \sum_{i=۱}^{n} w_{iu}.E\left(\Delta\right) \right\rangle \quad (۷)$$

حال می‌توان مسئله فازی (۲-۱۲) را بهمسئله سه هدفه قطعی زیر تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} & min\tilde{F}^{۱}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{il}E\left(\Delta\right), \\ & min\tilde{F}^{۲}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{im}E\left(\Delta\right), \\ & min\tilde{F}^{۳}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{iu}E\left(\Delta\right), \\ & s.t. \\ & \sum_{i=۱}^{n} w_{im}E\left(\Delta\right) \geq \sum_{i=۱}^{n} w_{il}E\left(\Delta\right), \\ & \sum_{i=۱}^{n} w_{iu}E\left(\Delta\right) \geq \sum_{i=۱}^{n} w_{im}E\left(\Delta\right) \end{aligned} \quad (۸)$$

از آنجایی که $\tilde{w}_i, i = ۱, \dots, n$ اعداد فازی مثلثی می‌باشند، بنابراین برای هر $i = ۱, \dots, n$ داریم، $w_{iu} \geq w_{im} \geq w_{il}$. از طرف دیگر اثبات کردیم همیشه $E(\Delta) \geq ۰$ بنابراین داریم، $w_{iu}.E\left(\Delta\right) \geq w_{im}.E\left(\Delta\right) \geq w_{il}.E(\Delta), i = ۱, \dots, n$. در نهایت بنابر خاصیت جمع برای هر $i = ۱, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} w_{iu}E\left(\Delta\right) \geq \sum_{i=۱}^{n} w_{im}E\left(\Delta\right) \geq \sum_{i=۱}^{n} w_{il}E\left(\Delta\right) \quad (۹)$$

رابطه (۲-۱۴) نشان می‌دهد که مجموعه قیود مسئله برنامه‌ریزی (۲-۱۳) به طور بدیهی برقرار است. از این‌رو مسئله برنامه‌ریزی (۲-۱۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} minF^{۱}{}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{il}E\left(\Delta\right), \\ minF^{۲}{}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{im}E\left(\Delta\right), \\ minF^{۳}{}_{LR}\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=۱}^{n} w_{iu}E\left(\Delta\right). \end{cases} \quad (۱۰)$$

که در آن $E\left(\Delta\right) = \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{il} \right| + ۳ \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{im} \right| + \left| d\left(\overline{X}, X_i\right) - R_{iu} \right| + (R_{il} - R_{iu})$ است.

مراجع

[1] Nazari, M., Fathali, J., Reverse backup 2-median problem with variable coordinate of vertices,*Journal of Operational Research and It's Applications*, 15 (2), 2018, 63-88.

[2] Abbasi, F., Tabriz, A. A., Selection of bank branches location based on rough set theory – multi choice goal programming*, Modern Researches in Decision Making*, 2 (1), 2017, 119-148.

[3] Weber, A.,*Uber den Standort der Industrient, (1929). Tubingen, (1909), English Trans.: Theory of Location of Industries*, (C.J., Friedrich, ed., and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois, (1929).

[4] Brimberg, J., The Fermat-Weber location problem revisited,*Mathematical Programming*, 71, 1995, 71-76.

[5] Chen, R., Noniterative Solution of Some Fermat-Weber Location Problems,*Advances in Operations Research*, 2011, 10 pages.

[6] Trinh, M. H., Lee, B.H., and Ahn, H.S., The Fermat-Weber location problem in single integrator dynamics using only local bearing angles,*Auto matica*, 59, 2015, 90-96.

[7] Mohebbi, N., Rad, A., and Motameni, A., Developing Sustainable Recovery Model Of End-Life Products (Case Study: End-Of Life Vehicle),*IQBQ*, 22 (2), 2018, 227-249.

[8] Weiszfeld, E., Sur le point par lequel la somme des distances den points donnsest minimum,*Tohoku Math*, 43, 1937, 355–386.

[9] Miehle, W., Link-length minimization in networks,*Oper. Res*., 6, 1958, 232–243.

[10] Iyigun, C., Ben-Israel, A., A generalized weiszfeld method for the multifacility location problem,*Oper. Res. Lett.,*38, 2010, 207–214.

[11] Fathali, J., Backup multifacility location problem with$l_p$norm,*OPSEARCH*, 52, 2014, 382-391.

[12] Fathali, J., Zaferanieh, M., and Nezakati, A., A BSSS algorithm for the location problem with minimum square error,*Advances in Operations Research*, Article ID 212040, 2009, 10 pages.

[13] Jamalian, A., and Fathali, J., Linear programming for the location problem with minimum absolute error,*World Applied Sciences Journal*, 7, 2009, 1423-1427.

[14] Fathali, J., Jamalian, A., Efficient methods for goal square Weber location problem,*Iranian* Journal of Numerical Analysis and Optimization, 7 , 2017, 65-82.

[15] Fathali, J., Nazari, M., Solution of Backup Multifacility Location Problem by Considering the Ideal Radius for each Customer,*Journal of New Researches in Mathematics*, 5 (21), 2019, 93-104

[16] Soleimani, A., Fathali, J., and Nazari, M., Single facility goal location problems with$l_p$norm,*Modern Researches in Decision Making*, 3 (4), 2019, 125-150.

[17] Taleshian, F., Fathali, J., and Taghi-Nezhad, N. A., Fuzzy majority algorithms for the 1-median and 2-median problems on a fuzzy tree,*Fuzzy Information and Engineering*, 2018, 1-24.

[18] Soltanpour, A., Baroughi, F. and Alizadeh, B., Intuitionistic fuzzy inverse 1-median location problem on tree networks with value at risk objective*, Soft Computing*, 17, 2019, 7843–7852.

[19] Taghi-Nezhad, N., The p-median problem in fuzzy environment: proving fuzzy vertex optimality theorem and its application, Soft Computing, 23 (22) 2019, 11399–11407.

[20] Adel Rastkhiz S E, Mobini Dehkordi A, yadollahi farsi J. Introducing a model for evaluating entrepreneurial opportunities based on fuzzy approach, IQBQ, 2019; 23 (1) ,75-97.

[21] Taleshian, F. and Fathali, J.,A mathematical model for fuzzy p-median problem with fuzzy weights and variables,Advances in Operations Research, 2016, 1-13.

[22] Varian, H. R.,*A Bayesian approach to real estate assessment*, in Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honour of Leonard J. Savage, Amesterdam, North-Holland, 1975.

[23] Arashi, M., Tabatabaey, S. M. M., and Khan, S., Estimation in multiple regression model with elliptically contoured errors under MLINEX loss,*Journal of Applied Probablity and Statistics*, 3, 2008, 23-35.

[24] Drezner, Zvi., Wesolowsky, G.O., The Weber problem on the plane with some negative weight,*Inform*, 29 (2), 1991, 87-99.

[25] Gargari, A., Lucas, E. C., Imperialist Competitive Algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialist competitive,*IEEE Congress on Evolutionary computation*, Singapore, 2007.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–303، صص. ۳۰۱–۳۰۱

بهینه سازی کشت محصولات کشاورزی

نعمت اله تقی‌نژاد*[آ]، سعیده تواق نژاد[آ]

[آ] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبد، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
بهینه‌سازی
محصولات کشاورزی

چکیده

این پژوهش با بهره‌گیری از برنامه‌ریزی خطی، به کشاورزان در بهینه‌سازی سودآوری محصولات زراعی کمک می‌کند. در این مطالعه، مجموعه‌ای جامع از داده‌های مربوط به ویژگی‌های اساسی محصولات کشاورزی، از جمله نیاز آبی، مدت‌زمان رشد، هزینه بذر و بازده متوسط هر گیاه را جمع‌آوری می‌کنیم سپس کشاورزان می‌توانند با ارائه اطلاعات مربوط به دیگر منابع در دسترس، مانند مساحت زمین زراعی، میزان آب موجود، محدودیت‌های حمل‌ونقل، فاصله تا بازار و قیمت‌های محلی محصولات، جوابی بهینه با بیشترین بازدهی را بدست آورند. این مدل تحت مجموعه‌ای از فرضیات، از جمله مالکیت زمین توسط کشاورز، ثبات قیمت آب و تعادل میان عرضه و تقاضا عمل می‌کند. پس از جمع‌آوری داده‌های ورودی، استراتژی بهینه‌ای برای کاشت محصولات پیشنهاد می‌شود. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که کشاورزان می‌توانند با کاهش هزینه‌های عملیاتی، بهینه‌سازی تخصیص منابع و انتخاب سودآورترین محصولات، درآمد خود را حداکثر کنند.

*سخنران
پست *الکترونیک :* first.author@gmail.com (نعمت اله تقی‌نژاد)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، OR–304، صص. ۳۰۲–۳۰۲

مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای برنامه‌ریزی یکپارچه زنجیره تأمین ماهی

نعمت اله تقی‌نژاد*[آ]، معصومه کوهساری[آ]

[آ] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبد، ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح
زنجیره تأمین ماهی

چکیده

زنجیره تأمین ماهی به مجموعه‌ای از مراحل و فرآیندهایی اطلاق می‌شود که از تولید و برداشت ماهی تا توزیع و مصرف آن را شامل می‌شود. خلیج فارس به عنوان منبعی غنی از نظر تنوع و تعداد گونه‌های ماهی شناخته می‌شود. برخی از مناطق که از سواحل دور هستند، با کمبود تأمین ماهی مواجه‌اند، بنابراین برنامه‌ریزی و مدیریت زنجیره تأمین ماهی برای مناطق دور از سواحل ضروری است. مدل این مسئله به صورت برنامه ریزی خطی مختلط (MILP) ارائه خواهد شد و همچنین آزمایش و شبیه‌سازی مدل ارائه شده با استفاده از نرم افزار تخصصی بهنیه سازی انجام خواهد شد. مدل ارائه شده می‌تواند به حل مشکل کمبود تأمین ماهی در برخی مناطق کمک کند، به طوری که تقاضای مصرف‌کنندگان برای منابع ماهی به سرعت تأمین شود. همچنین می تواند هزینه‌های عملیاتی زنجیره تأمین ماهی از تأمین‌کنندگان به مصرف‌کنندگان را به حداقل برساند که این هزینه ها شامل هزینه‌های حمل و نقل به تأمین‌کنندگان، هزینه‌های حمل و نقل از تأمین‌کنندگان به مراکز توزیع، هزینه‌های حمل و نقل از مراکز توزیع به مصرف‌کنندگان و همچنین حداقل کردن هزینه‌های موجودی محصولات در تأمین‌کنندگان و مراکز توزیع می باشد.

*سخنران
پست *الکترونیک :* first.author@gmail.com (نعمت اله تقی‌نژاد)

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، IS–106، صص. ۳۰۳–۳۰۹

فرایندهای خودبازگشتی هذلولی تعمیم یافته

صفدر قصمی شهواری*،آ

آگروه ریاضی و آمار،واحد بندرجاسک،دانشگاه آزاد اسلامی،بندر جاسک،ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
الگوریتم EM
مدل خودبازگشتی
توزیع هذلولی تعمیم یافته
نمایش سلسله مراتبی

چکیده

در این مقاله به معرفی و مطالعه فرآیندهای سری زمانی خودبازگشتی هذلولی تعمیم یافته می‌پردازیم. در مدل بندی این سری‌های زمانی نوآوری‌هایی (خطاهای مدل با نوفه سفید) را پیشنهاد می‌دهیم که خانواده هذلولی تعمیم یافته دم سبک – سنگین، متقارن – نامتقارن را در برمی‌گیرد. یکی از ویژگی‌های اصلی این مدل استفاده از نمایش سلسله مراتبی مناسب این خانواده‌های انعطاف‌پذیر در برآورد پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم EM است. عملکرد مدل‌های پیشنهادی و برآورد پارامترهای این مدل‌ها از طریق مطالعات شبیه سازی و داده‌های واقعی نیز ارزیابی شده‌اند.

۱. مقدمه

اخیرا فرآیندهای خود بازگشتی نامتقارن (با فرض نوفه سفید غیرگوسی) در علوم کاربردی بسیاری مانند اقتصاد، زمین‌شناسی و هیدرولوژی، الکترونیک و ارتباطات مخابراتی و ... بسط داده شده‌اند. فرایندهای خودبازگشتی مبتنی بر خانواده هذلولی تعمیم یافته [1] را که مدل سری های زمانی متقارن ـ نامتقارن ودم سبک ـدم سنگین را پوشش می دهد معرفی می کنیم خانواده توزیع های GH را می‌توان در حالت کلی به صورت یک آمیخته واریانس – میانگین از نرمال نشان داد که برای مدل‌بندی نیرومند مشاهدات نامتقارن با داده‌های پرت به کار می‌رود، و در آن متغیر آمیخته دارای توزیع گوسین معکوس تعمیم یافته (GIG) است. برای یافتن براوردهای ماکزیمم درستنمایی (ML) مربوط به پارامترهای مدل از نمایش سلسله مراتبی فرآیندهای خود بازگشتی پیشنهادی استفاده می‌کنیم. سپس با شبیه‌سازی در حجم نمونه‌های متفاوت، عملکرد خوب و مناسب مدل‌های معرفی شده و برآوردگرهای آن را نشان خواهیم داد.

۲. مدل های خودبازگشتی با نوآوری های هذلولی تعمیم یافته

در این بخش مقدمات و مفاهیم آماری مورد نیاز شامل معرفی سری زمانی مدل خودبازگشتی، برخی ازتوزیع‌های احتمالی مورد نیاز و مشمول در خانواده توزیع‌های هذلولی تعمیم یافته GH را بررسی خواهیم کرد.

۱–۲ خانواده توزیع‌های هذلولی تعمیم یافته.

متغیر تصادفی Z که دارای نمایش تصادفی زیر است را متعلق به کلاس مخلوط نرمال میانگین – واریانس می نامند:

$$Z = \mu + W\gamma + \sqrt{W}\sigma X \qquad (۱)$$

*سخنران

[1] Generalized-Hyperbolic

براساس این نمایش تصادفی می‌توان توزیع های متفاوتی را تولید و با در نظر گرفتن آن ، مدل‌های سلسله مراتبی را برای استفاده در الگوریتم EM بکار برد و همچنین در شبیه‌سازی ازاین توزیع داده تولید کرد. $\mu \in R$ پارامتر مکان و $\sigma \in R^+$ پارامتر مقیاس و X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد و W یک متغیر تصادفی مستقل از X بوده و دارای توزیع گوسین معکوس تعمیم یافته با پارامترهای $(\overline{\alpha}, \lambda)$ به فرم زیر است.

$$GIG\,(w|\overline{\alpha},\lambda) = \frac{w^{\lambda-1}}{2K_\lambda\,(\overline{\alpha})} exp\left\{\frac{-\overline{\alpha}}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right\}. w>0, \overline{\alpha}>0, -\infty<\lambda<\infty \qquad (2)$$

در این کلاس γ یک پارامتر شکل است که چولگی توزیع را تحت کنترل قرار می‌دهد و متغیر تصادفی W باعث سنگین تر شدن دم‌های چگالی توزیع می‌شود.که در آن $K_\lambda(x)$ تابع بسل پیراسته نوع سوم با اندیس λ و به فرم زیر است

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{\frac{-x}{2}(y+y^{-1})} dy, x>0.$$

فرض کنید $W \sim GIG\,(\overline{\alpha},\lambda)$ باشد ،در این صورت گشتاور m ام متغیر تصادفی $W^{1/2}$ به صورت زیر است:

$$C_m = E\left[w^{\frac{m}{2}}\right] = \frac{K_{\lambda+\frac{m}{2}}\,(\overline{\alpha})}{K_\lambda\,(\overline{\alpha})}, m = 1,2,3,\ldots$$

اگر در نمایش تصادفی۱ متغیر تصادفی W دارای توزیع GIG *باشد در این صورت متغیر تصادفی Z دارای توزیع* GH *خواهد بود . تابع چگالی خانواده هذلولی تعمیم یافته توسط معادله زیر تعیین می‌شود .*

$$f_{GH}\,(z\,|\mu\,,\sigma,\gamma,\overline{\alpha},\lambda) = \int_0^\infty \phi\left(z\,|\mu+w\gamma, w\sigma^2\right) GIG\left(w\,|\overline{\alpha},\lambda\right) dw, z\in R \qquad (3)$$

که در آن $\phi\left(\cdot|\mu,\sigma^2\right)$ *چگالی توزیع نرمال با میانگین* μ *و واریانس* σ^2 *است .*

۳. مدل خود بازگشتی هذلولی تعمیم یافته

فرض می‌کنیم $\{\varepsilon_t\}$ یک فرآیند تصادفی نوفه سفید با توزیع هذلولی تعمیم یافته باشد، آنگاه$\{X_t\}$ را فرآیند خودبازگشتی - هذلولی تعمیم یافته مرتبه p گویند هرگاه دارای فرم زیر باشد

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} \ldots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, t = \pm1, \pm2, \ldots, \qquad (4)$$

که در آن $\varphi = \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_p\right)^\top$ بردار ضرایب خود بازگشتی می‌باشد و همچنین داشته باشیم:

$$\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} GH\,(\mu,\sigma,\gamma,\overline{\alpha},\lambda), t = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \qquad (5)$$

تذکر : مدل خود بازگشتی فوق را با نماد GH-AR(p) نشان داده و جهت نمایشی ساده تر میتوان به صورت

$$X_t = \varphi^\top X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

بازنویسی کرد که در آن $X_{t-1} = \left(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\right)^\top$ و $X = \left(X_{-p+1}, \ldots, X_0, X_1, \ldots, X_n\right)^\top$ بردار نمونه است.

۴. برآورد های ماکزیمم درستنمایی مدل GH-AR(p)

نمایش سلسله مراتبی خانواده هذلولی تعمیم یافته پیاده سازی و برنامه نویسی مدل GH-AR(p) را به میزان قابل توجهی تسهیل خواهد کرد و این مدل را می‌توان به راحتی به صورت زیر مجددا فرمول بندی کرد:

$$X_t\,|X_{t-1}\,, W_t, \theta \sim N\left(\varphi^\top X_{t-1} + \mu + W_t\gamma, W_t\sigma^2\right), W_t \sim GIG\,(\overline{\alpha},\lambda)\; t = 1,2,\ldots,n \qquad (6)$$

گزاره ۴-۱: فرض کنید $D=\left(X^{\top},W^{\top}\right)^{\top}$ داده های کامل باشندکه در آن X داده های مشاهده شده و $W=(W_{۱},\dots,W_{n})^{\top}$ داده‌های پنهان می باشد. با در نظر گرفتن نمایش سلسله مراتبی بالا ،تابع درستنمایی تقویت شده بر مبنای داده‌های کامل به صورت زیر است.

$$L_{c}\left(\theta\,|D\right)=\prod\prod_{t=۱}^{n}\phi\left(X_{t}|\varphi^{\top}X_{t-۱}+\mu+W_{t}\gamma,W_{t}\sigma^{۲}\right)\mathcal{GIG}\left(W_{t}\,|\overline{\alpha},\lambda\right), \qquad (۷)$$

و بنابراین لگاریتم درستنمایی تقویت شده شرطی نظیرآن برابر است با:

$$\mathcal{L}_{c}\left(\theta\,|D\right)=c-\frac{n}{۲}\log\sigma^{۲}-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}\sum_{t=۱}^{n}\frac{۱}{W_{t}}\left(X_{t}-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu-W_{t}\gamma\right)^{۲}+\sum_{t=۱}^{n}\log\mathcal{GIG}\left(W_{t}\,|\overline{\alpha},\lambda\right). \qquad (۸)$$

در مرحله E از الگوریتم EM تابع $Q\left(\theta\,|\theta^{r}\right)=E_{\theta^{(r)}}[\mathcal{L}_{c}\left(\theta\,|D\right)\,|X]$ باید تعیین شود. برای انجام این کار، امید های شرطی زیر) برای $t=۱,۲,\dots,n$ لازم اند:

$$a_{t}=E_{\theta^{(r)}}\left[W_{t}\,|X\right]=E\left({W_{t}}^{s}\,|X\right)\Big|_{s=۱},$$

$$b_{t}=E_{\theta^{(r)}}\left[۱/W_{t}\,|X\right]=E\left({W_{t}}^{s}\,|X\right)\Big|_{s=-۱},$$

$$c_{t}=E_{\theta^{(r)}}\left[logW_{t}\,|X\right]=\partial E\left({W_{t}}^{s}\,|X\right)/\partial s\Big|_{s=۰}, \qquad (۹)$$

که در آن

$$E\left({W_{t}}^{s}\,|X\right)=\left(\chi'/\psi'\right)^{s/۲}K_{\lambda'+s}\left(\sqrt{\chi'\psi'}\right)/K_{\lambda'}\left(\sqrt{\chi'\psi'}\right)$$

$$\lambda'=\lambda-\tfrac{۱}{۲}$$
$$\chi'=\left(X_{t}-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu\right)^{۲}/\sigma^{۲}+\overline{\alpha}$$
$$\psi'=\gamma^{۲}/\sigma^{۲}+\overline{\alpha}$$

تذکر: امیدهای شرطی فوق در تمام تحقیقات مبتنی بر خانواده توزیع‌های هایپربولیک تعمیم یافته استفاده شده‌اند.
همه مقادیر باید در $\theta=\theta^{(r)}$ ارزیابی شوند که $\theta^{(r)}$ مقدار تخمینی θ در مرحله r ام الگوریتم بوده و مقادیر s را تعیین می کند.حال با در نظر گرفتن تابع

$$Q\left(\theta|\theta^{(r)}\right)=-\frac{n}{۲}\log\sigma^{۲}$$
$$-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}\sum_{t=۱}^{n}\left(b_{t}\left(X_{t}-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu\right)^{۲}+\gamma^{۲}a_{t}-۲a_{t}b_{t}\gamma\left(X_{t}-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu\right)\right)+q\left(\overline{\alpha},\lambda\right), \qquad (۱۰)$$

که درآن داریم

$$q\left(\overline{\alpha},\lambda\right)=-\log K_{\lambda}\left(\overline{\alpha}\right)+\left(\lambda-۱\right)\overline{c}-\frac{\overline{\alpha}}{۲}\left(\overline{a}+\overline{b}\right),$$

$$\overline{c}=\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}c_{t}\overline{a}=\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}a_{t},\overline{b}=\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}b_{t}.$$

مرحله اول ماکزیمم سازی الگوریتم :EM

$$\hat{\varphi}^{(r+۱)}=\left(\sum_{t=۱}^{n}{b_{t}}^{(r)}X_{t-۱}X_{t-۱}^{\top}\right)^{-۱}\sum_{t=۱}^{n}\left({b_{t}}^{(r)}X_{t}-\mu^{(r)}{b_{t}}^{(r)}-\gamma^{(r)}\right)X_{t-۱} \qquad (۱۱)$$

مرحله دوم ماکزیمم سازی الگوریتم :EM

$$\hat{\gamma}^{(r+1)} = \frac{1}{n}\frac{\sum_{t=1}^{n} b_t{}^{(r)}\left(\overline{e}^{(r+1)} - e_t{}^{(r+1)}\right)}{\overline{a}^{(r)}\overline{b}^{(r)} - 1}, \qquad (12)$$

که در آن $e_t{}^{(r+1)} = X_t - \hat{\varphi}^{\mathsf{T}(r+1)}X_{t-1}, \overline{e}^{(r+1)} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} e_t{}^{(r+1)}$ می‌باشند

مرحله سوم ماکزیمم سازی الگوریتم :EM

$$\hat{\mu}^{(r+1)} = \frac{1}{n}\frac{\sum_{t=1}^{n} b_t{}^{(r)} e_t{}^{(r+1)} - \gamma^{(r+1)}}{\overline{b}^{(r)}}. \qquad (13)$$

مرحله چهارم ماکزیمم سازی الگوریتم :EM

$$\hat{\sigma}^{2(r+1)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} b_t{}^{r}\left(e_t{}^{(r+1)} - \mu^{(r+1)}\right)^2 - \overline{a}^{r}\gamma^{2(r+1)}. \qquad (14)$$

مراحل پنجم وششم ماکزیمم سازی الگوریتم :EM

به منظور براورد $\lambda, \overline{\alpha}$ تابع $q\left(\overline{\alpha}, \lambda\right)$ را از طریق ماکزیمم سازی شرطی به حداکثر می رسانیم،یعنی تابع را باتوجه به یک پارامتر به حداکثر می رسانیم درحالیکه پارامتر دیگر را ثابت نگه می داریم. باریش[2] (۲۰۱۰) نشان می دهد که $LogK_\lambda\left(\overline{\alpha}\right)$ بر حسب λ, w اکیدا محدب است. به عبارت دیگر $q\left(\overline{\alpha}, \lambda\right)$ اکیدا مقعر است. برای بروزرسانی α از روش نیوتن استفاده می شودو برای بروز رسانی λاز تابع توسعه ای جایگزین $q\left(\overline{\alpha}, \lambda\right)$ دلیو و لانگ[3] (۲۰۰۹) بهره می بریم . در مرحله (r+۱)ام ماکزیمم سازی شرطی الگوریتم EM بروز رسانی و تکرار (j+۱)ام قوانین به صورت زیر است:

$$\lambda^{(j+1)} = \overline{c}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}LogK_\lambda\left(\overline{\alpha}^{(j)}\right)\Big|_{\lambda = \dot{\lambda}^{(j)}}\right]^{-1}$$

$$\overline{\alpha}^{(j+1)} = \overline{a}^{(j)} - \frac{\frac{\partial}{\partial\overline{\alpha}}q\left(\overline{\alpha}, \lambda^{(j+1)}\right)\Big|_{\overline{\alpha} = \dot{\overline{\alpha}}^{(j)}}}{\frac{\partial^2}{\partial\overline{\alpha}^2}q\left(\overline{\alpha}, \lambda^{(j+1)}\right)\Big|_{\overline{\alpha} = \dot{\overline{\alpha}}^{(j)}}}$$

توجه شود که مشتقات تابع بسل بصورت عددی محاسبه می شوند. در براورد $\overline{\alpha}$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\alpha}}q\left(\overline{\alpha}, \lambda^{(j+1)}\right) = \frac{1}{2}\left[R_{\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) + R_{-\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) - \left(\overline{a} + \overline{b}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{\alpha}^2}q\left(\overline{\alpha}, \lambda^{(j+1)}\right) = \frac{1}{2}\left[R^2{}_{\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) - \frac{1 + 2\lambda^{(j+1)}}{\overline{\alpha}}R_{\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) - 1 + R^2{}_{-\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) - \frac{1 - 2\lambda^{(j+1)}}{\overline{\alpha}}R_{-\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) - 1\right],$$

که در آن $R_{\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right) = K_{\lambda^{(j+1)}+1}\left(\overline{\alpha}\right)/K_{\lambda^{(j+1)}}\left(\overline{\alpha}\right)$ نسبت تابع بسل تعدیل شده است.

بردار شروع برای مقدار اولیه $\varphi^{(0)}$ را می توان به روش حداقل مربعات معمولی یا یول واکر بدست آورد و در مرحله بعد با محاسبه باقیمانده های اولیه مدل AR و با استفاده از بسته "ghyp" R، مقادیر اولیه $\mu_i{}^{(0)}, \sigma_i{}^{(0)}, \gamma_i{}^{(0)}, \lambda_i{}^{(0)}$ و $\overline{\alpha}_i{}^{(0)}$ را می توان انتخاب کرد.سپس الگوریتم EM تکرار می شود.حلقه تولید شده زمانی در گام (k+۱)ام متوقف می شود که $\left\|\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}\right\| \ll \varepsilon$ یا $\left\|\hat{\theta}^{(k+1)}/\hat{\theta}^{(k)} - 1\right\| \ll \varepsilon$. معمولا کاربران از $\varepsilon = 10^{-3}$ استفاده می کنند.اما تلرانس های نسبی مختلف ممکن است توسط کاربران مختلف بکار روند.تعیین مرتبه مدل

[2] Baricz
[3] De Leeue and Lang

جدول ۱: میانگین ومیانگین توان دوم خطای براورد های ماکزیمم درستنمایی)GH-AR(۱)با حجم نمونه ۵۰-۲۰۰-۵۰۰ تایی.

پارامتر		$n=۵۰$		$n=۲۰۰$		$n=۵۰۰$	
		Mean	MSE	Mean	MSE	Mean	MSE
$\gamma\,(-۰/۱)$	$\varphi\,(۰/۵)$	۵۱۹۳۸.۰	۵e-۸۳۲	۵۰۷۳۶.۰	۶e-۶۳۱	۵۰۶۹۵.۰	۶e-۶۲۵
	$\mu\,(۰)$	۰۲۴۹۴.۰	۵e-۹۵۲	۰۱۶۴۲.۰-	۶e-۸۳۷	۰۰۹۶۲.۰	۶e-۸۱۳
	$\sigma\,(۱)$	۲۳۵۱۱.۱	۴e-۸۹۷	۹۸۱۵۵.۰	۵e-۸۱۱	۱۱۰۳۴.۱	۴e-۶۰۱
	$\gamma\,(-۰/۱)$	۱۴۴۳۲.۰-	۴e-۹۲۳	۰۸۷۱۶.۰-	۵e-۶۳۳	۱۱۳۰۵.۰-	۵e-۷۸۲
	$\overline{\alpha}\,(۲)$	۲۸۴۷۶.۲	۳e-۹۷۴	۸۹۰۴۸.۱	۳e-۵۵۴	۰۲۲۹۲.۲	۳e-۵۱۰
	$\lambda\,(-۲)$	۴۰۲۷۳.۲-	۲e-۱۱۴	۲۷۸۵۴.۲-	۳e-۹۲۰	۹۰۹۶۳.۱-	۳e-۹۱۳
$\gamma\,(۱)$	$\varphi\,(۰/۵)$	۵۱۹۰۱.۰	۵e-۸۴۷	۵۰۸۰۲.۰	۶e-۶۲۴	۵۰۶۰۴.۰	۶e-۶۲۳
	$\mu\,(۰)$	۰۳۱۲۳.۰	۵e-۸۴۶	۰۱۸۹۳.۰	۶e-۷۱۲	۰۱۰۲۲.۰	۶e-۶۹۸
	$\sigma\,(۱)$	۹۱۷۲۶.۰	۴e-۹۱۳	۹۷۰۵۴.۰	۴e-۷۶۸	۲۰۸۴۷.۱	۴e-۶۷۵
	$\gamma\,(۱)$	۲۹۸۴۴.۱	۴e-۹۴۶	۱۵۳۸۴.۱	۴e-۷۱۱	۹۲۸۴۵.۰	۴e-۶۸۸
	$\overline{\alpha}\,(۲)$	۷۱۴۷۴.۱	۲e-۱۰۵	۹۰۳۵۸.۱	۳e-۸۶۵	۰۸۳۷۵.۲	۳e-۷۴۹
	$\lambda\,(-۲)$	۳۲۵۶۳.۲-	۳e-۹۸۱	۸۱۷۰۴.۱-	۳e-۹۴۴	۹۸۳۴۳. ۱-	۳e-۸۱۷
$\gamma\,(-۳)$	$\varphi\,(۰/۵)$	۵۱۸۹۷.۰	۵e-۸۳۴	۵۰۷۱۲.۰	۶e-۶۳۳	۵۰۶۶۹.۰	۶e-۶۲۹
	$\mu\,(۰)$	۰۲۹۵۷.۰-	۵e-۸۱۱	۰۲۱۱۵.۰	۶e-۷۲۳	۰۱۳۳۲.۰-	۶e-۶۳۱
	$\sigma\,(۱)$	۳۰۰۲۱.۱	۴e-۸۹۹	۱۸۳۶۳.۱	۴e-۶۰۰	۱۰۷۸۳.۱	۴e-۶۰۱
	$\gamma\,(-۳)$	۳۱۸۲.۳-	۳e-۴۰۲	۸۶۰۴۳.۲-	۳e-۲۴۳	۰۷۷۶۱.۳-	۳e-۲۲۲
	$\overline{\alpha}\,(۲)$	۴۰۷۲۶.۲	۳e-۹۷۳	۲۰۱۸۴.۲	۳e-۷۳۴	۱۰۶۷۵.۲	۳e-۷۰۰
	$\lambda\,(-۲)$	۵۸۹۳۲.۱-	۳e-۹۳۶	۲۹۹۸۲.۲-	۳e-۸۵۶	۰۸۹۴۱.۲-	۳e-۸۳۳

AR و همچنین انتخاب بهترین مدل در میان همه مدل های ممکن گام های مهم مدل سازی می باشند.با در نظر گرفتن تابع خودهمبستگی جزئی نمونه مرتبه احتمالی مدل های AR را می توان انتخاب کرد و سپس بهترین مدل ها با استفاده از معیارAIC ،Akaike)۱۹۷۴) یا معیارBIC ،Schwarz)۱۹۷۸)انتخاب می شوند که بصورت زیر می باشند.

$$AIC = ۲k - ۲\mathcal{L}\left(\hat{\theta}\right),$$

$$BIC = k - \log n - ۲\mathcal{L}\left(\hat{\theta}\right).$$

که در آن $\mathcal{L}\left(\hat{\theta}\right)$ لگاریتم تابع درستنمایی در ازای برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها، k تعداد پارامترها در مدل GH-AR(p) و n اندازه نمونه می باشد.

۵. مطالعات عددی مدل GH-AR

در مطالعه شبیه سازی مسیرهای GH-AR(1) با ضریب $\varphi_۱ = ۰/۵$ در نظر می گیریم ومقدار حقیقی سایر پارامترها را درپرانتز جلوی آنها در جدول ۱، با اندازه نمونه‌های ۵۰،۲۰۰ و۵۰۰،تعیین میکنیم که در هرمورد عدم تقارن‌های ضعیف $(\gamma = ۰/۱)$، متوسط$(\gamma = ۱)$ و قوی$(\gamma = -۳)$ جداگانه برای ۱۰۰۰ نمونه را در هر حالت در نظر گرفته، شبیه سازی و سپس برآورد کرده‌ایم. میانگین و میانگین توان دوم خطای(MSE) برآوردهای ML ثبت شده جدول (۱) کارایی مدل)GH-AR(۱) را نشان می دهند.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه فرآیندهای خودبازگشتی غیر گوسی پرداختیم نوآوری هایی را پیشنهاد دادیم که خانواده هذلولی تعمیم یافته دنباله سبک ـ سنگین ، متقارن ـ نامتقارن را در بر می از نمایش تصادفی خانواده هذلولی تعمیم یافته برای استنباط اطلاعات مربوط به این مدل پیشنهادی استفاده کردیم .در نتیجه براوردهای ماکزیمم درستنمایی را از طریق الگوریتم EM بدست آوردیم.مطالعات شبیه سازی و کاربرد این مدل بر روی داده های سری زمانی واقعی نشان دهنده عملکرد مناسب این مدل بر روی داده های چوله واقعی بودند.با شبیه‌سازی از این مدل‌ها با کمک فرم نمایش تصادفی آنها به بررسی مناسب بودن برآورگرهای ماکزیمم درستنمایی و خواص آنها پرداخته شده، و ثابت شد که این مدل‌های برازش شده دارای مزیت بر مدل‌های معمولی هستند که تاکنون مطالعه شده‌اند. پیاده سازی الگوریتم های لازم بر مبنای نرم افزار R نسخه۳.۵.۰ با هسته

۷i ۷۶۰ و پردازشگر۸.۲ گیگاهرتز می باشد،از یک تلرانس نسبی $۱۰^{-۳}$ برای همگرایی الگوریتم EM استفاده می شود.در مطالعه شبیه سازی مسیرهای)۱GH-AR(با ضریب $\varphi_۱ = ۰/۵$ در نظر گرفته شد و مقدار میانگین و میانگین توان دوم خطای (MSE) برآوردهای ML محاسبه شد. با توجه به نتایج ملاحظه شد که با افزایش اندازه های نمونه، میانگین توان دوم خطا کاهش یافته و میانگین براوردهای ML به مقدار واقعی انها نزدیکتر می شود. این نتیجه نشان می‌دهد برآوردگرهای ML مدل‌های مختلف)۱GH-AR(عملکرد مناسبی در برآورد و حالات حدی مورد انتظار دارند.

مراجع

[1] Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control 19 (6):716–23.
[2] Akkaya, A., and M. L. Tiku. 2001. Estimating parameters in autoregressive models in non-normal situations: Asymmetric innovations. Communication in Statistics - Theory and Methods 30 (3):517–36.
[3] Arellano-Valle, R. B., M. A. Cortes, and H. W. Gomez. 2010. An extension of the Epsilon-Skew-Normal Distribution. Communication in Statistics - Theory and Methods 39 (5):912–22.
[4] Arellano-Valle, R. B., H. Gomez, and F. A. Quintana. 2005. Statistical inference for a general classof asymmetric distributions. Journal of Statistical Planning and Inference 128 (2):427–43.
[5] Bondon, P. (2009). Estimation of autoregressive models with epsilon-skew-normal innovations. *Journal of Multivariate Analysis*, 100: 1761_1776.
[6] Branco, M. D., Dey, D. K. (2001). A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *Journal of MultivariateAnalysis*, 79: 99–113
[7] Baricz, A. 2010. Turn type inequalities for some probability density functions. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 47 (2):175–89.
[8] Barndorff-Nielsen, O. 1997. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling.Scandinavian Journal of Statistics 24 (1):1–13.
[9] Barndorff-Nielsen, O., and C. Halgreen. 1977. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions. Zeitschrift f€ur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete 38 (4):309–11.
[10] Brockwell, P. J., and R. A. Davis. 2002. Introduction to time series and forecasting. 2nd ed. NewYork: Springer.
[11] Browne, R. P., and P. D. McNicholas. 2015. A mixture of generalized hyperbolic distributions.Canadian Journal of Statistics 43 (2):176–98.
[12] Contreras-Reyes, J. E. 2016. Analyzing fish condition factor index through skew-Gaussian information theory quantifiers. Fluctuation and Noise Letters 15 (2):1650013.
[13] Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm.Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological, 39:1–22
[14] de Leeuw, J., and K. Lange. 2009. Sharp quadratic majorization in one dimension. Computational Statistics & Data Analysis 53 (7):2471–84.
[15] Good, I. J. 1953. The population frequencies of species and the estimation of population parameters. Biometrika 40 (3/4):237–60.
[16] Hosseinzadeh, A., M. Maleki, Z. Khodadadi, and J. E. Contreras-Reyes. 2018. The skew-reflected-Gompertz distribution for analyzing the symmetric and asymmetric data. The Journal of Computational and Applied Mathematics 349:132–41. doi:10.1016/j.cam.2018.09.011.
[17] Hwang, S. Y., J. S. Baek, J. A. Park, and M. S. Choi. 2010. Explosive volatilities for threshold-GARCH processes generated by asymmetric innovations. Statistics & Probability Letters 80 (1):26–33.
[18] Hwang, S. Y., and I. V. Basawa. 2004. Stationarity and moment structure for box-cox transformedthreshold GARCH (1,1) processes. Statistics & Probability Letters 68 (3):209–20.
[19] Hwang, S. Y., and T. Y. Kim. 2004. Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with application to test for ARCH structure. Stochastic Processes and their Applications 110 (2):295–314.
[20] Janacek, G. J., and A. L. Swift. 1990. A class of models for non-normal time series. Journal of Time Series Analysis 11 (1):19–31.
[21] Jørgensen, B. 1982. Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution. NewYork, NY: Springer-Verlag.
[22] Labra, F. V., Garay, A. M., Lachos, V. H., Ortega, E. M. M. (2012). Estimation and diagnostics for heteroscedastic nonlinear regression models based on scale mixtures of skew-normal distributions. Journal of Statistical Planning and Inference, 142: 2149–2165.
[23] Li, W. K., and A. I. Mcleod. 1988. ARMA modeling with non-Gaussian innovations. Journal ofTime Series Analysis 9 (2):155–68.
[24] Luethi, D., and W. Breymann. 2016. ghyp: A package on the generalized hyperbolic distribution and its special cases. URL-https://cran.rproject.org/web/packages/ghyp/index.html, R package version 1.5.7.
[25] Maleki, M., and R. B. Arellano-Valle. 2017. Maximum a-posteriori estimation of autoregressive processes based on finite mixtures of scale-mixtures of skew-normal distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation 87 (6):1061–83.
[26] Maleki, M., R. B. Arellano-Valle, D. K. Dey, M. R. Mahmoudi, and S. M. Jalali. 2017. A Bayesian approach to robust skewed autoregressive process. Calcutta Statistical Association Bulletin 69 (2):165–82.
[27] Maleki, M., and M. R. Mahmoudi. 2017. Two-pieces location-scale distributions based on Scale mixtures of normal family. Communication in Statistics - Theory and Methods 46 (24): 12356–69.
[28] Maleki, M., and A. R. Nematollahi. 2017a. Autoregressive models with mixture of scale mixtures of gaussian innovations. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science 41(4):1099–107.
[29] Maleki, M., and A. R. Nematollahi. 2017b. Bayesian approach to epsilon-skew-normal family. Communication in Statistics - Theory and Methods 46 (15):7546–61.
[30] Maleki, M., D. Wraith, and R. B. Arellano-Valle. 2018b. A flexible class of parametric distributions for Bayesian linear mixed models. Test. doi:10.1007/s11749-018-0590-6.
[31] Meng, X., Rubin, D. B. (1993). Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework.Biometrika, 80: 267–278.
[32] McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts. 2005. Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools. Princeton, NJ: Princeton University Press.
[33] Moravveji, B., Z. Khodadai, and M. Maleki. 2018. A Bayesian Analysis of Two-Piece distributions based on the Scale Mixtures of Normal Family. Iranian Journal of Science and Technology,Transactions A: Science. doi:10.1007/s40995-018-0541-9.

[34] Mudholkar, G. S., and A. D. Hutson. 2000. The epsilon-skew-normal distribution for analyzingnear-normal data. Journal of Statistical Planning and Inference 83 (2):291–309.
[35] Ó Ruanaidh, J. J. K., and W. Fitzgerald. 1996. Numerical Bayesian methods applied to signal processing.New York, NY: Springer.R Core Team. 2018. A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. ISBN 3-900051-07-0; URL http://www.R-project.org
[36] Rubio, F. J., Steel, M. F. G. (2014). Inference in Two-Piece Location-Scale Models with Jeffreys Priors. Bayesian Analysis,9(1): 1-22.
[37] Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. The Annals of Statistics 6 (2):461–4.
[38] Tiku, M. L., W. K. Wong, D. C. Vaughan, and G. Bian. 2000. Time series models in non-normal situations; symmetric innovations. Journal of Time Series Analysis 21 (5):571–96.
[39] Vanegas, L. H., Cysneiros, F. J. A. (2010). Assesment of diagnostic procedures in symmetrical nonlinear regression models. Computational Statistics and Data Analysis, 54: 1002–1016.

دانشگاه گنبدکاووس

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار

https://conf.gonbad.ac.ir/msc1403

پنجمین همایش ملی ریاضی و آمار، IS–107، صص. ۳۱۰–۳۱۶

کلاس نیرومند مدل خود بازگشتی مبتنی بر خانواده آمیخته مقیاسی نرمال دوپارچه

صفدر قصمی شهواری*،آ

آگروه ریاضی و آمار،واحد بندرجاسک،دانشگاه آزاد اسلامی،بندر جاسک،ایران

اطلاعات مقاله

کلیدواژه‌ها :
الگوریتم EM
مدل خودبازگشتی
خانواده‌ی توزیع‌های آمیخته‌ی مقیاسی نرمال
نمایش سلسله مراتبی
توزیع های دوپارچه

چکیده

در این مقاله به معرفی و مطالعه فرآیندهای سری زمانی خودبازگشتی غیرگوسی می‌پردازیم. در مدل بندی این سری‌های زمانی کلاس انعطاف پذیری از توزیع‌های دوپارچه مبتنی برخانواده آمیخته‌های مقیاس نرمال به مدل خود بازگشتی ارایه می دهیم. کلاس توزیع‌های مذکور کلاس‌هایی غنی از خانواده توزیع‌ها هستند که شامل توزیع‌های دم سبک – سنگین و متقارن – نامتقارن می‌باشند که براساس آنها استنباطهایی نیرومند را خواهیم داشت. یکی از ویژگی‌های اصلی استفاده از نمایش سلسله مراتبی مناسب این خانواده‌های انعطاف‌پذیر در برآورد پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم EM است. عملکرد مدل‌های پیشنهادی و برآورد پارامترهای این مدل‌ها از طریق مطالعات شبیه سازی و داده‌های واقعی نیز ارزیابی شده‌اند.

۱. مقدمه

مدل‌های سری زمانی با ساختارهای نیرومند، نامتقارن و چوله می‌توانند در مقایسه با مدل‌هایی که در آنها توزیع های مبنایی ساده (مانند نرمال) اما دارای داده‌های پرت و یا رفتار چوله داشته باشند مفیدتر باشند. در واقع به منظور حل این قبیل مسایل برخی محققان از مدل‌های سری زمانی غیرنرمال استفاده کرده‌اند. در اینجا یک کلاس جدید توزیع های دو پارچه ای آمیخته مقیاسی نرمال[۱] که مدل سری‌های زمانی متقارن – نامتقارن و دم سبک – سنگین را پوشش می دهند به مدل خود بازگشتی ارائه می دهیم. با استفاده از بسط کلاس SMN به کلاس آمیخته مقیاس نرمال دوپارچه (TP-SMN) که شامل توزیع‌های دم سبک – سنگین و متقارن – نامقارن می‌باشد و نیرومندی استنباط و پوشش تقارن و عدم تقارن از ویژگی های اعضای این کلاس است مدل خود بازگشتی با نوآوری‌های مبتنی TP-SMN را بررسی و معرفی خواهیم کرد. برای یافتن براوردهای ماکزیمم درستنمایی (ML) مربوط به پارامترهای مدل از نمایش سلسله مراتبی فرآیندهای خود بازگشتی پیشنهادی استفاده می‌کنیم. سپس با شبیه‌سازی در حجم نمونه‌های متفاوت، عملکرد خوب و مناسب مدل‌های معرفی شده و برآوردگرهای آن را نشان خواهیم داد.

۲. . خانواده توزیع های آمیخته مقیاسی نرمال دوپارچه

خانواده کلی توزیع‌های مکان ــ مقیاس دوتکه (TP) را که توسط آرلانوواله و همکاران در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است،توزیع‌های دوتکه دارای تابع چگالی کلی بصورت زیر می‌باشند:

$$g(y|\mu,\sigma,\gamma)=\frac{2}{\sigma[a(\gamma)+b(\gamma)]}\left[f\left(\frac{y-\mu}{\sigma b(\gamma)}\right)I_{(-\infty,\mu]}(y)+f\left(\frac{y-\mu}{\sigma a(\gamma)}\right)I_{(\mu,+\infty)}(y)\right], \qquad (۱)$$

*سخنران

[۱] Normal of Mixter Scale Tow-Pice

جدول ۱: برخی از اعضای خانواده توزیع های TP-SMN

$K_r = E\left[U^{-r/2}\right]$	U of pmf or Pdf	$f_{SMN}(.), y \in R$	Dist.
...	$1 w.p.\ 1 U=$	$\Phi(y;\mu,\sigma^2)$	Two-piece normal (TP-N)
$\left(\frac{\nu}{2}\right)^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$	$Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu\sigma}}\left(1+\frac{d}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ $\nu = \nu$	t Two-piece (TP-T)
$\frac{2\nu}{\nu-r}, \nu > \frac{r}{2}$	$Beta(\nu, 1), \nu > 0$	$\nu = \nu\int_0^1 u^{\nu-1}\Phi\left(y;\mu,u^{-1}\sigma^2\right) du\nu$	slash Two-piece (TP-SL)
$\frac{\nu}{\gamma^{r/2}} + 1 - \nu$	$\nu I_{(u_t=\tau)} + (1-\nu) I_{(u_t=1)}$ $0 < \nu < 1, 0 < \tau \leq 1$	$\nu\Phi\left(y;\mu,\tau^{-1}\sigma^2\right) + (1-\nu)\Phi(y;\mu,\sigma^2)$ $\nu = (\nu,\tau)^\top$	Two-piece contaminated normal (TP-CN)

که در این رابطه متغیر تصادفی Yدارای توزیع دوتکه با چگالی $g(y|\mu,\sigma,\gamma)$و $\mu \in R$پارامتر مکان، $\sigma > 0$پارامتر مقیاس و γپارامتر چولگی می‌باشند. همچنین $a(\gamma) > 0$، $b(\gamma) > 0$و $f(\cdot)$یک چگالی استاندارد و متقارن حول صفر می‌باشد. پارامتر مکان μمد این خانواده از توزیع‌ها نیز می‌باشد و بصورت نماد گذاری داریم $Y \sim TP(\mu,\sigma,\gamma)$.

متغیر تصادفی X دارای توزیع آمیخته مقیاسی نرمال است و می نویسیم $X \sim SMN(\mu,\sigma,\nu)$ اگر به ترتیب دارای چگالی احتمال و نمایش تصادفی زیر باشد .

$$f_{SMN}(x|\mu,\sigma,\nu) = \int_0^\infty \Phi\left(x|\mu,u^{-1}\sigma^2\right) dH(u|\nu), x \in R \quad (2)$$

$$X = \mu + \sigma U^{-1/2} Z, \quad (3)$$

که در آن $\Phi\left(.|\mu,\sigma^2\right)$ چگالی توزیع $N\left(\mu,\sigma^2\right)$، $H(.|\nu)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی مقیاس‌ساز U است که دارای پارامترهای اسکالر یا برداری ν نشان داد و Zنیز متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.*خانواده* TP-SMN *خانواده ای غنی از توزیع‌ها است که شامل توزیع های* TP-N *دم سبک نامتقارن* (همچنین *توزیع اپسیلون –چوله –نرمال،مودهلکار و هاتسون،۲۰۰۰*) *و توزیع های* TP-T *دم سنگین نامتقارن و* TP-CN *و اعضای متقارن متناظرشان می‌باشد . چگالی این خانواده به صورت زیر نیز قابل نمایش است :*

$$g(y|\mu,\sigma,\gamma,\nu) = \begin{cases} 2(1-\gamma) f_{SMN}(y|\mu,\sigma(1-\gamma),\nu) & y \leq \mu \\ 2\gamma f_{SMN}(y|\mu,\sigma\gamma,\nu) & y > \mu \end{cases}, \quad (4)$$

که در آن $0 < \gamma < 1$ است با در نظر گرفتن نمایش تصادفی خانواده SMN *توزیع های متفاوت* TP-SMN *به ازای توزیع‌های مختلف متغیر مقیاس‌ساز U به صورت جدول ۱در زیر بدست می آید :*

۳. مدل خود بازگشتی مبتنی بر خانواده آمیخته مقیاسی نرمال دوپارچه

مدل خود بازگشتی $TP-SMN-AR(p)$ مرتبه p و عرض از مبدا μ را با نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (5)$$

که در آن $\varphi = \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_p\right)^\top$ بردار ضرایب خودبازگشتی نامعلوم و $\{\varepsilon_t\}$ دنباله ای از خطاهای مستقل و هم توزیع ،توزیع شده بصورت زیر است:

$$\varepsilon_t \sim TP-SMN(0,\sigma,\nu,\gamma), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (6)$$

که *بردار پارامترهای* مدل TP-SMN-AR(p) به *صورت* $\Theta = (\varphi, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \nu)^\top$ *است* . . با توجه به ساختار مدل TP-SMN-AR(p) که تعریف شد می‌توان توزیع احتمالی $X_t \,|X_{t-1}$ را به صورت زیر فرمول بندی کرد.

$$X_t \,|X_{t-1} = x_{t-1} \sim TP - SMN\left(\varphi^\top x_{t-1} + \mu, \sigma, \nu, \gamma\right), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (۷)$$

بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی شرطی مدل TP-SMN-AR(p) پیشنهادی با نمونه اولیه غیرتصادفی $X_{-p+1}, \ldots, X_0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$l(\Theta \,|x) = \sum_{t=1}^{n} \log f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1}}\,(x_t \,|\Theta), \quad (۸)$$

که در آن $f_{X_t|X_{t-1}=x_{t-1}}$ در واقع چگالی TP-SMN بوده و $\Theta = (\varphi, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \nu)^\top$ بردار پارامترهای مدل است.

۴. برآورد های ماکزیمم درستنمایی مدل TP-SMN-AR(p)

نمایش سلسله مراتبی خانواده آمیخته مقیاسی نرمال دوپارچه پیاده سازی و برنامه نویسی مدل TP-SMN-AR(p) را به میزان قابل توجهی تسهیل خواهد کرد و این مدل را می‌توان به راحتی به صورت زیر مجددا فرمول بندی کرد:

$$X_t \,|X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t, Z_{ti} = 1 \quad \underset{\sim}{ind.} \quad N\left(\varphi^\top x_{t-1} + \mu, u_t^{-1/2}\sigma_i^2\right) I_{T_t}(x_t)^{2-i}\, I_{T_t^c}(x_t)^{i-1},$$

$$U_t \,|Z_{ti} = 1 \quad \underset{\sim}{ind.} \quad H(u_t|\,\nu), Z_t \quad \underset{\sim}{iid.} \quad M\left(1, \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right),$$

به ازای $t = 1, 2, \ldots, n$ و $i = 1, 2$ که در آن $T_t = \left(-\infty, \varphi^T x_{t-1} + \mu\right)$ و $I_T(.)$ و $N(.)$ توزیع نرمال بریده شده در بازه T_t است.

فرض کنید $D = \left(X^\top, U^\top, Z^\top\right)^\top$ داده های کامل باشندکه در آن X داده های مشاهده شده و U و Z داده‌های پنهان می باشد. با استفاده از نمایش سلسله مراتبی بالا ،تابع درستنمایی تقویت شده بر مبنای داده‌های کامل به صورت زیر است.

$$L_c(\Theta) = \prod_{t=1}^{n}\prod_{i=1}^{2}\left(\phi\left(X_t|\,\varphi^\top x_{t-1} + \mu, u_t^{-1}\sigma_i^2\right) h(u_t|\,\nu)\, p(z_t|\,\sigma_1, \sigma_2)\, I_{T_t}(x_t)^{2-i}\, I_{T_t^c}(x_t)^{i-1}\right)^{Z_{ti}},$$

که مشابه قبل برای آن $T_t = \left(-\infty, \varphi^\top x_{t-1} + \mu\right), t = 1, \ldots, n$ است.
لذا لگاریتم درستنمایی تقویت شده شرطی نظیرآن برابر است با:

$$\ell_c(\Theta) = -n\log(\sigma_1+\sigma_2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} Z_{ti}U_t\left(\frac{X_t - \varphi^\top X_{t-1} - \mu}{\sigma_i}\right)^2 + \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} Z_{ti}\log h(U_t|\nu), \quad (۹)$$

که در آن $\Theta = (\varphi, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \nu)^\top$ بردار پارامترهای مجهول می‌باشد.
اینک در مرحله امیدگیری از الگوریتم ECME، با تعریف کمیت های $\hat{z}_{ti} = E\left[Z_{ti}\,|\hat{\Theta}, X\right]$ و $\hat{w}_{ti} = E\left[U_t Z_{ti}\,|\hat{\Theta}, X\right]$ و استفاده از خواص معلوم امید شرطی داریم $\hat{w}_{ti} = \hat{k}_{ti}\hat{z}_{ti}$ که در آن برای $t = 1, \ldots, n, i = 1, 2$ داریم:

$$\hat{z}_{ti} = E\left[Z_{ti}\,|\hat{\Theta}, X\right] = \frac{P(Z_{ti}=1)\times P(x_t\,|Z_{ti}=1)}{g(x_t)}$$
$$= \frac{2(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\, f_{SMN}\left(x_t\left|\hat{\varphi}^\top x_{t-1}+\hat{\mu}, \hat{\sigma}_1, \hat{\nu}\right.\right) I_{\left(-\infty, \hat{\varphi}^\top x_{t-1}+\hat{\mu}\right]}(x_t)}{g\left(x_t\left|\hat{\varphi}^\top x_{t-1}+\hat{\mu},\ \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\nu}\right.\right)} = I_{\left(-\infty, \hat{\varphi}^\top x_{t-1}+\hat{\mu}\right]}(x_t), \quad (۱۰)$$

جدول ۲: امید شرطی اعضای .TP-SMN-AR

مدل خودبازگشتی (AR model)	امیدشرطی ($\hat{k}_{ti}$)
TP-N-AR	۱
TP-T-AR	$\frac{\hat{\nu}+۱}{\hat{\nu}+d_{ti}}$
TP-SL-AR	$\frac{۲\hat{\nu}+۱}{d_{ti}}\frac{p_{۱}(\hat{\nu}+۳/۲,d_{ti}/۲)}{p_{۱}(\hat{\nu}+۱/۲,d_{ti}/۲)}$
TP-CN-AR	$\frac{\hat{\tau}^{۲}\hat{\nu}e^{-\hat{\tau}d_{ti}/۲}+(۱-\hat{\nu})e^{-d_{ti}/۲}}{\hat{\tau}\hat{\nu}e^{-\hat{\tau}d_{ti}/۲}+(۱-\hat{\nu})e^{-d_{ti}/۲}}$

که با توجه به تعریف تابع چگالی $g\left(x_t\left|\hat{\varphi}^{\top}x_{t-۱}+\hat{\mu},\ \hat{\sigma}_{۱},\hat{\sigma}_{۲},\hat{\nu}\right.\right)$ نتیجه فوق حاصل می‌شود و در آن $g(.|.)$ تابع چگالی TP-SMN است. لذا امیدهای شرطی برای مدل‌های مختلف TP-SMN-AR با روابط زیر و بنابر جدول ۲ بصورت جدول ۳ در زیر بدست می‌آیند.

که در آن $d_{ti}=\left(\frac{x_t-\hat{\varphi}^{T}x_{t-۱}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{i}}\right)^{۲}$ و $p_x\ (a,b)$ تابع توزیع Gamma(a,b) در نقطه‌ی x است. در مرحله E از الگوریتم ECME (تکرار $k+۱$ ام)تابع $Q\left(\Theta\left|\hat{\Theta}^{(k)}\right.\right)=E_{\theta^{(k)}}\left[\ell_c\ (\Theta)\mid \hat{\Theta}^{(k)},X\right]$ باید محاسبه شود،بنابراین در مرحله E از الگوریتم ECME داریم

$$
\begin{aligned}
&Q\left(\Theta|\ \hat{\Theta}^{(k)}\right)=E_{\theta^{(k)}}\left[\ell_c\ (\Theta)\left|\hat{\Theta}^{(k)},\ X\right.\right]\\
&=E\left[-n\log\left(\sigma_{۱}+\sigma_{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\sum_{t=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{۲}Z_{ti}U_t\left(\frac{X_t-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu}{\sigma_i}\right)^{۲}+\sum_{t=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{۲}Z_{ti}\log h\left(U_t|\nu\right)\right]\\
&=-n\log\left(\sigma_{۱}+\sigma_{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\sum_{t=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{۲}E\left[U_tZ_{ti}\left|\hat{\Theta},X\right.\right]\left(\frac{X_t-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu}{\sigma_i}\right)^{۲}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{۲}E\left[Z_{ti}\log h\left(U_t|\nu\right)\right|\hat{\Theta}^{(k)},X]\\
&=-n\log\left(\sigma_{۱}+\sigma_{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\sum_{t=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{۲}\hat{w}_{ti}^{(k)}\left(\frac{X_t-\varphi^{\top}X_{t-۱}-\mu}{\sigma_i}\right)^{۲}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{۲}E\left[Z_{ti}\log h\left(U_t|\nu\right)\right|\hat{\Theta}^{(k)},X],
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در آن $\hat{w}_{ti}^{(k)}=E\left[U_tZ_{ti}\left|\hat{\Theta},X\right.\right]=\hat{k}_{ti}^{(k)}\hat{z}_{ti}^{(k)}$

مراحل ماکزیمم سازی شرطی :(CM)

مرحله یک CM از الگوریتم :ECME

$$
\hat{\varphi}^{(k+۱)}=\left(\sum_{t=۱}^{n}\hat{\alpha}_t^{(k)}X_{t-۱}X_{t-۱}^{\top}\right)^{-۱}\sum_{t=۱}^{n}\hat{\alpha}_t^{(k)}\left(X_t-\hat{\mu}^{(k)}\right)X_{t-۱}
\tag{۱۲}
$$

که در آن $\hat{\alpha}_t^{(k)}=\sum_{i=۱}^{۲}\hat{w}_{ti}^{(k)}/{\sigma_{i}}^{۲(k)}$.

مرحله دوم CM از الگوریتم :ECME

$$
\hat{\mu}^{(k+۱)}=\frac{\sum_{t=۱}^{n}\hat{\alpha}_t^{(k)}\left(X_t-\hat{\varphi}^{\top(k+۱)}X_{t-۱}\right)}{\sum_{t=۱}^{n}\hat{\alpha}_t^{(k)}}
\tag{۱۳}
$$

مراحل سوم وچهارم CM از الگوریتم :ECME

باگرفتن مشتق جزئی از تابع هدف نسبت به σ_i معادلات موکد درجه سه به فرم زیربدست می آید.

$$
{\sigma_i}^{۳}+p\sigma_i+q=۰;i=۱,۲,
\tag{۱۴}
$$

که در آن

است. $q=p\sigma_{۲}I_{(i=۱)}+p\sigma_{۱}I_{(i=۲)}$ و $p=-\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\hat{w}_{ti}^{(k)}\left(X_t-\hat{\varphi}^{T(k+۱)}X_{t-۱}-\hat{\mu}^{(k+۱)}\right)^{۲}$

توجه کنید $p,q<۰$ بنابراین این معادله درجه سوم فقط یک ریشه منحصر به فرد در بازه $(۰,+\infty)$ دارد. $\hat{\sigma}_i^{(k+۱)}$ را بروز رسانی کنید.

مرحله CML از الگوریتم :ECME

$$\nu^{(k+1)} = \text{argmax}_{\nu} \ell \left(\hat{\phi}^{\mathsf{T}(k+1)}, \hat{\mu}^{(k+1)}, \hat{\sigma}_1^{(k+1)}, \hat{\sigma}_2^{(k+1)}, \nu \middle| X \right) \quad (۱۵)$$

که در آن $\ell(\cdot|X)$ *تابع لگاریتم درستنمایی است . الگوریتم ECME تا زمانی که یک قانون همگرایی مناسب براورده شود تکرار می شود .*

۵. نیرومندی مدل TP-SNM-AR

به بررسی نیرومندی مدل پیشنهادی در حضور داده های پرت بر روی متغیر پاسخ می پردازیم، این روش توسط وانگاس وسنیروس (۲۰۱۰) به کار برده شده است. بنابراین شبیه سازی مونت کارلو را با ۱۰۰۰ نمونه مختلف با حجم ۲۰۰ از مدل TP-SNM-AR زیر انجام می‌دهیم:

$$X_t = -۰/۷X_{t-۱} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim TP - N\,(\mu = ۰, \sigma = ۱, \gamma = ۰,۲۵)\,, t = ۱, \ldots, ۲۰۰.$$

در هر نمونه برای داشتن داده‌های پرت نوآوری های $\varepsilon_{۱۰۰}$ *را با* $\varepsilon_{۱۰۰} + \Psi$ جایگزین می‌کنیم، بعبارتی دیگر

$$\varepsilon_{۱۰۰}(\Psi) = \varepsilon_{۱۰۰} + \Psi, \Psi = ۱, ۲, \ldots, ۱۰$$

سپس پارامترهای مدل را با و بدون داده های پرت یعنی $\hat{\theta}_j$, $\hat{\theta}_j(\Psi)$ برآورد می‌کنیم و به ارزیابی میانگین مونت کارلوی مربوط به تغییرات نسبی (ARC) می پردازیم.

$$ARC_{\Psi}(\theta) = \frac{۱}{۱۰۰۰} \sum_{j=۱}^{۱۰۰۰} \left| \frac{\hat{\theta}_j(\Psi) - \hat{\theta}_j}{\hat{\theta}_j} \right|$$

مطابق با شکل (۱) برای همه پارامترها ،میانگین تغییرات نسبی با نمو داده های پرت Ψ افزایش می یابد، به عبارت دیگر مدل های خودبازگشتی TP-SL،TP-T و TP-CN برای برازش مشاهدات ناهمگن نیرومندتر و معقول تر هستند. در واقع با داده های پرت ،مدل چوله نرمال در مقایسه با سایر مدل های خود بازگشتی چوله بسیار قابل مقایسه است. بنابراین نتایج نشان می دهد که مدل نیرومند TP-SMN-AR برای برازش داده های سری زمانی نامتقارن با داده های پرت مناسب می‌باشد.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه فرآیندهای خودبازگشتی غیر گوسی پرداختیم و یک کلاس جدید نامتقارن و دم سنگین توزیع دوپارچه را به مدل خود بازگشتی ارایه دادیم با استفاده از نمایش سلسله مراتبی نوع آمیخته مدل برایTP-SMN-AR براورد پارامترهای مدل پیشنهادی استفاده کردیم .نیرومندی مدل پیشنهادی در حضور داده های پرت بر روی متغیر پاسخ بررسی شد، این روش توسط وانگاس وسنیروس (۲۰۱۰) به کار برده شده است. بنابراین شبیه سازی مونت کارلو را با ۱۰۰۰ نمونه مختلف با حجم ۲۰۰ از مدل TP-SNM-AR انجام شد و *نتایج نشان می دهد که مدل نیرومند* TP-SMN-AR *برای برازش داده های سری زمانی نامتقارن با داده های پرت مناسب می‌باشد .*

مراجع

[1] Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control 19 (6):716–23.

[2] Akkaya, A., and M. L. Tiku. 2001. Estimating parameters in autoregressive models in non-normal situations: Asymmetric innovations. Communication in Statistics - Theory and Methods 30 (3):517–36.

[3] Andrews, D. R., and C. L. Mallows. 1974. Scale mixture of normal distribution. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, Methodology 36:99–102.

[4] Arellano-Valle, R. B., M. A. Cortes, and H. W. Gomez. 2010. An extension of the Epsilon-Skew-Normal Distribution. Communication in Statistics - Theory and Methods 39 (5):912–22.

[5] Arellano-Valle, R. B., H. Gomez, and F. A. Quintana. 2005. Statistical inference for a general classof asymmetric distributions. Journal of Statistical Planning and Inference 128 (2):427–43.

[6] Bondon, P. (2009). Estimation of autoregressive models with epsilon-skew-normal innovations. *Journal of Multivariate Analysis*, 100: 1761_1776.

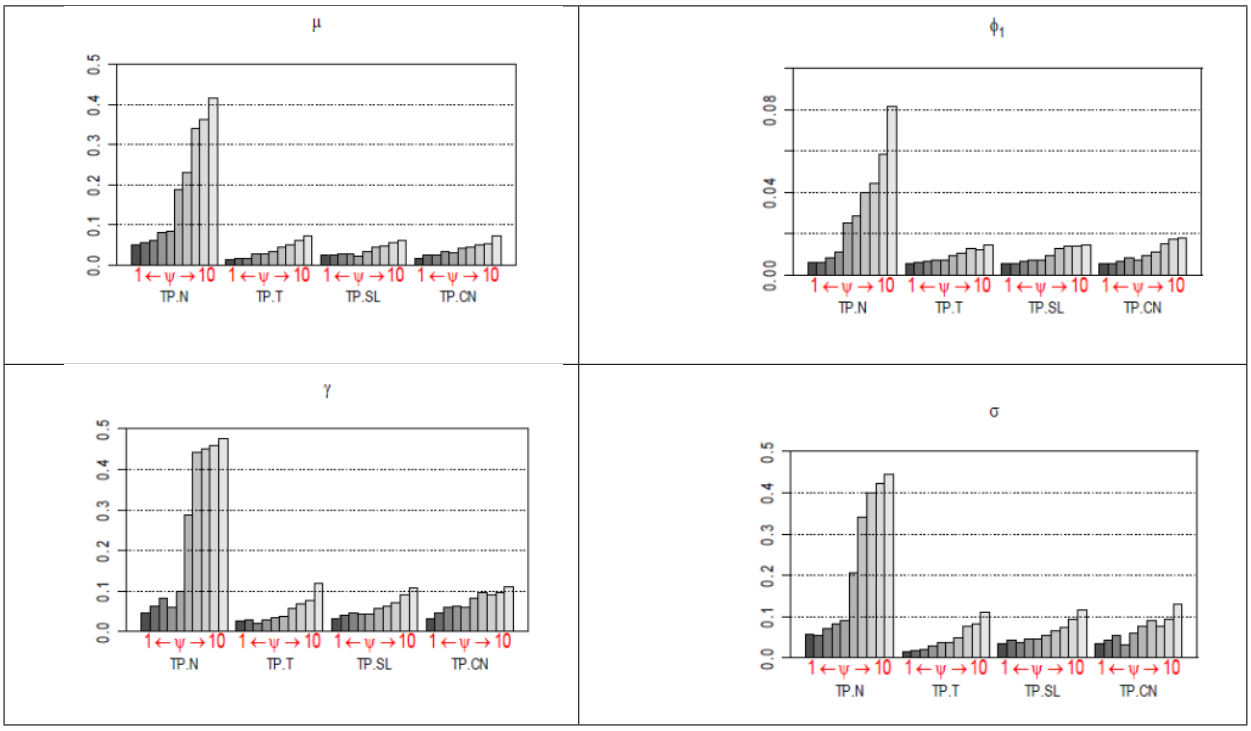
[7] Branco, M. D., Dey, D. K. (2001). A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *Journal of MultivariateAnalysis*, 79: 99–113

[8] Baricz, A. 2010. Turn type inequalities for some probability density functions. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 47 (2):175–89.

[9] Barndorff-Nielsen, O. 1997. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling.Scandinavian Journal of Statistics 24 (1):1–13.

[10] Barndorff-Nielsen, O., and C. Halgreen. 1977. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions. Zeitschrift f€ur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete 38 (4):309–11.

[11] Brockwell, P. J., and R. A. Davis. 2002. Introduction to time series and forecasting. 2nd ed. NewYork: Springer.



شکل ۱: میانگین مونت کارلو تغییرات نسبی براوردهای $\varphi_1, \mu, \sigma, \gamma$ مدل TP-SMN-AR

[12] Browne, R. P., and P. D. McNicholas. 2015. A mixture of generalized hyperbolic distributions.Canadian Journal of Statistics 43 (2):176–98.
[13] Christmas, J., and R. Everson. 2011. Robust autoregression: Student-t innovations using variational bayes. IEEE Transactions on Signal Processing 59 (1):48–57.
[14] Contreras-Reyes, J. E. 2016. Analyzing fish condition factor index through skew-Gaussian information theory quantifiers. Fluctuation and Noise Letters 15 (2):1650013.
[15] Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm.Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological, 39:1–22
[16] de Leeuw, J., and K. Lange. 2009. Sharp quadratic majorization in one dimension. Computational Statistics & Data Analysis 53 (7):2471–84.
[17] Forbes, F., and D. Wraith. 2014. A new family of multivariate heavy-tailed distributions with variable marginal amounts of tail weight: Application to robust clustering. Statistics and Computing 24 (6):971–84.
[18] Good, I. J. 1953. The population frequencies of species and the estimation of population parameters. Biometrika 40 (3/4):237–60.
[19] Hwang, S. Y., J. S. Baek, J. A. Park, and M. S. Choi. 2010. Explosive volatilities for threshold-GARCH processes generated by asymmetric innovations. Statistics & Probability Letters 80 (1):26–33.
[20] Hwang, S. Y., and I. V. Basawa. 2004. Stationarity and moment structure for box-cox transformedthreshold GARCH (1,1) processes. Statistics & Probability Letters 68 (3):209–20.
[21] Hwang, S. Y., and T. Y. Kim. 2004. Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with application to test for ARCH structure. Stochastic Processes and their Applications 110 (2):295–314.
[22] Janacek, G. J., and A. L. Swift. 1990. A class of models for non-normal time series. Journal of Time Series Analysis 11 (1):19–31.
[23] Jørgensen, B. 1982. Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution. NewYork, NY: Springer-Verlag.
[24] Labra, F. V., Garay, A. M., Lachos, V. H., Ortega, E. M. M. (2012). Estimation and diagnostics for heteroscedastic nonlinear regression models based on scale mixtures of skew-normal distributions. Journal of Statistical Planning and Inference, 142: 2149–2165.
[25] Li, W. K., and A. I. Mcleod. 1988. ARMA modeling with non-Gaussian innovations. Journal ofTime Series Analysis 9 (2):155–68.
[26] Luethi, D., and W. Breymann. 2016. ghyp: A package on the generalized hyperbolic distribution and its special cases. URL-https://cran.rproject.org/web/packages/ghyp/index.html, R package version 1.5.7.
[27] Maleki, M., and R. B. Arellano-Valle. 2017. Maximum a-posteriori estimation of autoregressive processes based on finite mixtures of scale-mixtures of skew-normal distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation 87 (6):1061–83.
[28] Maleki, M., R. B. Arellano-Valle, D. K. Dey, M. R. Mahmoudi, and S. M. Jalali. 2017. A Bayesian approach to robust skewed autoregressive process. Calcutta Statistical Association Bulletin 69 (2):165–82.
[29] Maleki, M., and M. R. Mahmoudi. 2017. Two-pieces location-scale distributions based on Scale mixtures of normal family. Communication in Statistics - Theory and Methods 46 (24): 12356–69.
[30] Maleki, M., and A. R. Nematollahi. 2017a. Autoregressive models with mixture of scale mixtures of gaussian innovations. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science 41(4):1099–107.

[31] Maleki, M., and A. R. Nematollahi. 2017b. Bayesian approach to epsilon-skew-normal family. Communication in Statistics - Theory and Methods 46 (15):7546–61.
[32] Maleki, M., D. Wraith, and R. B. Arellano-Valle. 2018a. Robust finite mixture modeling of multivariate unrestricted skew-normal generalized hyperbolic distributions. Statistics and Computing. doi:10.1007/s11222-018-9815-5.
[33] Maleki, M., D. Wraith, and R. B. Arellano-Valle. 2018b. A flexible class of parametric distributions for Bayesian linear mixed models. Test. doi:10.1007/s11749-018-0590-6.
[34] Meng, X., Rubin, D. B. (1993). Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework.Biometrika, 80: 267–278.